ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»

А.Б. Алексеев, Н.В. Попова, Г.М. Тащиян

РЯД И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Учебно-методическое пособие

СПб ГУТ)))
Санкт-Петербург
2017

УДК 517.52
ББК 22.161.5

Рецензенты
заведующий кафедрой ВМ1 ПГЭТУ д. физ.-мат. н. Бодунов Н.А.
профессор кафедры Высшей математики ПГУПС Гарбарук В. В.

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом СПбГУТ

Ряд и интеграл Фурье: учебно-методическое пособие
/ А. Б. Алексеев, Н.В. Попова Г. М. Тащиян ; СПбГУТ. – СПб., 2017 –
с.

Методические указания написаны в соответствии с программой учебной дисциплины «Математический анализ». Настоящее пособие предназначено для знакомства с основами теории рядов и интеграла Фурье и содержит разделы, посвященные линейным и гильбертовым пространствам, ортогональным системам и рядам Фурье в гильбертовых пространствах, ортогональным системам и рядам Фурье в функциональных пространствах, преобразованию Фурье и различным видам интеграла Фурье. Оно предназначено студентам всех форм обучения ГУТ им. проф. М.А.Бонч-Бруевича и может быть полезно всем, кого интересует простое и компактное изложение материала. Отдельный раздел содержит индивидуальные задания, которые можно использовать на практических занятиях, а также при подготовке к экзамену.

В каждом параграфе содержатся основы теории и подробно разобраны примеры. Нумерация формул и рисунков в каждом параграфе пособия своя. При необходимости ссылки на формулу другого параграфа применяется двойная нумерация, где первая цифра означает номер параграфа, а вторая – номер формулы. Ключевые слова в определениях и формулировках утверждений выделены полужирным курсивом.

В качестве дополнительных учебников с подробным изложением материала рекомендуем [1,3], а в качестве задачников – [2,4].

УДК 517.52
ББК 22.161.5

§1. Скалярное произведение в линейных пространствах

Для обсуждения теоретического материала и формулировки индивидуальных заданий используем начальные понятия и сведения из линейной алгебры и функционального анализа.

<u>Определение</u>. *Множество* $\boldsymbol{X}$ *элементов* $x, y, z, \ldots$ *называется* ***линейным или векторным пространством****, если в нём введены две операции:*

а) сложение, каждым двум элементам $x, y \in \boldsymbol{X}$*, поставлен в соответствие определённый элемент* $x + y \in \boldsymbol{X}$*, называемый их суммой;*

б) умножение на число (скаляр), каждому элементу $x \in \boldsymbol{X}$ *и каждому числу* λ *поставлен в соответствие определённый элемент* $\lambda \cdot x \in \boldsymbol{X}$*, называемый произведением элемента* x *на скаляр* λ.

Эти две операции могут определяться любыми фиксированными правилами, лишь бы выполнялись следующие 7 аксиом Г. Вейля:

1) $x + y = y + x$;
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3) *существует элемент* $\theta \in \boldsymbol{X}$ (*обычно называемый нулём*) *такой, что* $x + \theta = x$;
4) $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$;
5) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot x$;
6) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
7) $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$*, где* λ *и* μ *– любые числа.*

Часто элементы линейного пространства называют векторами. Если операция умножения производится на вещественные числа, то векторное пространство называется ***вещественным пространством***, если используются комплексные числа, то – ***комплексным пространством***.

В векторном пространстве $\boldsymbol{X}$ для всякого вектора $x \in \boldsymbol{X}$ существует ***противоположный*** вектор, определяемый как $-x = (-1)x$. ***Разностью*** элементов x и y называется сумма элемента x с элементом, противоположным *элементу* y: $x - y = x + (-y)$.

Из аксиом Вейля можно вывести следующие утверждения.

<u>*Следствие*</u> 1. *Нулевой элемент единствен.*

Доказательство. Допустим, что θ_1 и θ_2 – нули в $\boldsymbol{X}$. Тогда согласно аксиомам 3) и 1) получим $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$.

<u>*Следствие*</u> 2. Справедливо равенство $0 \cdot x = \theta$.

Доказательство. Согласно аксиомам: $x = 1\,x = (1+0)\,x = 1\,x + 0\,x = x + 0\,x$, т. е. $x = x + 0\,x$. Тогда из единственности нуля и 3-ей аксиомы получаем требуемое равенство.

В качестве самостоятельного упражнения докажите справедливость следующих утверждений.

Следствие 3.

1. *Для любого вектора* x *обратный элемент единственен.*
2. *Если* $\lambda \cdot x = \mu \cdot x$, *где* $x \neq \theta$, *то* $\lambda = \mu$.
3. *Если* $\lambda \cdot x = \lambda \cdot y$ *и* $\lambda \neq 0$, *то* $x = y$.

В пространстве вводится понятие "близости" элементов (расстояние между векторами). Это делается разными способами. В данном пособии потребуется понятие длины вектора, основанное на понятии скалярного произведения.

Определение. ***Скалярным произведением*** *в линейном пространстве* ***X*** *называется числовая функция двух аргументов* $x, y \in \boldsymbol{X}$, *обозначаемая обычно* (x, y) *и удовлетворяющая следующим условиям* (*аксиомам*):

1. $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0$ *лишь при* $x = \theta$;
2. $(y, x) = \overline{(x, y)}$;
3. $(\lambda\, x, y) = \lambda(x, y)$;
4. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.

Замечание. Черта сверху означает комплексное сопряжение. Если линейное пространство ***X*** вещественно, то скалярное произведение (x, y) принимает вещественные значения, и во второй аксиоме не надо ставить знак комплексного сопряжения.

Из аксиом скалярного произведения легко вывести соотношения:

$$(x, \lambda\, y) = \bar{\lambda}\,(x, y);\ (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2);\ (\theta, y) = 0;$$

$$(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z).$$

Определение. ***Нормой*** (***длиной***) *вектора называется величина*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Определение. *Элементы* (*векторы*) x *и* y *называются* ***ортогональными***, *если* $(x, y) = 0$.

