

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Федеральное государственное
образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»

Е. Р. Милютин

ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Часть 1

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

СПб ГУТ)))

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2014**

УДК 621.372.2(078.5)

ББК 22.313я73

M61

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой электроники
и оптической связи Государственного университета
аэрокосмического приборостроения *С. В. Кулаков*,
кандидат технических наук, профессор кафедры радиосистем
и обработки сигналов *В. Э. Гуревич*

*Утверждено
редакционно-издательским советом СПбГУТ
в качестве учебного пособия*

Милютин, Е. Р.

M61 Техническая электродинамика. Часть 1 : учебное пособие / Е. Р. Милютин ; СПбГУТ. – СПб., 2014. – 220 с.

ISBN 978-5-89160-115-4

Излагаются разделы технической электродинамики, входящие в учебные программы ряда дисциплин высших учебных заведений Министерства связи и массовых коммуникаций.

Рассматриваются вопросы излучения электромагнитных волн, волновые процессы на границе раздела сред, а также особенности распространения волн в направляющих системах.

Предназначено для подготовки бакалавров по направлениям 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» (радиопрофили) и 11.03.01 «Радиотехника», 11.03.03 «Конструирование и технология электронных средств». Пособие может быть полезно для студентов, проходящих обучение по другим направлениям связных специальностей и радиотехники, а также для студентов вечерней и заочной форм обучения.

**УДК 621.372.2(078.5)
ББК 22.313я73**

ISBN 978-5-89160-115-4 © Милютин Е. Р., 2014

© Федеральное государственное образовательное
бюджетное учреждение высшего профессионального
образования «Санкт-Петербургский государственный
университет телекоммуникаций
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича», 2014

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ	6
ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ВВЕДЕНИЕ	8
Предмет изучения дисциплины	8
Краткий обзор развития дисциплины	11
ГЛАВА 1. ИСТОЧНИКИ И ВЕКТОРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.	
ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕД, В КОТОРЫХ СУЩЕСТВУЕТ	
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ	14
1.1. Источники электромагнитного поля	14
1.2. Векторы электромагнитного поля	16
1.3. Классификация сред	22
1.4. Графическое изображение полей. Поток и дивергенция (расходимость) вектора	24
1.5. Потенциальное поле. Градиент потенциала	28
1.6. Вихревое поле. Ротор вектора	30
ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ	
(УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА)	33
2.1. Первое уравнение	33
2.2. Второе уравнение	36
2.3. Третье и четвертое уравнения	38
2.4. Полная система уравнений Максвелла	40
2.5. Уравнения Максвелла для монохроматических полей	45
ГЛАВА 3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ	
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ	50
3.1. Постановка задачи	50
3.2. Границные условия для нормальных составляющих векторов	51
3.3. Границные условия для тангенциальных составляющих векторов	53
3.4. Границные условия на поверхности идеального проводника	57
ГЛАВА 4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ...	61
4.1. Физические основы баланса мощностей поля	61
4.2. Теорема Умова–Пойнинга	62
4.3. Баланс комплексных мощностей поля	65
ГЛАВА 5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА	71
5.1. Классификация задач электродинамики	71
5.2. Теоремы единственности решения задач электродинамики	72
5.3. Теорема единственности для внутренней задачи	72
5.4. Теорема единственности для внешней задачи	75
5.5. Волновые уравнения для векторов поля	76
5.6. Электродинамические потенциалы	78
5.7. Решение волнового уравнения для скалярного электродинамического потенциала	81

ГЛАВА 6. СТАТИЧЕСКИЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ	88
6.1. Статическое поле	88
6.2. Поле электрического диполя	89
6.3. Метод зеркальных отображений	91
6.4. Энергия электростатического поля	92
6.5. Стационарное поле	93
ГЛАВА 7. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН	97
7.1. Элементарные излучатели	97
7.2. Физическая картина излучения диполя Герца	98
7.3. Общие выражения для поля диполя Герца	99
7.4. Поле диполя в дальней зоне	102
7.5. Поле диполя в ближней зоне	107
7.6. Перестановочная двойственность уравнений Максвелла	107
7.7. Поле магнитного диполя в дальней зоне	109
7.8. Эквивалентность полей и поверхностных токов	111
7.9. Принцип Гюйгенса–Френеля. Поле элемента Гюйгенса	113
7.10. Лемма Лоренца. Теорема взаимности	117
7.11. Понятие о дифракции волн	119
ГЛАВА 8. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ БЕЗ ПОТЕРЬ ...	123
8.1. Однородная плоская волна	123
8.2. Поляризация волн	126
ГЛАВА 9. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД	130
9.1. Постановка задачи	130
9.2. Законы Снеллиуса	132
9.3. Коэффициенты отражения и прохождения (коэффициенты Френеля)	134
9.4. Поле над идеально проводящей поверхностью	138
9.5. Полное отражение от границы раздела двух диэлектриков	140
9.6. Полное прохождение волны из одной среды в другую	144
ГЛАВА 10. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С ПОТЕРЯМИ	148
10.1. Характеристики плоской волны в неограниченной среде с потерями	148
10.2. Падение плоской волны на границу среды с потерями. Приближенные граничные условия Леонтовича–Щукина	153
ГЛАВА 11. НАПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ И НАПРАВЛЯЕМЫЕ ВОЛНЫ ...	159
11.1. Классификация направляющих систем	159
11.2. Классификация направляемых волн	160
11.3. Волновые уравнения для продольных составляющих векторов напряженностей полей	163
11.4. Поперечные составляющие векторов напряженностей полей	165
11.4.1. Волна класса H	166
11.4.2. Волна класса E	167
11.4.3. Волна класса T	167

11.5. Параметры направляемых волн	170
11.5.1. Волны классов H и E	170
11.5.2. Волны класса T	174
11.6. Концепция парциальных волн	174
ГЛАВА 12. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД	176
12.1. Решение волновых уравнений для продольных составляющих полей	176
12.2. Спектр критических длин волн	180
12.3. Структура поля основной волны	182
12.4. Передача мощности по волноводу основной волной	185
12.5. Ослабление основной волны	187
12.6. Высшие типы волн	190
12.7. Возбуждение полей в волноводе	191
ГЛАВА 13. КРУГЛЫЙ ВОЛНОВОД	193
13.1. Решение волнового уравнения для продольных составляющих полей	193
13.2. Критические длины волн классов E и H	195
13.3. Структура полей	197
13.4. Особенности применения круглого волновода	199
ГЛАВА 14. ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ С Т-ВОЛНАМИ	202
14.1. Коаксиальная линия передачи	202
14.2. Симметричная двухпроводная линия	206
14.3. Полосковые линии	208
ГЛАВА 15. ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ	210
15.1. Построение объемных резонаторов	210
15.2. Свободные колебания в резонаторе	211
15.3. Вынужденные колебания в резонаторе	213
15.4. Добротность	214
15.5. Виды объемных резонаторов	216
Приложение	219
Список литературы	220

СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

- ЭМП – электромагнитное поле (поля)
ЭМВ – электромагнитная волна (волны)
ЭД – электродинамика
 \vec{E} – напряженность электрического поля, В/м
 \vec{D} – электрическая индукция или электрическое смещение, Кл/м²
 \vec{H} – напряженность магнитного поля, А/м
 \vec{B} – магнитная индукция, В δ /м² = Тл
 ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость
 ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость, Ф/м
 ϵ_0 – электрическая постоянная, Ф/м
 μ – относительная магнитная проницаемость
 μ_a – абсолютная магнитная проницаемость, Гн/м
 μ_0 – магнитная постоянная, Гн/м
 σ – удельная электрическая проводимость, См/м
 Z_c – характеристическое сопротивление, Ом
 Z_B – волновое сопротивление, Ом
 q_0 – единичный заряд, Кл
 ρ – объемная плотность зарядов, Кл/м³
 \vec{A} – векторный электродинамический потенциал, В δ /м
 Φ – скалярный электродинамический потенциал, В
 $\vec{\Pi}$ – вектор Пойнтинга, Вт/м²
 \vec{j} – плотность тока проводимости, А/м²

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано на основе лекций автора в Санкт-Петербургском государственном университете телекоммуникаций имени профессора М. А. Бонч-Бруевича. Содержание пособия определено учебной программой дисциплины «Техническая электродинамика» (ТЭД) для подготовки бакалавров по направлениям 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» (радиопрофили), 11.03.01 «Радиотехника» и 11.03.03 «Конструирование и технология электронных средств». Пособие может быть полезно для студентов, проходящих обучение по другим направлениям связных специальностей и радиотехники, а также для студентов вечерней и заочной форм обучения.

Дисциплина ТЭД базируется на ранее изучаемых студентами дисциплинах «Физика», «Высшая математика», «Теория линейных электрических цепей» и является, в свою очередь, основой для последующих дисциплин «Распространение радиоволн и антенно-фидерные устройства», «Квантовые приборы СВЧ» и ряда других.

Дисциплина ТЭД, по сути, состоит из двух частей, первая включает общие вопросы теории электромагнитного поля, относящиеся к волнам как в различных средах, так и в направляющих системах, во второй части на основе результатов, полученных в первой части, изучаются линейные устройства СВЧ.

Данное учебное пособие посвящено первой части дисциплины ТЭД, содержание которой можно укрупненно представить в виде трех тем: основные уравнения электродинамики и сопутствующие им вопросы; излучение электромагнитных волн и их поведение на границе раздела сред; особенности существования волн в направляющих системах.

Поскольку при чтении лекций, с одной стороны, желательно рассмотреть все вопросы, входящие в учебную программу, а с другой – ограничение времени, отпущенного на лекции, делает реализацию такого желания на практике затруднительным, то неизбежно некоторое, в известной степени субъективное, распределение объема лекционного материала по темам, что и нашло свое отражение в пособии. Кроме того, с учетом специфики учебных заведений Министерства связи и массовых коммуникаций в пособие включен небольшой раздел по статическим и стационарным электромагнитным полям, необходимый для понимания ряда конкретных разделов дисциплин, следующих далее по учебному плану.

Разделение материала пособия на главы указывает лишь последовательность его изложения и не означает, что содержание каждой главы укладывается во временные границы академических часов одной лекции.

Пособие призвано облегчить студентам понимание сложных процессов, происходящих в электромагнитном поле, и поэтому основное внимание обращено на физику явлений. Более подробное изложение вопросов, рассмотренных в пособии, можно найти в литературе, список которой приводится.

Для лучшего усвоения материала после каждой главы имеются вопросы для самопроверки знаний. В приложении приводятся основные дифференциальные операции, использованные в тексте пособия.

В пособии единообразна нумерация формул, рисунков и таблиц, в которой первая цифра означает номер главы, вторая – номер раздела главы, и последняя – порядковый номер внутри раздела.

Учебное пособие было написано при активной поддержке профессора О. В. Воробьева, в связи с чем автор выражает ему искреннюю признательность.

Любые замечания по содержанию пособия будут приняты с благодарностью.

ВВЕДЕНИЕ

Предмет изучения дисциплины

В технике телекоммуникаций четко прослеживается тенденция к переходу на высокие и сверхвысокие частоты. Действительно, в начальный период развития радиосвязи речь шла о километровых и более длинных волнах, тогда как в настоящее время широко используются дециметровые, сантиметровые и миллиметровые диапазоны волн. Более того, быстрыми темпами осваивается оптический диапазон, что стало возможным с момента создания лазеров. В связи с этой тенденцией изменилось соотношение между длиной волны и линейными размерами аппаратуры связи. Если раньше используемая длина волны была больше линейных размеров аппаратуры и для расчетов последней можно было применять сравнительно простые методы теории электрических цепей, то в современных сверхвысокочастотных (СВЧ) устройствах, линейные размеры которых заметно превосходят длину рабочей волны, на передний план выступает волновой характер электромагнитных процессов и объектом исследования становится электромагнитное поле (ЭМП). По определению Комитета технической терминологии Академии наук «электромагнитное поле есть особый вид материи, отличающийся непрерывным распределением в пространстве (электромагнитные волны, поле заряженных частиц) и обнаруживающий дискретность структуры (фотоны), характеризующийся в свободном состоянии способностью распространения в вакууме (при отсутствии сильных гравитационных полей) со скоростью, близкой к $3 \cdot 10^8$ м/с, оказывающий на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их скорости».

Действительно, с одной стороны, ЭМП и вещество обладают общими свойствами, такими как энергия, масса, количество движения (импульс), т. е. набором универсальных свойств. С другой стороны, уникальные свойства ЭМП проявляются в силовом действии на заряженную частицу, в двойственной природе ЭМП (волновой и квантовой), в способности ЭМП существовать в виде электромагнитной волны (ЭМВ) и ряде других. Поэтому ЭМП – особая форма материи.

Знание теории ЭМП позволяет изучать процессы излучения, распространения и приема радиоволн в любой среде, принципы действия и конструкцию элементов современных СВЧ устройств телекоммуникационных систем. Эти вопросы образуют дисциплины «Антенно-фидерные устройства», «Распространение радиоволн», «Устройства СВЧ», для которых теория ЭМП является основой.

Практика показывает, что задачи, решаемые этими дисциплинами, могут быть проанализированы в рамках классической теории поля (макроскопической электродинамики, в которой не рассматривается атомная структура), созданной Максвеллом и оперирующей с усредненными значениями электромагнитных величин. ЭМП в этой теории предполагается непрерывно распределенным в пространстве и с течением времени распространяющимся в виде ЭМВ, поэтому наряду с полем предметом изучения дисциплины являются и волны.

Использование понятия «поля» связано с тем, что в каждой точке пространства необходимо знать значения изменяющихся во времени электрических и магнитных величин, определяющих это поле. Аналогичным образом определяют поле температур, давления и т. п.

Под волнами или волновым процессом понимают перемещение ЭМП в пространстве, сопровождающееся переносом энергии поля. Условно часть спектра электромагнитных колебаний в диапазоне частот от 10^{-3} до 10^{17} Гц называют радиоволнами. Классификация радиоволн на основе декадного принципа разделения на диапазоны по частоте (длине волны) согласно Рекомендации Международного союза электросвязи (МСЭ) (International Telecommunication Union – ITU) представлена в табл. В1.1. В табл. В1.2 приведены диапазоны оптических волн (частот), не вошедшие в классификацию МСЭ, но которые, с появлением лазеров, также широко применяются для передачи информации.

Кроме того, в зарубежной литературе часто подразделяют диапазон частот, используемый для радиолокации и космической связи, ввиду его важности, на отдельные полосы (табл. В1.3).

Исторически сложилось так, что вопросы, связанные с распространением радиоволн в искусственно созданных устройствах (волноводах, коаксиальных линиях и т. п.), так называемых направляемых волн, рассматриваются в дисциплине «Техническая электродинамика», тогда как процессы распространения волн в естественных средах (космическое пространство, атмосфера Земли и т. п.), известных как свободно распространяющиеся волны, в дисциплине «Антенны и распространение радиоволн» и ряде других.

В связи с этим в настоящем учебном пособии включены только темы, посвященные изучению основ теории ЭМП, излучению ЭМВ и волновым процессам на границе раздела сред, а также распространению ЭМВ в направляющих системах, и еще несколько небольших разделов, обусловленных спецификой связных специальностей.

Таблица В1.1

Классификация радиоспектра

По длине волн			По частоте				
Диапазон волн	Длина волны, м	Метрическое подразделение	Номер полосы, №*	Частота, Гц	Название диапазона частот	Сокращение	
						русское	международное
Сверхдлинные (СДВ)	100 000... 10 000	Мириаметровые	4	$3 \cdot 10^3 \dots 3 \cdot 10^4$	Очень низкие частоты	ОНЧ	VLF
Длинные (ДВ)	10 000... 1000	Километровые	5	$3 \cdot 10^4 \dots 3 \cdot 10^5$	Низкие частоты	НЧ	LF
Средние (СВ)	1000... 100	Гектометровые	6	$3 \cdot 10^5 \dots 3 \cdot 10^6$	Средние частоты	СЧ	MF
Короткие (КВ)	100... 10	Декаметровые	7	$3 \cdot 10^6 \dots 3 \cdot 10^7$	Высокие частоты	ВЧ	HF
Ультракороткие (УКВ)	10...1	Метровые	8	$3 \cdot 10^7 \dots 3 \cdot 10^8$	Очень высокие частоты	ОВЧ	VHF
	1...0,1	Дециметровые	9	$3 \cdot 10^8 \dots 3 \cdot 10^9$	Ультравысокие частоты	УВЧ	UHF
	0,1...0,01	Сантиметровые	10	$3 \cdot 10^9 \dots 3 \cdot 10^{10}$	Сверхвысокие частоты	СВЧ	SHF
	0,01...0,001	Миллиметровые	11	$3 \cdot 10^{10} \dots 3 \cdot 10^{11}$	Крайне высокие частоты	КВЧ	EHF
	0,001... 0,0001	Субмиллиметровые	12	$3 \cdot 10^{11} \dots 3 \cdot 10^{12}$	Гипервысокие частоты	ГВЧ	HHF

* Номер полосы N определяет диапазон частот $3 \cdot 10^N \dots 3 \cdot 10^{N+1}$, Гц.

Таблица В1.2

Диапазоны оптических волн (частот), не вошедшие в классификацию МСЭ

Название диапазона	Длина волны, м	Частота, Гц
Дальний инфракрасный (ИК) диапазон	$2 \cdot 10^{-5} \dots 10^{-4}$	$(15 \dots 3) \cdot 10^{12}$
Средний ИК диапазон	$1,5 \cdot 10^{-6} \dots 2 \cdot 10^{-5}$	$(200 \dots 15) \cdot 10^{12}$
Ближний ИК диапазон	$7,5 \cdot 10^{-7} \dots 1,5 \cdot 10^{-6}$	$(4 \dots 2) \cdot 10^{14}$
Видимый свет	$(4 \dots 7,5) \cdot 10^{-7}$	$(7,5 \dots 4) \cdot 10^{14}$
Ультрафиолетовый диапазон	$10^{-8} \dots 4 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{16} \dots 7,5 \cdot 10^{14}$

Таблица В1.3

Диапазон частот для радиолокации и космической связи

Название полосы	L	S	C	X	Ku	K	Ka	V	W	Миллиметровая полоса
Диапазон частот, ГГц	1–2	2–4	4–8	8–12	12–18	18–27	27–40	40–75	75–110	110–300

Краткий обзор развития дисциплины

Первые сведения об электричестве содержатся в трудах греческого философа Фалеса Милетского (V в. до н. э.), которому было известно свойство наэлектризованного трением куска янтаря притягивать легкие тела.

В Древней Греции было известно также, что железо притягивается железной рудой. Это явление получило название «магнетизм», вероятно, от названия области Магнезия, где были большие залежи этой руды.

Такие ограниченные знания об электрических и магнитных явлениях существовали до XVIII в. В 1785 г. Кулон открыл первый количественный закон в теории электрических явлений. Он установил, что сила взаимодействия заряженных тел прямо пропорциональна их зарядам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Позднее Кулон получил аналогичный закон и для магнитных масс.

Замечательные экспериментальные данные были получены в 1820 г., когда Эрстед открыл влияние электрического тока на магнитную стрелку, затем Ампер показал взаимодействие токов и, наконец, опыты Био и Савара установили количественное соотношение для электрического и магнитного взаимодействия.

Можно считать, что в 1820 г. были заложены основы учения о взаимодействии токов и магнитов. «Электродинамика» – так назвал эту науку Ампер.

Наряду с обнаружением воздействия электрического тока на магнитные явления возникла и обратная задача: установление действия магнитных явлений на электрический процесс. Эту задачу в 1831 г. после многолетних опытов решил Фарадей, открыв явление электромагнитной индукции.

Выдающуюся, революционную роль в создании теории ЭМП в 60–70-х гг. XIX столетия сыграл Д. К. Максвелл. Он объяснил все ранее известные экспериментальные факты и теоретические законы и предсказал новые закономерности в поведении ЭМП. Созданная Максвеллом теория ЭМП нашла математическое отражение в системе дифференциальных уравнений, характеризующих взаимосвязь электрических и магнитных величин и их связь с источниками ЭМП.

Максвелл, основываясь на своих теоретических соображениях, ввел понятие о токе смещения и показал, что ток смещения, а по сути изменение электрического поля во времени, создает вокруг себя магнитное поле, так же как хорошо известный ранее ток проводимости. Таким образом, переменное электрическое поле создает переменное магнитное поле, а изменяющееся магнитное – переменное электрическое и т. д.

Поэтому в области пространства вдали от источников поля (зарядов и токов) может существовать переменное ЭМП в виде ЭМВ, причем из уравнений, полученных Максвеллом и описывающих ЭМВ, следовало, что в свободном пространстве (вакууме) оно распространяется со скоростью света, и отсюда вытекало, что свет имеет электромагнитную природу.

Максвелл не обладал экспериментальными данными, подтверждающими созданную им теорию ЭМП, поэтому она не нашла широкого признания при его жизни. Решающее слово о правоте этой теории, получившей название «классической теории электродинамики», было сказано целой серией последующих работ.

1. В 1886–1888 гг. Г. Герц экспериментально показал существование тока смещения и ЭМВ, а также то, что ЭМВ преломляются, отражаются, поляризуются, т. е. ведут себя как световые волны.

2. Из теории Максвелла следовало, что при падении ЭМВ на поверхность какого-либо тела в результате взаимодействия ЭМП и вещества возникает давление. П. Н. Лебедев в 1900 г. экспериментально доказал, что давление существует.

3. Практическое использование ЭМВ было начато после изобретения радио А. С. Поповым (1895) и работ Г. Маркони. Их деятельность привела к тому, что ни у кого уже не оставалось сомнений в существовании ЭМП, в его реальности, и главное, в его необходимости для развития общества.

В конце XIX в. были открыты первые элементарные частицы – электроны, что навело на мысль о дискретной структуре ЭМП, которая не отражается в уравнениях классической электродинамики. Поэтому Г. А. Ло-

ренц создал электронную теорию ЭМП, причем при усреднении входящих в нее величин получались уравнения Максвелла, и, таким образом, были определены границы применения классической теории, которая, подчеркнем это еще раз, опирается на объективные законы ЭМП и позволяет получить решение насущных практических задач техники.

Дальнейшее развитие теория ЭМП применительно к телекоммуникационным приложениям получила в трудах многих выдающихся отечественных и зарубежных ученых.

В настоящем учебном пособии по дисциплине «Техническая электродинамика» все вопросы будут рассматриваться в рамках классической теории электродинамики.

ГЛАВА 1. ИСТОЧНИКИ И ВЕКТОРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕД, В КОТОРЫХ СУЩЕСТВУЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

1.1. Источники электромагнитного поля

ЭМП представляет собой два взаимосвязанных поля: электрическое и магнитное. Разделение единого ЭМП на электрическое и магнитное поля носит относительный характер и зависит от выбранной системы отсчета.

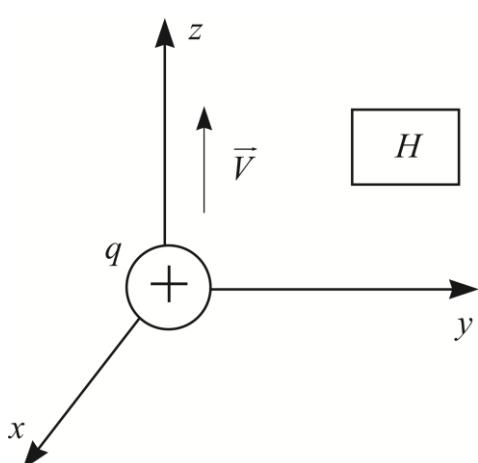


Рис. 1.1.1

Действительно, если имеется некоторый неподвижный электрический заряд q в данной (в нашем случае прямоугольной) системе координат (рис. 1.1.1) то наблюдатель (Н) обнаружит только электрическое поле, но если заряд начнет равномерно и прямолинейно перемещаться, то наблюдатель выявит и электрическое и магнитное поля.

Таким образом, источником электрического поля является неподвижный электрический заряд, тогда как движущиеся заряды (ток) создают ЭМП.

Заметим, что заряд не является веществом, а представляет свойство элементарных частиц вещества. Заряды делятся на свободные и связанные. Связанные заряды входят в состав электрически нейтральных молекул. Свободные заряды могут перемещаться на определенные расстояния, создавая ток.

В простейшем случае свободные заряды считают точечными, понимая под этим такие заряженные тела, размеры которых гораздо меньше расстояний между ними. Если же это условие не выполняется, макроскопическое распределение свободного заряда в каждой точке тела характеризуется объемной плотностью заряда, определяемой как заряд, приходящийся на единицу объема ΔV в окрестностях этой точки, и поскольку линейные размеры объема ΔV чрезвычайно малы, то все параметры среды в пределах малого объема можно считать постоянными, и, следовательно, заряд Δq распределен равномерно по объему и объемная плотность заряда будет записываться как

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \text{ Кл.} \quad (1.1.1)$$

Тогда величина полного заряда, содержащегося во всем объеме,

$$q = \int_V \rho dV, \text{ Кл.}$$

Если $\rho = 0$, то это не означает, что вблизи выбранной точки нет движущихся свободных зарядов. Например, в металле сумма отрицательных зарядов свободных электронов может быть равна сумме положительных зарядов ионов, из-за чего $\Delta q = 0$ и $\rho = 0$, но сами заряды существуют.

Если же заряды распределены по поверхности или по контуру, то соответственно имеем поверхностную или линейную плотности заряда:

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}, \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}. \quad (1.1.2)$$

$$\rho_L = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta L}, \frac{\text{Кл}}{\text{м}}. \quad (1.1.3)$$

Как уже отмечалось, упорядоченное движение свободных электрических зарядов, всегда сопровождаемое появлением магнитного поля, есть электрический ток, который подразделяется на токи проводимости и переноса. Ток проводимости, возникающий под действием электрического поля, имеет место в веществах, обладающих электропроводностью (например, металлы), а ток переноса – в веществах без оной (например, между электродами в сильно разряженном газе). За направление электрического тока принимается направление движения положительных зарядов. Величиной, определяющей электрический ток в каждой точке поверхности (например, сечения проводника), является вектор плотности тока проводимости \vec{j} , совпадающий по направлению с направлением тока, а численно равный

$$j = \lim_{\Delta S_\perp \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S_\perp} = \frac{dI}{dS_\perp}, \frac{\text{А}}{\text{м}^2},$$

где ΔS_\perp – проекция элементарной площадки ΔS на плоскость, перпендикулярную направлению тока I .

Отсюда ток, протекающий через элементарную площадку ΔS (рис. 1.1.2), будет

$$\Delta I = j\Delta S_\perp = j\Delta S \cos \alpha,$$

где α – угол между \vec{j} и внешней нормалью к площадке ΔS .

Ориентацию элементарной площадки ΔS в пространстве принято определять направлением орта (единичного вектора) \vec{n}° , нормального к ΔS и называемого положительной нормалью. В этом случае и саму площадку можно отобразить вектором

$$d\vec{S} = \vec{n}^\circ dS.$$

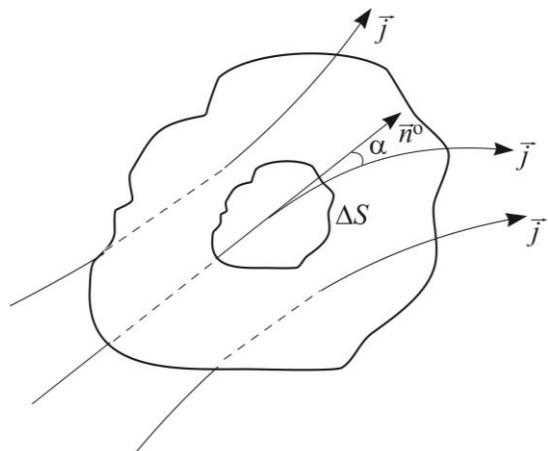


Рис. 1.1.2

1.2. Векторы электромагнитного поля

ЭМП является векторным полем, изменяющимся во времени и в пространстве. Поэтому определение ЭМП в конкретный момент времени в данной области пространства сводится к определению величины и направления каждого вектора, характеризующего ЭМП, в любой точке области.

Действие и электрических и магнитных полей проявляется в виде механического воздействия на заряженные частицы, которое характеризуется силовыми векторами.

Рассмотрим вначале поле в вакууме (свободном пространстве). Для описания силового действия ЭМП в этом случае достаточно двух векторов \vec{E} и \vec{B} , называемых соответственно напряженностью электрического поля и магнитной индукцией. Они отражают двойственную природу ЭМП и устанавливают как его взаимодействие с зарядами и токами, так и его волновой характер.

Напряженность электрического поля определяют как силу, с которой электрическое поле действует на единичный, точечный, положительный заряд q_0 :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_3}{q_0}, \left[\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}} \right], \quad (1.2.1)$$

здесь \vec{F}_3 – сила электрического поля в ньютонах, а заряд q_0 (Кулон) должен быть настолько мал, чтобы не учитывать перераспределение зарядов, создающих данное поле, поэтому точнее можно записать

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_3}{q_0},$$

где символ $q_0 \rightarrow 0$ означает, что уменьшается не только величина заряда, но и размеры тела, на котором распределен заряд.

Магнитная индукция численно равна силе, с которой магнитное поле действует на единичный точечный, положительный заряд, движущийся в этом поле с постоянной скоростью v :

$$B = \frac{F_m}{q_0 v} \left[\frac{\text{Н}}{\text{Кл} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \text{Тл} \right]. \quad (1.2.2)$$

Напомним определение некоторых используемых единиц. Вебер (Вб) – магнитный поток, при убывании которого до нуля в сцепленном с ним контуре сопротивлением в 1 Ом проходит заряд в 1 Кл (кулон). Тесла (Тл) – магнитная индукция, при которой магнитный поток сквозь поперечное сечение проводника с площадью в 1 м^2 равен 1 Вб (Вебер).

В векторной форме сила магнитного поля (называемая также силой Лоренца) записывается в виде

$$\vec{F}_M = q_0 [\vec{v}, \vec{B}]. \quad (1.2.3)$$

Прямые скобки в формуле (1.2.3) означают векторное произведение и отсюда следует, что вектор \vec{F}_M перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы \vec{v} и \vec{B} (рис. 1.2.1).

Численно сила магнитного поля равна $F_M = q_0 v B \sin(\vec{v}, \vec{B}) = q_0 v B \sin \alpha$. Очевидно, что максимального значения сила F_M достигает при направлении перемещения заряда перпендикулярно направлению магнитного поля. Таким образом, суммарное силовое действие ЭМП на движущуюся со скоростью v частицу с зарядом q_0 будет:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_M = q_0 \vec{E} + q_0 [\vec{v}, \vec{B}]. \quad (1.2.4)$$

В любой другой среде, кроме вакуума, происходит взаимодействие ЭМП с молекулами и атомами вещества. В результате в веществе возникает собственное поле, которое накладывается на первичное, внешнее поле.

Рассмотрим действие электрических и магнитных полей на вещество более подробно.

Под влиянием электрического поля вещество (диэлектрик) поляризуется. Поляризация представляет собой сложный процесс, происходящий на уровне атомной структуры вещества. Известно, что соединения атомов вещества образуют молекулы, которые подразделяются на полярные и неполярные.

Полярную молекулу можно отобразить в виде электрического диполя, представляющего систему из двух равных по величине и противоположных по знаку элементарных зарядов, находящихся на малом расстоянии друг от друга (рис. 1.2.2).

Диполи характеризуются дипольным моментом \vec{p} – вектором, численно равным произведению величины заряда на расстояние между зарядами и направленным от отрицательного заряда к положительному:

$$\vec{p} = q_0 l \vec{l}^\circ = q_0 \vec{l}, \text{ Кл} \cdot \text{м.} \quad (1.2.5)$$

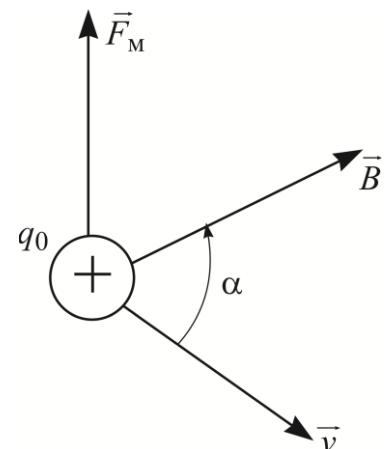


Рис. 1.2.1

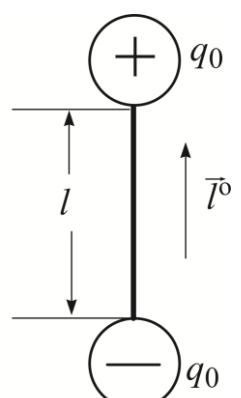


Рис. 1.2.2

Суммарный дипольный момент объема ΔV вещества равен геометрической сумме дипольных моментов в этом объеме и характеризуется вектором поляризованности

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}, \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}. \quad (1.2.6)$$

При отсутствии внешнего электрического поля диполи располагаются в объеме произвольно, и в итоге $\vec{P} = 0$ (рис. 1.2.3, а). Внешнее электрическое поле действует на диполь так, чтобы он был ориентирован по полю (рис. 1.2.3, б). Этот процесс, называемый ориентационной поляризацией, типичен для веществ с полярными молекулами и приводит к тому, что суммарный дипольный момент становится не равным нулю ($\vec{P} \neq 0$).

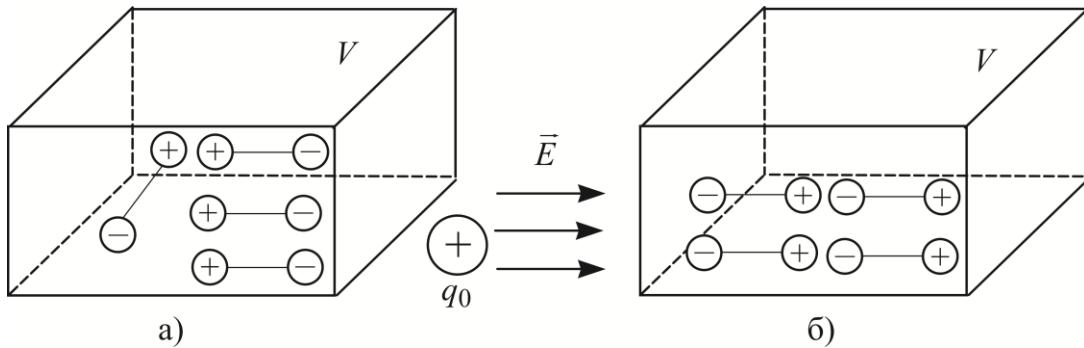


Рис. 1.2.3

Неполярные молекулы не обладают собственным дипольным моментом, но под действием внешнего электрического поля в молекуле перераспределяется отрицательный заряд, и у нее появляется дипольный момент. Этот процесс называется электронной поляризацией, а затем следует, как и в предыдущем случае, ориентационная поляризация.