Из аксиом скалярного произведения вытекает неравенство Коши- Буняковского-Шварца (неравенство КБШ) и неравенство треугольника.

Теорема 1 (*неравенство КБШ*). *Модуль скалярного произведения двух элементов x,y* $\in$ ***X*** *не превосходит произведения норм сомножителей*:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \tag{1}$$

При этом равенство для ненулевых векторов достигается тогда и только тогда, когда элементы x и y пропорциональны, т.е. существует число λ *такое, что* $x = \lambda \cdot y$.

Доказательство. Рассмотрим очевидные соотношения

$$0 \leq \|x + \alpha y\|^2 = \|x\|^2 + \overline{\alpha}(x, y) + \alpha\,\overline{(x, y)} + |\alpha|^2\|y\|^2,$$

где параметр α – произвольное число. Для доказательства неравенства КБШ (при $y \neq \theta$) достаточно положить

$$\alpha = -\frac{(x,y)}{\|y\|^2}.$$

Получим

$$0 \le \|y\|^2 \|x+\alpha y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - |(x,y)|^2.$$

Отсюда видно, что неравенство КБШ обращается в равенство только в том случае, когда элементы (векторы) x и y пропорциональны, т.е. $x = -\alpha y$.

<u>*Теорема*</u> 2 (*неравенства треугольника*). *Для любых элементов* $x, y \in \boldsymbol{X}$ *справедливы неравенства*

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \tag{2}$$

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|. \tag{3}$$

Доказательство. Применив неравенство КБШ (1), получим

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Отсюда следует первое требуемое соотношение (2). Используя доказанное неравенство, получим

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \le \|x-y\| + \|y\|.$$

Тогда $\|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$. Меняя здесь местами элементы x, y, убеждаемся в справедливости неравенства (3).

Примеры векторных пространств и скалярных произведений.

Пример 1. Пространство $\boldsymbol{R^n}$ – множество упорядоченных наборов (кортежей), состоящих из n вещественных чисел: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_k \in \boldsymbol{R}, k = 1, 2, \dots, n$. Напомним, что упорядоченные наборы элементов фиксированной длины часто называют ***кортежами***. Множество вещественных чисел $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R^1}$ можно рассматривать, как векторное пространство. Операции сложения и умножения на вещественное число определены естественным образом

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$
$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

В качестве нулевого элемента выступает набор, состоящий из нулей:

$$\theta = (0, 0, \dots, 0)\cdot$$

Скалярное произведение определяется с помощью формулы

$$(x, y) = \sum_{r=1}^{n} x_k y_k,$$

и, соответственно, норма вектора вычисляется по формуле

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}.$$

Пример 2. Пространство $\boldsymbol{C^n}$ – множество упорядоченных наборов (кортежей), состоящих из n комплексных чисел: $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, где $z_k \in \boldsymbol{C}, k = 1, 2, \dots, n$. Операции сложения и умножения на комплексное число определяются аналогично предыдущему примеру.

Скалярное произведение между векторами z и w определяется равенством

$$(z,w) = \sum_{r=1}^{n} z_k \overline{w_k},$$

и норма вектора вычисляется по формуле

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}.$$

Пример 3. Пространство $\boldsymbol{L_2}(a,b)$ – множество функций, определённых на промежутке (a,b), интеграл от квадрата модуля которых конечен: $f \in \boldsymbol{L_2}(a,b)$, если

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Условие конечности таких интегралов часто связано с условием конечности энергии в изучаемых физических процессах.

Операция сложения функций $f(x)$ и $g(x)$ а также операция умножения на число определяются естественно:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

а роль нулевого элемента играет функция, равная нулю на промежутке (a,b).

Скалярное произведение определяется по формуле

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

норма

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Замечание. Сразу надо сказать, что равенство нулю нормы функции не означает равенство нулю значений этой функции во всех точках промежутка. Значения функции могут отличаться от нуля на некотором подмножестве, интегрирование по которому даёт нулевой вклад в интеграл по всему промежутку. Такие подмножества, как говорят, имеют нулевую «меру». На промежутке (a,b) эта мера является обобщением длины. Изучение этих вопросов относится к курсу теории мер и интегралов. Таким образом, нулевой элемент в пространстве функций $\boldsymbol{L_2}(a,b)$ представляет собой функцию, которая равняется нулю везде кроме подмножества нулевой меры. Коротко в таком случае говорят, что функция равна нулю почти всюду. Аналогично, равенство двух функций означает, что у этих функций совпадают значения почти всюду. Это замечание относится и к следующему примеру.

Пример 4. Пространство $\boldsymbol{L_2}(D,\ \rho)$ – обобщение предыдущего примера. Рассматривается множество функций $f(x)$ определённых в области $D \in \boldsymbol{R^n}$, у которых конечен интеграл

$$\int_D |f(x)|^2 \rho(x) dx < \infty,$$

где $\rho(x) > 0,\ x \in D,$ – весовая функция.

Скалярное произведение между функциями $f(x)$ и $g(x)$ определяется формулой

$$(f,g)=\int_D f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx,$$

норма

$$\|f\|=\left(\int_D |f(x)|^2\rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Упражнение (теорема Пифагора). Если элементы $x,y \in \boldsymbol{X}$ ортогональны, т.е. $(x,y)=0$, то $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$. Почему доказательство этой достаточно сложной теоремы элементарно?

С помощью нормы элементов $x \in \boldsymbol{X}$: $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$, определяют расстояние между векторами (метрику пространства).

Определение. ***Расстоянием*** *между векторами* $x,y \in \boldsymbol{X}$ *называется норма разности* $\|x-y\|$.

Далее, как обычно в анализе, вводится понятия фундаментальной последовательности элементов и её предела.

Определение. Последовательность элементов $x_n, n=1,2,\ldots$, *называется* ***фундаментальной*** (**сходящейся**), *если она удовлетворяет условию Коши*: *для любого числа* $\varepsilon>0$ *существует такое натуральное число* N_ε, *что* $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$ *для всех номеров* $n,m>N_\varepsilon$.

В таких ситуациях говорят, что последовательность сходится в метрике данного пространства.

Определение. Элемент x *называется* ***пределом*** последовательности $x_n, n=1,2,\ldots$, *если* $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-x_n\|=0$.

Определение. Пространства, в которых любая фундаментальная последовательность имеет предел, называются ***полными***.

Определение. Полные векторные пространства со скалярным произведением называются ***гильбертовыми*** (***унитарными***) *пространствами*.

Гильбертово пространство обычно обозначают буквой $\boldsymbol{H}$. Выше приведённые примеры векторных пространств, являются примерами гильбертовых пространств.

В дальнейшем тот факт, что последовательность $x_n, n=1,2,\ldots$, имеет предел x в пространстве $\boldsymbol{H}$, будем обозначать $x_n \xrightarrow{\sigma} x$. Буква сигма σ поставлена над стрелкой в честь того, что в приложениях сходимость в гильбертовых пространствах называю сходимостью в среднем квадратичном.

Введённое выше определение сходимости применяется и к рядам, составленным из элементов пространства $\boldsymbol{X}$.

Определение. Ряд, составленный из элементов $g_n \in \boldsymbol{X}, n=1,2,\ldots$,

$$g_1+g_2+\ldots+g_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} g_n,$$

называется ***сходящимся****, если сходится последовательность его частичных сумм* $S_n = g_1 + g_2 + \ldots + g_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Отметим непрерывность нормы и скалярного произведения.

Теорема 3. Норма и скалярное произведение являются непрерывными функциями.

Доказательство. Непрерывность нормы вытекает из неравенства (3). Для доказательства непрерывности скалярного произведения возьмем две сходящиеся последовательности $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ и $y_n \xrightarrow{\sigma} y$. Используя неравенство КБШ (1), выводим

$$\left|(x_n, y_n) - (x, y)\right| = \left|(x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)\right| \le \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\|.$$

Отсюда и непрерывности нормы вытекает справедливость утверждения теоремы.

§2. Ортогональные системы

Одним из основных понятий теории линейных пространств является понятие линейной независимости элементов пространства.

Определение. ***Линейной комбинацией*** *элементов* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *векторного пространства* ***X*** *называется элемент этого пространства следующего вида:*

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n ,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *– любые числа, называемые* ***коэффициентами****.*

Определение. ***Линейной оболочкой*** *элементов* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *векторного пространства* ***X*** *называется множество всех линейных комбинаций этих элементов.*

Обозначим $\Lambda = \Lambda\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ линейную оболочку элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Легко видеть, что линейная оболочка Λ есть часть линейного пространства ***X*** и сама является линейным пространством.

Можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма. Пусть Λ линейная оболочка элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в гильбертовом пространстве ***H***. Тогда для любого элемента $x \in \boldsymbol{H}$ существует единственный элемент $x_0 \in \Lambda$, на котором реализуется минимум расстояния между элементами x и $y \in \Lambda$:

$$\|x - x_0\| = \min_{y \in \Lambda} \|x - y\|.$$

Линейная комбинация называется ***тривиальной***, если все её коэффициенты равны нулю. Тривиальная линейная комбинация любых векторов, очевидно, равна нулевому вектору.

Определение. *Элементы* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *линейного пространства* ***X*** *называются* ***линейно независимыми****, если их линейная комбинация равна нуле-*

вому вектору только в том случае, когда она тривиальна, и ***линейно зависимыми*** *в противном случае.*

<u>*Определение*</u>. Непустое конечное упорядоченное множество векторов называют ***системой векторов***. Одна система векторов называется ***подсистемой*** другой системы, если она является её подмножеством.

Из определения следует, что система векторов $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ линейного пространства $\boldsymbol{X}$ являются линейно <u>независимой</u>, если равенство

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = \theta \qquad (1)$$

выполняется только при <u>тривиальном</u> наборе коэффициентов:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Если равенство (1) выполняется, когда <u>не</u> <u>все</u> коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, <u>равны</u> <u>нулю</u>, то система векторов линейно зависима

Напомним простые теоремы о линейной зависимости и независимости векторов.

<u>*Свойство*</u> 1. *Элементы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них есть линейная комбинация остальных.*

<u>*Свойство*</u> 2. *Если среди данных элементов есть нулевой, то система этих элементов линейно зависима.*

<u>*Свойство*</u> 3. *Если к системе линейно зависимых элементов присоединить еще один или несколько элементов, то полученная система элементов будет линейно зависимой.*

<u>*Свойство*</u> 4. *Если система элементов линейно независима, то любая её подсистема линейно независима.*

Перечисленные свойства будут справедливы для систем попарно ортогональных ненулевых векторов (полезно самостоятельно убедится в справедливости указанных свойств).

<u>*Определение.*</u> *Система ненулевых векторов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{H}$ называется* ***ортогональной системой*** (*о.с.*), *если* $(e_k, e_n) = 0$, *при* $k \neq n$. *Если все векторы о.с. имеют норму равную единице, то о.с. называется* ***ортонормированной системой*** (*о.н.с.*).

Заметим, что в отличие от курса линейной алгебры, здесь будут рассматриваться наборы, состоящие из бесконечного числа векторов. Отметим, что, согласно определению, ортогональная система не содержит нулевого вектора. В дальнейшем это не оговаривается специально.

<u>*Теорема.*</u> *В ортогональной системе векторов любая подсистема, состоящая из конечного числа векторов, линейно независима.*

Доказательство. Предположим, что некоторая линейная комбинация n первых элементов данной системы $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ равна нулевому вектору

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = \theta$$

Умножая обе части этого равенства последовательно на $e_1, e_2, \ldots, e_n$, получим

$$\lambda_j\left(e_j, e_j\right)=\theta, \quad j=1,2,\ldots,n,$$

Так как $\left(e_j, e_j\right)=\left\|e_j\right\|^2>0$, то $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=\theta$. Таким образом, система линейно независима.