Ориентационная и электронная поляризации являются основными для газовых и жидких сред, для твердых сред наблюдается ряд особенностей.

При воздействии слабых внешних электрических полей, характерных для техники связи, величину наведенного суммарного дипольного момента в веществе можно считать пропорциональной вектору \vec{E} :

$$\vec{P} = \epsilon_0 k_3 \vec{E}, \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}, \quad (1.2.7)$$

где k_3 – безразмерный параметр, называемый диэлектрической восприимчивостью вещества и характеризующий свойства среды поляризоваться; ϵ_0 – электрическая постоянная, ее величина определяется выбором системы единиц. В системе СИ $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$, Ф/м .

Поскольку для вакуума $k_0 = 0$, то ϵ_0 представляет абсолютную диэлектрическую проницаемость вакуума.

Таким образом, при анализе электрического поля в диэлектрике удобно ввести вектор \vec{D} , называемый вектором электрической индукции или электрического смещения, учитывающий суммарное действие внешнего электрического поля и собственного (наведенного) электрического поля вещества:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + k_0) \vec{E} = \epsilon_a \vec{E}, \frac{K_L}{M^2}, \quad (1.2.8)$$

где $\epsilon_a = \epsilon_0 (1 + k_0)$ – абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества, Ф/м .

Для характеристики диэлектрических свойств вещества используют также величину $\epsilon = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_0} = 1 + k_0$ – относительную диэлектрическую проницаемость среды. Введение вектора \vec{D} , как будет показано далее, заметно упрощает описание электрических полей в любой среде, так как поля, созданные одинаковыми свободными зарядами в этих средах, характеризуются одними и теми же значениями вектора \vec{D} .

Обратимся теперь к действию электрического поля на проводящее вещество, которое, в отличие от диэлектрика, содержит не связанные, а свободные заряды.

В результате силового действия электрического поля (1.2.1) движение свободных зарядов становится упорядоченным, т. е. возникает электрический ток. Характеристикой тока, как отмечалось в разд. 1.1, является вектор плотности тока, связанный в проводящих средах линейной зависимостью с внешним электрическим полем

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \frac{A}{M^2}, \quad (1.2.9)$$

где σ – удельная электрическая проводимость или электропроводность, $\frac{См}{M}$.

Следовательно, проводимость среды определяется величиной коэффициента пропорциональности σ между \vec{j} и \vec{E} . Соотношение (1.2.9) представляет закон Ома в дифференциальной форме, т. е. характеризует проводящие свойства среды в данной точке. Рассмотрим для доказательства этого малый цилиндр из проводящего вещества, к которому приложено внешнее электрическое поле напряженностью \vec{E} (рис. 1.2.4). Умножив обе части уравнения (1.2.9) на ΔS , а правую

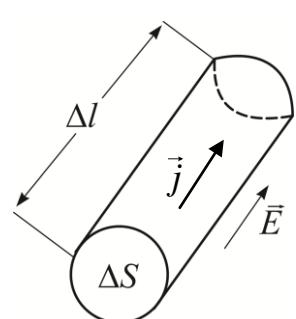


Рис. 1.2.4

часть, кроме того, умножив и разделив на Δl , численно имеем

$$j\Delta S = \sigma \Delta E \frac{dl}{dl}$$

или

$$\Delta I = G \Delta u,$$

где $G = \frac{\sigma \Delta s}{\Delta l}$ – проводимость вещества цилиндра; $\Delta I = j\Delta S$; $\Delta u = E\Delta l$.

Отметим, что произведение jE есть мгновенная мощность джоулевых (тепловых) потерь на единицу объема:

$$\Delta P_{\text{п}} = \Delta u \Delta I = jE \Delta V, \text{ и отсюда } jE = \frac{\Delta P_{\text{п}}}{\Delta V}.$$

Что касается влияния магнитного поля на вещество, то под воздействием магнитного поля вещество намагничивается и в нем появляется внутреннее магнитное поле, которое накладывается на первичное, внешнее. Явление намагничивания, как и явление поляризации, связано с атомным строением вещества. В простейшем изложении это явление можно описать в следующей последовательности. Атомы и молекулы вещества обладают

магнитными моментами (рис. 1.2.5), которые в отсутствие внешнего магнитного поля направлены произвольно, так что магнитные поля отдельных атомов и молекул взаимно компенсируются и суммарный магнитный момент всего объема ΔV , представляющий геометрическую сумму моментов отдельных атомов, равен нулю:

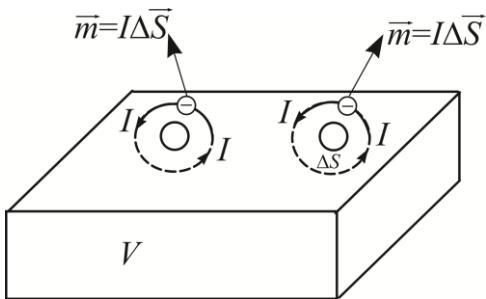


Рис. 1.2.5

$$\sum_{\Delta V} \vec{m}_i = 0.$$

Под действием внешнего магнитного поля, как было уже сказано, вещество намагничивается и возникает одинаковая ориентация отдельных магнитных моментов, в результате суммарный магнитный момент отличается от нуля $\left(\sum_{\Delta V} \vec{m}_i \neq 0 \right)$. Намагченность характеризуют вектором намагченности

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V}, \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Дополнительное магнитное поле в веществе может ослаблять или усиливать первичное поле. Если дополнительное поле незначительно ослабляет

внешнее, то это диамагнитная среда, если усиливает слабо или сильно, то это соответственно парамагнитная или ферромагнитная среда.

Обычно вместо вектора намагниченности \vec{M} вводят вектор напряженности магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - M, \frac{\text{А}}{\text{м}}, \quad (1.2.10)$$

где μ_0 – магнитная постоянная, зависящая от выбора системы единиц, в системе СИ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$.

Для слабых внешних магнитных полей, чаще всего встречающихся в задачах телекоммуникаций, вектор \vec{M} пропорционален вектору \vec{B} и ввиду линейности уравнения (1.2.10) пропорционален вектору \vec{H} :

$$\vec{M} \dots k_m \vec{H}, \quad (1.2.11)$$

где k_m – безразмерный параметр, называемый магнитной восприимчивостью среды.

Отсюда

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (1.2.12)$$

где $\mu_a = \mu_0 (1 + k_m)$ – абсолютная магнитная проницаемость среды.

Магнитная восприимчивость вакуума полагается равной нулю, поэтому μ_0 называется также абсолютной магнитной проницаемостью вакуума. Ис-

пользуют и относительную магнитную проницаемость $\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0} = 1 + k_m$. Для

диамагнетиков $\mu < 1$, для парамагнетиков $\mu = 1$ и для ферромагнетиков $\mu >> 1$.

Отметим, что постоянное магнитное поле не действует на свободные заряды проводника в отсутствие внешнего электрического поля, так как в этом случае скорость перемещения свободных зарядов в определенном направлении близка к нулю.

Итак, для характеристики ЭМП используют четыре векторные величины:

\vec{E} – напряженность электрического поля, $\frac{\text{В}}{\text{м}}$;

\vec{D} – электрическая индукция или электрическое смещение, $\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$;

\vec{H} – напряженность магнитного поля, $\frac{\text{А}}{\text{м}}$;

\vec{B} – магнитная индукция, $\frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = \text{Тл}$.

Напомним, что величину векторов \vec{E} и \vec{B} можно прямо измерить по силовому действию ЭМП на неподвижные и движущиеся заряды соответственно, а векторы \vec{D} и \vec{H} учитывают взаимодействие ЭМП и вещества.

Вектор \vec{E} зависит как от свободных, так и от связанных электрических зарядов, а вектор \vec{B} – как от электрических токов, обусловленных перемещением свободных зарядов, так и от элементарных токов в атомах вещества. Поэтому, чтобы не рассматривать связанные заряды и элементарные токи, и вводятся векторы \vec{D} и \vec{H} , и в уравнениях ЭМП остаются только свободные заряды и токи, вызванные ими.

1.3. Классификация сред

Между парами векторов \vec{E} и \vec{D} , \vec{H} и \vec{B} существуют, как показано в предыдущем разделе, зависимости, определяемые свойствами среды (поляризуемостью и намагниченностю), т. е., в конечном счете параметрами сред $\epsilon_a, \mu_a, \sigma$. По виду зависимостей производится классификация сред, в которых существует ЭМП.

Среды подразделяются на линейные и нелинейные. Линейными называются среды, в которых ни один из параметров $(\epsilon_a, \mu_a, \sigma)$ не зависит от величины действующих на вещество электрических и магнитных полей. В этом случае векторы внутри каждой пары $(\vec{D} \text{ и } \vec{E}, \vec{B} \text{ и } \vec{H})$ связаны линейной зависимостью. Нелинейными считаются среды, чьи параметры $\epsilon_a, \mu_a, \sigma$, или хотя бы один из них, зависят от величины электрических и магнитных полей, приложенных к веществу. Все реальные среды, в принципе, нелинейны, но при слабых полях, используемых в технике связи, их можно считать линейными. Есть, однако, среды, являющиеся нелинейными даже при слабых полях (например, ферриты). Далее будем рассматривать только линейные среды, которые в свою очередь подразделяются на однородные и неоднородные, изотропные и анизотропные.

Однородными являются среды с параметрами, не зависящими от координат, и, следовательно, свойства среды постоянны во всех ее точках. Неоднородными называются такие среды, у которых хотя бы один из параметров зависит от координат. В качестве примера неоднородной среды можно привести нижний слой атмосферы – тропосферу. Для линейной однородной среды зависимости имеют уже знакомый вид:

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad (1.2.8)$$

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (1.2.12)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (1.2.9)$$

Поскольку здесь параметры среды скалярные величины, векторы \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} , \vec{j} и \vec{E} коллинеарны, т. е. $\vec{D} \parallel \vec{E}$, $\vec{B} \parallel \vec{H}$, $\vec{j} \parallel \vec{E}$.

Для вакуума ($\sigma = 0$) имеем

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad (1.3.1)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (1.3.2)$$

Напомним еще раз, что значения ϵ_0 и μ_0 зависят от выбора системы единиц. Так, в гауссовой (СГС) системе единиц $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$, но основные уравнения ЭМП при этом приобретают сложный вид.

Изотропной называют среду, свойства которой одинаковы по разным направлениям, в анизотропных средах – не одинаковы. Для анизотропных параметры сред представляют тензоры (операторы):

$$\vec{D} = \vec{\epsilon}_a \vec{E}, \quad \vec{D} \not\parallel \vec{E}; \quad (1.3.3)$$

$$\vec{B} = \vec{\mu}_a \vec{H}, \quad \vec{B} \not\parallel \vec{H}. \quad (1.3.4)$$

Векторы \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} попарно между собой не параллельны, что объясняется тем, что вторичное поле в среде сдвинуто на некоторый угол (отличный от 0° и π) от направления первичного поля.

Тензоры ($\vec{\epsilon}_a$, $\vec{\mu}_a$) записываются в виде матрицы. Например, в прямоугольной системе координат:

$$\vec{\epsilon}_a = \begin{vmatrix} \epsilon_{a_{xx}} & \epsilon_{a_{xy}} & \epsilon_{a_{xz}} \\ \epsilon_{a_{yx}} & \epsilon_{a_{yy}} & \epsilon_{a_{yz}} \\ \epsilon_{a_{zx}} & \epsilon_{a_{zy}} & \epsilon_{a_{zz}} \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что в анизотропных средах каждая координатная составляющая векторов \vec{D} и \vec{B} зависит от всех трех составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} соответственно. К анизотропным средам относится, например, область атмосферы – ионосфера. Большинство диэлектриков принадлежит к линейным изотропным средам, которые, как правило, проявляют слабые магнитные свойства, и для них $\mu_a = \mu_0$.

Уравнения (1.2.8), (1.2.9) и (1.2.12) называются материальными уравнениями, поскольку они связывают векторы поля через параметры материальной среды.

Наиболее простой средой при решении задач ЭД является линейная однородная изотропная среда. Пусть в такой среде (диэлектрике с параметром ϵ_a) имеются два точечных заряда: q_{01} и q_{02} (рис. 1.3.1).

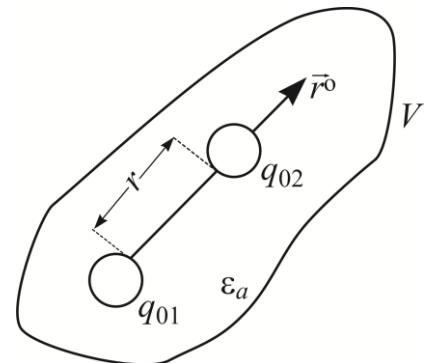


Рис. 1.3.1

Тогда, согласно закону Кулона, сила, с которой точечный заряд q_{01} действует на заряд q_{02} , будет

$$\vec{F}_3 = \vec{r}^\circ \frac{q_{01}q_{02}}{4\pi\epsilon_a r^2},$$

и так как $\vec{E} = \frac{\vec{F}_3}{q_{02}}$, то напряженность электрического поля, создаваемого зарядом q_{01} ,

$$\vec{E} = \vec{r}^\circ \frac{q_{01}}{4\pi\epsilon_a r^2}$$

и

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E} = \vec{r}^\circ \frac{q_{01}}{4\pi r^2}.$$

Следовательно, вектор \vec{D} в таких средах, как указывалось ранее, не зависит от ϵ_a , т. е. имеет одинаковое значение в средах с различными значениями диэлектрической проницаемости и поэтому не зависит от связанных зарядов вещества. Подчеркнем, что этот вывод справедлив только для однородных изотропных сред при одинаковом распределении свободных зарядов.

1.4. Графическое изображение полей. Поток и дивергенция (расходимость) вектора

По определению ЭМП есть векторное поле, изменяющееся в пространстве и времени. В любой момент времени каждой точке пространства соответствуют определенные значения векторов поля. Структура векторного поля графически изображается с помощью векторных линий. Векторная

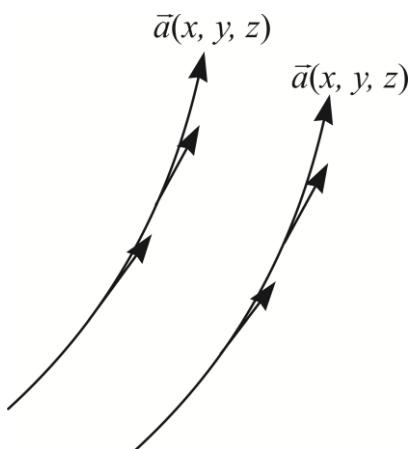


Рис. 1.4.1

линия в произвольно взятой точке пространства имеет направление вектора, касательного к ней (рис. 1.4.1, где $\vec{a}(x, y, z)$ – произвольный вектор поля в некоторый фиксированный момент времени).

Относительная плотность (густота) векторных линий в окрестностях данной точки пропорциональна абсолютной величине вектора в этой точке.

Для описания процессов в векторном ЭМП важное значение имеет понятие «поток вектора». Это понятие, как и ряд других, пришло в теорию ЭМП из гидродинамики. Классической задачей в гидродинамике является задача о наполнении бассейна. Вода в бассейн поступает через точку истока и уходит через точку стока. В электричес-

ском поле аналогами точек истока и стока служат соответственно положительные и отрицательные свободные заряды. Векторные линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (рис. 1.4.2).

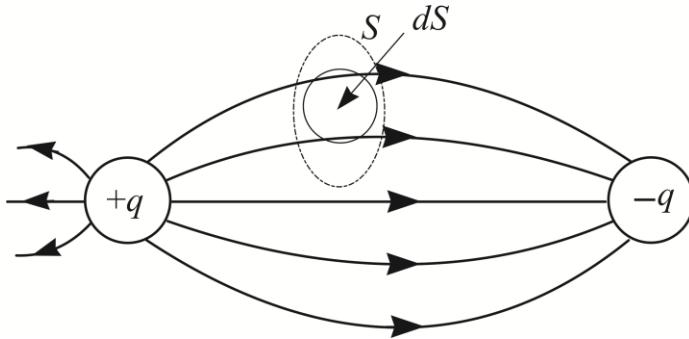


Рис. 1.4.2

Поток вектора определяет число векторных линий поля, пронизывающих площадку S . Для элементарной площадки dS поток вектора \vec{a} есть

$$d\Phi = \vec{a} d\vec{S} = adS \cos(\vec{a}, \hat{dS}) = adS \cos(\vec{a}, \vec{n}^\circ),$$

где \vec{n}° – орт, нормальный к площадке.

Поток вектора через замкнутую поверхность определяется как

$$\Phi = \oint_S \vec{a} d\vec{S},$$

и, следовательно, является алгебраической величиной, знак которой зависит от выбора положительного направления орта, нормального к площадке. Это дает возможность, например, по величине потока вектора \vec{D} определять наличие или отсутствие свободных зарядов внутри замкнутой поверхности (рис. 1.4.3).

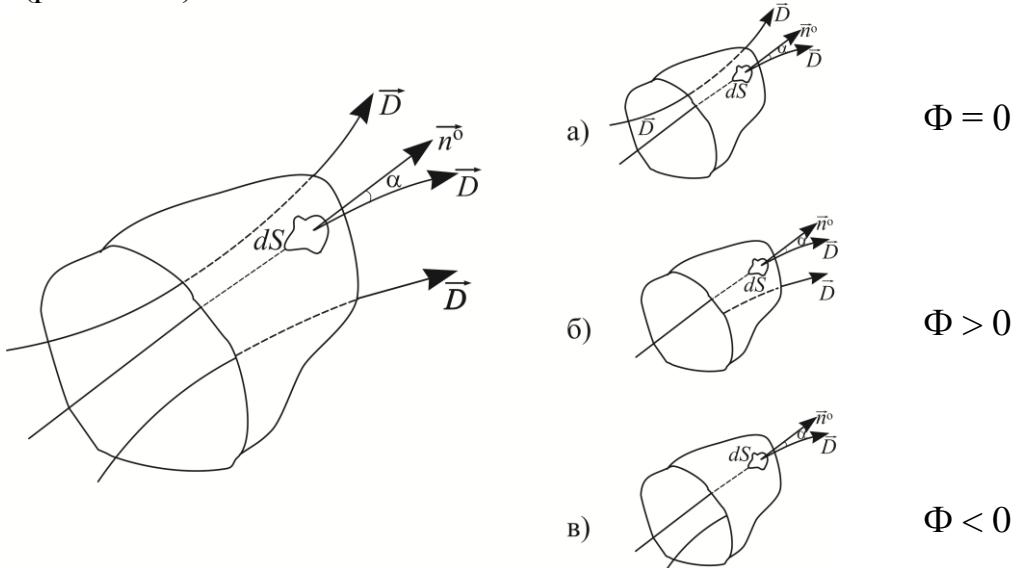


Рис. 1.4.3

Предел отношения потока вектора сквозь замкнутую поверхность к объему, ограниченному этой поверхностью, называют дивергенцией (расходимостью) вектора:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{a} d\vec{S}}{\Delta V}. \quad (1.4.1)$$

Другое обозначение дивергенции

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}, \quad (1.4.2)$$

где ∇ – набла-оператор или оператор Гамильтона. В декартовой системе координат оператор набла записывается как

$$\nabla = \vec{x}^\circ \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}^\circ \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}^\circ \frac{\partial}{\partial z}.$$

Оператор набла есть математическое понятие, приобретающее физический смысл тогда, когда он действует на скалярную или векторную величину, стоящую справа от него.

С учетом того что в прямоугольной системе координат вектор \vec{a} записывается в виде

$$\vec{a} = \vec{x}^\circ a_x + \vec{y}^\circ a_y + \vec{z}^\circ a_z,$$

легко заключить из (1.4.2), что дивергенция вектора представляет собой дифференциальную операцию над вектором, образующую новую скалярную величину.

Из определения дивергенции (1.4.1) вытекает формула теоремы Остроградского – Гаусса, которая связывает поток вектора с дивергенцией

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV. \quad (1.4.3)$$

Теорема Остроградского – Гаусса утверждает, что для любого вектора \vec{a} , который непрерывен вместе со своими первыми производными в некотором объеме V и на ограничивающей этот объем поверхности S , имеет место равенство (1.4.3).

Соотношение (1.4.3) позволяет переходить от интегралов по поверхности к интегралам по объему и наоборот.

Пример. Получим выражение для дивергенции вектора \vec{a} в прямоугольной системе координат. Пусть имеем параллелепипед с размерами dx, dy, dz , сквозь который проходит поток вектора \vec{a} (рис. 1.4.4). Прираще-

ние потока, пронизывающего площадки dy, dz , расположенные на расстояниях $x = \text{const}$ и $xdx = \text{const}$, запишем как

$$d\Phi_1 = a_x(x+dx)dydz - a_x(x)dydz = [a_x(x+dx) - a_x(x)]dydz = \left[\frac{\partial a_x}{\partial x} dx \right] dydz.$$

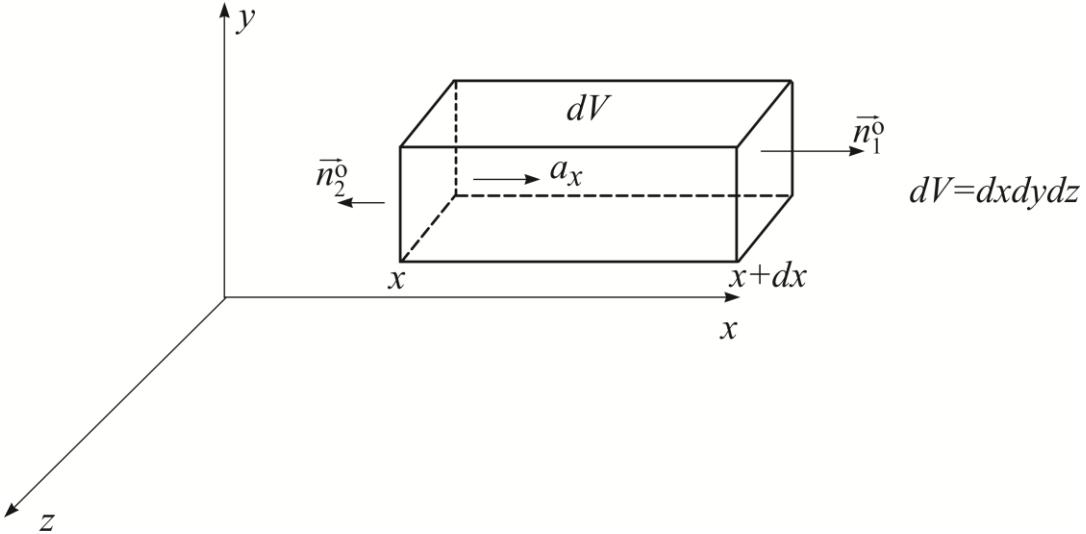


Рис. 1.4.4

Аналогично

$$d\Phi_2 = \left[\frac{\partial a_y}{\partial y} dy \right] dx dz,$$

$$d\Phi_3 = \left[\frac{\partial a_z}{\partial z} dz \right] dx dy$$

и $d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3$, следовательно,

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Дивергенция является критерием деления векторных полей на потенциальные (градиентные) и вихревые (соленоидальные). Это два основных типа векторных ЭМП с различными физическими свойствами.

Потенциальные поля тесно связаны со своими источниками – свободными зарядами, векторные линии этого поля имеют начало (истоки, $\text{div} \vec{a} > 0$) и конец (сток, $\text{div} \vec{a} < 0$).

В вихревом поле $\text{div} \vec{a} = 0$ во всех точках рассматриваемой области пространства, т. е. векторные линии этого поля не имеют истоков и стоков в виде свободных зарядов, они всегда непрерывны.

Электрическое поле, созданное постоянным током, представляет собой пример потенциального поля, а магнитное поле этого же тока – вихревого.

1.5. Потенциальное поле. Градиент потенциала

Потенциальное поле удобно характеризовать функцией, пропорциональной работе, которая затрачивается на перемещение заряда в поле.

Пусть необходимо переместить единичный точечный заряд q_0 из точки «а» в точку «б» по пути L (рис. 1.5.1).

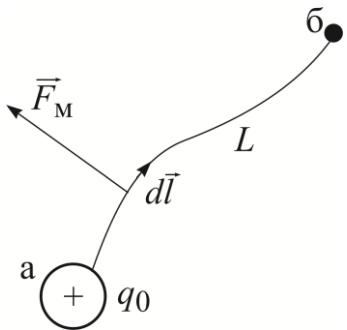


Рис. 1.5.1

Работа сил поля по перемещению заряда q_0 на отрезке пути $d\vec{l}$ есть

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F d\vec{l} \cos(\vec{F}, \hat{d\vec{l}}), \quad (1.5.1)$$

где $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_M$ – сумма сил электрического и магнитного полей. Учитывая, что $\vec{F}_M = q_0 [\vec{v}, \vec{B}]$, а направление скорости v должно совпадать с направлением перемещения заряда, получаем, что F_M направлено

перпендикулярно отрезку пути $d\vec{l}$ и поэтому магнитное поле только изменяет направление движения заряда. Таким образом, магнитное поле может использоваться не для ускорения (торможения) заряженных частиц, а лишь для изменения конфигурации их траекторий. Например, магнитное поле применяется для фокусировки электронных пучков, для реализации развертки в телевизорах и т. п.

Следовательно, работу в потенциальном поле производит электрическое поле, и на перемещение единичного заряда из точки «а» в точку «б» затрачивается работа

$$A = \int_a^b \vec{F}_e d\vec{l} = q_0 \int_a^b \vec{E} d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} d\vec{l}, \quad (1.5.2)$$

где $q_0 = 1$.

Из соотношения (1.5.2) следует, что в потенциальном поле работа не зависит от пути интегрирования, а является функцией положения начальной и конечной точек пути. Это и делает удобным введение скалярной характеристики электрического поля – потенциала. Действительно, чтобы задать вектор, надо задать три его скалярные составляющие как функции координат, для задания же потенциала достаточно задать одну функцию.

Потенциал определяется как работа, выполненная против сил поля при переносе единичного положительного заряда из одной точки в другую:

$$\Phi_b - \Phi_a = - \int_a^b \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.5.3)$$

Потенциал начальной точки пути обычно обозначают как нулевой потенциал ($\phi_0 = 0$), за который принимают значение потенциала Земли, больших металлических масс и т. п. Тогда

$$\phi_0 - \phi_0 = \phi = - \int_L \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.5.4)$$

Отсюда вытекает ряд следствий.

1. Очевидно, что $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$, так как начало и конец пути совпадают.

2. Существуют поверхности, во всех точках которых потенциал имеет одинаковые значения. Такие поверхности называются эквипотенциальными (рис. 1.5.2).

Аналогом эквипотенциальных поверхностей ЭМП являются поверхности равных температур, равных давлений и т. п.

Ясно, что работа по перемещению заряда вдоль эквипотенциальных поверхностей равна нулю:

$$A = \phi - \phi = - \int_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_L \vec{E} d\vec{l} \cos(\vec{E} \hat{d\vec{l}}) = 0,$$

— и для выполнения данного соотношения необходимо, чтобы выполнялось условие $\vec{E} \perp d\vec{l}$, т. е. векторные линии напряженности электрического поля были перпендикулярны эквипотенциальной поверхности.

3. Найдем зависимость напряженности электрического поля от потенциала. Для этого выберем путь интегрирования вдоль нормали к эквипотенциальной поверхности (рис. 1.5.3).

Продифференцировав обе части соотношения (1.5.4) по n , с учетом того что $\phi_0 = 0$, получим

$$\frac{d\phi}{dn} = -\vec{E} \hat{n}. \quad (1.5.5)$$

Умножив каждую часть равенства (1.5.5) на \hat{n} и принимая во внимание, что $(\hat{n} \hat{n}) = 1$, получаем

$$\vec{E} = -\frac{d\phi}{dn} \hat{n} = -\text{grad}\phi. \quad (1.5.6)$$



Рис. 1.5.2

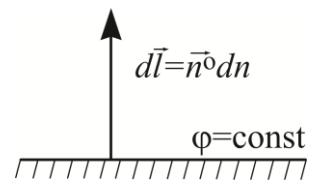


Рис. 1.5.3

Используя оператор набла, можно записать градиент потенциала в следующем виде:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi,$$

откуда следует, что оператор набла, действующий на скалярную величину – потенциал, образует новую векторную величину.

Градиентом потенциала называется вектор, характеризующий направление наибыстрейшего изменения потенциала.

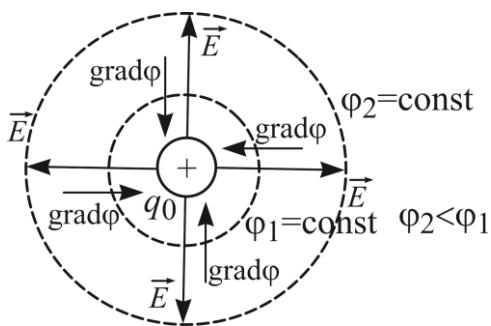


Рис. 1.5.4

Скорость изменения потенциала имеет наибольшее значение в направлении нормали к эквипотенциальной поверхности, поэтому

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{d\varphi}{dn} \vec{n}.$$

На рис. 1.5.4 показано направление $\operatorname{grad}\varphi$ и вектора \vec{E} относительно точечного положительного заряда.

1.6. Вихревое поле. Ротор вектора

Чтобы наглядно представить потенциальные и вихревые поля, можно сравнить потенциальное поле с потоком плавно текущей жидкости, причем скорость отдельных струй одинакова, а вихревое поле – с быстрым, бурлящим потоком, скорость струй которого различна.

Яркий пример вихревого поля в электромагнитных явлениях есть возникновение магнитного поля вокруг проводника с постоянным током (рис. 1.6.1), математически отображающееся в известном законе Ампера:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (1.6.1)$$

Здесь источником вихревого поля вектора \vec{H} является ток, а критерием интенсивности источников служит циркуляция вектора (Π), под которой понимается интеграл по замкнутому контуру.

В общем виде циркуляцию вектора можно записать следующим образом (рис. 1.6.2):

$$\Pi = \oint_L \vec{a} d\vec{l}.$$

Для сопоставления отметим, что в потенциальном поле циркуляция была равна нулю, так как равна нулю работа по замкнутому контуру.

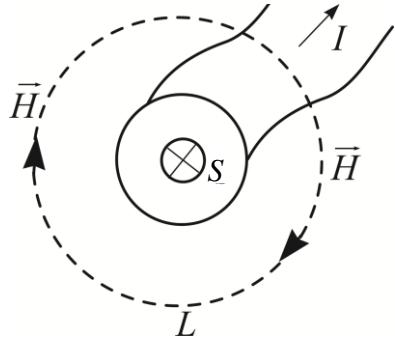


Рис. 1.6.1

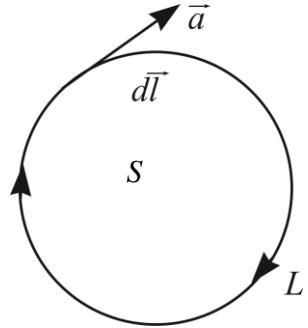


Рис. 1.6.2

Предел отношения циркуляции вектора \vec{a} к площади, ограниченной контуром циркуляции, называется ротором вектора \vec{a}

$$\text{rot} \vec{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{a} d\vec{l}}{\Delta S}. \quad (1.6.2)$$

Ротор вектора, или вихрь, есть дифференциальная операция над вектором \vec{a} , образующая новый вектор \vec{b} . Величина $\text{rot} \vec{a}$ в данной точке характеризует интенсивность вихревого поля в этой точке, а следовательно, величину его источников.

Из определения ротора вектора следует теорема Стокса, которая гласит, что для любого вектора \vec{a} , который непрерывен вместе со своими первыми частными производными на некоторой поверхности S и на ограничивающем ее замкнутом контуре L , имеет место равенство

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{a} d\vec{S}. \quad (1.6.3)$$

Теорема Стокса связывает циркуляцию с потоком ротора и позволяет контурные интегралы заменить поверхностными и наоборот.

Ротор вектора записывается с использованием набла оператора как

$$\text{rot} \vec{a} = [\nabla \vec{a}].$$

В прямоугольной системе координат имеем

$$\text{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{x}^\circ & \vec{y}^\circ & \vec{z}^\circ \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{x}^\circ \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{y}^\circ \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{z}^\circ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right).$$

Итак, с использованием оператора набла были выполнены дифференциальные операции первого порядка $\operatorname{div}\vec{a}$, $\operatorname{grad}\varphi$ и $\operatorname{rot}\vec{a}$. Соответствующие основные дифференциальные операции второго порядка приведены в приложении.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение электромагнитного поля.
2. Укажите источники электромагнитного поля и их размерность.
3. Как проявляется силовое действие электрических и магнитных полей.
4. Почему для описания электромагнитного поля используются четыре вектора? Какая связь существует между ними? Укажите размерности векторов поля.
5. Как проводится классификация сред?
6. Укажите размерности электромагнитных параметров сред.
7. Запишите материальные уравнения.
8. Как изобразить структуру поля?
9. Запишите выражения дивергенции, градиента и ротора с помощью оператора набла.
10. Запишите преобразования Остроградского – Гаусса и Стокса.

ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ (УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА)

Изучение электрических и магнитных явлений вначале происходило независимо друг от друга. Но затем стала прослеживаться их определенная взаимосвязь. Так, в частности, в 1820 г. Ампер установил, что вокруг проводника с током возникает магнитное поле, в 1831 г. Фарадей показал, что переменный магнитный поток наводит ток в замкнутом проводнике. Наконец, Максвелл, обобщив полученные до него теоретические и экспериментальные данные, сформулировал фундаментальную теорию макроскопического ЭМП, основанную на единстве электрических и магнитных полей, которая не только описывала все известные к тому времени электромагнитные явления, но и предсказывала новые.