Если система линейно независимых векторов не ортогональна, то ее можно ортогонализовать. Это часто выполняют с помощью ***процесса ортогонализации Грама — Шмидта.***

Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n$ – линейно независимая система векторов. Процесс ортогонализации состоит в последовательном нахождении векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$ по формулам

$$\begin{aligned}
&g_1=f_1, && e_1=g_1\cdot\|g_1\|^{-1},\\
&g_2=f_2-(f_2,e_1)e_1, && e_2=g_2\cdot\|g_2\|^{-1},\\
&g_3=f_3-(f_3,e_1)e_1-(f_3,e_2)e_2, && e_3=g_3\cdot\|g_3\|^{-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&g_n=f_n-(f_n,e_1)e_1-\ldots-(f_n,e_{n-1})e_{n-1}, && e_n=g_n\cdot\|g_n\|^{-1}.
\end{aligned}$$

В итоге получаем ортонормированную систему векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$.

Упражнение. Доказать, что система векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$ – ортонормированная система векторов.

Пример. Если в пространстве вещественных функций $\boldsymbol{L_2}(-1,1)$ провести ортогонализацию системы функций $\{1, x, x^2,\ldots, x^n,\ldots\}$, то получаться многочлены, которые называются многочленами Лежандра (с точностью до умножения на нормирующую константу).

Найдём первые четыре многочлена Лежандра. Положим $f_k=x^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Тогда

$$g_0=f_0=1,\ \ \|g_0\|^2=\int_{-1}^{1}1^2dx=2,\quad e_0=1\big/\sqrt{2}\,;$$

$$g_1=f_1-(f_1,e_0)e_0=x-\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dx\frac{1}{\sqrt{2}}=x\,,\ \|g_1\|^2=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3},\ e_1=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x;$$

Здесь и далее при вычислении интегралов используется тот факт, что интеграл от нечётной функции по симметричному промежутку равен нулю.

$$g_2=f_2-(f_2,e_0)e_0-(f_2,e_1)e_1=x^2-\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dx\frac{1}{\sqrt{2}}-\int_{-1}^{1}x^2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x\,dx\,\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x=x^2-\frac{1}{3}$$

$$\|g_2\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45}, \quad e_2 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right).$$

Наконец, четвёртая функция

$$g_3 = f_3 - (f_3,e_0) - (f_3,e_1) - (f_3,e_2) = x^3 - \int_{-1}^{1} x^3\sqrt{\frac{3}{2}}x\,dx\sqrt{\frac{3}{2}}x = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$\|g_3\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)^2 dx = \frac{8}{175}, \quad e_3 = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right).$$

В результате получаем первые четыре многочлена Лежандра:

$$e_0 = 1/\sqrt{2}, \; e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x, \; e_2 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right), \; e_3 = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right).$$

Замечание. Многочлены Лежандра можно получить с помощью формулы Родрига, которая в данном случае имеет вид

$$e_n = \frac{1}{2^n n!}\sqrt{n+\frac{1}{2}}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n.$$

В индивидуальных заданиях будет предложено ортогонализовать те же функции и получить соответствующие ортогональные многочлены в пространстве $\boldsymbol{L_2}[(a, b), p(x)]$ (в «*пространстве с весом*»).

§3. Ряд Фурье

Докажем несколько простых утверждений.

<u>*Лемма*</u> 1. *Пусть $\{e_k\}$ – ортогональная система в пространстве* $\boldsymbol{H}$ *и элемент* $x \in \boldsymbol{H}$ *имеет вид*

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = \sum_{k=1}^{n} x_ke_k. \tag{1}$$

Тогда коэффициенты x_k *однозначно определяются по формулам*

$$x_k = \frac{(x,e_k)}{\|e_k\|^2}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

и справедливо равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\|e_k\|^2. \tag{3}$$

Доказательство. Учитывая ортогональность системы, для доказательства равенств (2) достаточно соотношение (1) скалярно умножить на вектор e_k. Для доказательства равенства (3) надо опять воспользоваться ортогональностью системы векторов $\{e_k\}$.

Определение. *Коэффициенты* (2) *называются* ***коэффициентами Фурье*** *элемента* (*вектора*) x *в ортогональной системе* $\{e_k\}$ *пространства* $\boldsymbol{H}$.

Замечание. Коэффициенты Фурье являются аналогом координат вектора в ортогональном базисе (в курсе аналитической геометрии), а соотношение (3) является аналогом теоремы Пифагора. Эти формулы будут распространены на случай бесконечного числа слагаемых.

Лемма 2. *Пусть* $\{e_k\}$ – *ортогональная система в пространстве* $\boldsymbol{H}$ *и элемент* $x \in \boldsymbol{H}$. *Тогда для любых чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *справедливо тождество*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |x_k - a_k|^2 \|e_k\|^2 , \tag{4}$$

где x_k, $k = 1, \ldots, n$, – *коэффициенты Фурье элемента* $x \in \boldsymbol{H}$.

Доказательство. Представим левую часть равенства (4) в виде

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \left\| \left(x - \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) + \sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k) e_k \right\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_j e_j \right\|^2 +$$

$$+ \left(x - \sum_{j=1}^{n} x_j e_j , \sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k) e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k) e_k , x - \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) + \left\| \sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k) e_k \right\|^2 \tag{5}$$

Два скалярных произведения в правой части равенства (5) равны нулю. Рассмотрим, например, первое

$$\left(x - \sum_{j=1}^{n} x_j e_j , \sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k) e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{(x_k - a_k)} \left(x - \sum_{j=1}^{n} x_j e_j , e_k \right) = ,$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{(x_k - a_k)} \left((x, e_k) - x_k \|e_k\|^2 \right) = 0$$

т.к. $(x, e_k) - x_k \|e_k\|^2 = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, равенство (5), учитывая (3), будет иметь вид

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_j e_j \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |x_k - a_k|^2 \|e_k\|^2 . \tag{6}$$

Далее, учитывая (2) и (3), получим

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_j e_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \left(x, \sum_{k=1}^{n} x_j e_j \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_j e_j , x \right) + \sum_{k=1}^{n} |x_j|^2 \|e_j\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{x_j} (x, e_j) - \sum_{k=1}^{n} x_j \overline{(x, e_j)} + \sum_{k=1}^{n} |x_j|^2 \|e_j\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |x_j|^2 \|e_j\|^2$$

Подставив результат этого преобразования в (6), приходим к тождеству (4).

Из результатов этих лемм вытекают важные следствия.

<u>Следствие</u> 1(*минимальное свойство коэффициентов Фурье*). *Пусть* $\{e_k\}$ – *ортогональная система в пространстве* $\boldsymbol{H}$. *Тогда для любого элемента* $x \in \boldsymbol{H}$ *справедливо равенство*

$$\min_{a_1,\ldots,a_n}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}a_j e_j\right\|^2=\left\|x-\sum_{k=1}^{n}x_j e_j\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\left|x_j\right|^2\left\|e_j\right\|^2,$$

где минимум достигается только тогда, когда $a_j = x_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Из этого утверждения следует **неравенство Бесселя**.

<u>Следствие</u> 2 (*неравенство Бесселя*). *Пусть* $\{e_k\}$ – *ортогональная система в пространстве* $\boldsymbol{H}$. *Тогда для любого элемента* $x \in \boldsymbol{H}$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_j\right|^2\left\|e_j\right\|^2 \le \|x\|^2, \tag{7}$$

где x_j, $j = 1, \ldots, n$, – *коэффициенты Фурье элемента* x *в ортогональной системе* $\{e_k\}$ *пространства* $\boldsymbol{H}$.

Замечание. Из неравенства Бесселя (7) вытекает сходимость числового ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j\right|^2\left\|e_j\right\|^2. \tag{8}$$

<u>Следствие</u> 3. *Пусть* $\{e_k\}$ – *ортогональная система в гильбертовом пространстве* $\boldsymbol{H}$. *Тогда для любого элемента* $x \in \boldsymbol{H}$ *сходится ряд*

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}x_k e_k \in \boldsymbol{H},$$

где x_k, $k = 1, \ldots, n$, – *коэффициенты Фурье элемента* x (2).

Доказательство. Согласно определению сходимости ряда, надо доказать сходимость последовательности частичных сумм

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k e_k,\ n = 1, 2, 3\ldots.$$

Сходимость этой последовательности вытекает из равенства

$$\left\|S_m-S_n\right\|^2=\sum_{k=n+1}^{m}\left|x_j\right|^2\left\|e_j\right\|^2,\quad m>n,$$

(см. Лемму1) и сходимости числового ряда (8). Т.к. $\boldsymbol{H}$ – гильбертово пространство, то S – сумма ряда принадлежит $\boldsymbol{H}$. Следствие доказано.

Для того, чтобы сумма ряда S совпадала с элементом x необходимо наложить дополнительные условия на о.с. $\{e_k\}$.

*<u>Определение.</u> Ортогональная система называется **полной**, если не существует вектора, не равного нулю, ортогонального ко всем векторам системы.*

Другими словами, о.с. $\{e_k\}$ полна тогда и только тогда, когда из ортогональности элемента $x \in \boldsymbol{H}$ всем элементам e_k следует, что $x = \theta$.

<u>*Определение.*</u> *Ортогональная система* $\{e_k\}$ *называется* ***замкнутой****, если для любого элемента* $x \in \boldsymbol{H}$ *справедливо равенство*

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \|e_j\|^2 . \tag{9}$$

где x_k, $k = 1, \dots, n$, *– коэффициенты Фурье элемента* x.

<u>*Определение*</u>. *Равенство* (9) *называется* ***равенством Парсеваля****.*

Оказывается, что условия замкнутости и полноты совпадают.

<u>*Лемма*</u> 3. *Ортогональная система полна тогда и только тогда, когда она замкнута.*

Доказательство. Пусть $\{e_k\}$ – ортогональная система в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$.

Докажем необходимость условия, т.е. из условия полноты системы следует её замкнутость. Предположим, что система не замкнута. Тогда существует ненулевой элемент $x \in \boldsymbol{H}$, норма которого, в силу неравенства Бесселя, строго больше нормы суммы ряда $S = \sum x_j e_j$. Поэтому норма разности $x - S$ больше нуля, т.е. $x - S \neq \theta$. С другой стороны легко видеть, что

$$(x - S, e_k) = (x, e_k) - x_k \|e_k\|^2 = 0, \quad \forall k .$$

В силу полноты системы, отсюда получаем, что $x - S = \theta$. Пришли к противоречию.

Докажем достаточность условия, т.е. из условия замкнутости системы следует её полнота. Предположим, что система не полна. Тогда найдётся ненулевой вектор $x \in \boldsymbol{H}$, который ортогонален всем элементам о.с. Тогда все коэффициенты Фурье обращаются в нуль и, в силу (9), норма вектора x равна нулю. Следовательно, этот вектор нулевой. Опять пришли к противоречию. Лемма доказана полностью.

Далее, аналогично евклидову пространству в гильбертовом пространстве вводят понятие ортогонального базиса.

<u>*Определение.*</u> *Полная о.с. называется* ***базисом*** *гильбертова пространства* $\boldsymbol{H}$, *а число элементов базиса называется размерностью пространства.*

Замечание. Как следует из Леммы 3, в этом определении базиса условие полноты о.с. можно заменить условием её замкнутости.

В заключении соберём вместе доказанные факты.

<u>*Теорема*</u> (*ряд Фурье*). *Пусть* $M = \{e_k \in \boldsymbol{H}, k = 1, 2, \cdots\}$ *– базис гильбертова пространства* $\boldsymbol{H}$. *Тогда любой вектор* $x \in \boldsymbol{H}$ *можно представить единственным способом в виде сходящегося ряда*

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \,, \tag{10}$$

где

$$x_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}, \; k = 1, 2, \cdots.$$

При этом

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} \, \|e_k\|^2 \,, \quad x_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}, \quad y_k = \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2}.$$

В частности, имеем равенство Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \|e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(x, e_k)|^2}{\|e_k\|^2}. \tag{11}$$

Напомним, что сходимость ряда (10) понимается в смысле метрики пространства $\boldsymbol{H}$.

<u>Определение</u>. Ряд (10) *называется* ***рядом Фурье*** *элемента (вектора)* $x \in \boldsymbol{H}$ *по ортогональной системе* $M = \{e_k \in \boldsymbol{H}, k = 1, 2, \cdots\}$.