Замечательное достижение теории ЭМП, разработанной Максвеллом, — предсказание существования ЭМВ, распространяющихся со скоростью света, которое позволило ему прийти к выводу о том, что и свет является частью электромагнитного спектра.

Справедливость положений теории Максвелла подтверждена всем последующим развитием науки и техники.

Уравнения Максвелла, представляющие математическое отображение теории, определяют взаимную связь электрических и магнитных полей и их зависимость от зарядов и токов в каждой точке пространства в любой момент времени. На основе этих уравнений строится вся теория ЭМП. Поэтому они являются основными уравнениями электродинамики.

Всего уравнений четыре, каждое из которых может быть записано в интегральной или дифференциальной форме. И хотя Максвелл использовал дифференциальные уравнения для математического выражения своей теории, уравнения в интегральной форме позволяют более ясно увидеть то новое, что внес Максвелл в известные до него физические законы. Поэтому дальнейшее изложение начнется с получения уравнений в интегральной форме.

2.1. Первое уравнение

Первое уравнение Максвелла есть обобщение закона полного тока, сформулированного Ампером для токов проводимости. В упрощенной трактовке этот закон гласит: циркуляция вектора напряженности магнитного поля \vec{H} по замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов проводимости, пронизывающих поверхность, опирающуюся на данный контур

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \quad (2.1.1)$$

где $I = I_1 + I_2 + I_3$ — полный ток (рис. 2.1.1).

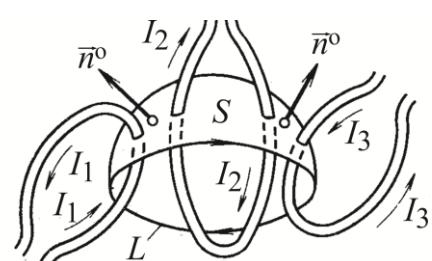


Рис. 2.1.1

Положительными считают те токи, направление которых образует с выбранным положительным направлением обхода контура L правовинтовую систему.

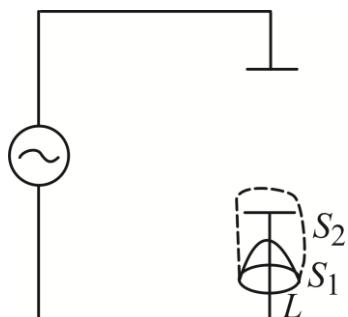


Рис. 2.1.2

Рассмотрим этот закон для цепи переменного тока, содержащей разрыв (конденсатор) (рис. 2.1.2).

На контуре L построим две поверхности, одна из которых (S_2) проходит между пластинами конденсатора. Для поверхности S_1 уравнение (2.1.1) выполняется, тогда как для поверхности S_2 правая часть уравнения обращается в ноль, хотя в законе полного тока нет указаний на то, что циркуляция

вектора \vec{H} каким-то образом зависит от построения поверхности S . Это обстоятельство говорит о неприменимости закона полного тока в виде соотношения (2.1.1) для переменных процессов.

Кроме формального нарушения действия соотношения (2.1.1) отметим еще и нарушение определенных физических закономерностей. Известно, что главнейшим признаком наличия тока проводимости является возникающее вокруг него магнитное поле, тогда как между обкладками конденсатора магнитное поле существует, но ток проводимости отсутствует.

Максвелл, отметив неполноту уравнения (2.1.1), постулировал, что в пространстве, где отсутствуют проводники, токи проводимости в случае переменных электромагнитных процессов переходят в особые токи, называемые им «токи смещения».

Под плотностью тока смещения Максвелл понимал и ввел скорость изменения электрической индукции во времени

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (2.1.2)$$

С учетом тока смещения закон полного тока будет

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) d\vec{S}. \quad (2.1.3)$$

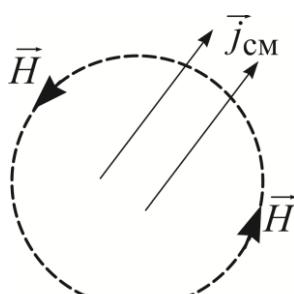


Рис. 2.1.3

Следовательно, Максвелл фактически постулировал, что переменное электрическое поле, также как и постоянный электрический ток, вызывает появление магнитного поля (рис. 2.1.3). Поскольку данные явления равнозначны с этой точки зрения и имеют одинаковую размерность, то это и позволило назвать изменение

вектора электрической индукции во времени $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$ плотностью тока смещения.

Таким образом, основной признак любого электрического тока – создание магнитного поля – здесь соблюден, однако физическая природа токов смещения и проводимости различна.

Напомним, что ток проводимости есть упорядоченное движение свободных зарядов. Плотность же тока смещения может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (2.1.4)$$

первое из которых – плотность тока смещения в вакууме («чистый» ток смещения), второе – обусловлено упорядоченным перемещением связанных зарядов. Ток смещения в вакууме создается лишь изменением электрического поля во времени и не сопровождается каким-либо движением электрических зарядов и выделением тепла. Второе слагаемое – ток поляризации – ближе к току проводимости, так как здесь происходит тоже упорядоченное перемещение зарядов, но только связанных. Это перемещение происходит под воздействием переменного электрического поля.

Таким образом, источником магнитного поля являются как токи проводимости, так и токи смещения, и там, где кончается ток проводимости, начинается равный ему по величине ток смещения и обратно – отсюда следует закон непрерывности полного тока, который будет рассмотрен далее при анализе уравнений Максвелла.

Исходя из вышесказанного, первое основное уравнение электродинамики в интегральной форме представлено в виде уравнения (2.1.3).

Для перехода к дифференциальной форме применим к левой части уравнения (2.1.3) преобразование Стокса:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S}.$$

Тогда, учитывая, что S – произвольная поверхность, имеем

$$\int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_S (\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) d\vec{S}$$

и отсюда

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (I)$$

Это векторное уравнение есть первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме, которое, как и последующие основные уравнения в такой же форме, ввиду его значимости, будет обозначаться римскими цифрами в этой главе.

Итак, из первого основного уравнения следует, что источниками магнитного поля равноправно являются как токи проводимости, так и токи смещения.

Пример. Записать первое уравнение в дифференциальной форме в прямоугольной системе координат.

Входящий в это уравнение ротор вектора напряженности магнитного поля можно представить в следующем виде:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{x}^\circ & \vec{y}^\circ & \vec{z}^\circ \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{x}^\circ \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y}^\circ \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{z}^\circ \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right),$$

и, так как векторное уравнение эквивалентно трем скалярным, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}. \end{aligned}$$

2.2. Второе уравнение

Второе основное уравнение электродинамики обобщает закон электромагнитной индукции Фарадея, суть которого состоит в том, что если замкнутый проводящий контур L находится в переменном магнитном по-

ле, то в нем возникает электродвижущая сила κ , равная по величине и противоположная по знаку скорости изменения магнитного потока Φ , пронизывающего поверхность S , опирающуюся на контур L (рис. 2.2.1):

$$\kappa = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.2.1)$$

$$\text{где } \Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

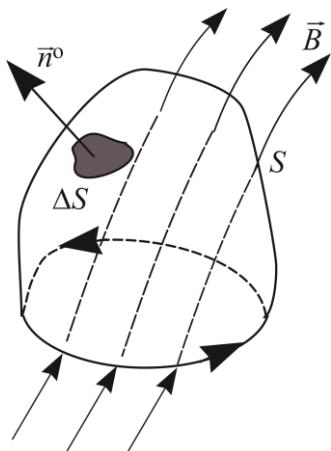


Рис. 2.2.1

Знак « $-$ » в уравнении (2.2.1) означает, что возникшая в контуре ЭДС всегда стремится как бы противодействовать изменению потока, пронизывающего данный контур (правило Ленца).

Обобщая закон электромагнитной индукции (2.2.1), Максвелл предположил, что переменное магнитное поле создает ЭДС в любом замкнутом контуре, в том числе и в воображаемом, проходящем в непроводящей среде.

Поскольку, по определению, ЭДС равна работе по перемещению единичного заряда вдоль контура, то

$$\kappa = \oint_L \vec{E} d\vec{l}. \quad (2.2.2)$$

Сопоставляя выражения (2.2.1) и (2.2.2) для ЭДС, получаем

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} dS.$$

Предполагая, что контур не деформируется со временем, переходим к частным производным, а интегрирование по поверхности и дифференцирование по времени меняем местами, в результате имеем

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (2.2.3)$$

Это второе основное уравнение ЭД в интегральной форме.

Для перехода к дифференциальной форме вновь применяем к левой части уравнения (2.2.3) преобразование Стокса:

$$\int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = \int_S - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S},$$

и, учитывая, что S – произвольная поверхность, приходим ко второму уравнению Максвелла в дифференциальной форме

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{II})$$

Здесь вектор напряженности электрического поля \vec{E} и $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ образуют левовинтовую систему (рис. 2.2.2).

Из второго уравнения Максвелла следует, что переменное магнитное поле всегда возбуждает вихревое электрическое поле и, следовательно, явление электромагнитной индукции приобретает более общий смысл.

В совокупности, уравнения (I) и (II) показывают, что переменные электрические и магнитные поля не могут существовать раздельно, любое переменное электрическое поле вызывает обязательно переменное магнитное поле, а оно, в свою очередь, – переменное электрическое поле и т. д. (рис. 2.2.3). Такой взаимный переход одного поля в другое и образует ЭМВ.

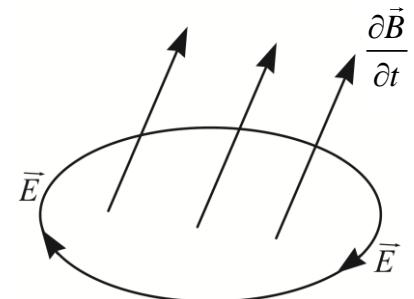


Рис. 2.2.2

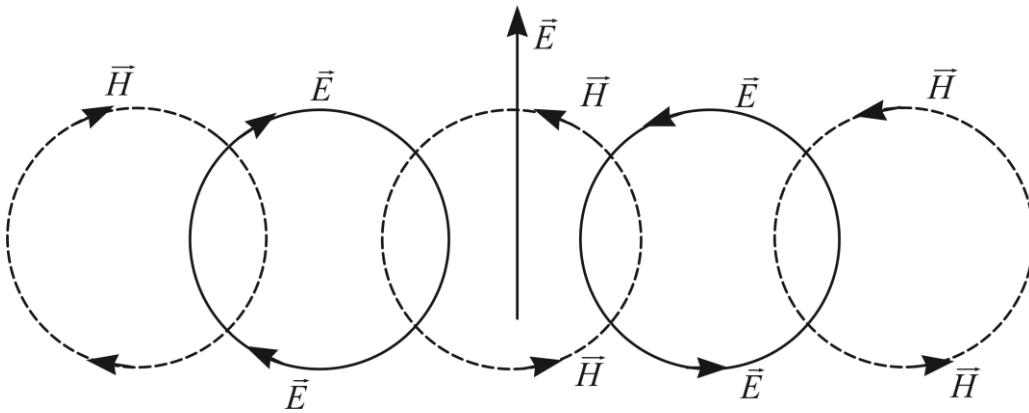


Рис. 2.2.3

Таким образом, производная в этих уравнениях характеризует быстроту изменения во времени электрического (магнитного) поля, а rot – наличие вихрей созданного им магнитного (электрического) поля в плоскости, перпендикулярной направлению вектора возбуждающего поля.

Пример. Записать II уравнение Максвелла в прямоугольной системе координат:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

2.3. Третье и четвертое уравнения

Третье основное уравнение ЭД есть обобщение закона Гаусса для электрического поля на переменные процессы. Закон Гаусса связывает поток вектора электрической индукции \vec{D} через произвольную замкнутую поверхность S со свободным зарядом q , сосредоточенным внутри этой поверхности:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q. \quad (2.3.1)$$

Поскольку заряд q может быть любым образом распределен в объеме, охватываемом поверхностью, то

$$q = \int_V \rho dV.$$

Максвелл распространил действие уравнения (2.3.1), которое ранее использовалось только для постоянных полей, и на переменные поля, и в итоге третье основное уравнение ЭД в интегральной форме, или обобщенный закон Гаусса, записывается как

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (2.3.2)$$

Для перехода к дифференциальной форме применим к левой части уравнения (2.3.2) преобразование Остроградского – Гаусса, после чего получим

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Это равенство выполняется при произвольных объемах, и, таким образом, приходим к третьему уравнению Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (\text{III})$$

Из третьего уравнения следует, что электрические поля имеют для вектора \vec{D} стоки и истоки в виде свободных зарядов, тогда как для вектора \vec{E} стоками и истоками являются как свободные, так и связанные заряды. Это легко показать, поскольку $\operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$, тогда отсюда $\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho - \operatorname{div} \vec{P} = \rho - \rho_{\text{св}}$, где $\rho_{\text{св}}$ – поляризационная плотность связанных зарядов, возникающая в результате неравномерной поляризации среды.

Четвертое уравнение ЭД в интегральной форме совпадает с законом Гаусса для магнитного поля (принцип непрерывности векторных линий магнитной индукции), но обобщено и на переменные процессы записывается в виде

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (2.3.3)$$

Вновь используем преобразование Остроградского – Гаусса и получаем четвертое уравнение Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (\text{IV})$$

Четвертое уравнение Максвелла отражает тот факт, что в природе отсутствуют магнитные заряды, и показывает, что магнитное поле всегда является только вихревым полем с замкнутыми векторными линиями.

Третье и четвертое уравнения скалярные, тогда как первое и второе – векторные.

Пример. Записать третье уравнение Максвелла в дифференциальной форме в прямоугольной системе координат:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho.$$

2.4. Полная система уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла для мгновенных значений векторов ЭМП образуют исходную систему уравнений ЭД в вещественной форме. Приведем сводку уравнений, сопоставив соответствующие уравнения в интегральной и дифференциальной формах:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (\text{I})$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \quad \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (\text{II})$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV; \quad \text{div} \vec{D} = \rho; \quad (\text{III})$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0; \quad \text{div} \vec{B} = 0. \quad (\text{IV})$$

Вышеприведенная система уравнений Максвелла дает возможность сделать ряд выводов.

1. Уравнения ЭД в интегральной форме характеризуют ЭМП в некотором объеме и позволяют получить лишь суммарные (интегральные) сведения об ЭМП. Если же надо определять ЭМП в конкретной точке пространства, то там, где векторы поля непрерывны и дифференцируемы, используют уравнения в дифференциальной форме, которые и будут анализироваться далее.

2. Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме является универсальной, так как она описывает любые электромагнитные поля в любых средах. Именно ввиду ее универсальности в самой системе нет данных о свойствах сред, в которых протекают электромагнитные процессы, и в общем виде уравнений Максвелла недостаточно для решения задач ЭД, так как число уравнений меньше числа неизвестных величин, которые надо определить. Действительно, обычно задаются источники поля: плотности заряда и тока, и для нахождения четырех векторов поля требуются четыре векторных уравнения, тогда как в систему входят два векторных и два скалярных уравнения, следовательно, система математически неполная, но эта неполнота и объясняется ее универсальностью.

Чтобы получить математически полную систему, необходимо к уравнениям Максвелла добавить материальные уравнения, характеризующие влияние конкретной среды на электромагнитные процессы. Для линейных изотропных сред эти материальные уравнения записываются в виде соотношений

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad (2.4.1)$$

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (2.4.2)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (2.4.3)$$

использование которых уменьшает число определяемых векторных величин до двух, и система становится математически полной.

Система уравнений охватывает кроме переменного ЭМП также другие случаи полей.

а) Статическое поле – создано неподвижными зарядами, поэтому не зависит от времени $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ и нет перемещения свободных зарядов $(\vec{j} = 0)$.

Здесь система уравнений распадается на две части:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = 0, \\ \text{div} \vec{B} = 0; \end{array} \right. \quad (B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = 0, \\ \text{div} \vec{D} = \rho. \end{array} \right.$$

Часть (A) характеризует магнитостатическое поле, часть (B) – электростатическое. Связь между полями отсутствует. Электростатическое поле создается неподвижным, постоянным по величине зарядом и является чисто потенциальным полем. Магнитостатическое – создается постоянными магнитами и используется для анализа магнитного поля, созданного постоянными токами в области, где токи проводимости отсутствуют и которая не охватывает линии этого тока.

б) Стационарное ЭМП – создано постоянным током и также не зависит от времени $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$. Систему уравнений Максвелла можно, как и в предыдущем случае, разделить на две части:

$$(A_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{j}, \\ \text{div} \vec{B} = 0; \end{array} \right. \quad (B_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = 0, \\ \text{div} \vec{D} = \rho. \end{array} \right.$$

Части (A₁) и (B₁) характеризуют соответственно магнитостационарное и электростационарное поля. Между ними существует слабая связь в виде материального уравнения (2.4.3), что позволяет в некоторых приложениях рассматривать поля независимо, например в цепях постоянного тока, рассчитываемых по законам Кирхгофа, представляющим частный случай законов электродинамики. Магнитостационарное поле – вихревое поле, а электростационарное – потенциальное.

Таким образом, система уравнений Максвелла пригодна для любых сред и любых процессов.

3. Векторные уравнения системы определяют соленоидальные свойства ЭМП и характеризуют связь электрических и магнитных полей, тогда как скалярные уравнения устанавливают потенциальные свойства ЭМП.

4. Поскольку рассматриваются линейные среды, то их параметры ϵ_a , μ_a , σ не зависят от величины векторов поля. Поэтому система уравнений состоит из линейных дифференциальных уравнений, из линейности которых следует, что результирующее ЭМП, обусловленное несколькими источниками, представляет сумму полей, создаваемых каждым источником в отдельности. Это принцип наложения или суперпозиции полей.

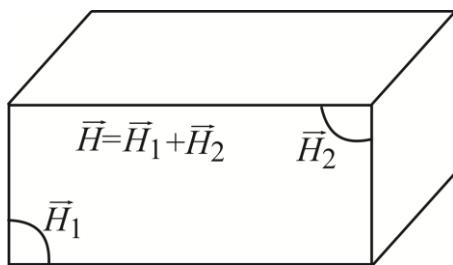


Рис. 2.4.1

На рис. 2.4.1 показано суммарное поле, создаваемое двумя источниками магнитного поля, характеризуемыми векторами \vec{H}_1 и \vec{H}_2 .

5. Для определения количественных характеристик векторов поля в уравнениях Максвелла необходимо задать сторонние источники, порождающие поле.

Сторонние источники возбуждают рассматриваемое ЭМП, но сами от него не зависят, так как их создают и поддерживают посторонние для исследуемого ЭМП физические процессы.

Типичным примером стороннего источника является антenna, питаемая высокочастотными токами радиопередатчика и создающая ЭМП в виде ЭМВ, но сама не зависящая от него (рис. 2.4.2).



Рис. 2.4.2

Сторонние источники могут фигурировать в уравнениях Максвелла как заранее известные функции координат и времени. Следовательно, плотности токов проводимости и зарядов можно записать следующим образом:

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{ст}} + \vec{j}_{\text{вт}} = \vec{j}_{\text{ст}} + \sigma \vec{E},$$

$$\rho = \rho_{\text{ст}} + \rho_{\text{вт}}.$$

Здесь индекс «вт» (вторичное) указывает, что источники не только возбуждают поле, но и зависят от него.

6. Для переменных во времени полей уравнения Максвелла связаны друг с другом, а именно, III и IV уравнения являются следствиями соответственно I и II уравнений. Для доказательства используем закон сохранения

заряда, согласно которому заряд в замкнутом объеме со временем не исчезает, а перемещается в другую часть пространства в виде тока, что записывается как

$$I = -\frac{\partial q}{\partial t},$$

или

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV.$$

Применяя к левой части последнего уравнения преобразование Остроградского–Гаусса, получим

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

откуда

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.4.4)$$

Выражение (2.4.4) есть закон сохранения заряда в дифференциальной форме или уравнение непрерывности электрического тока.

Учитывая, что $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$, имеем

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \vec{j}_{\text{см}} = \operatorname{div} (\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) = \operatorname{div} \vec{j}_{\text{полн}} = 0,$$

и, следовательно, векторные линии плотности полного тока $\vec{j}_{\text{полн}}$ являются непрерывными, тогда как такие же линии \vec{j} и $\vec{j}_{\text{см}}$ могут иметь начало и конец.

Попутно отметим одну существенную особенность проводящих сред: в них не может быть постоянного объемного распределения зарядов.

Для доказательства применим уравнение непрерывности электрического тока и закон Ома в дифференциальной форме. Исходя из уравнения

(2.4.4), где $\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{\sigma \vec{D}}{\epsilon_a}$, получаем

$$\frac{\sigma}{\epsilon_a} \operatorname{div} \vec{D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

или

$$\frac{\sigma}{\epsilon_a} \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Решение последнего уравнения дает

$$\rho(x, y, z, t) = \rho(x, y, z, t_0) \exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon_a} t\right),$$

где $\rho(x, y, z, t_0)$ – объемная плотность заряда в точке с координатами (x, y, z) в начальный момент времени $t_0 = 0$.

Таким образом, объемная плотность заряда в каждой точке внутри проводника убывает со временем по экспоненциальному закону. Заряды задерживаются на наружной поверхности проводника, образуя очень тонкий заряженный слой с поверхностной плотностью зарядов ρ_s , а внутри проводника при $t \rightarrow \infty \rho \Rightarrow 0$ (рис. 2.4.3).

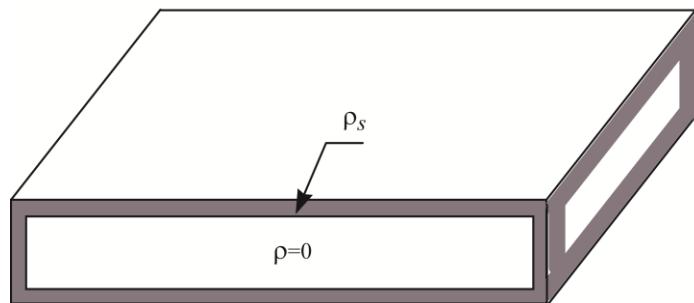


Рис. 2.4.3

Промежуток времени τ , в течение которого плотность заряда в объеме уменьшилась в « e » раз, называется временем релаксации и определяется из условия

$$e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_a} \tau} = e^{-1},$$

откуда

$$\tau = \frac{\epsilon_a}{\sigma}.$$

Возвращаясь к доказательству связи I и III уравнений, применим к обеим частям уравнения I операцию div и учтем, что

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \nabla \cdot [\nabla \vec{H}] = [\nabla \nabla] \vec{H} = 0,$$

тогда

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}).$$

Сопоставляя это соотношение с уравнением (2.4.4), заключаем, что для переменных во времени процессов

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D})$$

и отсюда

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

т. е. из уравнения I следует уравнение III.

Аналогично, уравнение IV вытекает из II. Для доказательства вновь применим операцию div к обеим частям уравнения II:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0,$$

следовательно, $\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{B}) = 0$, т. е. $\operatorname{div} \vec{B}$ не зависит от времени и является только функцией координат, причем вид этой функции не определен. Четвертое уравнение

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

конкретизирует этот вид, устанавливая чисто вихревой характер поля вектора \vec{B} .

2.5. Уравнения Максвелла для монохроматических полей

Определение мгновенных значений векторов поля в системе уравнений Максвелла представляет собой сложную задачу, поскольку они зависят и от пространственных координат и от времени. Возможно, однако, уравнения упростить, исключив последнюю зависимость, что реализуется для ЭМП, которые изменяются во времени по закону косинус (или синус). Такие поля называются гармоническими или монохроматическими. Их исследование представляет особый интерес, так как все электромагнитные процессы можно представить в виде или сплошного спектра или суммы дискретных гармонических колебаний.

Метод, позволяющий упростить запись линейных дифференциальных уравнений Максвелла для монохроматических полей, называется методом комплексных амплитуд.

Покажем его использование на примере скалярной функции, мгновенное значение которой имеет вид

$$u(t) = u_m \cos(\omega t + \phi_0), \quad (2.5.1)$$

где u_m – амплитуда; ϕ_0 – начальная фаза; $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$; f и T – соответственно частота и период гармонического колебания.

Вместо мгновенного значения функции (2.5.1) запишем комплексную функцию

$$\dot{u}(t) = u_m e^{i(\omega t + \phi_0)} = \dot{u}_m e^{i\omega t},$$

где $\dot{u}_m = u_m e^{i\phi_0}$ – комплексная амплитуда функции u , в которой отсутствует зависимость от времени.

Обратный переход к действительной величине осуществляется по-средством операции

$$u(t) = \operatorname{Re} \left[\dot{u}_m e^{i\omega t} \right] = \operatorname{Re} \dot{u}(t).$$

Для вектора $\vec{a}(t)$, который можно представить в прямоугольной системе координат в виде

$$\vec{a}(t) = \vec{x}^\circ a_{m_x} \cos(\omega t + \varphi_x) + \vec{y}^\circ a_{m_y} \cos(\omega t + \varphi_y) + \vec{z}^\circ a_{m_z} \cos(\omega t + \varphi_z),$$

вводят комплексные амплитуды его проекций на оси координат:

$$\dot{a}_{m_x} = a_{m_x} e^{i\varphi_x}; \quad \dot{a}_{m_y} = a_{m_y} e^{i\varphi_y}; \quad \dot{a}_{m_z} = a_{m_z} e^{i\varphi_z}.$$

Объединив их в вектор, получают комплексную векторную амплитуду

$$\dot{\vec{a}}_m = \vec{x}^\circ \dot{a}_{m_x} + \vec{y}^\circ \dot{a}_{m_y} + \vec{z}^\circ \dot{a}_{m_z}.$$

Действительный вектор записывается как

$$\vec{a}(t) = \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{a}}_m e^{i\omega t} \right] = \operatorname{Re} \dot{\vec{a}}, \quad (2.5.2)$$

где $\dot{\vec{a}} = \vec{x}^\circ a_{m_x} e^{i(\omega t + \varphi_x)} + \vec{y}^\circ a_{m_y} e^{i(\omega t + \varphi_y)} + \vec{z}^\circ a_{m_z} e^{i(\omega t + \varphi_z)}$ – комплексный вектор.

Отсюда следует, что операция дифференцирования по времени при переходе к комплексным амплитудам заменяется умножением на $i\omega$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{a}(t) &= \operatorname{Re} \left[i\omega \dot{\vec{a}}_m e^{i\omega t} \right], \\ \text{т. е.} \quad \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow i\omega, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

что часто делает определение комплексных функций более простым, чем исходных.

Таким образом, использование метода комплексных амплитуд для записи линейных дифференциальных уравнений Максвелла позволяет исключить зависимость от времени.

Поскольку, как показано выше, скалярные уравнения Максвелла являются следствием векторных, достаточно записать в форме комплексных амплитуд только векторные уравнения

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{j}} + i\omega \dot{\vec{D}}, \quad (I)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -i\omega \dot{\vec{B}}. \quad (II)$$

Здесь и далее для упрощения записи опущен индекс «*m*» у комплексных амплитуд.

Преобразуем первое из этих уравнений следующим образом:

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = \sigma \dot{\vec{E}} + i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\vec{E}} = i\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\vec{E}},$$

где

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right) \quad (2.5.4)$$

— комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость, характеризующая электрические свойства среды с потерями. Волнистой линией, называемой «тильда», обозначаются комплексные величины, не являющиеся гармонической функцией времени.

Сопоставляя уравнения Максвелла в форме комплексных амплитуд для проводящих сред и диэлектриков ($j = 0$) замечаем, что они имеют аналогичный вид. Это означает, что введение комплексной диэлектрической проницаемости позволяет решать систему уравнений Максвелла в обоих случаях одинаковыми методами.

Комплексная диэлектрическая проницаемость дает более общую характеристику среды, нежели обычная диэлектрическая проницаемость, так как в нее кроме диэлектрической проницаемости входят и проводимость среды и, что наиболее важно, частота волны, распространяющейся в среде. Последнее указывает, что электромагнитные параметры среды следует рассматривать с учетом частоты ЭМВ, и в пределах диапазона радиоволн они сильно изменяются.

Составной частью комплексной диэлектрической проницаемости является тангенс угла потерь

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a \left(1 - \hat{\tg} \delta \right),$$

где

$$\hat{\tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \quad (2.5.5)$$

Важная роль $\hat{\tg} \delta$ заключается в том, что он служит критерием деления сред на проводники и диэлектрики, поскольку, по сути, $\hat{\tg} \delta$ представляет собой взятое по абсолютной величине отношение плотности токов проводимости к плотности токов смещения:

$$\hat{\tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} = \left| \frac{\sigma E}{\omega \epsilon_a E} \right| = \left| \frac{j}{j_{\text{см}}} \right|. \quad (2.5.6)$$

В теории распространения радиоволн $\hat{\operatorname{tg}}\delta$ обычно записывается в несколько ином виде:

$$\hat{\operatorname{tg}}\delta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_a} = \frac{\sigma\lambda}{2\pi \cdot c \cdot \epsilon \cdot \epsilon_a} = \frac{\sigma\lambda}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \epsilon \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-4}} = \frac{60\lambda\sigma}{\epsilon},$$

но смысл его, конечно, остается прежним.

Деление сред на проводники и диэлектрики в зависимости от величины $\hat{\operatorname{tg}}\delta$ проводится следующим образом:

если $\hat{\operatorname{tg}}\delta \gg 1$, то среда – проводник,

если $\hat{\operatorname{tg}}\delta \approx 1$, то среда – диэлектрик с потерями,

если $\hat{\operatorname{tg}}\delta \ll 1$, то среда – диэлектрик.

Идеальный проводник – это среда с бесконечно большой проводимостью, тогда как у идеального диэлектрика проводимость равна нулю, а диэлектрическая и магнитная проницаемости представляют вещественные скалярные функции или постоянные величины.

Главный вывод, который должен быть сделан: электромагнитные свойства среды не остаются постоянными, а зависят от частоты волны, распространяющейся в этом веществе, причем при постоянных величинах σ и ϵ_a с ростом ω среда по своим свойствам все больше приближается к диэлектрику, правда, металлы остаются проводниками во всем диапазоне радиочастот. В качестве примера непостоянства свойств среды с изменением частоты волны можно привести случай распространения радиоволн над земной поверхностью: для сверхдлинных волн (СДВ) поверхность Земли ведет себя как проводник, для ультракоротких (УКВ) – как диэлектрик. Проиллюстрируем этот пример численным расчетом. Для сухой почвы имеем следующие средние значения параметров: $\epsilon = 4$, $\sigma = 10^{-3}$ См/м. Длины волн $\lambda_{\text{СДВ}} = 10^4$ м, $\lambda_{\text{УКВ}} = 0,1$ м. Соответственно

$$\hat{\operatorname{tg}}\delta_{\text{СДВ}} = 150, \hat{\operatorname{tg}}\delta_{\text{УКВ}} = 1,5 \cdot 10^{-3}.$$

Приведем в заключение некоторые данные об электромагнитных параметрах ряда сред.

Относительная диэлектрическая проницаемость: воздух при 0°C – 1,0006; дистиллированная вода – 81,1; кварц – 25,8; полистирол – 2,5; тefлон – 2,1.

Удельная электрическая проводимость σ (См/м) при 20°C .

Проводники: медь – $5,65 \cdot 10^7$; серебро – $6,14 \cdot 10^7$; алюминий – $3,54 \cdot 10^7$; железо – $1 \cdot 10^7$.

Диэлектрики: слюда – 10^{-11} ; стекло – 10^{-12} ; кварц – $2 \cdot 10^{-17}$; сера – 10^{-15} .

Вопросы для самопроверки

1. Запишите систему уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах и объясните физический смысл каждого уравнения.
2. В чем отличие плотности тока смещения от плотности тока проводимости?
3. Почему система уравнений Максвелла универсальна?
4. Какие свойства электромагнитного поля определяют векторные уравнения Максвелла, а какие – скалярные?
5. Поясните понятие сторонних (первичных) и вторичных источников электромагнитного поля.
6. В чем заключается принцип суперпозиции?
7. В чем смысл перехода к записи уравнений Максвелла в форме комплексных амплитуд? Как осуществляется этот переход?
8. Объясните получение и физический смысл абсолютной комплексной диэлектрической проницаемости и тангенса угла потерь.

ГЛАВА 3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

3.1. Постановка задачи

При рассмотрении ряда задач ЭД необходимо знать ЭМП внутри некоторого объема V (рис. 3.1.1), заполненного веществом с известными электромагнитными параметрами.

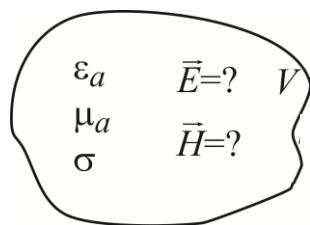


Рис. 3.1.1

ЭМП в любой точке этого объема можно определить с помощью дифференциальных уравнений Максвелла, если параметры среды представляют непрерывную функцию координат или остаются постоянными и, следовательно, вектора поля являются конечными величинами.

На практике объем V может быть заполнен средами с различными параметрами. На рис. 3.1.2 показан объем V , состоящий из двух объемов: V_1 и V_2 с разными параметрами сред, в общем случае в этих объемах будут отличны и величины векторов ЭМП.

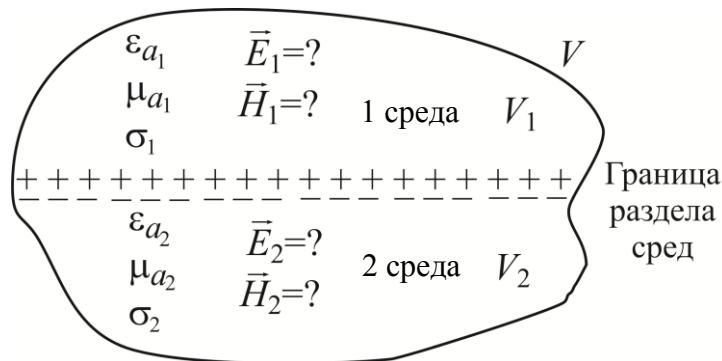


Рис. 3.1.2

Для упрощения идеализируют переход от одной среды к другой, полагая параметры сред меняющимися скачком в месте перехода.

Поверхность, на которой по крайней мере один из параметров среды изменяется скачком, называется границей раздела сред.

На этой поверхности и векторы поля изменяются скачком, что, например, в случае изотропной линейной среды вытекает из материальных уравнений. Поэтому уравнения Максвелла в дифференциальной форме, в которые входят производные по координатам среды, на границе раздела не применимы и заменяются граничными условиями.

Граничными условиями называют соотношения, показывающие связь между одними и теми же векторами поля по разным сторонам границы раздела.

Границные условия получаются из основных уравнений ЭД в интегральной форме, которые, в отличие от уравнений в дифференциальной форме, определяют ЭМП в любой области пространства, включая и среды с различными параметрами. Предельный переход от интегральных уравнений к граничным условиям осуществляется путем стягивания к границам раздела замкнутой поверхности (в третьем и четвертом уравнениях) и контура интегрирования (в первом и втором уравнениях).

Обычно основные уравнения ЭД решаются отдельно для каждого объема, а затем «сшиваются» в общее решение с помощью граничных условий, и, таким образом, граничные условия обеспечивают единство решений основных уравнений для всей области и дополняют систему уравнений.

В каждой точке пространства любой вектор ЭМП можно разложить на нормальную (перпендикулярную) и тангенциальную (касательную) составляющие к поверхности раздела, например, произвольно направленный вектор \vec{a} представляется как

$$\vec{a} = \vec{n}^\circ a_n + \vec{\tau}^\circ a_\tau,$$

где a_n и a_τ – соответственно нормальная и тангенциальная составляющие вектора (рис. 3.1.3), поэтому граничные условия формулируются для составляющих раздельно.

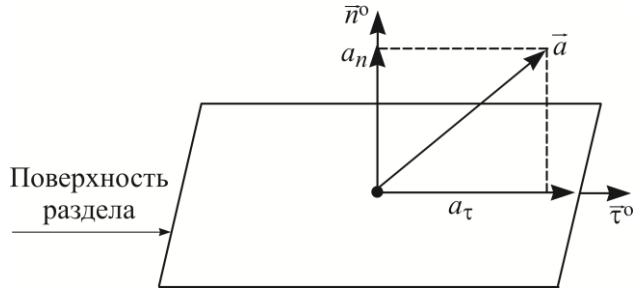


Рис. 3.1.3

3.2. Граничные условия для нормальных составляющих векторов

Пусть на поверхности раздела сред S перпендикулярно к ней расположен цилиндр, пересекающий эту поверхность и имеющий высоту $2\Delta h$ и основание ΔS , причем поверхность раздела делит цилиндр по высоте пополам. Орты \vec{n}° к основаниям цилиндра направлены в соответствующие среды (рис. 3.2.1). Внутри цилиндра содержится заряд Δq .

Используем для получения граничных условий для нормальной составляющей вектора электрической индукции третье уравнение ЭД в интегральной форме

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q.$$

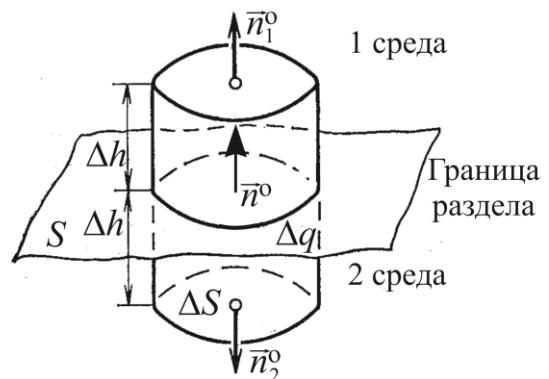


Рис. 3.2.1

Применимельно к рис. 3.2.1 это уравнение можно записать в виде

$$\vec{D}_1 \vec{n}_1^\circ \Delta S + \vec{D}_2 \vec{n}_2^\circ \Delta S + \Phi_{\text{бок}}^D = \Delta q, \quad (3.2.1)$$

где в левой части соотношения (3.2.1) представлен поток вектора \vec{D} через всю поверхность цилиндра, включающий в себя потоки через основания и боковую поверхность цилиндра ($\Phi_{\text{бок}}^D$), \vec{n}_1° и \vec{n}_2° – орты нормалей к торцевым поверхностям цилиндра, причем $\vec{n}_1^\circ = -\vec{n}_2^\circ = \vec{n}^\circ$, где \vec{n}° – орт нормали к поверхности раздела сред.

Величину вектора \vec{D} можно считать постоянной на торце цилиндра ввиду малости основания ΔS .

Приближая основания цилиндра к поверхности раздела ($\Delta h \rightarrow 0$) и учитывая, что при этом $\Phi_{\text{бок}}^D$ также стремится к нулю, имеем

$$\vec{D}_1 \vec{n}^\circ \Delta S + \vec{D}_2 \vec{n}^\circ \Delta S = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}. \quad (3.2.2)$$

В результате, предполагая, что поверхностные заряды распределены в виде бесконечно тонкого слоя, хотя реально они существуют как слой конечной, пусть и малой толщины, получаем

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \rho_S \Delta S, \quad (3.2.3)$$

где ρ_S – поверхностная плотность заряда.

Теперь, подставляя (3.2.3) в соотношение (3.2.2), сокращая все члены этого соотношения на ΔS , имеем

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \vec{n}^\circ = \rho_S,$$

и затем, учитывая, что $\vec{D} = \vec{n}^\circ D_n + \vec{\tau}^\circ D_\tau$, получаем

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S. \quad (3.2.4)$$

Таким образом, при переходе из одной среды в другую нормальная составляющая вектора \vec{D} изменяется скачком, причем величина скачка равна поверхностной плотности заряда.

Физическую причину возникновения скачка можно объяснить следующим образом. Пусть на поверхности раздела размещен положительный заряд (рис. 3.2.2). Тогда к составляющей D_{1n} добавляется имеющая такое же направление составляющая вектора электрической индукции, созданная поверхностью зарядом.

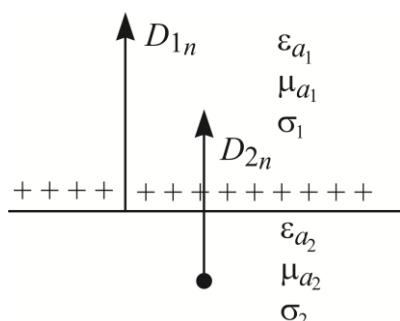


Рис. 3.2.2

В зависимости от величины ρ_S величина скачка может увеличиваться или уменьшаться.

Если же $\rho_S = 0$, то

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad (3.2.5)$$

и нормальные составляющие вектора \vec{D} непрерывны при переходе через границу раздела.

При $\rho_S = 0$, используя материальное уравнение $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$, которое справедливо для любых составляющих вектора, легко получить граничное условие для нормальной составляющей вектора \vec{E} в виде

$$E_{2n} = \frac{\epsilon_{a_1}}{\epsilon_{a_2}} E_{1n}, \quad (3.2.6)$$

т. е. величина разрыва здесь зависит от соотношения диэлектрических проницаемостей сред.

Граничные условия для нормальной составляющей вектора магнитной индукции \vec{B} получаем так же, как в предыдущем случае, используя рис. 3.2.1 и исходя из четвертого уравнения ЭД в интегральной форме:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

После выполнения аналогичных преобразований, с учетом того что $\Delta S \neq 0$, имеем

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (3.2.7)$$

следовательно, при переходе через поверхность раздела нормальная составляющая вектора \vec{B} не испытывает разрыва непрерывности.

Обращаясь к материальному уравнению $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$, получаем граничное условие для нормальной составляющей вектора \vec{H} :

$$H_{2n} = \frac{\mu_{a_1}}{\mu_{a_2}} H_{1n}. \quad (3.2.8)$$

3.3. Граничные условия для тангенциальных составляющих векторов

Разместим элементарный прямоугольник с размерами сторон $2\Delta h$ и Δl перпендикулярно поверхности раздела сред S , которая разделяет его по высоте пополам (рис. 3.3.1).

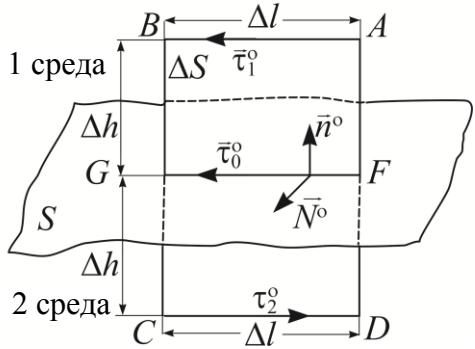


Рис. 3.3.1

Используем для вывода тангенциальной составляющей вектора напряженности электрического поля второе уравнение ЭД в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

В нашем случае замкнутый контур $L(ABCD)$ охватывает площадь прямоугольника ΔS . Выбранное направление обхода образуют правовинтовую систему.

контура L и нормаль \vec{N}° к ΔS образуют правовинтовую систему.

Перепишем предыдущее соотношение применительно к рис. 3.3.1:

$$\vec{E}_1 \vec{\tau}_1^\circ \Delta l + \vec{E}_2 \vec{\tau}_2^\circ \Delta l + C_{\text{6OK}}^E = - \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_{\text{cp}} \Delta \vec{S},$$

где $\vec{E}_1\vec{\tau}_1^\circ\Delta l$ и $\vec{E}_2\vec{\tau}_2^\circ\Delta l$ – части циркуляции вектора \vec{E} вдоль сторон прямоугольника AB и CD соответственно; $C_{\text{бок}}^E$ – часть циркуляции вектора \vec{E} вдоль боковых сторон прямоугольника; $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_{\text{ср}}$ – средняя величина изме-

нения вектора магнитной индукции со временем, $\Delta \vec{S} = 2\Delta h \Delta I \vec{N}^\circ$.

На сторонах AB и CD контура L ввиду их малости составляющие вектора \vec{E} можно считать постоянными. Стягивая эти стороны к плоскости раздела ($\Delta h \rightarrow 0$) и учитывая, что $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_{\text{ср}}$ для любых сред конечная вели-

чина, а $\Delta S \rightarrow 0$, получаем, что $C_{\text{бок}}^E \rightarrow 0$ и $\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left[\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_{\text{cp}} 2\Delta h \Delta l \vec{N}^\circ \right] \rightarrow 0$.

Тогда, так как $\vec{\tau}_1^\circ = \vec{\tau}^\circ = -\vec{\tau}_2^\circ$, имеем, поскольку $\Delta l \neq 0$,

$$\vec{E}_1 \vec{\tau}_1^\circ + \vec{E}_2 \vec{\tau}_2^\circ = \vec{\tau}^\circ (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0,$$

и, с учетом того что $\vec{E} = \vec{n}^\circ E_n + \vec{\tau}^\circ E_\tau$, приходим к равенству

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (3.3.1)$$

т. е. тангенциальная составляющая вектора \vec{E} остается непрерывной при переходе через границу раздела сред (рис. 3.3.2).

Обращаясь к материальному уравнению $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ и подставляя его в соотношение (3.3.1), получаем

$$D_{2\tau} = \frac{\epsilon_{a_2}}{\epsilon_{a_1}} D_{1\tau}, \quad (3.3.2)$$

$$\begin{array}{c} 1 \text{ среда} \\ \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{a_1} \\ \mu_{a_1} \longrightarrow E_{1\tau} \end{array} \right. \\ \hline \longrightarrow E_{2\tau} \\ 2 \text{ среда} \\ \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{a_2} \\ \mu_{a_2} \end{array} \right. \end{array}$$

т. е. величина разрыва тангенциальной составляющей вектора \vec{D} определяется соотношением диэлектрических проницаемостей сред.

При выводе граничных условий для тангенциальной составляющей вектора напряженности магнитного поля \vec{H} используем, применительно к рис. 3.3.1, первое уравнение ЭД в интегральной форме

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S},$$

откуда

$$\vec{H}_1 \vec{\tau}_1^\circ \Delta l + \vec{H}_2 \vec{\tau}_2^\circ \Delta l + C_{\text{бок}}^H = \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)_{\text{cp}} 2\Delta h \Delta l \vec{N}^\circ. \quad (3.3.3)$$

Полагая параметры сред и векторы поля конечными величинами, приходим к тому, что величины \vec{j} и \vec{j}_{cm} тоже конечны и при $\Delta h \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\vec{j} + \vec{j}_{\text{cm}} \right)_{\text{cp}} 2\Delta h \Delta l \vec{N}^\circ \rightarrow 0 \text{ и } C_{\text{бок}}^H \rightarrow 0.$$

Тогда

$$(\vec{H}_1 \vec{\tau}_1^\circ + \vec{H}_2 \vec{\tau}_2^\circ) \Delta l = 0,$$

и так как $\Delta l \neq 0$, а $\vec{\tau}^\circ = \vec{\tau}_1^\circ = -\vec{\tau}_2^\circ$, то

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (3.3.4)$$

и, следовательно, тангенциальная составляющая вектора \vec{H} остается непрерывной при переходе через границу раздела сред.

С помощью материального уравнения $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ из соотношения (3.3.4) получаем

$$B_{2\tau} = \frac{\mu_{a_2}}{\mu_{a_1}} B_{1\tau}.$$

Для понимания отличия в граничных условиях для нормальных и тангенциальных составляющих рассмотрим их поведение на границе раздела сред для вектора напряженности электрического поля \vec{E} . Пусть две изотропные среды характеризуются соответственно значениями параметров ϵ_{a_1}

и ε_{a_2} , причем $\varepsilon_{a_2} > \varepsilon_{a_1}$. Величина вектора поляризованности \vec{P} также будет различна в этих средах. Если вектор напряженности электрического поля \vec{E} направлен перпендикулярно границе раздела, то так же будет направлен и связанный с ним вектор \vec{P} , и, как следствие, на границе возникнут нескомпенсированные поверхностные заряды (рис. 3.3.3).

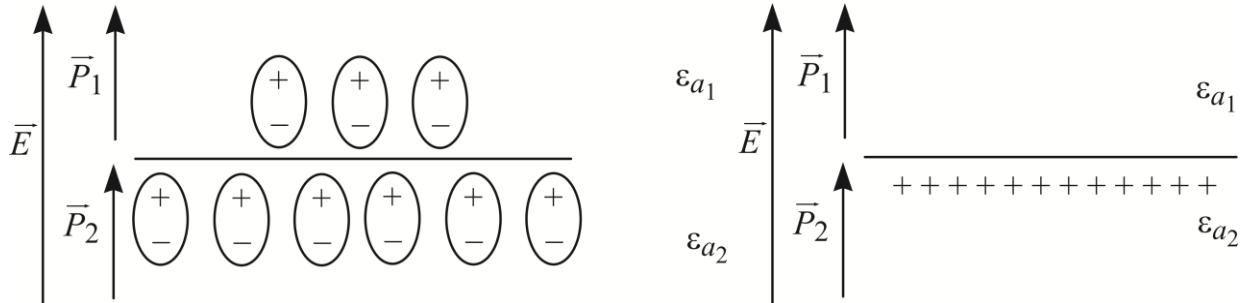


Рис. 3.3.3

Избыток молекулярных диполей во второй среде по сравнению с первой приводит в данном случае к образованию положительных поверхностных зарядов, что и дает, как уже было показано, разрыв непрерывности векторов поля. При касательном расположении вектора \vec{E} относительно границы раздела поверхностные заряды не возникают и разрыва непрерывности вектора поля не происходит. Аналогичные рассуждения можно привести и для вектора \vec{B} , принимая во внимание направление магнитных моментов молекул.

Общий вывод, который можно сделать, анализируя полученные граничные условия, заключается в том, что на границе раздела сред электрические и магнитные векторы ЭМП преломляются. Покажем это на примере поведения вектора \vec{E} на границе раздела сред (рис. 3.3.4).

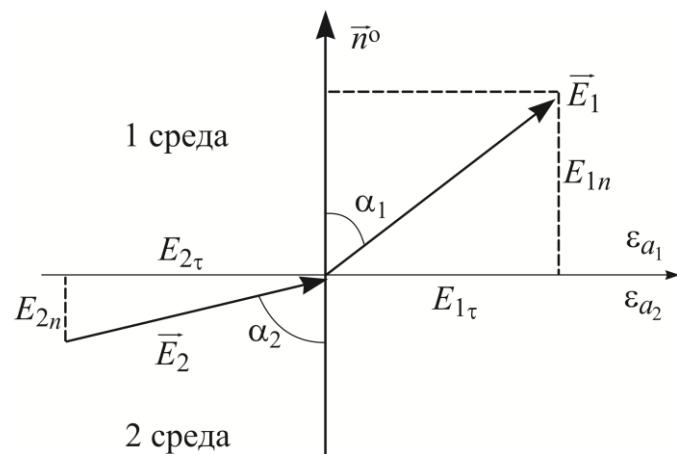


Рис. 3.3.4

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}$ и $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}$, то используя граничные условия (3.2.6) и (3.3.1), получаем

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\varepsilon_{a_2}}{\varepsilon_{a_1}} \operatorname{tg}\alpha_1,$$

т. е. векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 направлены по-разному относительно нормали \vec{n}° к границе раздела.

Так как в изотропных средах вектор \vec{E} параллелен вектору \vec{D} , то это же относится и к вектору \vec{D} . Вывод справедлив и для векторов \vec{H} и \vec{B} на границе раздела сред с различными значениями магнитной проницаемости.

Полученные граничные условия применимы к границам раздела любых сред за исключением границы раздела с идеальным проводником.

3.4. Граничные условия на поверхности идеального проводника

Напомним, что идеальным проводником называется среда, обладающая бесконечно большой проводимостью. К идеальным проводникам можно отнести сверхпроводящие вещества при низких температурах. При обычных температурах представление о бесконечно большой проводимости является идеализацией, но оно широко используется для решения практических задач. Например, при рассмотрении переменного ЭМП вблизи металлических проводников (внутри волноводов) последние часто заменяют идеально проводящей средой, что облегчает решение задачи.

В идеально проводящей среде ($\sigma = \infty$) переменное ЭМП отсутствует. Это прямо следует из закона Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Действительно, если вектор $\vec{E} \neq 0$, то при $\sigma = \infty$ должна возникнуть бесконечно большая плотность тока, что физически невозможно. Поэтому в идеальном проводнике напряженность электрического поля равна нулю, и тогда из второго уравнения Максвелла в дифференциальной форме получаем $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, т. е. вектор магнитной индукции \vec{B} есть постоянная величина, что для переменного ЭМП возможно только при $\vec{B} = 0$.

Таким образом, переменное ЭМП в идеальном проводнике отсутствует, и, следовательно, отсутствует и ток проводимости внутри проводника, который может протекать только по поверхности идеального проводника и называется поверхностным током.

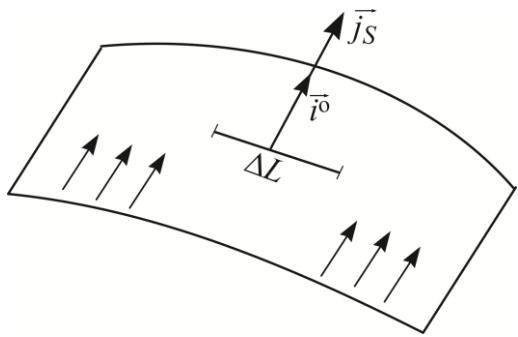


Рис. 3.4.1

Плотность поверхностного тока определяется соотношением

$$\vec{j}_s = \vec{i}^{\circ} \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta I_s}{\Delta L}, \frac{A}{m},$$

где \vec{i}° – орт, указывающий направление движения положительных зарядов; ΔL – элемент линии, перпендикулярной орту \vec{i}° ; ΔI_s – поверхностный ток, протекающий через ΔL (рис. 3.4.1).

Из ранее полученных условий (3.2.4), (3.2.7) и (3.3.1) с учетом отсутствия переменного ЭМП внутри идеального проводника имеем на его поверхности следующие граничные условия:

$$D_n = \rho_s, \quad (3.4.1)$$

$$B_n = 0, \quad (3.4.2)$$

$$E_{\tau} = 0. \quad (3.4.3)$$

При получении же граничного условия для H_{τ} в случае идеального проводника необходимо вновь обратиться к исходному соотношению (3.3.3), в котором правая часть полагалась равной нулю. К этому, в частности, приводило то, что величина плотности тока проводимости \vec{j} считалась конечной. Однако наличие на идеальном проводнике поверхностного тока, протекающего в слое нулевой толщины, должно было бы соответствовать бесконечно большому значению \vec{j} , если бы такой ток мог существовать. Поэтому на границе раздела с идеальным проводником должно выполняться предельное соотношение

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\vec{j} 2\Delta h \Delta l \vec{N}^{\circ}) = \vec{j}_s \vec{N}^{\circ} \Delta l,$$

которое и определяет плотность поверхностных токов, протекающих по границе раздела.

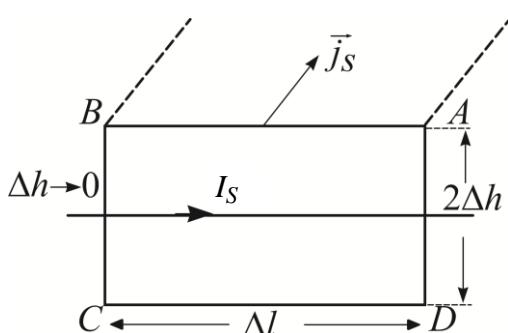


Рис. 3.4.1, а

Действительно, как бы ни сжимался контур ABCD (рис. 3.3.1), все равно величина тока при наличии поверхностных токов в ноль не обращается и будет равна $\vec{j}_s \vec{N}^{\circ} \Delta l$ (рис. 3.4.1, а).

С учетом того что $\vec{\tau}^{\circ} = [\vec{N}^{\circ} \vec{n}^{\circ}]$, из соотношения (3.3.3) после преобразования имеем

$$\vec{H} [\vec{N}^\circ \vec{n}^\circ] = \vec{j}_S \vec{N}^\circ$$

или

$$[\vec{n}^\circ \vec{H}] \vec{N}^\circ = \vec{j}_S \vec{N}^\circ.$$

Поскольку последнее соотношение выполняется при любом направлении \vec{N}° , то $[\vec{n}^\circ \vec{H}] = \vec{j}_S$. Расположение векторов показано на рис. 3.4.2. Раскладывая вектор \vec{H} по составляющим $\vec{H} = \vec{n}^\circ H_n + \vec{\tau}^\circ H_\tau$ и выполнив преобразование, получим

$$H_\tau = j_S. \quad (3.4.4)$$

Из граничных условий (3.4.1)–(3.4.4) для идеального проводника следует:

1) нормальная составляющая вектора \vec{D} испытывает разрыв непрерывности на границе с идеальным проводником;

2) нормальная составляющая вектора \vec{B} всегда равна нулю на идеально проводящей поверхности, т. е. вектор \vec{B} вблизи такой поверхности всегда ориентирован по касательной к ней (рис. 3.4.3);

3) тангенциальная составляющая вектора \vec{E} на поверхности идеального проводника всегда равна нулю, т. е. вектор \vec{E} ориентирован всегда по нормали к этой поверхности (рис. 3.4.3);

4) тангенциальная составляющая вектора \vec{H} испытывает разрыв непрерывности, по величине равный плотности поверхностного тока.

В качестве примера на рис. 3.4.4 показано направление векторных линий основной волны H_{10} в прямоугольном волноводе.

Граничные условия (3.4.1)–(3.4.4) можно разделить на две группы: первая (соотношения (3.4.2), (3.4.3)) – определяет структуру ЭМП вблизи идеально проводящей поверхности, вторая (соотношения (3.4.1), (3.4.1)) – дает возможность по известным значениям H_τ и D_n определить поверхностные токи и заряды.

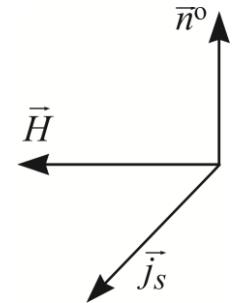


Рис. 3.4.2

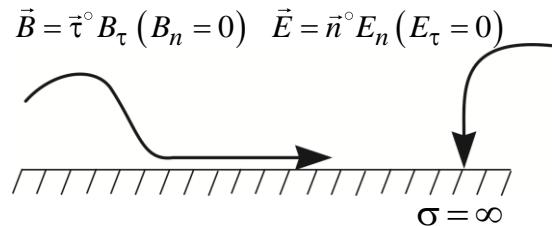


Рис. 3.4.3

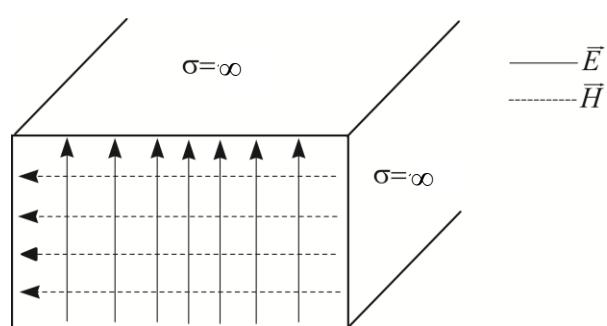


Рис. 3.4.4

Как было показано ранее, для переменного ЭМП при записи уравнений Максвелла в дифференциальной форме третье уравнение есть следствие первого, а четвертое – второго. Поэтому граничные условия для нормальных составляющих векторов поля \vec{D} и \vec{B} , полученные из третьего и четвертого уравнений ЭД, автоматически выполняются, если обеспечены граничные условия для тангенциальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} .

Вопросы для самопроверки

1. Что такое «граница раздела сред»?
2. Почему на границе раздела сред нельзя использовать уравнения Максвелла в дифференциальной форме?
3. Изложите последовательность получения граничных условий.
4. Какие составляющие векторов электромагнитного поля на границе сред непрерывны, а какие меняются скачком?
5. Почему в идеальном проводнике не существует переменное электромагнитное поле?
6. Дайте определение плотности поверхностного электрического тока и укажите ее размерность.
7. Запишите и объясните граничные условия для составляющих векторов электромагнитного поля на поверхности идеального проводника.

ГЛАВА 4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Первоначальные представления об ЭМП основывались на опытах, таких как механическое взаимодействие заряженных частиц, поворот рамки с током в магнитном поле и т. п. Из этих экспериментов видно, что ЭМП совершает работу и, следовательно, обладает энергией. Само ЭМП обнаруживается в первую очередь по своей энергии, например, при радиоприеме переменное ЭМП поступает в то место, где оно фиксируется (вдали от источника) в форме ЭМВ, которая и переносит энергию ЭМП на требуемые расстояния.

Представление о перемещении энергии упругой волны в сплошных средах и связанное с ним понятие «поток мощности» ввел впервые Н. А. Умов (1877). Применительно к ЭМП энергетические соотношения были установлены Пойнтингом в 1884 г.

Теорема Умова – Пойнтинга, которая будет рассмотрена в этой главе, относится к наиболее важным положениям теории ЭМП, определяя баланс его энергии через векторы поля.

Действительно, с введением материальных уравнений и граничных условий система уравнений ЭД становится математически полной. Однако в физическом отношении система нуждается в дополнении, устанавливающем связь между векторами поля и величинами, измеряемыми на практике, т. е. мощностью ЭМП. Этим дополнением и является теорема Умова – Пойнтинга, вытекающая из уравнений Максвелла.

4.1. Физические основы баланса мощностей поля

Рассмотрим объем V , ограниченный поверхностью S и заполненный однородным, изотропным веществом с параметрами $\epsilon_a, \mu_a, \sigma$ (рис. 4.1.1). К объему извне подключен сторонний источник ЭДС, создающий мощность P_{ct} и характеризуемый плотностью стороннего тока \vec{j}_{ct} .

Мощность стороннего источника в общем случае расходуется на следующие процессы:

- тепловые (джоулевы) потери, обусловливающие нагрев вещества;
- изменение энергии ЭМП внутри объема;
- перенос энергии ЭМП через границы объема.

Согласно закону сохранения энергии можно записать

$$P_{ct} = P_{\pi} + \frac{\partial W}{\partial t} + P_{\Sigma}, \quad (4.1.1)$$

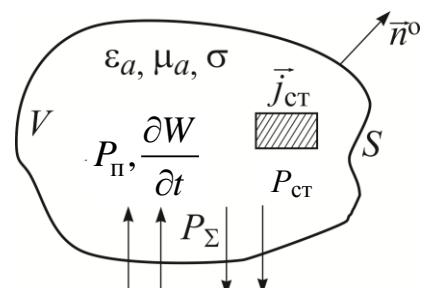


Рис. 4.1.1

где P_{Π} – мощность, расходуемая на тепловые потери; $\frac{\partial W}{\partial t}$ – мощность, идущая на изменение энергии в объеме; P_{Σ} – мощность, проходящая через поверхность, охватывающую объем.

Уравнение (4.1.1) называется уравнением баланса мощности в объеме V в данный момент времени (мгновенная мощность). Конкретные выражения для всех величин, входящих в соотношение (4.1.1), через векторы ЭМП и определяет теорема Умова – Пойнтинга.

4.2. Теорема Умова – Пойнтинга

Для получения теоремы Умова – Пойнтинга используют векторные уравнения Максвелла в вещественной форме

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}_{\text{ст}} + \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Для перехода к энергетическому соотношению (4.1.1) умножим скалярно первое уравнение на вектор \vec{E} , а второе – на вектор \vec{H} (тогда разность каждого члена в этих уравнениях будет Вт/м^2):

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{E} \vec{j}_{\text{ст}} + \vec{E} \vec{j} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (4.2.1)$$

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.2.2)$$

Теперь вычтем (4.2.1) из (4.2.2) и, используя преобразование

$$\operatorname{div} [\vec{a} \vec{b}] = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b},$$

а также материальные уравнения

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \vec{B} = \mu_a \vec{H},$$

приходим к выражению

$$-\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] = \vec{E} \vec{j}_{\text{ст}} + \vec{E} \vec{j} - \mu_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Интегрируя все члены уравнения (4.2.3) по объему V и применяя к члену, стоящему слева, преобразование Остроградского – Гаусса, с учетом того что

$$\epsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right),$$

получаем

$$\int_V \vec{E} \vec{j}_{ct} dV = \int_V \vec{E} \vec{j} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV + \oint_S [\vec{E} \vec{H}] d\vec{S}, \quad (4.2.4)$$

где во втором члене справа заменен порядок операций интегрирования и дифференцирования.

Соотношение (4.2.4) представляет теорему Умова – Пойнтинга в интегральной форме, причем подынтегральные выражения дают плотность мощности, а сами интегралы – мощность.

Выясним физическое содержание отдельных слагаемых этого соотношения.

В первой главе была определена мгновенная мощность тепловых потерь в единице объема проводящей среды, что соответствует первому члену в правой части соотношения (4.2.4). Используя материальное уравнение $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, легко показать, что тепловые потери есть чисто вещественная величина:

$$P_{\pi} = \int_V \vec{E} \vec{j} dV = \int_V \sigma |E|^2 dV. \quad (4.2.5)$$

Поэтому, если $\sigma = 0$, то $P_{\pi} = 0$, т. е. в идеальном диэлектрике тепловые потери отсутствуют, а если $\sigma > 0$, то $P_{\pi} > 0$ и, таким образом, всегда $P_{\pi} \geq 0$.

Мощность сторонних источников, расходуемая на тепловые потери, теряется безвозвратно.

Интеграл в левой части соотношения (4.2.4) по форме аналогичен рассмотренному выше, но вместо j в него входит \vec{j}_{ct} , поэтому он определяет мощность сторонних источников. Положительное направление движения зарядов устанавливает направление тока. Энергия тока отдается ЭМП при торможении зарядов, для чего необходимо, чтобы вектор напряженности электрического поля имел составляющую, направленную противоположно направлению тока. При этом произведение $\vec{E} \vec{j}_{ct}$ будет отрицательным, и тогда $P_{ct} \geq 0$, т. е. мощность, которую отдает сторонний источник ЭМП в объем, будет положительная, причем в общем случае мощность сторонних источников – комплексная величина.

Для понимания физической сущности двух последних слагаемых в выражении (4.2.4) рассмотрим частные варианты.

Поскольку ЭМВ распространяется с конечной скоростью, тогда, если поверхность S будет находиться на столь большом расстоянии от источника, что в данный момент времени ЭМВ ее не достигнет, очевидно, и векторы \vec{E} и \vec{H} на этой поверхности отсутствуют, и, следовательно, последнее слагаемое в правой части выражения (4.2.4) обращается в нуль. С другой стороны, так как ЭМП не достигла границ объема, то и мощность в уравнении

(4.1.1), проходящая через эти границы, равна нулю ($P_{\Sigma} = 0$). Поэтому в этом случае мощность стороннего источника расходуется только на нагрев среды и изменение со временем энергии внутри объема.

Можно также объяснить физический смысл второго члена в правой части выражения (4.2.4) с помощью следующих рассуждений. Предположим, что вещества, заполняющее объем, – идеальный диэлектрик, следовательно, тепловые потери отсутствуют, а сам объем окружен идеально проводящей металлической поверхностью. На этой поверхности $E_{\tau} = 0$, и так как

$$[E_n \cdot \vec{n}^{\circ}, \vec{H}] \vec{n}^{\circ} dS = 0,$$

то значение поверхностного интеграла равно нулю. При этих предположениях мощность стороннего источника расходуется только на изменение энергии ЭМП внутри объема, поэтому

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\epsilon_a E^2 + \mu_a H^2) dV, \quad (4.2.6)$$

а мгновенные значения энергии ЭМП внутри объема можно представить как сумму энергий электрического и магнитного полей

$$W = W_E + W_H = \int_V w_E dV + \int_V w_H dV, \quad (4.2.7)$$

где $w_E = \frac{\epsilon_a E^2}{2}$ – объемная плотность энергии электрического поля;

$w_H = \frac{\mu_a H^2}{2}$ – объемная плотность энергии магнитного поля.