§4. Тригонометрические ряды. Задача Штурма-Лиувилля

В данном пособии будут рассмотрены в основном ортогональные системы, состоящие из тригонометрических функций.

Доказательство замкнутости для разнообразных систем ортогональных функций было дано в работах В.А. Стеклова (1901-1906). В этих же работах было выяснено важность условия замкнутости в теории ортогональных рядов. Доказательство условия замкнутости для тригонометрических рядов впервые было дано А.М. Ляпуновым.

Рассмотрим часто используемые тригонометрические системы функций и соответствующие им ряды Фурье.

Пример 1. Комплексная форма ряда Фурье. В пространстве $\boldsymbol{L_2}(-\pi, \pi)$ множество функций $e_k = \exp(ikx)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, образует ортогональную систему. Действительно, если $k \neq n$, то, учитывая периодичность функций e_k, получим

$$(e_k, e_n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \overline{e^{inx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx = \frac{1}{i(k-n)} e^{i(k-n)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

а при $k = n$

$$(e_k, e_k) = \|e_k\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \overline{e^{ikx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi.$$

С помощью замены переменной нетрудно убедиться в том, что множество функций $e_k = \exp\left(i \frac{k\pi}{l} x\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $l > 0$, образует ортогональную систему в пространстве $\boldsymbol{L_2}(-l, l)$. При этом $(e_k, e_k) = \|e_k\|^2 = 2l$.

Согласно абстрактной теореме из предыдущего параграфа ряд Фурье для функции $f \in \boldsymbol{L_2}(-l, l)$ имеет вид

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi}{l}x}, \tag{1}$$

где c_k, $k \in \boldsymbol{Z}$, – коэффициенты Фурье функции $f(x)$, вычисляются по формуле

$$c_k = \frac{1}{\|e_k\|^2}(f, e_k) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot e^{-i\frac{k\pi}{l}x} dx.$$

Равенство Парсеваля в этой о.с. можно представить в виде

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Пример 2. Вещественная форма ряда Фурье. В пространстве вещественнозначных функций $\boldsymbol{L_2}(-l, l)$ множество тригонометрических функций

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, \ldots, \quad k \in \boldsymbol{N},$$

образует ортогональную систему. Это следует из предыдущего примера и представлений синуса и косинуса

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right).$$

Нормы элементов

$$\|1\|^2 = 2l, \quad \left\|\cos\frac{k\pi x}{l}\right\|^2 = \left\|\sin\frac{k\pi x}{l}\right\|^2 = l.$$

Ряд Фурье для функции $f \in \boldsymbol{L_2}(-l, l)$ записывают в виде

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{2}$$

где коэффициенты a_k и b_k вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{k\pi x}{l} dx, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\frac{k\pi x}{l} dx, \ k = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Равенство Парсеваля в этой о.с. имеет вид

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^{\ 2}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2}\right).$$

Часто ряд (2) записывают в амплитудно-фазовом представлении. Для этой записи используют преобразование

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),$$

где

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi.$$

Применив это преобразование к членам ряда, получим амплитудно-фазовое представление этого ряда

$$S(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l} + \varphi_k\right),$$

в котором слагаемые называются ***гармониками***, $A_0 = \frac{1}{2}a_0$, $A_k = \sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2}$, $k \in \boldsymbol{N}$, – ***амплитудами***, а углы $\{\varphi_k\}$, $k \in \boldsymbol{N}$, – ***фазами***.

Равенство Парсеваля в этом представлении примет вид

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |f(x)|^2\, dx = 2A_0{}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k{}^2 .$$

Замечание 1. Если функция $f(x)$ принимает вещественные значения, то коэффициенты рядов (1) и (2) связаны соотношениями

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \text{ при } k \ge 0, \text{ и } c_k = \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), \text{ при } k < 0.$$

Замечание 2. Если функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,b]$, то в качестве ортогональных систем тригонометрических функций можно взять функции из пунктов 1 и 2, где $2l = b - a$ и при вычислении коэффициентов Фурье интегрирование надо производить по промежутку $[a,b]$. Например, в случае промежутка $[0,\mathrm{T}]$ параметр $l = T/2$, система функций

$$1, \cos\frac{2\pi x}{T}, \sin\frac{2\pi x}{T}, \ldots, \cos\frac{2k\pi x}{T}, \sin\frac{2k\pi x}{T}, \ldots \quad k \in \boldsymbol{N},$$

образует ортогональную систему функций. Ряд Фурье для функции $f \in \boldsymbol{L_2}(0, T)$ записывают в виде

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2k\pi x}{T} + b_k \sin\frac{2k\pi x}{T}\right),$$

где коэффициенты a_k и b_k вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos\frac{2k\pi x}{T}dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\sin\frac{2k\pi x}{T}dx,$$
$k = 1, 2, \ldots$.

Пример 3. В пространстве $\boldsymbol{L_2}(0, l)$ два множества тригонометрических функций

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \dots, \cos\frac{k\pi x}{l}, \dots, \tag{4}$$

$$\sin\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin\frac{k\pi x}{l}, \dots, \tag{5}$$

образуют две ортогональные системы. Квадраты норм этих функций, очевидно, в два раза меньше чем в предыдущем примере.

Ряд Фурье по первой ортогональной системе (разложение по косинусам) имеет вид

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

а по второй ортогональной системе (разложение по синусам) имеет вид

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Формула Парсеваля для первой ортогональной системы выглядит так

$$\frac{2}{l}\int_0^l |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^{\ 2}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\ 2},$$

а для второй

$$\frac{2}{l}\int_0^l |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\ 2}.$$

Замечание 3. Тригонометрические ряды Фурье применяются настолько часто, что, говоря "ряд Фурье", обычно подразумевают именно тригонометрический ряд Фурье.

Большое количество примеров ортогональных систем доставляет задача Штурма-Лиувилля.