Что касается физической сущности поверхностного интеграла, то предположим вновь, что объем заполнен идеальным диэлектриком ($\sigma = 0$) и энергии электрического и магнитного полей равны ($W_E = W_H$). Тогда вся мощность ЭМП стороннего источника уходит в пространство, окружающее объем, в виде ЭМВ, и поверхностный интеграл определяет мгновенную мощность излучения

$$P_{\Sigma} = \oint_S [\vec{E} \vec{H}] d\vec{S} = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \oint_S \vec{\Pi} \vec{n}^{\circ} d\vec{S}, \quad (4.2.8)$$

где \vec{n}° – орт внешней нормали к поверхности, окружающей объем

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \vec{H}] \quad (4.2.9)$$

– мгновенное значение вектора Пойнтинга, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$. Вектор Пойнтинга характеризует величину и направление плотности потока энергии, протекающей

в единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно распространению энергии.

Взаимное расположение векторов $\vec{\Pi}$, \vec{E} и \vec{H} показано на рис. 4.2.1.

Если произведение $\vec{\Pi} \vec{n}^\circ > 0$, то $P_\Sigma > 0$ и энергия ЭМП излучается из объема, а если $\vec{\Pi} \vec{n}^\circ < 0$, то $P_\Sigma < 0$ и энергия входит в объем.

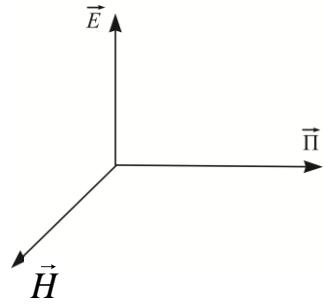


Рис. 4.2.1

4.3. Баланс комплексных мощностей поля

Уравнение (4.1.1) записано, как отмечалось, для мгновенных значений мощностей. При монохроматическом поле чаще рассматривают не мгновенные значения мощности, а комплексные значения, подобные аналогичным мощностям, вводимым в электротехнике. Комплексные мощности представляют более общее понятие по сравнению с мгновенными мощностями. Вещественная часть комплексной мощности, или активная мощность, равна среднему за период значению мощности. Мнимая часть, или реактивная мощность, характеризует взаимный объем энергией источника с нагрузкой, и ее среднее значение за период равно нулю.

Поскольку метод комплексных амплитуд непосредственно применим только к линейным уравнениям (уравнениям Максвелла), то в нелинейных соотношениях к комплексным функциям можно перейти, используя ниже приведенные преобразования.

Если есть комплексное число $\dot{A} = a + ib$ и комплексно-сопряженное ему число $\dot{A}^* = a - ib$, то вещественная часть комплексного числа

$$\operatorname{Re} \dot{A} = a = \frac{1}{2} \left(\dot{A} + \dot{A}^* \right) \quad (4.3.1)$$

и аналогично для гармонического вектора

$$\operatorname{Re} \left(\dot{\vec{A}} e^{i\omega t} \right) = \frac{\dot{\vec{A}} e^{i\omega t} + \dot{\vec{A}}^* e^{-i\omega t}}{2}. \quad (4.3.1a)$$

Соответственно скалярное произведение мгновенных значений двух гармонических векторов будет

$$\begin{aligned} \vec{A}(t) \vec{B}(t) &= \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{A}} e^{i\omega t} \right) \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{B}} e^{i\omega t} \right) = \frac{\dot{\vec{A}} e^{i\omega t} + \dot{\vec{A}}^* e^{-i\omega t}}{2} \times \frac{\dot{\vec{B}} e^{i\omega t} + \dot{\vec{B}}^* e^{-i\omega t}}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\dot{\vec{A}} \dot{\vec{B}} e^{2i\omega t} + \dot{\vec{A}}^* \dot{\vec{B}}^* + \dot{\vec{A}}^* \dot{\vec{B}} + \dot{\vec{A}} \dot{\vec{B}}^* e^{-2i\omega t} \right). \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Обращаясь к (4.3.1a), получаем

$$\vec{A}(t)\vec{B}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{A}}\vec{B} e^{i\omega t} + \dot{\vec{A}}\vec{B}^* \right). \quad (4.3.3)$$

Среднее за период T значение произведения $\vec{A}\vec{B}$ дает

$$\left(\vec{A}\vec{B} \right)_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{A}(t)\vec{B}(t) dt. \quad (4.3.4)$$

Учитывая, что $\int_0^T e^{2i\omega t} dt = 0$, имеем

$$\left(\vec{A}\vec{B} \right)_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{A}}\vec{B}^* \right). \quad (4.3.5)$$

Подобным образом можно получить

$$\left(\vec{A}\vec{B} \right)_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{A}}\vec{B}^* \right] \quad (4.3.6)$$

и соответственно

$$(A^2)_{\text{cp}} = (\dot{\vec{A}}\dot{\vec{A}})_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{A}}\vec{B}^* \right) = \frac{1}{2} |\dot{\vec{A}}|^2. \quad (4.3.7)$$

Используем полученные соотношения для перехода от мгновенных значений к средним за период. Среднее за период значение вектора Пойнтига можно записать, исходя из (4.2.9) и используя (4.3.6), в виде

$$\vec{\Pi}_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}}\vec{H}^* \right] = \operatorname{Re} \tilde{\vec{\Pi}}, \quad (4.3.8)$$

где $\tilde{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}\vec{H}^* \right]$ – комплексный вектор Пойнтига, действительная часть

которого дает среднее значение вектора Пойнтига за период.

Средняя за период объемная плотность энергии электрического поля будет

$$w_{E_{\text{cp}}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\epsilon_a E^2}{2} dt,$$

и тогда с учетом (4.3.7) получим

$$w_{E_{\text{cp}}} = \frac{\epsilon_a |\dot{\vec{E}}|^2}{4}.$$

Соответственно среднее значение объемной плотности энергии магнитного поля

$$w_{H_{\text{cp}}} = \frac{\mu_a |\dot{\vec{H}}|^2}{4}.$$

Таким образом, средние за период энергии электрического и магнитного полей будут:

$$W_{E_{\text{cp}}} = \int_V w_{E_{\text{cp}}} dV, \quad (4.3.9)$$

$$W_{H_{\text{cp}}} = \int_V w_{H_{\text{cp}}} dV. \quad (4.3.10)$$

Для вывода соотношения баланса комплексной мощности ЭМП воспользуемся векторными уравнениями Максвелла в форме комплексных амплитуд. Запишем первое уравнение для комплексно-сопряженных значений векторов поля

$$\text{rot} \vec{H}^* = \vec{j}_{\text{ct}}^* + \vec{j}^* - i\omega \vec{D}^*, \quad (4.3.11)$$

а второе – для комплексных векторов

$$\text{rot} \vec{E}^* = -i\omega \vec{B}. \quad (4.3.12)$$

Умножив все члены уравнения (4.3.11) на вектор напряженности электрического поля в комплексной форме, а уравнения (4.3.12) – на комплексно-сопряженный вектор напряженности магнитного поля, получим

$$\vec{E} \text{rot} \vec{H}^* = \vec{E}^* \vec{j}_{\text{ct}}^* + \vec{E}^* \vec{j}^* - i\omega \vec{E}^* \vec{D}^*, \quad (4.3.13)$$

$$\vec{H}^* \text{rot} \vec{E}^* = -i\omega \vec{H}^* \vec{B}. \quad (4.3.14)$$

Вычитаем из уравнения (4.3.14) уравнение (4.3.13) и выполним с получившимся соотношением те же операции, что и при получении теоремы Умова – Пойнтинга для мгновенных значений векторов поля (4.2.4). В результате, умножив каждый член полученного выражения на 1/2 и проинтегрировав по объему, имеем

$$-\frac{1}{2} \int_V \vec{E}^* \vec{j}_{\text{ct}}^* dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{E}^* \vec{j}^* dV + i2\omega (W_{H_{\text{cp}}} - W_{E_{\text{cp}}}) + \frac{1}{2} \oint_S \left[\vec{E}^* \vec{H} \right] d\vec{s}. \quad (4.3.15)$$

Соотношение (4.3.15) и представляет уравнение баланса комплексной мощности, называемое также теоремой Умова – Пойнтинга для комплексной мощности, в интегральном виде.

Используя формулы (4.2.5) и (4.3.7), можно записать соотношение (4.3.15) таким образом:

$$\tilde{P}_{ct} = P_{n_{cp}} + i2\omega(W_{H_{cp}} - W_{E_{cp}}) + \tilde{P}_{\Sigma}, \quad (4.3.16)$$

из которого следуют отдельно равенства действительных и мнимых величин. Для действительных величин имеем уравнение баланса активных мощностей

$$\operatorname{Re} \tilde{P}_{ct} = P_{n_{cp}} + \operatorname{Re} \tilde{P}_{\Sigma} \quad (4.3.17)$$

или

$$P_{ct_{cp}} = P_{n_{cp}} + P_{\Sigma_{cp}}. \quad (4.3.17a)$$

Из уравнения (4.3.17a) видно, что при установившемся монохроматическом процессе среднее значение энергии ЭМП в рассматриваемом объеме не изменяется со временем. Это объясняется тем, что из-за периодичности процесса напряженности электрического и магнитного полей спустя период возвращаются к своим первоначальным значениям, и так как напряженности ЭМП прямо связаны с энергией ЭМП, то и она принимает исходное значение, в результате чего в соотношении (4.1.1) величина $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$.

Для мнимых частей получаем уравнение баланса реактивных мощностей

$$\operatorname{Im} \tilde{P}_{ct} = 2\omega(W_{H_{cp}} - W_{E_{cp}}) + \operatorname{Im} \tilde{P}_{\Sigma}. \quad (4.3.18)$$

Рассмотрим, как пример, объем, изолированный металлической поверхностью. Тогда поток комплексного вектора Пойнгинга через поверхность равен нулю и уравнения (4.3.17) и (4.3.18) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{P}_{ct} &= P_{n_{cp}}, \\ \operatorname{Im} \tilde{P}_{ct} &= 2\omega(W_{H_{cp}} - W_{E_{cp}}). \end{aligned}$$

Если положить $W_{H_{cp}} = W_{E_{cp}}$, то реактивная мощность стороннего источника равна нулю, и возникает резонанс для изолированной области, при котором в объеме происходит периодический переход энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно.

Для изолированной системы (объема) вводят такое понятие, как добродотность

$$Q = \frac{\omega W_{cp}}{P_{n_{cp}}}, \quad (4.3.19)$$

где $W_{\text{cp}} = W_{H_{\text{cp}}} + W_{E_{\text{cp}}}$ – запас энергии ЭМП в объеме или, учитывая, что

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$Q = 2\pi \frac{W_{\text{cp}}}{\Delta W},$$

где ΔW – изменение энергии ЭМП в объеме за период.

Следовательно, добротность изолированной системы есть увеличенное в 2π раз отношение запаса энергии системы W_{cp} к энергии, расходуемой за период T .

Резонанс возникает лишь на определенных резонансных частотах и зависит от конфигурации изолированного объема и электромагнитных параметров заполняющей его среды.

Примечание. На энергию ЭМП не распространяется принцип суперпозиции. Покажем это на простом примере. Пусть в объеме существуют два источника, создающие соответственно магнитные поля \vec{H}_1 и \vec{H}_2 с энергиями W_{H_1} и W_{H_2} . Для векторов напряженности магнитного поля согласно принципу суперпозиции имеем

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2,$$

но для энергии суммарного магнитного поля

$$\begin{aligned} W_{H_{\text{cp}}} &= \frac{1}{2} \int_V \mu_a |\vec{H}|^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \mu_a |\vec{H}_1|^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \mu_a |\vec{H}_2|^2 dV + \int_V \mu_a |\vec{H}_1 \vec{H}_2| dV = \\ &= W_{H_1} + W_{H_2} + W_{H_{12}}, \end{aligned}$$

где $W_{H_{12}}$ – взаимная энергия полей первого и второго источника. С формальной точки зрения $W_{H_{12}}$ – следствие квадратичной зависимости энергии от напряженности поля. Нарушение принципа сохранения энергии, конечно, не происходит, так как появление взаимной энергии требует дополнительной затраты энергии источников, если $W_{H_{12}} > 0$, и, напротив, сопровождается отдачей энергии, если $W_{H_{12}} < 0$.

Вопросы для самопроверки

1. Каково место теоремы Умова – Пойнтинга в решении задач электромагнитного поля?
2. Запишите уравнение баланса мгновенных мощностей электромагнитного поля и поясните его физический смысл.
3. Запишите мгновенное значение вектора Пойнтинга и объясните его физический смысл.
4. Приведите определение средних за период значений скалярных и векторных произведений двух монохроматических векторов.
5. Поясните энергетическое соотношение для среднего за период баланса мощности электромагнитного поля.
6. Приведите уравнения баланса для активных и реактивных мощностей и поясните их физический смысл.

ГЛАВА 5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

5.1. Классификация задач электродинамики

Уравнения Максвелла используются для решения разнообразных задач ЭД (например, определение электромагнитной совместимости различных радиоустройств, разработка линий передачи энергии ЭМП, расчет напряженности поля в радиолинии и т. п.). Все эти задачи подразделяются на прямые и обратные (рис. 5.1.1).

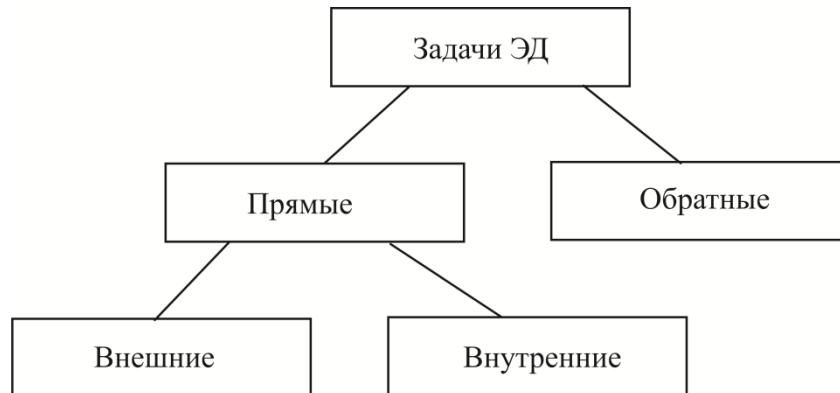


Рис. 5.1.1

Прямые задачи (или задачи анализа) заключаются в определении ЭМП, которое возникает в результате действия заданных источников в рассматриваемой области пространства.

Обратные задачи (или задачи синтеза) состоят в определении источников, которые создают ЭМП с требуемой структурой.

В прямых задачах часто задают краевые (граничные) условия, которым должно удовлетворять определяемое ЭМП, поэтому такие задачи называются краевыми. Большинство прямых задач можно разделить на внешние и внутренние.

Во внутренней задаче находится ЭМП в некоторой области V , ограниченной замкнутой поверхностью S (рис. 5.1.2). При наличии внутри области сторонних источников они должны быть заданы.

К внутренним задачам относятся исследования ЭМП в полых резонаторах и волноводах.

Во внешней задаче поле определяют во всем пространстве вне области V , в которой сторонние источники должны быть заданы на некотором расстоянии от произвольно выбранного центра координат. Наиболее простой случай внешней задачи – нахождение поля заданных источников в свободном пространстве (например, определение поля излучения антенн в космосе).

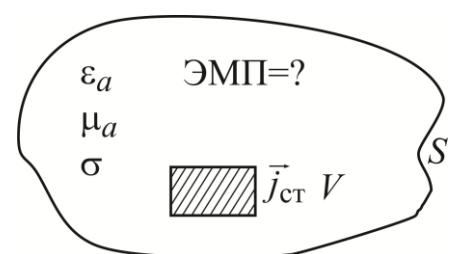


Рис. 5.1.2

Задачи ЭД решаются строгими и приближенными методами. К строгим методам относят, в частности, рассматриваемые далее:

- метод разделения полей;
- метод электродинамических потенциалов.

В основе всех методов как строгих, так и приближенных лежат уравнения Максвелла.

5.2. Теоремы единственности решения задач электродинамики

Как было отмечено, задачи ЭД решаются с помощью уравнений Максвелла, представляющих систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые допускают множество решений. Однако из физических представлений следует, что если условия эксперимента одинаковы, то и распределение поля не должно меняться. Поэтому к уравнениям Максвелла необходимо добавить дополнительные условия, с введением которых решение уравнений для данной конкретной задачи будет однозначным, единственным. Эти условия устанавливаются теоремами единственности решения задач ЭД. Другими словами, поскольку система уравнений Максвелла вместе с материальными уравнениями является математически полной системой, позволяющей по заданным начальным и граничным условиям однозначно определить ход электромагнитного процесса, то необходимо установить, какие именно условия являются необходимыми и достаточными. Можно сказать, что теорема единственности определяет требуемое число дополнительных условий.

5.3. Теорема единственности для внутренней задачи

Для внутренней задачи решение системы уравнений Максвелла сводится к нахождению векторов \vec{E} и \vec{H} в объеме V , заполненном средой с потерями, и в котором есть сторонний источник ЭДС (рис. 5.3.1). Решение будет единственным, если заданы начальные и краевые (граничные) условия.

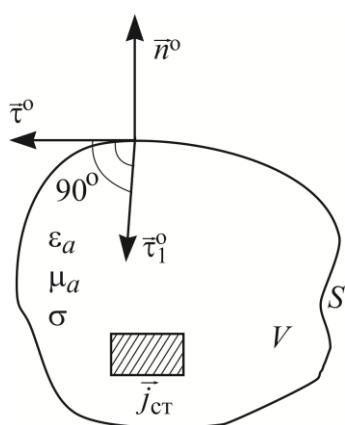


Рис. 5.3.1

Начальные условия – должны быть заданы значения векторов \vec{E} и \vec{H} в начальный момент времени ($t = 0$) во всех точках объема V .

Краевые условия – должны быть заданы тангенциальные составляющие векторов \vec{E} и \vec{H} в любой момент времени ($t > 0$) на замкнутой поверхности S , охватывающей объем V .

Поскольку векторы \vec{E} и \vec{H} направлены различно, то их тангенциальные составляющие имеют несовпадающие направления. На рис. 5.3.1 тангенциальная составляющая вектора \vec{E} направлена по орту $\vec{\tau}^0$, а тангенциальная составляющая \vec{H} – по орту $\vec{\tau}_1^0$.

Начальные условия не требуются при анализе установившихся монохроматических процессов. Их следует использовать только в переходных процессах или при отсутствии потерь в среде.

Границные условия в каждой точке поверхности S могут быть заданы в виде:

- а) составляющей E_τ на всей поверхности S – это E -задача;
- б) составляющей H_τ на всей поверхности S – это H -задача;
- в) составляющей E_τ на части поверхности S_1 и составляющей H_τ на части поверхности S_2 , причем $S_1 + S_2 = S$ – это EH -задача;
- г) отношения составляющих $\frac{E_\tau}{H_\tau} = Z_\tau$ – импедансное краевое условие,

причем $\operatorname{Re} Z_\tau \geq 0$ (орты $\vec{\tau}^\circ$ и $\vec{\tau}_1^\circ$ на поверхности S взаимно ортогональны).

Проведем доказательство теоремы единственности для внутренней задачи ЭД от противного. Пусть существуют два решения уравнений Максвелла для ЭМП в объеме V (и, следовательно, два различных поля), удовлетворяющие одному и тому же краевому условию. Например,

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau} = \dot{E}_\tau \text{ на всей поверхности } S, \quad (5.3.1)$$

где индексы 1 и 2 означают порядковый номер полей.

Поскольку значения векторов полей различны, то образуем разностное поле в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{E}}' &= \dot{\vec{E}}_1 - \dot{\vec{E}}_2, \\ \dot{\vec{H}}' &= \dot{\vec{H}}_1 - \dot{\vec{H}}_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.3.2)$$

где $\dot{\vec{E}}'$ и $\dot{\vec{H}}'$ – соответственно векторы электрической и магнитной напряженностей разностного поля.

Из линейности уравнений Максвелла следует, что и разностное поле удовлетворяет этим уравнениям, в которых будут отсутствовать сторонние источники. Чтобы показать это, из первого уравнения Максвелла в дифференциальном виде в форме комплексных амплитуд для первого поля вычтем такое же уравнение в этой же форме для второго поля:

$$\begin{aligned} -\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_1 &= \dot{\vec{j}}_{\text{ст}} + \sigma \dot{\vec{E}}_1 + i\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_1 \\ -\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_2 &= \dot{\vec{j}}_{\text{ст}} + \sigma \dot{\vec{E}}_2 + i\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_2. \end{aligned}$$

Тогда для разностного поля соответствующее уравнение будет

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}' = \sigma \dot{\vec{E}}' + i\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}'. \quad (5.3.3)$$

Граничное условие для тангенциальной составляющей напряженности электрического разностного поля, принимая во внимание (5.3.1), запишем как разность тангенциальных составляющих первого и второго полей:

$$\dot{E}'_\tau = \dot{E}_{1\tau} - \dot{E}_{2\tau} = 0 \text{ на } S. \quad (5.3.4)$$

Это граничное условие означает, что мощность разностного поля, проходящая через поверхность S , охватывающую объем V , равна нулю:

$$\tilde{P}'_\Sigma = \frac{1}{2} \oint_S \left[\dot{\vec{E}}', \vec{H}'^* \right] d\vec{S} = 0, \quad (5.3.5)$$

так как

$$\left[\dot{\vec{E}}', \vec{H}'^* \right] \vec{n}^\circ dS = \left[\vec{n}^\circ dS, \vec{n}^\circ \dot{E}'_n \right] \vec{H}'^* = 0.$$

Поскольку объем V изолирован ($\tilde{P}'_\Sigma = 0$) и в нем нет сторонних источников, поле равно нулю во всем объеме.

Действительно, применяя к разностному полю, для которого $P'_{ct} = 0$ и $\tilde{P}'_\Sigma = 0$, теорему Умова – Пойнтинга в интегральной форме для комплексной мощности (4.3.15), имеем

$$\frac{1}{2} \int_V \dot{\vec{E}}' \vec{j}'^* dV + i2\omega \left(W'_{H_{cp}} - W'_{E_{cp}} \right) = 0. \quad (5.3.6)$$

Разделяя вещественную и мнимую части уравнения (5.3.6), получаем

$$\frac{1}{2} \int_V \sigma \left| \dot{\vec{E}}' \right|^2 dV = 0, \quad (5.3.7)$$

$$\int_V \frac{\mu_a \left| \dot{\vec{H}}' \right|^2}{4} dV = \int_V \frac{\varepsilon_a \left| \dot{\vec{E}}' \right|^2}{4} dV. \quad (5.3.8)$$

При $\sigma > 0$ соотношение (5.3.7) удовлетворяется только при $\dot{\vec{E}}' = 0$, а отсюда, из выражения (5.3.8), следует, что при этом и $\dot{\vec{H}}' = 0$. Тогда $\dot{\vec{E}}_1 = \dot{\vec{E}}_2$ и $\dot{\vec{H}}_1 = \dot{\vec{H}}_2$ в объеме V , так как векторы разностного поля равны нулю. Таким образом, теорема доказана.

Если же в объеме отсутствуют потери ($\sigma = 0$), то уравнение (5.3.7) выполняется и при $\dot{\vec{E}}' \neq 0$, и тогда условие $W'_{H_{cp}} = W'_{E_{cp}}$ физически означает переход энергии электрического поля в энергию магнитного поля и наоборот, и, таким образом, внутри объема происходят свободные колебания

(резонанс), что возможно лишь при совпадении частоты поля с одной из резонансных частот объема. Поэтому при отсутствии потерь в ограниченном объеме единственность решения будет, если частота поля отличается от резонансных частот объема.

Следовательно, можно заключить, что внутри ограниченного объема не могут существовать два разных поля, удовлетворяющие одним и тем же начальным и краевым условиям, сформулированным теоремой единственности.

5.4. Теорема единственности для внешней задачи

Во внешней задаче надо определить ЭМП в безграничном пространстве вне объема V , охваченного поверхностью S . Пусть это пространство представляет объем V_1 , заполненный веществом с потерями и заключенный между поверхностями S и S_∞ , причем последняя находится на бесконечно большом расстоянии от начала координат (точка 0) (рис. 5.4.1). Сторонний источник расположен внутри объема V на конечном расстоянии от начала координат.

На поверхности S должны выполняться те же граничные условия, что и во внутренней задаче. Применяя теорему Умова – Пойнинга к разностному полю в объеме V_1 , получим

$$\begin{aligned} -i2\omega \int_{V_1} \left(\frac{\mu_a |\dot{\vec{H}}'|^2}{4} - \frac{\epsilon_a |\dot{\vec{E}}'|^2}{4} \right) dV = \\ = \frac{1}{2} \int_{V_1} \sigma |\vec{E}'|^2 dV + \frac{1}{2} \oint_S \left[\dot{\vec{E}}', \vec{H}'^* \right] \vec{n}^* dS + \frac{1}{2} \oint_{S_\infty} \left[\dot{\vec{E}}', \vec{H}'^* \right] \vec{n}^* dS. \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Отсюда видно, что если при $r \rightarrow \infty$ мощность разностного поля, проходящая через поверхность S_∞ , стремится к нулю, т. е.

$$\tilde{P}'_\Sigma = \frac{1}{2} \oint_{S_\infty} \left[\dot{\vec{E}}', \vec{H}'^* \right] d\vec{S} \rightarrow 0,$$

то придет к предыдущему случаю внутренней задачи. При $r \rightarrow \infty$ поверхность S_∞ можно рассматривать как сферическую поверхность, и так как элемент поверхности

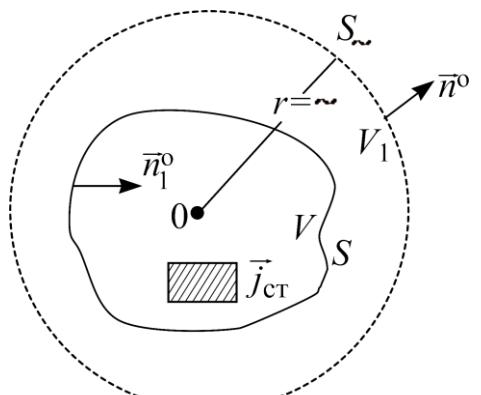


Рис. 5.4.1

$$dS = r^2 d\Omega,$$

где $d\Omega$ – элементарный телесный угол, то для выполнения условия $\tilde{P}'_\Sigma \rightarrow 0$ необходимо, чтобы векторы поля \vec{E}' и \vec{H}' убывали быстрее, чем $1/r$, т. е. должно быть $\vec{E}' \dots \frac{\text{const}}{r^\alpha}$ и $\vec{H}' \dots \frac{\text{const}}{r^\beta}$, где $\frac{\alpha}{\beta} > 1$. В любой реальной среде имеются потери энергии волны, и это условие, называемое условием на бесконечность, всегда выполняется.

В безграничной среде без потерь (вакуум) для выполнения теоремы единственности для внешней задачи вместо условия убывания поля с расстоянием требуется, чтобы не было ЭМВ, идущих к источнику.

Подводя итоги, можно сказать, что значение теорем единственности заключается в том, что можно получить решение уравнений Максвелла различными способами и любое из них является правильным, единственным, если соблюдены условия этих теорем.

5.5. Волновые уравнения для векторов поля

Рассмотрим однородную изотропную среду без потерь ($\sigma = 0$). Пусть в среде существует монохроматическое поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла, записанным в форме комплексных амплитуд:

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{j}}_{\text{ст}} + i\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}, \quad (5.5.1)$$

$$\text{rot} \dot{\vec{E}} = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}, \quad (5.5.2)$$

$$\epsilon_a \text{div} \dot{\vec{E}} = \dot{\rho}, \quad (5.5.3)$$

$$\text{div} \dot{\vec{H}} = 0. \quad (5.5.4)$$

Обычно в системе уравнений (5.5.1)–(5.5.4) заданными являются источники ЭМП – заряды и сторонние токи, а требуется найти значения векторов поля.

Недостаток представленных уравнений заключается в том, что в каждое векторное уравнение (5.5.1) и (5.5.2), из которых, как было показано ранее, вытекали уравнения (5.5.3) и (5.5.4), входят векторы напряженности как электрического, так и магнитного полей, тогда как целесообразно иметь уравнения, которые бы содержали векторы \vec{E} и \vec{H} по отдельности.

Для разделения векторов поля применим операцию rot к уравнению (5.5.1):

$$\text{rot} \text{rot} \dot{\vec{H}} = \text{rot} \dot{\vec{j}}_{\text{ст}} + i\omega \epsilon_a \text{rot} \dot{\vec{E}}.$$

Подставляя сюда выражение для $\text{rot} \vec{E}$ из уравнения (5.5.2) и учитывая, что $\text{rot} \text{rot} \vec{H} = \text{grad} \text{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}$, а $\text{div} \vec{H} = 0$, имеем

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = -\text{rot} \vec{j}_{\text{ct}}, \quad (5.5.5)$$

где $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ – волновое число, ∇^2 – оператор Лапласа или лапласиан.

Для свободного пространства волновое число будет

$$k = 2\pi \frac{c}{\lambda} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Проведя аналогичные операции с уравнением (5.5.2) и учитывая, что $\text{div} \vec{E} = \dot{\rho} / \epsilon_a$, получим

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = i\omega \mu_a \vec{j}_{\text{ct}} + \frac{1}{\epsilon_a} \text{grad} \dot{\rho}. \quad (5.5.6)$$

Уравнения (5.5.5) и (5.5.6) представляют векторные линейные дифференциальные уравнения второго порядка и называются приведенными неоднородными волновыми уравнениями.

Если источники поля отсутствуют, то получаем однородные волновые уравнения, а если при этом еще имеем среду с потерями ($\sigma \neq 0$), то приходим к векторным однородным уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 \vec{H} + \tilde{k}^2 \vec{H} = 0, \quad (5.5.7)$$

$$\nabla^2 \vec{E} + \tilde{k}^2 \vec{E} = 0, \quad (5.5.8)$$

где $\tilde{k} = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_a}$ – комплексное волновое число, $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right)$.

Трудность прямого использования уравнений (5.5.5) и (5.5.6) для нахождения векторов поля заключается в том, что их правые части содержат не сами источники, а операции пространственного дифференцирования над ними. При определенном задании источников их производные могут обращаться в бесконечность, что делает применение неоднородных волновых уравнений проблематичным. Поэтому волновые уравнения для векторов \vec{E} и \vec{H} обычно применяют в тех случаях, когда источники поля расположены за пределами рассматриваемой области, т. е. когда неоднородные волновые уравнения переходят в однородные вида (5.5.7) и (5.5.8).

К недостаткам следует отнести и то обстоятельство, что для определения двух векторов поля \vec{E} и \vec{H} в уравнениях (5.5.7) и (5.5.8) требуется найти их шесть составляющих по координатным осям.

В общем случае прибегают к искусственному приему: вводят некие вспомогательные функции, определяют их, а потом через них вычисляют векторы \vec{E} и \vec{H} .

5.6. Электродинамические потенциалы

Часто в качестве вспомогательных функций используют электродинамические потенциалы \vec{A} и $\vec{\phi}$. Вводят их следующим образом. Исходят из четвертого основного уравнения ЭД в форме комплексных амплитуд

$$\operatorname{div} \dot{\vec{B}} = 0$$

и известного из векторного анализа тождества, справедливого для произвольной векторной функции \vec{a} , которую можно дважды дифференцировать по пространственным координатам

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0.$$

Тогда вектор магнитной индукции может быть выражен через ротор вспомогательного вектора \vec{A} , называемого векторным электродинамическим потенциалом, таким образом, что вид исходного основного уравнения сохраняется:

$$\operatorname{div} \dot{\vec{B}} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \dot{\vec{A}}) = 0,$$

и отсюда

$$\dot{\vec{B}} = \operatorname{rot} \dot{\vec{A}}, \quad (5.6.1)$$

а вектор напряженности магнитного поля будет

$$\dot{\vec{H}} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \dot{\vec{A}}. \quad (5.6.2)$$

Подставим теперь векторный электродинамический потенциал $\dot{\vec{A}}$ вместо вектора $\dot{\vec{H}}$ в волновое уравнение (5.5.5) и, меняя последовательность операций ∇^2 и rot , получим

$$\operatorname{rot} \left(\nabla^2 \dot{\vec{A}} + k^2 \dot{\vec{A}} \right) = \operatorname{rot} \left(-\mu_a \dot{\vec{j}}_{ct} \right). \quad (5.6.3)$$

Известно, что векторы, роторы которых равны, могут отличаться друг от друга на некоторую градиентную функцию, т. е., если $\operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{rot} \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b} - \operatorname{grad} \varphi$, так как $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$.

Но поскольку здесь речь идет о магнитном поле, которое не имеет потенциальной части, градиентную функцию можно отбросить.

Теперь для векторного электродинамического потенциала $\dot{\vec{A}}$, прини-
мая во внимание, что в случае однородной среды величины μ_a и k^2 можно
выносить за знак оператора Лапласа и вносить под знак ротора, получаем
волновое уравнение

$$\nabla^2 \dot{\vec{A}} + k^2 \dot{\vec{A}} = -\mu_a \dot{\vec{j}}_{\text{ст}}, \quad (5.6.4)$$

которое называется векторным уравнением Гельмгольца.

Для выражения вектора напряженности электрического поля $\dot{\vec{E}}$ че-
рез электродинамический потенциал используется второе основное
уравнение ЭД

$$\text{rot} \dot{\vec{E}} = -i\omega \dot{\vec{B}} = \text{rot} \left(-i\omega \dot{\vec{A}} \right).$$

Поскольку электрическое поле имеет градиентную часть, то

$$\dot{\vec{E}} = -i\omega \dot{\vec{A}} - \text{grad} \phi, \quad (5.6.5)$$

где ϕ – скалярный электродинамический потенциал, а знак «минус» взят
для того, чтобы электродинамический потенциал совпадал с потенциалом,
введенным ранее.

Подставив (5.6.5) в (5.5.6), имеем

$$\nabla^2 \left(-i\omega \dot{\vec{A}} - \text{grad} \phi \right) + k^2 \left(-i\omega \dot{\vec{A}} - \text{grad} \phi \right) = i\omega \mu_a \dot{\vec{j}}_{\text{ст}} + \frac{1}{\epsilon_a} \text{grad} \phi.$$

Мнимые части этого выражения удовлетворяют (5.6.4), а вещественные
части дают

$$\text{grad} \left(\nabla^2 \phi + k^2 \phi \right) = \text{grad} \left(-\frac{\dot{\rho}}{\epsilon_a} \right). \quad (5.6.6)$$

Известно, что функции, градиенты которых равны, могут отличаться
на постоянную величину (не зависящую от координат). Но поскольку интерес
представляет разность потенциалов, эту величину можно принять рав-
ной нулю.