Пусть D - ограниченная область в $\boldsymbol{R^n}$, S - граница этой области. Отметим, что в трёхмерном пространстве: S - поверхность, на плоскости: S - кривая, на прямой: S - пара точек (концы D). Пусть в области D задан оператор Lv:

$$Lv = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(p(x)\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) + q(x)v,$$

где $p(x) > 0, x \in D$. Оператор L определён на функциях v, удовлетворяющих граничному условию

$$P[v] = \left(\alpha\frac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\Big|_S = 0, \tag{6}$$

$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, n- внешняя нормаль к границе S.

<u>Определение</u>. ***Собственными значениями*** *оператора L называются значения параметра λ, при которых существует нетривиальное (ненулевое) решение уравнения*

$$Lv = \lambda\rho v$$

или, что эквивалентно, существует решение краевой задачи Штурма-Лиувилля в области D

$$Lv - \lambda\rho v = 0 \quad \text{в} \quad D, \quad \rho(x) > 0,$$
$$P[v] = 0,$$

а соответствующие им нетривиальные решения v *называются* ***собственными функциями*** *оператора* L.

Перечислим основные свойства собственных значений и собственных функций.

1. Существует бесконечное множество собственных значений $\{\lambda_n\}$ и собственных функций $\{v_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$; собственные значения вещественны и при увеличении номера n неограниченно возрастают ($\lambda_n > 0$, если функция $q(x)$ принимает положительные значения в области D). Каждому собственному значению соответствует конечное число линейно независимых собственных функций.

2. Собственные функции ортогональны между собой в области D с весом $\rho(x)$:

$$(v_n, v_m) = \int v_n(x)\, v_m(x)\, \rho(x)\, dx = 0, \; n \neq m,$$

интегрирование производится по области D.

3. Любая функция из пространства квадратично суммируемых с весом $\rho(x)$ функций разлагается в ряд Фурье по ортогональной системе собственных функций $\{v_n(x)\}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(x), \quad f_n = \frac{(f, v_n)}{\|v_n\|^2} = \frac{1}{\|v_n\|^2}\int f(x) v_n(x)\, \rho(x)\, dx. \quad (7)$$

Сходимость ряда понимается в смысле метрики пространства $\boldsymbol{L_2}(D, \; p)$.

Остановимся подробнее на задаче Штурма-Лиувилля в пространстве $\boldsymbol{L_2}\big((a, b), \; \rho\big)$, т.к. многие задачи в области D сводятся к "одномерным" задачам на промежутке.

Повторим постановку задачи Штурма-Лиувилля для конечного промежутка (a, b) с необходимыми уточнениями:

найти значения параметра λ *и соответствующие им нетривиальные решения* $v(x) \in \boldsymbol{L_2}\big((a, b), \; \rho\big)$ *обыкновенного дифференциального уравнения*

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dv(x)}{dx}\right) + q(x)v(x) - \lambda\rho(x)v(x) = 0, \quad (8)$$

удовлетворяющие краевым условиям (*на концах промежутка*)

$$\begin{cases} \alpha_1 v'(a) + \beta_1 v(a) = 0 \\ \alpha_2 v'(b) + \beta_2 v(b) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

или периодическим условиям

$$\begin{cases} v(a) = v(b) \\ v'(a) = v'(b) \end{cases}. \quad (10)$$

Здесь предполагается, что функции $p'(x)$, $q(x), \rho(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, $p(x) > 0$ и $\rho(x) > 0$ для всех $x \in [a, b]$ и ${\alpha_k}^2 + {\beta_k}^2 > 0$, $k = 1, 2$.

Замечание 4. Легко видеть, что тригонометрические ряды примеров 1, 2, 3 в начале этого параграфа являются частными случаями соответствующих задач Штурма-Лиувилля для оператора второго дифференцирования $Lv = -v''$.

В индивидуальном задании требуется написать ряд Фурье и формулу Парсеваля для заданной функции $f(x)$ по ортогональной системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

§5. Сходимость ряда Фурье

Вопрос о равенстве значений функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ её ряда Фурье оказался глубоким. Обсуждение этого вопроса началось с опубликования в 1804 г. работы Фурье, где он использовал тригонометрический ряд для решения уравнения теплопроводности, и длится до сих пор. Это обсуждение привело к развитию различных областей математики. Так в работах В.А. Стеклова (1900-1910), в частности, был получен следующий результат

<u>Теорема</u> (Стеклов). *Дважды непрерывно дифференцируемая на множестве $D \cup S$ функция $f(x)$, удовлетворяющая однородному граничному условию* (4.6)*, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд* (4.7) *по собственным функциям данной краевой задачи.*

Напомним, что ряд Фурье $S(x)$ функции $f(x)$ сходится к этой функции в смысле метрики пространства $\boldsymbol{L_2}$. В 1966 г. Л. Карлесон доказал, что равенство $f(x) = S(x)$ выполняется почти везде (см. замечание к примеру 3 из §1). Поэтому, обычно, вместо равенства $f(x) = S(x)$ пишут $f(x) \sim S(x)$ и говорят, что функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье $S(x)$ или функция $f(x)$ имеет ряд Фурье $S(x)$.

Для справедливости равенства $f(x) = S(x)$ в конкретной точке x требуется наложить дополнительные условия (условия «гладкости») на функцию $f(x)$. В этом пособии приводится признак Дирихле, который имеет широкое применение в задачах практики.

<u>*Определение*</u>. *Функция называется* ***кусочно-монотонной*** *на промежутке, если этот промежуток можно разложить на конечное число частичных промежутков, внутри которых по отдельности функция монотонна.*

<u>*Признак Дирихле*</u>. *Если функция $f(x)$ кусочно-монотонна в промежутке $[-l, l]$ и имеет в нём не более чем конечное число точек разрыва первого рода, то её ряд Фурье сходится, причём*

$$S(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x-\text{точка непрерывности функции},\\ \frac{1}{2}\big(f(x-0)+f(x+0)\big), \text{если } x-\text{точка разрыва функции},\\ \frac{1}{2}\big(f(l-0)+f(-l+0)\big), \text{ на концах промежутка } x=\pm l, \end{cases}$$

где $f(x-0)$ и $f(x+0)$ *– пределы слева и справа в точке* $x\in(-l,l)$ *соответственно.*

Условия на функцию, высказанные здесь, называются ***условиями Дирихле***.