Тогда волновое уравнение для скалярного потенциала будет

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{\dot{\rho}}{\epsilon_a}, \quad (5.6.7)$$

оно называется скалярным уравнением Гельмгольца.

Поскольку векторный электродинамический потенциал определен с точ-
ностью до градиента произвольной скалярной функции, причем векторный

потенциал $\dot{\vec{A}}$ и скалярный потенциал $\dot{\phi}$ были введены независимо друг от друга, то можно потребовать, чтобы вектор $\dot{\vec{A}}$ удовлетворял добавочному условию

$$\operatorname{div}\dot{\vec{A}} + i\omega\epsilon_a\mu_a\dot{\phi} = 0. \quad (5.6.8)$$

Это уравнение называется уравнением (условием) калибровки, которое связывает векторный и скалярный электродинамические потенциалы.

Условие калибровки легко получить, подставив уравнения (5.6.2) и (5.6.5) в уравнение (5.5.1), что приводит к выражению

$$\left(\nabla^2\dot{\vec{A}} + k^2\dot{\vec{A}}\right) - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\dot{\vec{A}} + i\omega\epsilon_a\mu_a\dot{\phi}\right) = -\mu_a\dot{\vec{J}}_{\text{ст}}.$$

Учитывая, что соотношение (5.6.1), которое вводит векторный электродинамический потенциал, определяет только его вихревую часть, можно произвольно установить его потенциальную часть, что и делается уравнением калибровки. Кроме того, используя уравнение калибровки в последнем соотношении, сразу же получаем волновое уравнение для векторного электродинамического потенциала.

Очевидное преимущество введения электродинамических потенциалов заключается в том, что в правой части волновых уравнений для потенциалов содержатся непосредственно источники поля, и, кроме того, общее число скалярных уравнений уменьшилось по сравнению с уравнениями, полученными при разделении векторов поля.

Электродинамические потенциалы определяются унифицированными уравнениями (5.6.4) и (5.6.7), поэтому достаточно решить уравнение для скалярного потенциала, а для векторного – можно будет просто «сконструировать» аналогичное решение. Решать скалярное уравнение проще, чем векторное, в связи с чем далее будем рассматривать решение волнового уравнения для скалярного электродинамического потенциала.

Уравнение для скалярного электродинамического потенциала упрощается в ряде случаев: при $k = 0$ ($\omega = 0$) получаем уравнение Пуассона

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}, \quad (5.6.9)$$

если при этом еще и $\rho = 0$, то приходим к уравнению Лапласа

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (5.6.10)$$

5.7. Решение волнового уравнения для скалярного электродинамического потенциала

Вначале рассмотрим нахождение скалярного электродинамического потенциала в однородной, изотропной безграничной среде без потерь для случая статического поля ($\omega = 0$), созданного зарядом q , находящимся внутри элементарного объема ΔV (рис. 5.7.1).

Скалярный электродинамический потенциал подчиняется уравнению Пуассона (5.6.9). Покажем эквивалентность уравнения Пуассона третьему основному уравнению ЭД.

Поскольку $\text{grad}\varphi = -\vec{E}$, из уравнения Пуассона следует

$$\nabla^2\varphi = \text{div}\text{grad}\varphi = -\text{div}\vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_a},$$

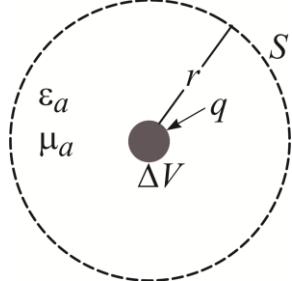


Рис. 5.7.1

и, следовательно, мы приходим к третьему уравнению ЭД для однородных изотропных сред

$$\text{div}\vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

Так как поле определяется во всем пространстве, окружающем источник, то для дальнейшего воспользуемся основным уравнением ЭД в интегральной форме

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q.$$

Учитывая малость объема ΔV , его можно рассматривать как точечный источник, и ввиду симметрии задачи вектор \vec{D} направлен по радиусу сферы с поверхностью S , в центре которой находится заряд, и зависит только от радиуса.

Тогда из предыдущего выражения получаем

$$D_r 4\pi r^2 = \rho \Delta V,$$

отсюда

$$E_r = \frac{\rho \Delta V}{4\pi \epsilon_a r^2}. \quad (5.7.1)$$

Из соотношения (5.7.1) и определения потенциала (1.5.4) получаем значение потенциала в виде

$$\varphi = - \int E_r dr = \frac{\rho \Delta V}{4\pi \epsilon_a r}. \quad (5.7.2)$$

Выражение (5.7.2) дает значение потенциала в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_a как вне элементарного объема ΔV , так и внутри его, созданного источником ЭМП, находящимся в этом объеме.

Обратимся теперь к более общему случаю переменного во времени ($\omega \neq 0$) заряда. Для этого исключим из рассмотрения малую область ΔV , в пределах которой находится заряд. Вне объема ΔV заряд равен нулю и уравнение (5.6.7) переходит в однородное волновое уравнение

$$\nabla^2 \dot{\phi} + k^2 \dot{\phi} = 0. \quad (5.7.3)$$

Уравнение (5.7.3) решаем в сферической системе координат с центром, совмещенным с точечным источником. Поскольку источник находится в изотропном безграничном пространстве, в задаче опять имеется радиальная симметрия и производные по угловым координатам в операторе Лапласа будут равны нулю, поэтому этот оператор в сферической системе координат запишется следующим образом:

$$\nabla^2 \dot{\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \dot{\phi})}{\partial r^2}, \quad (5.7.4)$$

и потенциал, следовательно, вновь зависит только от радиуса.

Волновое уравнение (5.7.3) в сферической системе координат будет

$$\frac{\partial^2 (r \dot{\phi})}{\partial r^2} + k^2 (r \dot{\phi}) = 0. \quad (5.7.5)$$

Обозначив величину в скобках через $\dot{U} = r \dot{\phi}$, получим соотношение

$$\frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial r^2} + k^2 \dot{U} = 0, \quad (5.7.5a)$$

представляющее собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка.

Общее решение уравнения (5.7.5a) запишем в виде суммы соответственно распространяющихся от источника и отраженных волн, идущих к источнику:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 e^{-ikr} + \dot{U}_2 e^{ikr},$$

где первый член, стоящий справа, характеризует так называемый «запаздывающий» потенциал, а второй – «опережающий»; U_1 и U_2 – постоянные интегрирования.

Поскольку источник ЭМП находится в безграничном пространстве, отраженная волна, по понятным физическим соображениям, отсутствует.

Тогда

$$\dot{U} = \dot{U}_1 e^{-ikr},$$

и решение уравнения (5.7.5a) дает

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{U}_1}{r} e^{-ikr}. \quad (5.7.6)$$

Постоянную интегрирования найдем, сопоставив уравнения (5.7.6) при $k = 0$ и (5.7.2), откуда

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{\rho} \Delta V}{4\pi \epsilon_a},$$

и, окончательно,

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{\rho} \Delta V}{4\pi \epsilon_a r} e^{-ikr}, \quad (5.7.7)$$

где $\dot{\rho} = \rho_m e^{i\phi_0}$, ρ_m – амплитуда, ϕ_0 – начальная фаза переменного заряда.

Проанализируем решение для запаздывающего потенциала, для чего в уравнении (5.7.7) восстановим зависимость от времени, т. е. перейдем к мгновенным значениям

$$\phi(t) = \operatorname{Re}(\dot{\phi} e^{i\omega t}) = \frac{\rho_m \Delta V}{4\pi \epsilon_a r} \cos(\omega t - kr + \phi_0), \quad (5.7.8)$$

где $\frac{\rho_m \Delta V}{4\pi \epsilon_a r}$ – амплитуда; $\cos(\omega t - kr + \phi_0)$ – фаза потенциала.

Это уравнение описывает волну, распространяющуюся от источника возбуждения поля. Чтобы показать это, введем такое понятие, как поверхность равных фаз (ПРФ) или фазовый фронт, понимая под этим поверхность, вдоль которой в один и тот же момент времени фаза волны имеет одинаковое значение.

В нашем случае уравнение ПРФ имеет вид

$$\omega t - kr + \phi_0 = \text{const}, \quad (5.7.9)$$

где ϕ_0 – некая постоянная величина, откуда следует, что со временем ($t \uparrow$) эта поверхность перемещается в сторону увеличения расстояния. Поскольку при фиксированном значении времени и расстояние является фиксированной величиной, то ПРФ представляет сферу. По виду ПРФ классифицируют вид волны, следовательно, здесь получили сферическую волну, но могут быть плоские, цилиндрические и другие виды волн.

Фазовая скорость или просто скорость распространения волны (скорость изменения фазы волны с расстоянием) легко определяется следующим

образом. Пусть в момент времени t ПРФ находилась на расстоянии r и полная фаза волны ϕ_{Σ} , характеризующая ПРФ, была

$$\omega t - kr + \phi_0 = \phi_{\Sigma} = \text{const.}$$

В следующий момент времени $t + \Delta t$ фазовый фронт волны переместится на расстояние $r + \Delta r$ и полная фаза будет

$$\omega(t + \Delta t) - k(r + \Delta r) + \phi_0 = \phi_{\Sigma} = \text{const.}$$

Вычитая из последнего выражения предыдущее, получаем

$$\omega \Delta t - k \Delta r = 0,$$

и отсюда фазовая скорость распространяющейся волны

$$v_{\phi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (5.7.10)$$

Длина волны определяется как расстояние, на которое перемещается фронт волны за один период колебаний (T):

$$\lambda = v_{\phi} T = \frac{\omega T}{k} = \frac{2\pi}{k}. \quad (5.7.11)$$

Что касается амплитуды волны, то она убывает обратно пропорционально расстоянию.

Таким образом, из выражения (5.7.8) видно, что потенциал в точке наблюдения, отстоящей от источника на расстоянии r , будет запаздывать (отставать) от фазы источника на величину

$$\phi_{\Pi} = kr, \quad (5.7.12)$$

пропорциональную расстоянию, поэтому рассматриваемый потенциал и называется запаздывающим.

Выражение (5.7.12) показывает, что волновое число k определяет изменение фазы волны на единицу расстояния. Действительно, изменение фазы $\Delta\phi_{\Pi}$ за счет изменения расстояния Δr равно

$$\Delta\phi_{\Pi} = k \Delta r,$$

откуда

$$k = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi_{\Pi}}{\Delta r} = \frac{d\phi_{\Pi}}{dr}.$$

Явление запаздывания возникает из-за того, что ЭМВ распространяется хотя и с очень большой, но конечной скоростью, и, чтобы волна от источника достигла точки наблюдения, требуется некоторое время, называемое временем запаздывания и определяемое как

$$\tau = \frac{r}{v_\phi}. \quad (5.7.13)$$

В зависимости от величины расстояния все переменные ЭМП и устройства связи можно разделить на квазистационарные и неквазистационарные (электродинамические).

Для квазистационарности необходимо выполнение:

- временного условия: $\tau \ll T$, которое позволяет не учитывать время распространения ЭМВ от источника до точки наблюдения;
- пространственного условия: $r \ll \lambda$, следующего из временных соотношений (5.7.11) и (5.7.13).

В устройствах связи под расстоянием r понимают их линейные размеры, и при выполнении условий квазистационарности для расчета можно применять методы теории линейных электрических цепей.

Для СВЧ устройств и полей характерны условия $\tau \geq T$ и $r \geq \lambda$, при этом для расчетов необходимо использовать теорию ЭМП.

Отброшенное решение для опережающего потенциала дает волну, сходящуюся к источнику (с увеличением времени расстояние уменьшается), которая в неограниченном пространстве не учитывается. Это решение может быть использовано при наличии границы раздела сред, когда до начала отсчета времени волна от источника дошла до границы раздела и в момент начала отсчета отражается обратно (рис. 5.7.2).

Определим теперь поле источника, распределенного в некотором объеме V . Для этого необходимо просуммировать, согласно принципу суперпозиции, потенциалы, создаваемые элементарными источниками объема, тогда

$$\dot{\phi} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\rho}}{\epsilon_a r} \exp(-ikr) dV, \quad (5.7.14)$$

где $r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$ – расстояние между точками источника (x, y, z) и наблюдения (x', y', z') (рис. 5.7.3).

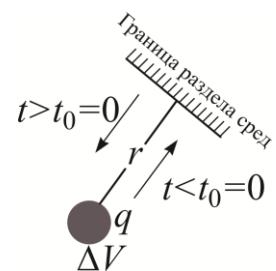


Рис. 5.7.2

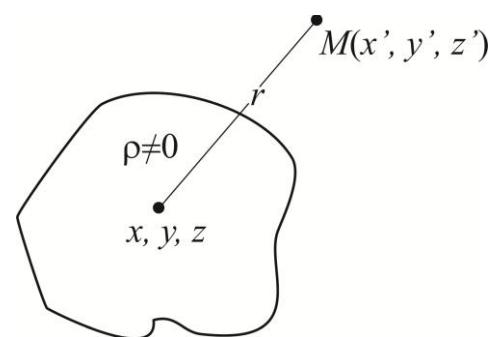


Рис. 5.7.3

Для нахождения векторного потенциала вначале записывают решения для составляющих по каждой координатной оси аналогично предыдущему случаю, а затем эти решения объединяются в решения для вектора.

Формально при получении решения для векторного потенциала следует, используя унифицированность исходных уравнений (5.6.4) и (5.6.7), заменить в формуле (5.7.14) $\dot{\phi}$ на $\dot{\vec{A}}$ и $\dot{\rho}/\epsilon_a$ на $\mu_a \dot{\vec{j}}_{ct}$, тогда получаем выражение для векторного электродинамического потенциала источника, распределенного в объеме V , в виде

$$\dot{\vec{A}} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mu_a \dot{\vec{j}}_{ct}}{r} \exp(-ikr) dV. \quad (5.7.15)$$

Формулы (5.7.14) и (5.7.15) дают решения соответственно для скалярного и векторного электродинамических потенциалов в случае заданного распределения источников в объеме. Если же источники распределены на поверхности или линейно, то интеграл по объему обращается в поверхностный или линейный с соответствующим распределением источников.

Кроме электродинамических потенциалов для решения уравнений Максвелла используется и такая вспомогательная функция, как вектор Герца $\dot{\vec{\Gamma}}$, связанный с потенциалами соотношением:

$$\dot{\vec{A}} = i\omega \epsilon_a \mu_a \dot{\vec{\Gamma}}, \quad (5.7.16)$$

$$\dot{\phi} = -\text{div} \dot{\vec{\Gamma}}. \quad (5.7.17)$$

Подставляя соотношение (5.7.16) в уравнение (5.6.4), получим волновое уравнение для вектора Герца

$$\nabla^2 \dot{\vec{\Gamma}} + k^2 \dot{\vec{\Gamma}} = -\frac{\dot{\vec{j}}_{ct}}{i\omega \epsilon_a}, \quad (5.7.18)$$

решение которого для объемного распределения источников дается в виде

$$\dot{\vec{\Gamma}} = \frac{1}{4\pi i\omega \epsilon_a} \int_V \frac{\dot{\vec{j}}_{ct} e^{-ikr}}{r} dV. \quad (5.7.19)$$

Вектор Герца применяется не только при гармонических процессах, но и при произвольной временной зависимости.

В заключение отметим еще раз, что получив решение задачи с помощью вспомогательных функций: электродинамических потенциалов или вектора Герца, необходимо затем перейти от них к векторам напряженности ЭМП.

Вопросы для самопроверки

1. Произведите классификацию задач электродинамики, поясните их суть.
2. Объясните необходимость теоремы единственности для задач электродинамики.
3. Приведите последовательность доказательства теоремы единственности для внутренней задачи электродинамики.
4. Объясните суть условия на бесконечность.
5. Поясните, в чем заключается преимущество волновых уравнений перед уравнениями Максвелла.
6. Поясните, зачем и как вводятся электродинамические потенциалы.
7. Изложите последовательность решения волнового уравнения для электродинамического скалярного потенциала.
8. Дайте определение понятия «запаздывающий потенциал» и объясните его физический смысл.

ГЛАВА 6. СТАТИЧЕСКИЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

6.1. Статическое поле

Уравнения статического поля, полученные ранее из уравнений Мак-свелла в предположении отсутствия тока и изменяющихся во времени векторов полей, разделяются, как было показано, на уравнения электростатики и магнитостатики, между которыми нет связи.

Из материального уравнения $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ следует, что в проводящей среде электростатическое поле не существует. Отсюда, согласно третьему уравнению ЭД в дифференциальной форме, и объемная плотность зарядов равна нулю. Это объясняется взаимной компенсацией зарядов противоположных знаков, вследствие чего только на поверхности проводника остаются нескомпенсированные заряды, характеризуемые поверхностной плотностью.

В изотропном однородном диэлектрике для описания электростатического поля служат следующие уравнения:

$$\text{rot} \vec{E} = 0, \quad (6.1.1)$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (6.1.2)$$

Потенциальный характер этого поля позволяет выразить напряженность через скалярный потенциал. Так как $\text{rot} \text{grad} \phi = 0$, то

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi, \quad (6.1.3)$$

где знак « $-$ » учитывает, что потенциал характеризует работу, выполняемую против сил поля. Подставляя соотношение (6.1.3) в уравнение (6.1.2), приходим к скалярному уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}, \quad (6.1.4)$$

решение которого для зарядов, распределенных в некотором объеме V , получается из формул предыдущей главы в виде

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a V} \int \frac{\rho dV}{r}, \quad (6.1.5)$$

откуда потенциал точечного заряда будет

$$\phi = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_a r}, \quad (6.1.6)$$

а напряженность электрического поля для этого заряда, исходя из соотношения (6.1.3), зависит только от радиус-вектора:

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{r}^\circ = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_a r^2}\vec{r}^\circ. \quad (6.1.7)$$

Магнитостатическое поле, созданное неподвижными постоянными магнитами, имеет замкнутые векторные линии (рис. 6.1.1).

Можно исключить из рассмотрения сам магнит и ввести фиктивные магнитные заряды с объемной плотностью ρ_m , на которых начинаются и заканчиваются векторные линии магнитного поля.

После формального введения фиктивных магнитных зарядов уравнения магнитостатики запишутся в виде

$$\text{rot}\vec{H} = 0,$$

они становятся по форме записи такими же, как и уравнения электростатики. Поэтому для решения задач магнитостатики можно использовать решения задач электростатики с одинаковыми граничными условиями, если сделать замены:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}; \quad \epsilon_a \rightarrow \mu_a; \quad \rho \rightarrow \rho_m.$$

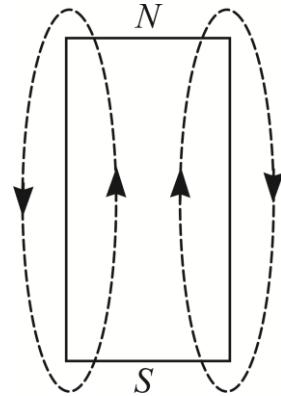


Рис. 6.1.1

6.2. Поле электрического диполя

Нахождение поля электрического диполя является примером решения прямой задачи ЭД.

Напомним, что электрическим диполем называют два равных по величине и противоположных по знаку точечных заряда, расстояние между которыми весьма мало по сравнению с расстоянием от них до точки наблюдения (рис. 6.2.1). Пусть среда, в которой находится диполь, представляет безграничный, однородный, изотропный, идеальный диэлектрик, в котором расположена точка наблюдения M с координатами (r, Θ, ψ) , где Θ – полярный угол, ψ – азимутальный. Совместим центр сферической системы координат (точка 0) с серединой диполя.

Определим потенциал диполя, используя принцип суперпозиции, как сумму потенциалов, созданных положительным и отрицательным точечным зарядами:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_a r_1} - \frac{q_0}{4\pi\epsilon_a r_2} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_a} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (6.2.1)$$

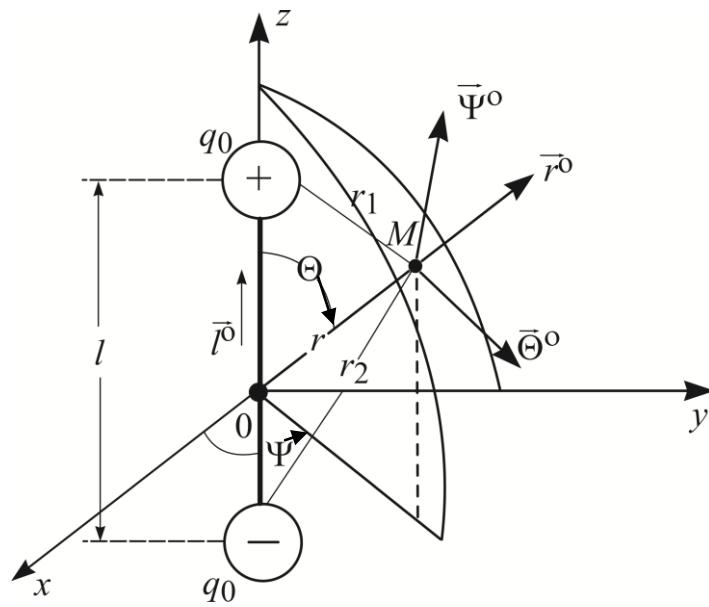


Рис. 6.2.1

Применяя теорему косинусов для косоугольных треугольников, получаем

$$r_1 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - rl \cos \Theta},$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + rl \cos \Theta},$$

и, учитывая, что $r \gg l$, используя бином Ньютона и оставляя первые два члена разложения, имеем:

$$r_1 \approx r - \frac{l}{2} \cos \Theta,$$

$$r_2 \approx r + \frac{l}{2} \cos \Theta.$$

Тогда

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \approx \frac{l \cos \Theta}{r^2}.$$

Подставляя это соотношение в выражение (6.2.1), получаем для потенциала диполя

$$\varphi = \frac{q_0 l \cos \Theta}{4\pi \epsilon_a r^2}. \quad (6.2.2)$$

Поскольку напряженность электрического поля и потенциал связаны зависимостью (6.1.3), то потенциал диполя убывает обратно пропорцио-

нально квадрату расстояния, а напряженность поля – расстоянию в кубе, причем, так как диполь имеет осевую симметрию, ни потенциал, ни напряженность поля не зависят от угла ψ .

6.3. Метод зеркальных отображений

В ряде задач электростатики необходимо найти ЭМП системы заряженных тел над протяженной проводящей поверхностью (например, металлический экран и т. п.). Это типичная краевая задача, в которой известны геометрические параметры системы заряженных тел, их заряды и эквипотенциальная проводящая поверхность.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда идеально проводящая поверхность представляет собой бесконечную плоскость, над которой в изотропном однородном диэлектрике расположен точечный заряд на высоте h (рис. 6.3.1, а). Такая поверхность является эквипотенциальной с нулевым потенциалом.

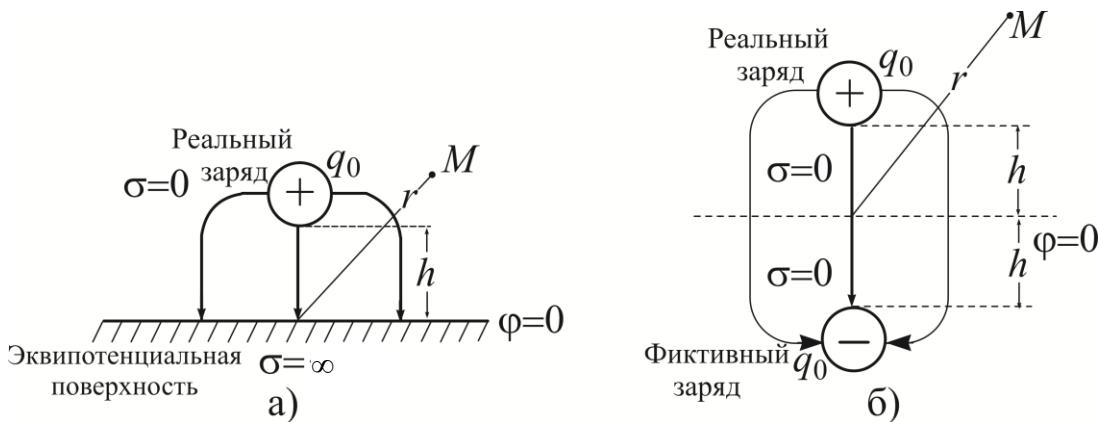


Рис. 6.3.1

Задача нахождения электростатического поля решается с помощью метода зеркальных отображений, суть которого состоит в замене проводящей поверхности фиктивным зарядом, равным по величине и обратным по знаку реальному и расположенному на таком же расстоянии от поверхности (но под ней), что и реальный заряд (рис. 6.3.1, б). Плоскость симметрии для реального заряда и его зеркального отображения, находящаяся на месте проводящей поверхности, является плоскостью равного (нулевого) потенциала. Таким образом, для верхнего полупространства условия краевой задачи не изменились, и на основании теоремы единственности можно заключить, что поле заряженного тела над проводящей плоскостью заменяется полями этого тела и его зеркального отображения.

В нашем случае точечного заряда при условии, что высота расположения заряда над поверхностью много меньше расстояния до точки наблюдения ($h \ll r$), первоначальная задача сводится к задаче нахождения поля диполя.

Метод зеркальных отображений применим и для системы заряженных тел и для задач распространения радиоволн и антенной техники, хотя в этих задачах имеем дело с переменным ЭМП.

6.4. Энергия электростатического поля

Мгновенное значение энергии электрического поля в объеме V , как следует из записи теоремы Умова – Пойнтинга, определяется как

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_a E^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \vec{D} dV. \quad (6.4.1)$$

Здесь энергия представлена через векторы поля, но иногда удобнее выразить ее через заряды, создающие электростатическое поле. Для этого используется соотношение (6.1.3), и тогда

$$W_E = -\frac{1}{2} \int_V \vec{D} \operatorname{grad} \varphi dV. \quad (6.4.2)$$

Дальнейшее преобразование выражения (6.4.2) выполним с помощью соотношения

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{D}) = \varphi \operatorname{div} \vec{D} + \vec{D} \operatorname{grad} \varphi,$$

после чего имеем

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \varphi \operatorname{div} \vec{D} dV - \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) dV.$$

Применяя к правому интегралу преобразование Остроградского – Гаусса, получим

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \varphi \operatorname{div} \vec{D} dV - \frac{1}{2} \int_S \varphi \vec{D} dS,$$

где S – поверхность, ограничивающая объем пространства со свободными зарядами.

Предполагая, что заряды сосредоточены внутри пространственно ограниченной единственной области V_0 , и отнеся поверхность S на бесконечно большое расстояние от этой области, можно рассматривать систему зарядов внутри области V_0 относительно бесконечно удаленной поверхности S_∞ как точечный заряд q'_0 , потенциал которого убывает обратно пропорционально расстоянию, а вектор электрической индукции – обратно пропорционально квадрату расстояния, тогда как площадь поверхности S возрастает пропорционально квадрату расстояния, поэтому

$$\oint_{S_\infty} \varphi \vec{D} dS = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{q'_0}{4\pi\varepsilon_a r} \cdot \frac{q'_0}{4\pi r^2} \cdot 4\pi r^2 \right) \rightarrow 0.$$

Учитывая, что $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$, получаем для энергии электростатического поля следующее выражение:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho \phi dV = \frac{q\Phi}{2}.$$

Применяя эту формулу для одиночного проводящего тела, видим, что энергия уединенного проводника зависит от его заряда и потенциала, который, в свою очередь, зависит от размеров, конфигурации и заряда проводника.

Отношение заряда уединенного проводника к его потенциалу представляет собой постоянную величину, называемую емкостью и измеряемую в фарадах:

$$C = \frac{q}{\Phi}, \quad \Phi. \quad (6.4.3)$$

Выражая энергию электростатического поля через емкость, имеем

$$W_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\Phi^2}{2}.$$

Емкость проводника характеризует его способность накапливать заряды. С понятием «емкость» связан такой важный элемент устройств телекоммуникационных систем, как конденсатор, реализуемый в виде системы из двух разделенных диэлектриком проводящих тел, заряды которых равны по величине и противоположны по знаку и которые предназначены для использования емкости между ними.

Емкость конденсатора есть взятое по абсолютной величине отношение заряда одного из проводников к разности потенциалов между ними:

$$C = \left| \frac{q}{\Phi_1 - \Phi_2} \right|, \quad \Phi. \quad (6.4.4)$$

6.5. Стационарное поле

Напомним, что для стационарного ЭМП характерно наличие только постоянных во времени процессов и для электростационарного поля в однородной, изотропной среде вектор напряженности электрического поля подчиняется тем же уравнениям, что и для электростатического поля (6.1.1) и (6.1.2), и, следовательно, как и ранее

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi.$$

Для этого поля закон сохранения электрического заряда для области, в которой существуют токи проводимости и сторонние источники, можно записать, учитывая, что все производные по времени равны нулю, в виде

$$\operatorname{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{ст}}) = \operatorname{div}(\sigma \vec{E} + \vec{j}_{\text{ст}}) = 0,$$

что приводит к соотношению

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\operatorname{div} \vec{j}_{\text{ст}}}{\sigma}. \quad (6.5.1)$$

Сопоставляя соотношения (6.1.2) и (6.5.1), получаем

$$\rho = -\frac{\epsilon_a}{\sigma} \operatorname{div} \vec{j}_{\text{ст}}. \quad (6.5.2)$$

Следовательно, объемные электрические заряды существуют лишь там, где $\operatorname{div} \vec{j}_{\text{ст}} \neq 0$. Если же в некоторой области пространства нет сторонних источников ($\vec{j}_{\text{ст}} = 0$), то $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ и векторные линии тока проводимости непрерывны и совпадают с векторными линиями напряженности электрического поля, поскольку $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

В проводнике потенциал стационарного электрического поля определяется уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

Подобно тому как в случае статики энергия электрического поля определялась через заряды, здесь интерес представляет определение энергии стационарного магнитного поля через токи, создающие это поле.

Выражение для мгновенного значения энергии магнитного поля в объеме V , следующее из записи теоремы Умова – Пойнтинга, было

$$W_H = \frac{1}{2} \int_V \mu_a H^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV. \quad (6.5.3)$$

Вводя в выражение (6.5.3) векторный электродинамический потенциал ($\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$) и используя соотношение

$$\operatorname{div} [\vec{A} \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{H},$$

получим

$$W_H = \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} [\vec{A} \vec{H}] dV + \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \operatorname{rot} \vec{H} dV. \quad (6.5.4)$$

Применяя к первому интегралу преобразование Остроградского – Гаусса и выбирая поверхность, ограничивающую объем V , в виде сферы с бесконечно большим радиусом, имеем

$$\frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} [\vec{A} \vec{H}] dV = \frac{1}{2} \oint_{S_\infty} [\vec{A} \vec{H}] dS, \quad (6.5.5)$$

где S_∞ – поверхность бесконечно удаленной сферы.

Принимая во внимание, что векторный потенциал и напряженность магнитного поля соответственно убывают обратно пропорционально расстоянию и квадрату расстояния, тогда как площадь поверхности сферы пропорциональна расстоянию в квадрате, заключаем, что поверхностный интеграл при бесконечно большом радиусе сферы обращается в ноль.

Выполнив замену ($\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$) в оставшемся интеграле, получаем

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{V_0} \vec{A} \vec{j} dV, \quad (6.5.6)$$

где V_0 – объем, в пределах которого токи проводимости не равны нулю.

В случае линейных токов формула (6.5.6) упрощается. Пусть есть уединенный контур L , по которому протекает ток I . Тогда вместо (6.5.6) имеем

$$W_H = \frac{1}{2} \oint_L I \vec{A} d\vec{l}. \quad (6.5.7)$$

Применяя к формуле (6.5.7) преобразование Стокса, получаем

$$W_H = \frac{I}{2} \oint_L \vec{A} d\vec{l} = \frac{I}{2} \int_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S} = \frac{I}{2} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \frac{I\Phi}{2}, \quad (6.5.8)$$

где Φ – магнитный поток через поверхность S , опирающуюся на контур L .

Поток Φ , пронизывающий уединенный контур L , пропорционален току в этом контуре

$$\Phi = L^* I,$$

где L^* – индуктивность, зависящая от конфигурации и размера контура.

Используя понятие индуктивности, энергию магнитостационарного поля можно представить в виде

$$W_H = \frac{L^* I^2}{2}. \quad (6.5.9)$$

Для магнитостационарного поля типичной задачей является определение магнитного поля проводников различной конфигурации. В качестве примера найдем магнитное поле бесконечно длинного цилиндрического проводника радиуса a (рис. 6.5.1).

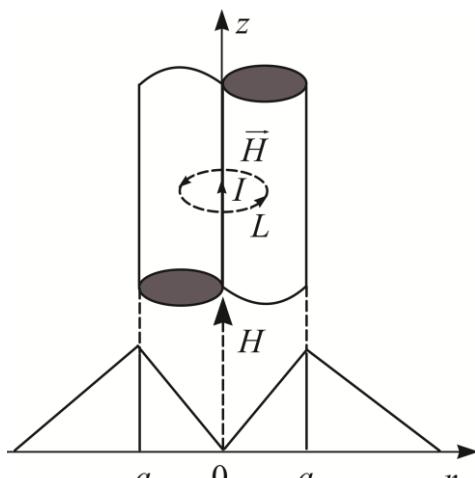


Рис. 6.5.1

Для упрощения задачи положим, что ток I , идущий по проводнику, распределен равномерно по его сечению. В силу цилиндрической симметрии проводника векторные линии \vec{H} представляют концентрические окружности. Согласно закону Ампера

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \quad (6.5.10)$$

причем $\vec{j}(r) = \text{const.}$

Определим магнитное поле внутри цилиндрического проводника ($r < a$). Контур интегрирования L в выражении (6.5.10) проходит внутри проводника, тогда

$$H \cdot 2\pi r = j\pi r^2,$$

где πr^2 – текущая площадь сечения проводника, и так как $I = j\pi a^2$, то

$$H = j \frac{r}{2} = I \frac{r}{2\pi a^2}.$$

Следовательно, поле внутри проводника линейно растет, имея следующие предельные значения:

$$\text{при } r = 0 \quad H = 0;$$

$$\text{при } r = a \quad H = \frac{I}{2\pi a}.$$

При определении поля вне проводника ($r \geq a$) контур интегрирования L проходит в пространстве, окружающем проводник, и тогда

$$H \cdot 2\pi r = I,$$

$$\text{при } r > a \quad H \cdot 2\pi r = j\pi a^2,$$

$$\text{отсюда} \quad H = j \frac{a^2}{2r}.$$

Зависимость величины напряженности магнитного поля от расстояния показана на рис. 6.5.1.

Вопросы для самопроверки

1. Запишите условия получения из уравнений Максвелла уравнений для статического и стационарного полей.
2. Поясните последовательность определения поля диполя.
3. В чем заключается суть метода зеркальных отображений?
4. Поясните, с какими полями связаны понятия емкости и индуктивности.

ГЛАВА 7. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

7.1. Элементарные излучатели

ЭМВ есть форма существования переменного ЭМП, что прямо вытекает из уравнений Максвелла. Распределение векторов напряженностей (структура) поля в конкретной волне существенно зависит от среды, в которой распространяется волна, и вида излучателей (антенн), возбуждающих ЭМВ.

В наиболее простом случае среда является линейной, однородной и изотропной, а излучатели – элементарными, т. е. такими, размеры которых гораздо меньше длины излучаемой ими волны.

Выделяют несколько основных видов элементарных излучателей: электрические, магнитные, дифракционные и щелевые.

Электрический излучатель (или элементарный электрический вибратор – ЭЭВ) представляет собой прямолинейный тонкий проводник с диаметром, гораздо меньшим длины, которая, в свою очередь, много меньше длины излучаемой волны ($l \ll \lambda$). По проводнику протекает переменный ток, имеющий в каждый момент времени постоянные амплитуду и фазу вдоль всего проводника. Металлические шары на концах проводника (рис. 7.1.1, а) обладают значительной емкостью, обеспечивающей слабое изменение амплитуды тока по длине проводника, а постоянство фазы создается из-за условия $l \ll \lambda$ (рис. 7.1.1, б). Такой излучатель впервые создал Г. Герц, поэтому часто ЭЭВ называют «диполь Герца».

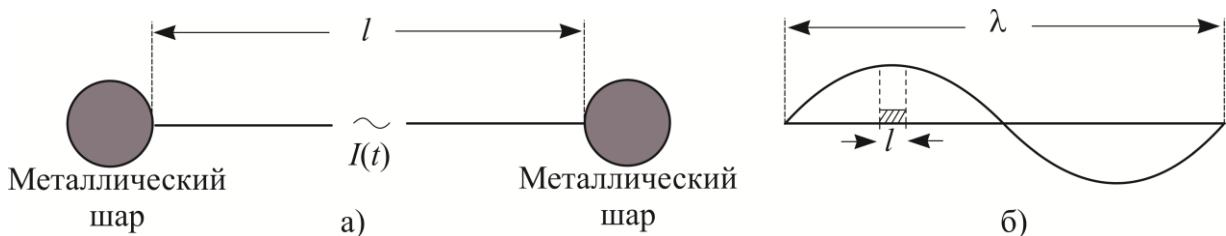


Рис. 7.1.1

Магнитный излучатель (магнитный диполь) – виток провода с переменным током, периметр которого гораздо меньше длины волны. На рис. 7.1.2 показаны два типа магнитных диполей.

Дифракционный излучатель (элемент Гюйгенса) теоретически рассматривается как малый участок фронта волны, во всех точках которого векторы поля одинаковы по величине и фазе. Практической реализацией элемента Гюйгенса являются расположенные в одной плоскости взаимно перпендикулярные электрический и магнитный диполи.

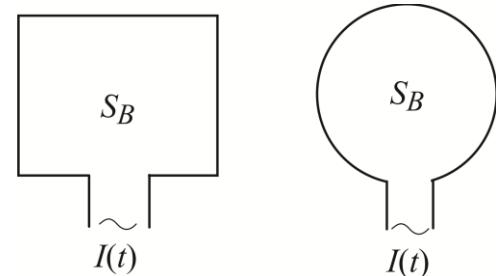


Рис. 7.1.2

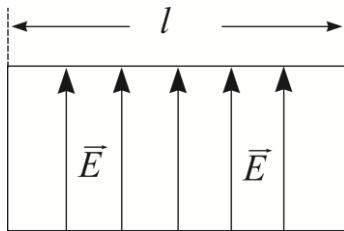


Рис. 7.1.3

Щелевой излучатель, как видно из его названия, представляет щель, прорезанную в проводящем материале, причем длина щели гораздо меньше длины волны (рис. 7.1.3), а амплитуда и фаза напряженности электрического поля не изменяются по всей длине щели.

Наибольший интерес представляют электрический и магнитный диполи. Это объясняется тем, что поле любого реального излучателя (антенны) можно представить, согласно принципу суперпозиции, как сумму полей диполей, а также тем, что создаваемые этими диполями поля обладают свойствами дуальности.

В поле излучения диполя выделяют ближнюю, промежуточную и дальнюю зоны, различая их по процессам, происходящим с полем в этих зонах. Критерием деления на зоны является величина kr , где k – волновое число, а r – расстояние от центра диполя до точки наблюдения:

для ближней зоны $kr \ll 1$ ($r \ll \lambda / 2\pi$);

для промежуточной зоны $kr \approx 1$ ($r \approx \lambda / 2\pi$);

для дальней зоны $kr \gg 1$ ($r \gg \lambda / 2\pi$).

7.2. Физическая картина излучения диполя Герца

Предположим, что заряды и токи на диполе, находящемся в непроводящей среде, изменяются по гармоническому закону:

$$q = q_m \sin \omega t; \quad I = -\frac{dq}{dt} = -I_m \cos \omega t,$$

где q_m и I_m – амплитуды соответственно заряда и тока.

Ток проводимости, протекающий по проводнику, создает магнитное поле, векторные линии которого охватывают диполь (рис. 7.2.1, а).

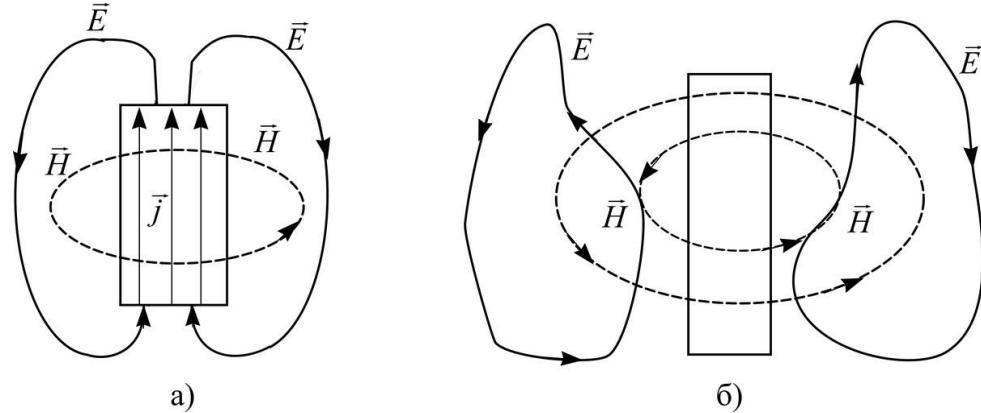


Рис. 7.2.1

Вне диполя токи проводимости переходят в токи смещения, являющиеся, по сути, переменным электрическим полем, векторные линии которого замыкаются на зарядах проводника. Электрическое и магнитное поля, таким образом, тесно связаны с токами и зарядами диполя и образуют ЭМП ближней зоны. Со временем переменное ЭМП распространяется во все большей области пространства, удаляясь от диполя. Возьмем момент времени, когда величина зарядов на проводе будет равна нулю. Тогда в силу непрерывности векторных линий полного тока $\operatorname{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) = 0$, но в среде вокруг диполя плотность тока проводимости $\vec{j} = 0$, и, следовательно, $\operatorname{div}\vec{j}_{\text{см}} = 0$, т. е. векторные линии напряженности электрического поля образуют замкнутые петли (рис. 7.2.1, б), полностью отрываясь от диполя. Таким образом, возникает поле в дальней зоне в виде ЭМВ, которая существует независимо от источника излучения и в которой электрическое поле порождает магнитное, а магнитное – электрическое и т. д. Векторные линии электрического и магнитного полей образуют серии замкнутых кривых и меняют свое направление через половину длины волны.

7.3. Общие выражения для поля диполя Герца

Рассмотрим поле электрического диполя, находящегося в безграничной среде без потерь. Пусть выполняется условие, что длина диполя гораздо меньше длины волны и расстояния от центра диполя до точки наблюдения (M). Поскольку размеры диполя малы, можно считать его точечным источником, создающим сферическую волну, и использовать сферическую систему координат (рис. 7.3.1), центр которой совмещен с центром диполя.

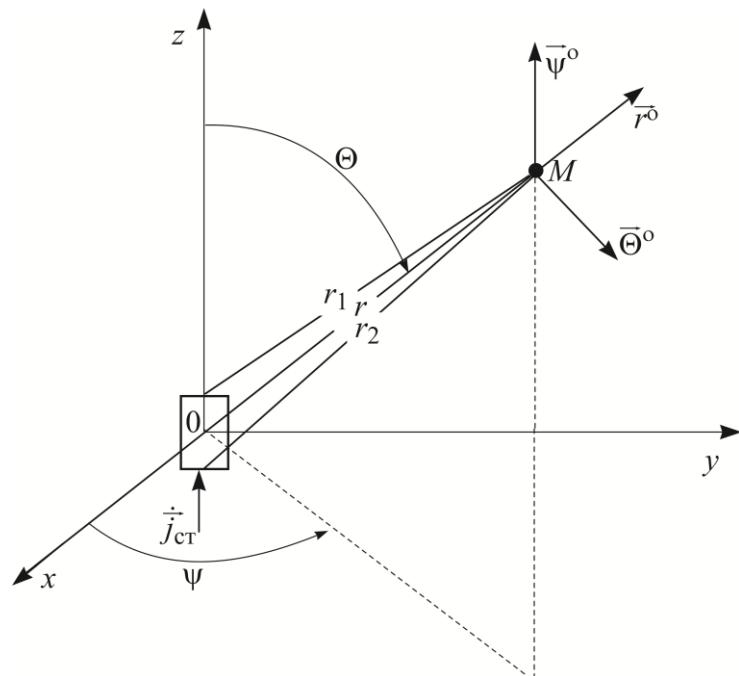


Рис. 7.3.1

Положим, что направление стороннего тока, питающего диполь, совпадает с осью z , тогда

$$\dot{\vec{j}}_{ct} = \vec{z}^\circ j_{ct_z}.$$

Для нахождения векторов поля используем векторный электродинамический потенциал

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\vec{j}}_{ct}}{r} e^{-ikr} dV, \quad (7.3.1)$$

связанный с вектором $\dot{\vec{H}}$ соотношением

$$\dot{\vec{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot} \dot{\vec{A}}. \quad (7.3.2)$$

В сферической системе координат

$$\text{rot} \dot{\vec{A}} = \begin{vmatrix} \vec{r}^\circ & \vec{\theta}^\circ & \vec{\psi}^\circ \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \psi} \\ \dot{A}_r & r \dot{A}_\theta & r \dot{A}_\psi \sin \theta \end{vmatrix}. \quad (7.3.3)$$

Из-за малости размеров диполя расстояние от любого элемента диполя до точки наблюдения практически одинаково

$$r_1 \simeq r_2 \simeq r,$$

поэтому, вынося из-под знака интегрирования постоянные величины, имеем

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \dot{\vec{M}}_3, \quad (7.3.4)$$

где $\dot{\vec{M}}_3 = \int_V \dot{\vec{j}}_{ct} dV$ – момент тока электрического диполя.

Поскольку диполь представляет цилиндрический проводник с площадью основания S и длиной l , то при равномерном распределении тока и постоянной фазе вдоль проводника получим

$$\dot{\vec{M}}_3 = \vec{z}^\circ \int_S \dot{j}_{ct_z} dS \int_{-l/2}^{l/2} dz = \vec{z}^\circ \dot{l} l \quad (7.3.5)$$

и

$$\dot{\vec{A}} = \vec{z}^\circ \frac{\mu_a \dot{l} l}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} = \vec{z}^\circ \dot{A}_z, \quad (7.3.6)$$

где $\dot{I} = I_m e^{i\varphi_0}$ – комплексная амплитуда тока в излучателе, I_m и φ_0 – амплитуда и начальная фаза тока. Здесь индекс «ст» опущен, поскольку сторонние токи перешли в токи проводимости диполя.

Учитывая, что сторонний ток направлен по оси z , векторные линии напряженности магнитного поля будут кольцом охватывать диполь, и, таким образом, у $\text{rot} \dot{\vec{A}}$ имеется только составляющая по координате ψ .

Тогда из записи $\text{rot} \dot{\vec{A}}$ (7.3.3) получим для этой составляющей

$$\text{rot}_\psi \dot{\vec{A}} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} \dot{A}_r \right]. \quad (7.3.7)$$

Разложим орт \vec{z}° в точке M по двум взаимно перпендикулярным направлениям

$$\vec{z}^\circ = \vec{r}^\circ \cos \theta - \vec{\theta}^\circ \sin \theta \quad (7.3.8)$$

и выразим составляющие векторного электродинамического потенциала через A_z :

$$\dot{A}_r = A_z \cos \theta; \quad \dot{A}_\theta = -A_z \sin \theta; \quad \dot{A}_\psi = 0. \quad (7.3.9)$$

Подставляя полученные выражения для составляющих из (7.3.9) в (7.3.7), приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \text{rot}_\psi \dot{\vec{A}} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (-r A_z \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{A}_z \cos \theta) \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[\left(ik \frac{\mu_a \dot{I} l}{4\pi} e^{-ikr} + \frac{\mu_a \dot{I} l}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \sin \theta \right] = \frac{\mu_a \dot{I} l}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \left(ik + \frac{1}{r} \right) \sin \theta, \end{aligned}$$

тогда, обращаясь к выражению (7.3.2), имеем для составляющей напряженности магнитного поля по координате ψ

$$\dot{H}_\psi = \frac{\dot{I} l}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{1 + ikr}{r} \sin \theta. \quad (7.3.10)$$

Остальные составляющие вектора $\dot{\vec{H}}$ равны нулю:

$$\dot{H}_r = \dot{H}_\theta = 0.$$

Выражения для электрического поля находятся из первого уравнения Максвелла, учитывая, что в среде, окружающей диполь, $\dot{\vec{j}}_{\text{ст}} = \dot{\vec{j}} = 0$,

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{i\omega\epsilon_a} \text{rot} \dot{\vec{H}} = \vec{r}^\circ \dot{E}_r + \vec{\theta}^\circ \dot{E}_\theta, \quad (7.3.11)$$

т. е. в общем случае напряженность электрического поля имеет две составляющие, направленные перпендикулярно орту $\vec{\psi}^\circ$.

В выражении (7.3.11) можно преобразовать величину, стоящую перед оператором rot :

$$\frac{1}{i\omega\epsilon_a} \frac{\sqrt{\mu_a}}{\sqrt{\mu_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{1}{ik} = Z_c \cdot \frac{1}{ik},$$

где $Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ – характеристическое сопротивление среды.

В качестве примера определим характеристическое сопротивление свободного пространства

$$Z_{c_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}}} = 120\pi = 377 \text{ Ом.}$$

Используя характеристическое сопротивление, выражение (7.3.11) можно записать в виде

$$\dot{\vec{E}} = Z_c \frac{1}{ik} \text{rot} \dot{\vec{H}}, \quad (7.3.12)$$

и после вычислений получаем

$$\dot{E}_r = \frac{\dot{I}Z_c}{2\pi ik} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{1+ikr}{r^2} \cos \theta, \quad (7.3.13)$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{\dot{I}Z_c}{4\pi ik} \frac{1+ikr-(kr)^2}{r^2} \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \theta. \quad (7.3.14)$$

Формулы (7.3.10), (7.3.13) и (7.3.14) применяются для расчета ЭМП в промежуточной зоне. В дальней и ближней зонах формулы упрощаются.

7.4. Поле диполя в дальней зоне

Дальняя зона – область пространства, наиболее удаленная от диполя, представляет особый интерес, так как в этой области на практике обычно ведется радиоприем.

Поскольку в дальней зоне имеет место условие $kr \gg 1$, то общие формулы для поля диполя (7.3.10), (7.3.13) и (7.3.14) преобразуются в следующие выражения:

$$\dot{H}_\psi = \frac{\dot{I}l}{4\pi} ik \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \theta, \quad (7.4.1)$$

и так как $E_r \dots \frac{1}{r^2}$, а $E_\theta \dots \frac{1}{r}$, то $|E_\theta| \gg |E_r|$ и

$$\dot{E}_\theta = Z_c \dot{H}_\psi. \quad (7.4.2)$$

Отсюда

$$Z_c = \frac{\dot{E}_\theta}{\dot{H}_\psi} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}},$$

и, таким образом, характеристическое сопротивление определяется отношением взаимно перпендикулярных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей распространяющейся волны, связывая напряженности полей через параметры среды.

Следовательно, в дальней зоне фактически остаются две составляющие ЭМП: H_ψ и E_θ , причем амплитуды их уменьшаются обратно пропорционально расстоянию, а фазы – одинаковы.

Переходя от комплексных амплитуд к мгновенным значениям составляющих, имеем

$$H_\psi(t) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{H}_\psi e^{i\omega t} \right\} = H_m \sin(\omega t - kr + \varphi_0), \quad (7.4.3)$$

$$E_\theta(t) = Z_c H_\psi(t). \quad (7.4.4)$$

где

$$H_m = \frac{kI_m l}{4\pi r} \sin \theta \quad (7.4.5)$$

– амплитуда напряженности магнитного поля.

Анализируя фазу ЭМВ таким же образом, как это было выполнено ранее, видим, что ПРФ представляет сферу, т. е. в дальней зоне диполь создает сферическую волну, распространяющуюся по радиусу r от диполя со скоростью

$$v_\phi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}.$$

Электромагнитная волна, распространяющаяся в конкретном направлении и определяемая формулами вида (7.43) и (7.44), называется бегущей волной.

По аналогии с ПРФ вводится понятие о поверхности равных амплитуд (ПРА). Волны, у которых амплитуды постоянны во всех точках фазового фронта в один и тот же момент времени, называются однородными.

У диполя Герца при фиксированном расстоянии r амплитуда напряженности поля зависит от величины $\sin \theta$ и ПРА не совпадает с ПРФ. Таким образом, в дальней зоне ЭМП представляет неоднородную сферическую волну. Физический смысл «неоднородности» заключается в том, что амплитуда волны на ПРФ не остается постоянной, а изменяется по некоторому закону.

Как уже отмечалось, электрическая и магнитная оставляющие напряженности ЭМП волны взаимно перпендикулярны и каждая, в свою очередь, перпендикулярна направлению распространения волны. Такие волны называются поперечными или волнами класса T .

В векторной форме связь между составляющими записывается так:

$$\dot{\vec{E}} = Z_c \left[\dot{\vec{H}}, \vec{n}^\circ \right],$$

где $\vec{n}^\circ = \vec{r}^\circ$.

Если фазовый фронт волны представляет собой сферу, то излучение в пространство энергии диполем, определяемое амплитудой волны, распределено не равномерно, а имеет определенную направленность. Для наглядного представления о распределении излучения в пространстве (характеристики напряженности) строят графики зависимости амплитуд напряженности поля от направления на точку наблюдения при фиксированном расстоянии. Такие графики называют амплитудными диаграммами направленности (ДН). Наиболее полные сведения о распределении энергии излучения дает пространственная ДН, но воспроизвести ее достаточно сложно, поэтому обычно строят ДН в двух взаимно перпендикулярных плоскостях: меридиональной (вертикальная плоскость или плоскость E , в которой угол $\theta - \text{var}$, а угол $\psi - \text{const}$) и экваториальной (горизонтальная плоскость H , в которой угол $\psi - \text{var}$, а угол $\theta - \text{const}$). ДН диполя в этих плоскостях показаны на рис. 7.4.1 и 7.4.2.

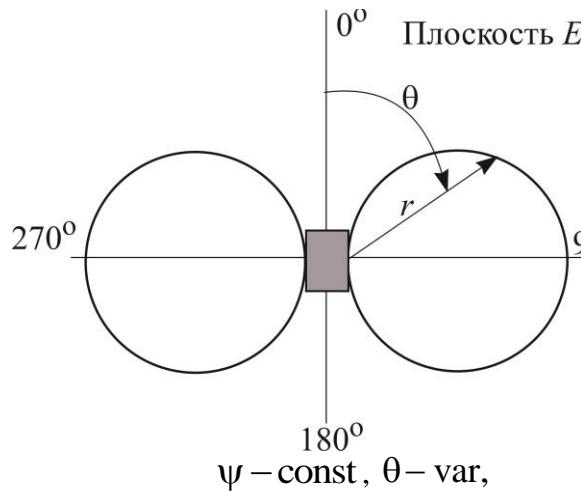


Рис. 7.4.1

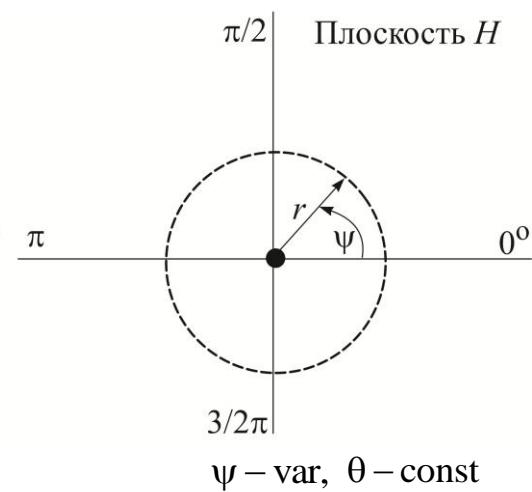


Рис. 7.4.2

ДН на рис. 7.4.1 изменяется как функция $\sin \theta$:

$$f_E(\theta) = f_E(\sin \theta) = \sin \theta. \quad (7.4.6)$$

В вертикальной плоскости имеются два лепестка ДН, причем фазы полей в лепестках противоположны, так как поле меняет направление по обе стороны от оси излучателя (рис. 7.4.1).

ДН на рис. 7.4.2 отображается соотношением

$$f_H(\psi) = \text{const.}$$

Таким образом, диполь максимально излучает в направлениях, перпендикулярных его оси, и не излучает вдоль оси.

Пространственная ДН диполя представляет тор, образованный вращением ДН в плоскости E (рис. 7.4.1) вокруг вертикальной оси диполя.

Выражение (7.4.6) дает ДН диполя по напряженности поля, а по мощности ДН будет записываться в виде

$$f_P(\theta) = f_E^2(\theta) = \sin^2 \theta.$$

Обычно ДН строят в нормированном виде, представляющем отношение текущих и максимального значений ДН. Для диполя нормированная ДН будет

$$F_E(\theta) = \frac{f_E(\theta)}{f_{E_{\max}}(\theta)} \leq 1.$$

Нормированная ДН удобна для сопоставления ДН различных излучателей (антенн).

Помимо амплитудной ДН иногда строят и фазовую ДН. Для диполя Герца она не зависит от углов θ и ψ .

Вектор Пойнинга, характеризующий интенсивность излучения, направлен по радиус-вектору от диполя в точку наблюдения:

$$\tilde{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2} \left[\vec{\dot{E}} \vec{H}^* \right] = \frac{1}{2} \left[\vec{\theta}^\circ \vec{\dot{E}}_\theta, \vec{\psi}^\circ \vec{H}_\psi^* \right] = \frac{1}{2} Z_c |\dot{H}_\psi|^2 \vec{r}^\circ \quad (7.4.7)$$

— и представляет вещественную величину, что указывает на чисто активный характер излучаемой мощности в дальней зоне в среде без потерь.

Мощность, излучаемая диполем в окружающее его пространство за период, называется мощностью излучения:

$$P_{\Sigma_{\text{cp}}} = \oint_S \vec{\Pi} dS = \frac{1}{2} Z_c \oint_S |\dot{H}_\psi|^2 dS.$$

Поскольку элемент поверхности сферы, окружающей диполь, с центром в середине излучателя определяется как

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\psi,$$

то, учитывая (7.4.5), можно записать

$$P_{\Sigma_{\text{cp}}} = \frac{1}{2} Z_c \frac{(kl)^2 I_m^2 r^2}{(4\pi r)^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta,$$

и так как $\int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi$, а $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$, то в результате

$$P_{\Sigma_{\text{cp}}} = Z_c I_m^2 \frac{(kl)^2}{12\pi}. \quad (7.4.8)$$

Для свободного пространства $Z_{c_0} = 120\pi$ Ом, и мощность излучения диполя в этом случае

$$P_{\Sigma_{\text{cp0}}} = 10(kl)^2 I_m^2. \quad (7.4.9)$$

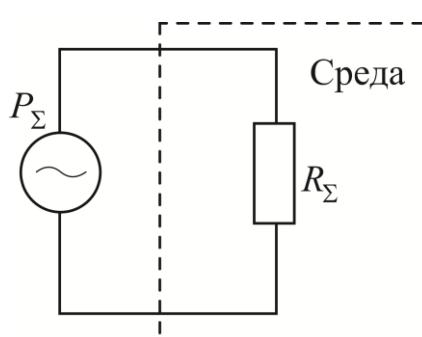


Рис. 7.4.3

где R_Σ – сопротивление излучения.

Отсюда

$$R_\Sigma = 2Z_c \frac{(kl)^2}{12\pi}. \quad (7.4.11)$$

Для свободного пространства

$$R_{\Sigma_0} = \frac{2P_{\Sigma_{\text{cp0}}}}{I_m^2} = 20(kl)^2 = 800 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2. \quad (7.4.12)$$

Сопротивление излучения применяется для сравнения эффективности излучения различных систем, поскольку оно пропорционально мощности излучения, но не зависит от величины тока в системе. Кроме того, сопротивление излучения используется для оценки согласования излучателя с питающей его линией (фидером) от стороннего источника ЭМП. Например, для диполя Герца отношение $\frac{l}{\lambda} \ll 1$, поэтому величина сопротивления излучения составляет единицы Ом, а характеристическое сопротивление питающих линий – порядка десятков Ом, и, следовательно, требуется согласование сопротивлений линии и диполя.

Наконец, поскольку из выражения (7.4.12) видно, что сопротивление излучения обратно пропорционально длине волны (при сохранении условия $\frac{l}{\lambda} \ll 1$), то это указывает на целесообразность использования диапазона СВЧ.

7.5. Поле диполя в ближней зоне

Критерием ближней зоны является условие $kr \ll 1$, т. е. поле находится вблизи источника излучения, при этом $r \gg l$ и, следовательно, $kl < 1$. Тогда, полагая $e^{-ikr} \approx 1$, из общих выражений (7.3.10), (7.3.13) и (7.3.14) имеем

$$\dot{H}_\psi \approx \frac{il}{4\pi r^2} \sin \theta, \quad (7.5.1)$$

$$\dot{E}_\theta \approx \dot{H}_\psi \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{1}{ikr}, \quad (7.5.2)$$

$$\dot{E}_r \approx \dot{H}_\psi \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{\operatorname{ctg} \theta}{ikr}. \quad (7.5.3)$$

Из полученных зависимостей следует, что комплексные амплитуды составляющих напряженности электрического поля сдвинуты по фазе на $\pi/2$ относительно напряженности магнитного поля (за счет мнимой единицы в соотношениях для \dot{E}_θ и \dot{E}_r). Этот сдвиг фаз появился вследствие пренебрежения волновыми свойствами поля ($e^{-ikr} \approx 1$). В результате мощность поля в ближней зоне получается чисто реактивной величиной, причем так как магнитное поле убывает с расстоянием как $\frac{1}{r^2}$, а электрическое – как $\frac{1}{r^3}$, то в ближней зоне преобладает энергия магнитного поля.

Поскольку диполь создает реактивную мощность, то он является для питающего его источника реактивной нагрузкой. (Если же не пренебречь величиной e^{-ikr} , то в излучении диполя имеется и активная и реактивная мощности, но активная мощность гораздо меньше реактивной части. Соответственно и сопротивление излучения имеет активную и реактивную части.)

Комплексный вектор Пойнтинга в ближней зоне есть мнимая величина, его среднее значение равно нулю.

Поля такого типа называются местными полями. Поле ближней зоны практически не участвует в излучении диполя, так как составляющие этого поля малы по сравнению с такими же составляющими в дальней зоне.

7.6. Перестановочная двойственность уравнений Максвелла

При нахождении поля диполя в качестве источника выступал ток проводимости, распределение которого вдоль диполя было задано. Для реальных излучателей распределение тока чаще всего неизвестно. Однако в целом ряде задач может быть известно электрическое поле в ограниченном объеме, и это заданное поле по отношению к остальной части пространства является сторонним, создавая сторонние токи смещения.

Равноправно в качестве стороннего источника может выступать и магнитное поле. В этом случае по аналогии со сторонним электрическим током вводят понятие о стороннем магнитном токе, плотность которого определяется как скорость изменения магнитной индукции со временем и в форме комплексных амплитуд:

$$\dot{\vec{j}}_{ct_m} = i\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_{ct}, \text{ В/м}^2. \quad (7.6.1)$$

Формальное введение магнитных токов влечет за собой введение магнитных зарядов, объемная плотность которых связана с магнитным током уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \dot{\vec{j}}_m = -i\omega\rho_m. \quad (7.6.2)$$

а сами магнитные заряды входят в четвертое уравнение Максвелла

$$\operatorname{div} \dot{\vec{B}} = \dot{\rho}_m. \quad (7.6.3)$$

хотя в природе до настоящего времени не обнаружено ни магнитных зарядов, ни токов.

С введением магнитного тока векторные уравнения Максвелла для монохроматического поля в среде с проводимостью приобретают симметричный вид:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{j}}_{ct_3} + i\omega\tilde{\epsilon}_a \dot{\vec{E}}, \quad (7.6.4)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -\dot{\vec{j}}_{ct_m} - i\omega\mu_a \dot{\vec{H}}, \quad (7.6.5)$$

где в общем случае $\dot{\vec{j}}_{ct_3} = \dot{\vec{j}}_{ct} + \dot{\vec{j}}_{ct_m}$ – сумма плотностей сторонних электрических токов проводимости и смещения. Здесь учтено, что для большинства сред μ_a – вещественная величина.

Плотность магнитного тока поставлена в уравнении (7.6.5) со знаком «минус» для того, чтобы выполнялось уравнение непрерывности для магнитных величин. Покажем это, применяя к уравнению (7.6.5) операцию дивергенции:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -\operatorname{div} \dot{\vec{j}}_{ct_m} - \operatorname{div}(i\omega\mu_a \dot{\vec{H}}) = 0.$$

Заменяя $\mu_a \dot{\vec{H}}$ на $\dot{\vec{B}}$ и используя (7.6.3), приходим к уравнению (7.6.2).

Из симметрии уравнений (7.6.4) и (7.6.5) вытекает принцип перестановочной двойственности, впервые сформулированный А. А. Пистолькорсом.

Действительно, перестановки

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}} \rightarrow \dot{\vec{H}}; \dot{\vec{j}}_{ct_3} + \dot{\vec{j}}_{ct_m}; \tilde{\epsilon}_a \rightarrow \mu_a; \\ \dot{\vec{H}} \rightarrow -\dot{\vec{E}}; \dot{\vec{j}}_{ct_m} - \dot{\vec{j}}_{ct_3}; \mu_a \rightarrow \tilde{\epsilon}_a \end{cases} \quad (7.6.6)$$

взаимно преобразуют уравнения (7.6.4) и (7.6.5).

Принцип перестановочной двойственности позволяет получить решение одной задачи ЭД из решения другой. Пусть уравнения Максвелла были записаны для электрического источника ($\dot{\vec{j}}_{ct_3} \neq 0; \dot{\vec{j}}_{ct_M} = 0$) и была решена соответствующая задача. Для аналогичного магнитного источника ($\dot{\vec{j}}_{ct_3} = 0; \dot{\vec{j}}_{ct_M} \neq 0$) уравнения Максвелла и их решения получаются автоматически с помощью указанной выше перестановки. Границные условия при этом должны быть для магнитного поля такими же, какими они были для электрического поля в первой задаче.

При использовании принципа перестановочной двойственности характеристическое сопротивление среды переходит в обратную величину – характеристическую проводимость:

$$\tilde{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\tilde{\epsilon}_a}} \rightarrow \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_a}{\mu_a}} = \tilde{Y}_c, \quad (7.6.7)$$

а волновое число переходит само в себя:

$$\tilde{k} = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_a}.$$

Отметим, что существуют и другие формулировки принципа перестановочной двойственности.

Покажем в виде примера применение принципа перестановочной двойственности для определения поля магнитного диполя в дальней зоне.

7.7. Поле магнитного диполя в дальней зоне

Получим выражение для поля излучения магнитного диполя в дальней зоне, используя принцип перестановочной двойственности.

Напомним, что момент тока электрического диполя записывался как

$$\dot{\vec{M}}_3 = \int_V \dot{\vec{j}}_{ct} dV = \vec{z}^\circ \vec{I}l, \quad (7.7.1)$$

тогда момент тока магнитного диполя по аналогии будет представлен в следующем виде:

$$\dot{\vec{M}}_M = \int_V \dot{\vec{j}}_{ct_M} dV = i\omega \mu_a \int_V \dot{\vec{H}}_{ct} dV = i\omega \mu_a \int_{S_B}^{2a} d\vec{S} \int_0 \dot{\vec{H}}_{ct} d\vec{z}, \quad (7.7.2)$$

где V – объем внутри витка, в пределах которого существует магнитное поле; S_B – площадь витка; a – радиус провода витка.

Рассечем виток по линии AA_1 (рис. 7.7.1).

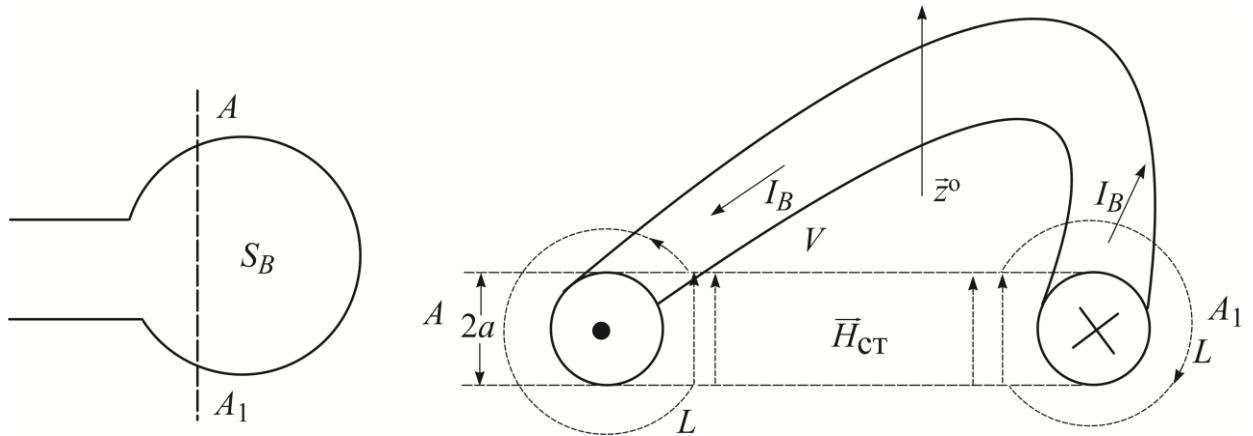


Рис. 7.7.1

Магнитное поле $\vec{H}_{\text{ст}}$ является заданным (сторонним) полем. Оно направлено в плоскости витка по оси z и распределено равномерно по сечению витка. Поскольку поле $\vec{H}_{\text{ст}}$ задано только внутри витка, а в остальном пространстве оно равно нулю, то интеграл для $\vec{H}_{\text{ст}}$ можно распространить на весь замкнутый контур L , и тогда

$$\int_0^{2a} \dot{\vec{H}}_{\text{ст}} d\vec{z} = \oint_L \dot{\vec{H}}_{\text{ст}} d\vec{l} = \vec{I}_B, \quad (7.7.3)$$

где $\vec{I}_B = I_{B_m} e^{i\phi_0}$ – комплексная амплитуда тока, протекающего в проводнике, образующем виток; I_{B_m} и ϕ_0 – амплитуда и начальная фаза тока.

Теперь, делая, согласно принципу перестановочной двойственности, подстановки в исходные формулы (7.4.1) и (7.4.2), получим

$$-\dot{\vec{E}}_\psi = \frac{\dot{M}_m i k}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \theta, \quad (7.7.4)$$

$$\dot{\vec{H}}_\theta = -\sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \dot{\vec{E}}_\psi. \quad (7.7.5)$$

Знак « $-$ » перед $\dot{\vec{E}}_\psi$ в формуле (7.7.4) означает, что электрическое поле относительно момента магнитного диполя направлено по правилу левого винта, т. е. по координате ψ .

Из этих формул следует, что магнитный диполь в дальней зоне создает неоднородную сферическую волну.

Мощность излучения магнитного диполя определяется как

$$P_{\Sigma_{cpM}} = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \frac{k^2}{12\pi} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} k S_B \right)^2 I_{B_m}^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \frac{\left(k^2 S_B \right)^2}{12\pi} I_{B_m}^2. \quad (7.7.6)$$

В свободном пространстве мощность и сопротивление излучения магнитного диполя будут соответственно:

$$P_{\Sigma_{cpM0}} = 10 \left(k^2 S_B \right)^2 I_{B_m}^2, \quad (7.7.7)$$

$$R_{\Sigma_{M0}} = 20 \left(k^2 S_B \right)^2. \quad (7.7.8)$$

Для сравнения эффективности излучения магнитного диполя с электрическим вводят понятие «действующая длина» магнитного диполя, выражение для которой легко получить из сопоставления, например, формул (7.4.12) и (7.7.8), откуда

$$l_d = k S_B = 2\pi \frac{S_B}{\lambda}.$$

Сопротивление излучения витка, периметр которого равен длине электрического диполя, много меньше сопротивления излучения последнего. Поэтому излучательная способность витка также ниже излучательной способности электрического диполя. Физически это объясняется частичной компенсацией полей в точке наблюдения от элементов витка с противоположным направлением токов (рис. 7.7.2).

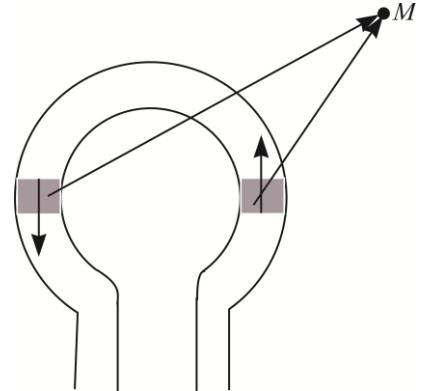


Рис. 7.7.2

7.8. Эквивалентность полей и поверхностных токов

Как уже отмечалось, в ряде случаев при анализе излучающих систем распределение токов в них неизвестно, но может быть известно поле на некоторой замкнутой поверхности, охватывающей эту систему. Например, широко распространенная в диапазоне СВЧ параболическая антenna состоит из металлической поверхности – зеркала 1 и облучателя 2 сложной формы (рис. 7.8.1). Облучатель при работе параболической антенны на передачу является первичным источником сторонних токов \vec{j}_{ct} . Замкнутый объем V_0 образован реальной поверхностью зеркала S_1 и воображаемой плоскостью раскрыва S_2 , через которую антenna излучает ЭМВ, причем $S_1 + S_2 = S$. Требуется определить ЭМП во внешнем объеме V , т. е. во всем пространстве вне антенны.

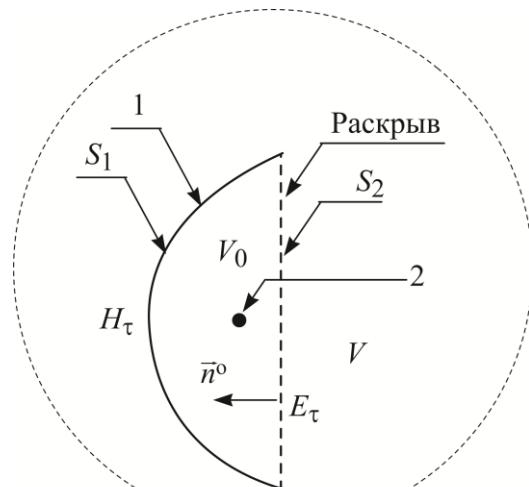


Рис. 7.8.1

Решить эту задачу прямо, используя источник тока внутри объема V_0 , практически невозможно из-за математических сложностей, возникающих при учете конфигурации внутренней поверхности антенны.

Однако если на границе области V заданы касательные составляющие векторов \vec{E} и \vec{H} (в нашем случае на раскрыве антенны задана тангенциальная составляющая E_τ , а на внешней поверхности зеркала с $\sigma = \infty$ – тангенциальная составляющая H_τ), которые, разумеется, связаны, так как созданы

одним и тем же источником, то решение упрощается. При этом в силу теоремы единственности поле во всем объеме V будет определено однозначно. Для нахождения ЭМП в области V применяют следующий прием: полагают, что поле внутри объема V_0 равно нулю, поскольку оно не представляет интереса, и заменяют реальные источники поля воображаемыми таким образом, чтобы они создавали поле внутри объема V_0 , равное нулю, а в области V обеспечивали поле, равное исходному. Тангенциальные составляющие поля, созданные этими источниками, на поверхности S испытывают скачок при переходе с поверхности в окружающее пространство и уже на бесконечно малом удалении от поверхности должны быть приняты равными нулю.

Разрыв в непрерывности касательной составляющей магнитного поля на идеально-проводящей поверхности зеркала в соответствии с граничными условиями должен компенсироваться возникновением поверхностного электрического тока с плотностью \vec{j}_S :

$$[\vec{n}^\circ \vec{H}_\tau] = \vec{j}_S. \quad (7.8.1)$$

Используя принцип перестановочной двойственности, запишем для тангенциальной составляющей напряженности электрического поля на поверхности раскрыва соотношение

$$-[\vec{n}^\circ \vec{E}_\tau] = \vec{j}_{S_m}. \quad (7.8.2)$$

где \vec{j}_{S_m} – поверхностная плотность магнитного тока.

Далее принимается, что каждый элемент поверхности антенны представляет электрический или магнитный диполи с заданными на них поверхностными электрическими (7.8.1) и магнитными (7.8.2) токами, которые и создают ЭМП во всем объеме V .

Таким образом, эквивалентность полей и поверхностных токов заключается в следующем: задание на некоторой поверхности касательных составляющих магнитного или электрического полей эквивалентно заданию поверхностной плотности сторонних электрических и магнитных токов.

Этот принцип эквивалентности применяется при расчете поля элемента Гюйгенса.

7.9. Принцип Гюйгенса – Френеля. Поле элемента Гюйгенса

Для объяснения последовательности механизма распространения волны Гюйгенс предположил, что каждый элементарный участок волнового фронта является центром, создающим вторичные волны, причем волновым фронтом в любой последующий момент времени служит огибающая этих вторичных сферических волн. Френель дополнил это предположение, указав, что вторичные волны интерферируют друг с другом в пространстве по направлению распространяющейся волны. Сочетание этих предположений получило название принципа Гюйгенса – Френеля, играющего важную роль при определении ЭМП в различных условиях. Математическое обоснование этого принципа было дано Кирхгофом, поэтому в литературе встречается также название «принцип Гюйгенса – Кирхгофа».

Пояснить принцип Гюйгенса – Френеля можно на простом примере распространения волны в однородном неограниченном пространстве. Пусть в некоторый начальный момент времени ($t = t_0$) сферический фронт волны занимает положение S (рис. 7.9.1). Полная фаза волны на этой поверхности составляет ϕ_{Σ} . В следующий момент времени $t = t_0 + \Delta t$ поверхность, соответствующая полной фазе ϕ_{Σ} , уже не совпадает с поверхностью S . Для построения такой новой поверхности S_1 , согласно принципу Гюйгенса – Френеля, требуется каждый элементарный участок на поверхности S принять за центр окружности (в пространстве это сфера) радиуса $\Delta r = v_{\phi} \Delta t$, где v_{ϕ} – скорость волны. Эти элементарные участки являются вторичными излучателями и называются виртуальными (воображаемыми) излучателями. На поверхности S_1 , образованной огибающими построенных окружностей, в момент времени t полная фаза распространяющейся волны будет, как показано ранее, вновь ϕ_{Σ} . Затем процесс построения поверхностей с одинаковой полной фазой последовательно повторяется и, таким образом, происходит распространение волны.

Принцип Гюйгенса – Френеля справедлив для любых волновых процессов и широко применяется при расчете полей.

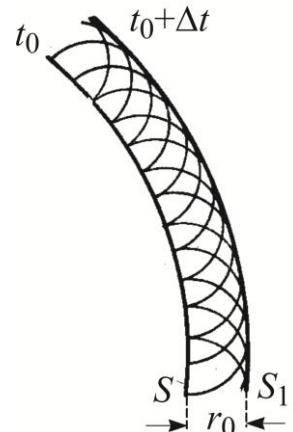


Рис. 7.9.1

Рассмотрим поле, которое создает элемент фронта волны (элемент Гюйгенса). Для этого предположим, что сферическая волна движется в сторону положительных значений оси z . В плоскости $x0y$ выделим элементарную площадку фронта волны, совместив ее центр с началом координат. Линейные размеры элемента Гюйгенса гораздо меньше длины волны $(l_1 \gg \lambda, l_2 \gg \lambda)$ и тогда площадку ΔS можно считать плоским участком фазового фронта сферической волны (рис. 7.9.2).

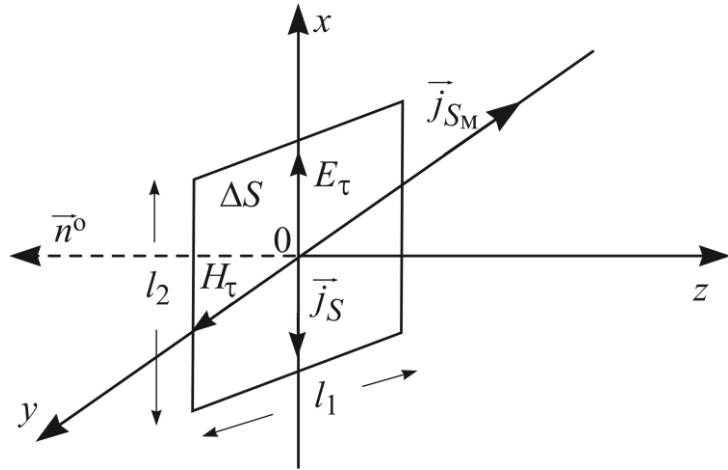


Рис. 7.9.2

Получим выражение для ЭМП, создаваемого элементом Гюйгенса в дальней зоне.

На поверхность ΔS заданы тангенциальные составляющие поля:

$$\dot{\vec{E}}_\tau = \vec{x}^\circ \dot{E}_0, \quad (7.9.1)$$

$$\dot{\vec{H}}_\tau = \vec{y}^\circ \dot{H}_0, \quad (7.9.2)$$

которые создают поверхностные токи:

электрический –

$$\dot{\vec{j}}_S = \left[\vec{z}^\circ, \dot{\vec{H}}_\tau \right] = -\vec{x}^\circ \dot{H}_0, \quad (7.9.3)$$

магнитный –

$$\dot{\vec{j}}_{S_M} = \left[\dot{\vec{E}}_\tau, \vec{z}^\circ \right] = -\vec{y}^\circ \dot{E}_0, \quad (7.9.4)$$

где \dot{E}_0 и \dot{H}_0 – комплексные амплитуды тангенциальных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей соответственно.

Знак «минус» в формулах (7.9.3) и (7.9.4) учитывает, что орт нормали к плоскости $x0y$ направлен в сторону источника ($\vec{n}^\circ = -\vec{z}^\circ$).

Поскольку векторы напряженностей электрического и магнитного полей в свободно распространяющейся волне взаимно перпендикулярны, то и эквивалентные им векторы электрической и магнитной плотностей токов также взаимно перпендикулярны.

В пределах площадки ΔS можно выделить два элементарных диполя:

электрический с длиной l_2 и током \vec{j}_S ,

магнитный с длиной l_1 и током \vec{j}_{S_m} .

Найдем поле элемента Гюйгенса в дальней зоне, которое создают эти токи.

Полный электрический ток, текущий через элемент Гюйгенса,

$$\dot{I} = \dot{j}_S l_1 = -\dot{H}_0 l_1. \quad (7.9.5)$$

Поле электрического диполя, создаваемое этим током,

$$\Delta \dot{H}_{\vartheta_\psi} = \frac{\dot{I} l_2 i k}{4\pi r} e^{-ikr} \sin \theta = \frac{-\dot{H}_0 \Delta S i k}{4\pi r} e^{-ikr} \sin \theta. \quad (7.9.6)$$

Поле магнитного диполя определим, используя принцип перестановочной двойственности. При этом учтем, что диполи расположены под углом 90° относительно друг друга. Поле магнитного диполя определяется для $\theta = \frac{\pi}{2}$ только в плоскости $x0z$, в которой

$$-\Delta \dot{E}_{m_0} = \frac{\dot{E}_0 \Delta S}{4\pi r} i k e^{-ikr}. \quad (7.9.7)$$

Используя соотношение $\Delta \dot{H}_\psi = \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \dot{E}_\theta$, перейдем от выражения (7.9.6)

к электрическому полю:

$$\Delta \dot{E}_{\vartheta_0} = -i k \frac{\dot{E}_0 \Delta S}{4\pi r} e^{-ikr} \sin \theta. \quad (7.9.8)$$

Полное поле элемента Гюйгенса определяется как суперпозиция полей диполей:

$$\Delta E_\theta = \Delta E_m (1 + \sin \theta), \quad (7.9.9)$$

где $\Delta E_m = \frac{-E_0 \Delta S i k}{4\pi r} e^{-ikr}$.

ДН элемента Гюйгенса имеет вид кардиоиды, без излучения в сторону, противоположную движению волны (рис. 7.9.3).

Пространственная ДН представляет поверхность, образующуюся при вращении кардиоиды вокруг ее оси симметрии (направление вектора Пойнтинга).

В качестве примера приведем порядок расчета поля параболической антенны в дальней зоне (рис. 7.9.4).

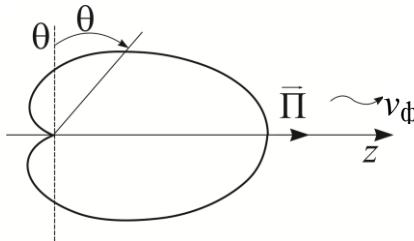


Рис. 7.9.3

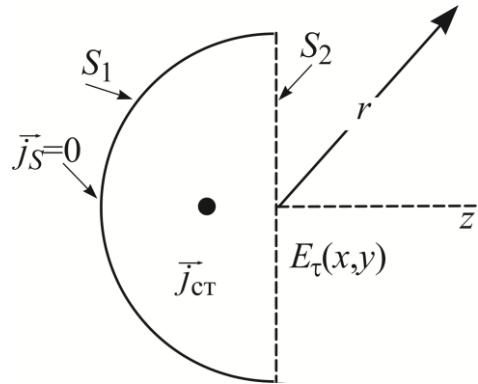


Рис. 7.9.4

Поверхность S включает тыльную поверхность металлического зеркала S_1 и поверхность раскрыва S_2 :

$$S = S_1 + S_2.$$

В пренебрежение поверхностными электрическими токами на тыльной поверхности зеркала, вклад которых в излучение, создаваемое антенной, очень мал, учитываются только фиктивные магнитные токи, обусловленные тангенциальным электрическим полем $\dot{E}_\tau(x, y)$ на раскрыве антенны. Это поле определяют каким-либо приближенным методом, а затем вычисляют полное поле по формуле (7.9.9), и вблизи оси антенны $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ оно вычисляется так:

$$\dot{E} = -\frac{ik}{2\pi} \int_{S_2} \dot{E}_\tau \frac{e^{-ikr}}{r} dS. \quad (7.9.10)$$

Выражение (7.9.10) есть скалярная формула Кирхгофа для расчета поля в дальней зоне. Недостаток ее в том, что если на раскрыве антенны задана только одна тангенциальная составляющая поля (E_{0x} или E_{0y}), то и поле в точке приема получается в виде той же составляющей. Однако в действительности, так будет только в направлении оси антенны, поэтому скалярной формулой Кирхгофа пользуются, когда интересуются полем в небольшом телесном угле вблизи оси антенны. В других случаях применяют более точные дифракционные формулы.

7.10. Лемма Лоренца. Теорема взаимности

Лемма Лоренца играет важную роль при решении задач электродинамики, устанавливая зависимость между ЭМП двух сторонних источников. На основании леммы Лоренца доказывается теорема взаимности, имеющая существенное значение в теории радиосвязи.

Пусть в линейной изотропной среде с потерями имеются независимые друг от друга два источника ЭМП, находящиеся в замкнутых объемах V_1 и V_2 (рис. 7.10.1), с плотностями сторонних электрических токов \vec{j}_{ct_1} и \vec{j}_{ct_2} соответственно.

Эти источники создают монохроматические ЭМП, которые описываются уравнениями Максвелла.

ЭМП, создаваемое первым источником:

$$\text{rot} \vec{H}_1 = i\omega \tilde{\epsilon}_a \vec{E}_1 + \vec{j}_{ct_1}, \quad (7.10.1)$$

$$\text{rot} \vec{E}_1 = -i\omega \mu_a \vec{H}_1. \quad (7.10.2)$$

ЭМП, создаваемое вторым источником:

$$\text{rot} \vec{H}_2 = i\omega \tilde{\epsilon}_a \vec{E}_2 + \vec{j}_{ct_2}, \quad (7.10.3)$$

$$\text{rot} \vec{E}_2 = -i\omega \mu_a \vec{H}_2. \quad (7.10.4)$$

Умножая скалярно уравнения (7.10.1)–(7.10.4) на \vec{E}_2 , \vec{H}_2 ; \vec{E}_1 , \vec{H}_1 соответственно, получаем:

$$\vec{E}_2 \text{rot} \vec{H}_1 = i\omega \tilde{\epsilon}_a \vec{E}_1 \vec{E}_2 + \vec{j}_{ct_1} \vec{E}_2, \quad (7.10.5)$$

$$\vec{H}_2 \text{rot} \vec{E}_1 = -i\omega \mu_a \vec{H}_1 \vec{H}_2, \quad (7.10.6)$$

$$\vec{E}_1 \text{rot} \vec{H}_2 = i\omega \tilde{\epsilon}_a \vec{E}_2 \vec{E}_1 + \vec{j}_{ct_2} \vec{E}_1, \quad (7.10.7)$$

$$\vec{H}_1 \text{rot} \vec{E}_2 = -i\omega \mu_a \vec{H}_2 \vec{H}_1. \quad (7.10.8)$$

Вычитая из (7.10.5) уравнение (7.10.8), а из (7.10.7) уравнение (7.10.6), преобразуя левые части получившихся уравнений и используя соотношение

$$\vec{a} \text{rot} \vec{b} - \vec{b} \text{rot} \vec{a} = \text{div} [\vec{a} \vec{b}],$$

имеем:

$$\text{div} [\vec{E}_2 \vec{H}_1] = i\omega \left[\tilde{\epsilon}_a (\vec{E}_1 \vec{E}_2) + \mu_a (\vec{H}_1 \vec{H}_2) \right] + (\vec{j}_{ct_1} \vec{E}_2), \quad (7.10.9)$$

$$\operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{H}}_2 \right] = i\omega \left[\tilde{\varepsilon}_a \left(\dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{E}}_2 \right) + \mu_a \left(\dot{\vec{H}}_1 \dot{\vec{H}}_2 \right) \right] + \left(\dot{\vec{j}}_{ct_2} \dot{\vec{E}}_1 \right). \quad (7.10.10)$$

Теперь, вычитая из (7.10.10) уравнение (7.10.9), получаем

$$\operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{H}}_2 \right] - \operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{H}}_1 \right] = \left(\dot{\vec{j}}_{ct_2} \dot{\vec{E}}_1 \right) - \left(\dot{\vec{j}}_{ct_1} \dot{\vec{E}}_2 \right), \quad (7.10.11)$$

представляющее лемму Лоренца в дифференциальной форме. Лемма Лоренца устанавливает связь между сторонними токами и полями в двух различных объемах пространства.

Проинтегрировав равенство (7.10.11) по произвольной области $V \in \frac{V_1}{V_2}$

(рис. 7.10.2) и применяя преобразование Остроградского – Гаусса, приходим к лемме Лоренца в интегральной форме

$$\oint_S \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{H}}_2 \right] - \left[\dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{H}}_1 \right] \right\} d\vec{S} = \int_V \left(\dot{\vec{j}}_{ct_1} \dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{j}}_{ct_2} \dot{\vec{E}}_1 \right) dV. \quad (7.10.12)$$

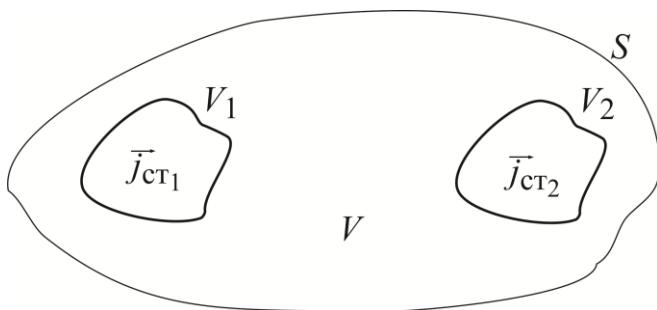


Рис. 7.10.2

Распространим интегрирование на бесконечно большой объем пространства (V), тогда можно считать поверхность (S), охватывающую этот объем, сферой и левая часть соотношения (7.10.12) обращается в нуль, так как напряженности как электрического, так и магнитного полей убывают быстрее, чем обратно пропорционально расстоянию, тогда как элемент поверхности сферы пропорционален квадрату расстояния. Поскольку по условию во всем безграничном пространстве сторонний ток $\dot{\vec{j}}_{ct_1}$ существует только в объеме V_1 , а сторонний ток $\dot{\vec{j}}_{ct_2}$ – в объеме V_2 , получаем

$$\int_{V_1} \dot{\vec{j}}_{ct_1} \dot{\vec{E}}_2 dV = \int_{V_2} \dot{\vec{j}}_{ct_2} \dot{\vec{E}}_1 dV. \quad (7.10.13)$$

Соотношение (7.10.13) представляет математическую формулировку теоремы взаимности.

Рассмотрим частный случай. Пусть объемы V_1 и V_2 и распределение тока в них $\dot{\vec{j}}_{ct_1}$ и $\dot{\vec{j}}_{ct_2}$ одинаковы, тогда из (7.10.13) следует, что и напряженности электрического поля $\dot{\vec{E}}_1$ и $\dot{\vec{E}}_2$ одинаковы. Полагая объемы антennами, видим, что первая антenna создает у второй антennы такое же поле,

какое вторая антenna создает у первой. Таким образом, на основе теоремы взаимности можно показать, что передающая и приемная антенны обладают рядом одинаковых свойств, в частности, диаграмма направленности приемной антенны имеет такую же форму, как если бы эта антenna работала как передающая.

Теорема взаимности имеет большое практическое значение, особенно при решении ряда антенных задач.

7.11. Понятие о дифракции волн

В предыдущих разделах рассматривалось излучение ЭМВ в безграничное пространство. На практике ЭМВ обычно взаимодействуют с тем или иным объектом конечных размеров, расположенным на пути распространения волны, создавая сложный процесс, называемый дифракцией.

В широком смысле под дифракцией понимают весь процесс взаимодействия ЭМВ с объектом ограниченных размеров, а в узком – огибание ЭМВ этого объекта. Задачи определения влияния объекта на структуру ЭМВ называют задачами дифракции.

Предполагая, что среда, в которой находится объект, является однородной, введем некоторые понятия, используемые в этих задачах. Часть поверхности объекта (препятствия для ЭМВ), на которую падает распространяющаяся волна, называется освещенной областью (рис. 7.11.1). Часть пространства за препятствием, в которое не попадает прямолинейно распространяющаяся падающая ЭМВ, называется областью тени. Между областями тени и освещенности находится область полутени, в которой поле ЭМВ постепенно убывает по мере приближения к области тени. В этих областях, до некоторой степени условно, различают рассеянное (отраженное) поле, возникшее при отражении от освещенной области препятствия, и дифракционное в областях тени и полутени. Разумеется, в общем случае падающая волна проникает в объект, создавая в нем внутреннее поле. Исключение составляют идеально проводящие тела, в которых внутреннее поле отсутствует. Задачей дифракции и является нахождение этих полей при условии, что характеристики падающей волны известны.

Решения задач дифракции подразделяются на строгие и приближенные. При строгом решении должны быть известны (заданы) геометрические и электромагнитные свойства объекта, а на поверхности объекта должны выполняться граничные условия для векторов ЭМП. Для некоторых объектов геометрически простой формы (шар, цилиндр и т. п.) строгие решения приводят к функциональным рядам, для объектов более сложной формы разработан ряд численных методов, наиболее универсальными из которых являются методы, сводящие решение задачи к интегральным или интегро-дифференциальным уравнениям.

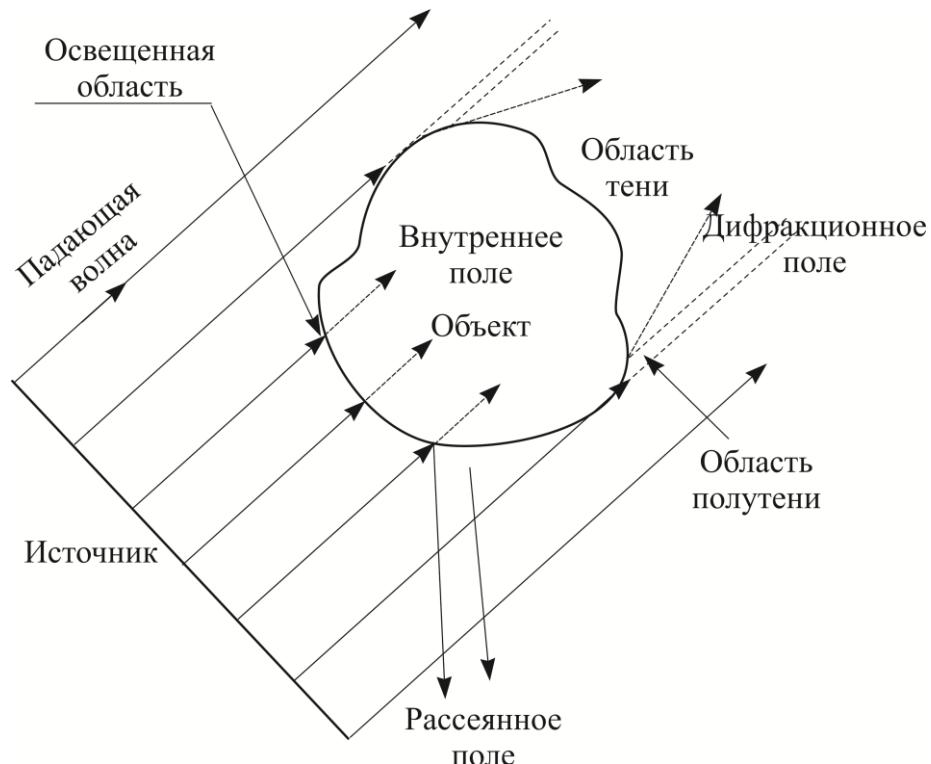


Рис. 7.11.1

В приближенных методах задачи дифракции решаются при упрощающих предположениях.

К таким методам в первую очередь относится метод геометрической (лучевой) оптики (ГО), в котором ЭМВ рассматривается как совокупность не взаимодействующих между собой лучей и, следовательно, волновой характер поля не учитывается.

Применение метода ГО возможно при выполнении ряда условий:

– наименьший радиус кривизны поверхности объекта и его любой линейный размер много больше длины падающей волны. Это условие позволяет считать любую границу раздела (поверхность объекта) состоящей из локально плоских площадок, в каждой из которых локально-плоская ЭМВ представляет собой совокупность лучей, поведение которых определяется законами оптики;

– источник ЭМВ находится от объекта на расстоянии, во много раз превышающем длину волны, что позволяет записать выражение для напряженностей поля ЭМВ в пределах локальной площадки в виде

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) \exp[i\phi(\vec{r})] = A(\vec{r}) \exp[ikS(\vec{r})],$$

где A и ϕ – медленно меняющиеся по длине волны амплитуда и фаза, зависящие от поперечных по отношению к направлению распространения волны координат; $S = \frac{\phi}{k}$ – также медленно меняющаяся скалярная функция

ция, называемая эйконалом, причем условие $S = \text{const}$ определяет ПРФ. Линии вектора ∇S перпендикулярны ПРФ и представляют лучи (прямые в однородной среде и плавные кривые в неоднородной), вдоль которых происходит распространение энергии ЭМВ. Каждой точке луча соответствуют расположенные перпендикулярно к нему определенные значения векторов \vec{E} и \vec{H} . Лучи на малом участке ПРФ образуют силовую (энергетическую) трубку, внутри которой энергия ЭМВ постоянна. Обмена энергиями между трубками не происходит, поскольку считается, что лучи не взаимодействуют, поэтому результирующее поле нескольких трубок определяется как геометрическая сумма полей отдельных трубок.

В методе ГО предполагается, что ЭМП в точке наблюдения определяется его значениями в тех элементах волнового фронта падающей волны, из которых лучи приходят в точку наблюдения. Очевидно, что лучи для нахождения поля в зонах тени и полутени не применимы.

Метод ГО широко используется для расчета рассеянного поля в миллиметровом и оптическом диапазонах.

Развитием метода ГО является метод геометрической теории дифракции (ГТД), пригодный для решения задач дифракции ЭМВ на объектах сложной формы. ГТД также основывается на допущении о силовых трубках, но в отличие от предыдущего метода здесь, помимо оптических лучей, вводят еще дифракционные лучи, которые возникают при падении ЭМВ на особенности (вершины, ребра, закругления) геометрической конфигурации объектов. Дифракционные лучи попадают в область тени и создают там поле, а также могут изменять поле в освещенной области.

В еще одном методе волновой (физической) оптики учитывается волновой характер ЭМП и используется ранее изложенный способ определения поля в некоторой области пространства по значениям тангенциальных составляющих электрической и магнитной напряженностей поля на поверхности S другой области, внутренней по отношению к исследуемой. Для этого разбивают мысленно поверхность S на малые площадки, рассматриваемые как элементы Гюйгенса, и затем суммируют поля, созданные каждой площадкой. В качестве поверхности S выступает поверхность объекта, участвующего в дифракционной задаче, на которую падает первоначальная волна от источника. Однако для точного определения тангенциальных составляющих поля E_τ и H_τ на поверхности S необходимо также решить дифракционную задачу, для чего находят приближенное значение тангенциальных составляющих, используя ряд упрощающих предпосылок. По применяемым расчетным формулам метод волновой оптики часто называют приближением Гюйгенса – Кирхгофа.

Отметим, что в этом методе, как и в методе ГО, предполагается, что линейные размеры объекта гораздо больше длины волны.

Дальнейшей эволюцией метода волновой оптики является метод краевых волн, применяемый к объектам из металла, поверхность которых имеет излом.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения типам элементарных излучателей и объясните, что они физически собой представляют.
2. Объясните физическую картину излучения электромагнитной волны диполем Герца.
3. Изложите последовательность вывода выражений для поля излучения диполя Герца.
4. Сформулируйте определения для зон излучения элементарных источников электромагнитной волны.
5. Поясните понятие «характеристическое сопротивление» среды и его связь с полем волны.
6. Дайте определение амплитудной характеристики направленности и диаграммы направленности излучателя.
7. Поясните, что характеризует сопротивление излучения диполя.
8. Сформулируйте особенности поля в ближней зоне излучения.
9. Дайте определение элементу Гюйгенса.
10. Сформулируйте принцип Гюйгенса – Френеля.
11. Поясните, в чем суть леммы Лоренца.
12. Объясните практическое значение теоремы взаимности.
13. Поясните, что означает термин «дифракция».
14. Изложите основные методы решения задач дифракции.