В силу периодичности гармоник (членов ряда) из сходимости ряда Фурье на промежутке $[-l,l]$ следует его сходимость всюду, т.е. на всей числовой оси. Суммой этого ряда, очевидно, будет $2l$-периодическая функция, которую будем обозначать опять $S(x)$. Функция $S(x)$, определенная указанным образом, будет периодическим продолжением $f(x)$.

§ 6. Интегральная формула Фурье

Предположим, что функция $f(x)$ на каждом конечном отрезке удовлетворяет условиям Дирихле. Кроме того, предположим, что функция абсолютно интегрируема на ***R***, т.е. несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ сходится.

Пусть x – любая точка на числовой оси; выберем любое число l, удовлетворяющее условию $l>|x|$. Рассмотрим тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме на симметричном промежутке $[-l,l]$:

$$f(x)\sim S_l(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\frac{k\pi}{l}x}, \tag{1}$$

где

$$c_k=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cdot e^{-i\frac{k\pi}{l}t}dt \tag{2}$$

(переменная интегрирования обозначена символом t вместо x, чтобы не путать её с заданной точкой x).

Подставляя выражения коэффициентов (2) в ряд (1), получим

$$S_l(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l}e^{i\frac{k\pi}{l}x}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cdot e^{-i\frac{k\pi}{l}t}dt=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cdot e^{-i\frac{k\pi}{l}(t-x)}dt$$

Обозначим

$$\omega_k = \frac{\pi k}{l},\ \Phi_l(x,\omega) = \int_{-l}^{l} f(t)e^{i\omega(x-t)}dt,\ \Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{\pi}{l}.$$

Т.к. функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\boldsymbol{R}$, то интегралы $\Phi_l(x,\omega)$ сходятся абсолютно при всех значениях l. Последнее выражение для суммы $S_l(x)$ можно записать в виде

$$S_l(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Phi_l(x,\omega_k)\Delta\omega_k. \qquad (3)$$

Это выражение напоминает "интегральную сумму" для несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x,\omega)d\omega$, где подынтегральная функция равна

$$\Phi(x,\omega) = \lim_{l\to+\infty}\Phi_l(x,\omega) = \lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l} f(t)e^{i\omega(x-t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega(x-t)}dt.$$

В «интегральной сумме» $S_l(x)$ ранг дробления $\max\limits_{-\infty<k<+\infty}\Delta\omega_k = \pi/l$ стремится к нулю, когда $l\to+\infty$. Всё это позволяет надеяться, что в равенстве (3) можно перейти к пределу при $l\to+\infty$. Можно доказать, что это действительно так.

В результате получается равенство

$$f(x) \sim S(x) = \lim_{l\to\infty}S_l(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega(x-t)}dt,$$

которое называется ***интегральной формулой Фурье*** или ***интегралом Фурье***.

<u>Теорема.</u> Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\boldsymbol{R}$ *и удовлетворяет условиям Дирихле на каждом конечном промежутке $[-l,l]$. Тогда интеграл Фурье сходится (в смысле главного значения) и*

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x - \text{точка непрерывности функции,} \\ \frac{1}{2}\big(f(x-0)+f(x+0)\big), & \text{если } x - \text{точка разрыва функции.} \end{cases}$$

В дальнейшем будем считать, что функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, в точках разрыва удовлетворяет условию

$$f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x-0)+f(x+0)\big).$$

При таком условии интегральная формула Фурье, для рассматриваемого класса функций, примет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega(x-t)}dt. \qquad (4)$$

Преобразуем интегральную формулу Фурье. Используя формулу Эйлера, получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\big(\cos\omega(x-t)+i\sin\omega(x-t)\big)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt+\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega(x-t)dt$$

Подынтегральная функция во втором интеграле является нечётной по ω, поэтому интеграл по симметричному промежутку $(-\infty,\infty)$ равен 0; что касается первого интеграла, то его подынтегральная функция – чётная, поэтому можно интегрировать только по половине этого промежутка, но результат удвоить. Поэтому получаем интегральную формулу Фурье в следующем виде:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt. \tag{5}$$

Вернёмся к интегральной формуле Фурье (4).

Определение. ***Преобразованием Фурье*** *функции* $f(x)$ *называется функция*

$$F(f)(\omega)=f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx.$$

Из условий, наложенных на функцию $f(x)$, следует, что функция $f(\omega)$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$. Тогда интегральная формула Фурье примет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

Поэтому, естественно, вводится понятие обратного преобразования Фурье.

Определение. ***Обратным преобразованием Фурье*** *функции* $f(\omega)$ *называется функция*

$$F^{-1}(f)(x)=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

Замечание 1. Данное представление функции $f(x)$ является аналогом ряда Фурье в комплексной форме (4.1).

Замечание 2. В этой формуле выражение $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}f(\omega)e^{i\omega x}d\omega$ задает, условно говоря, пакет комплексных гармоник с частотами, непрерывно распределенными на промежутке $[\omega,\omega+d\omega]$ и суммарной комплексной амплитудой $dA(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}f(\omega)d\omega$. Функция $s(\omega)=\dfrac{dA(\omega)}{d\omega}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}f(\omega)$

называется ***спектральной плотностью***. Поэтому интегральную формулу Фурье, записанную в виде

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega x}dA(\omega)\approx\sum_k e^{i\omega_k x}\Delta A(\omega_k)$$

можно трактовать, как разложение функции $f(x)$ в сумму пакетов гармоник, частоты которых образуют сплошной спектр, распределенный на промежутке $(-\infty,\infty)$

Замечание 3. Обратимся к интегральной формуле Фурье (5). Пользуясь тригонометрической формулой $\cos\omega(x-t)=\cos(\omega x)\cos(\omega t)+\sin(\omega x)\sin(\omega t)$, из (5) выводим

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\cos\omega x\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(\omega t)dt+\sin\omega x\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin(\omega t)dt\right)d\omega.$$

Если, по аналогии с формулами (4.3), обозначим

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\omega}^{+\infty}f(x)\cos(\omega x)\,dx,\quad b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin(\omega x)\,dx. \tag{6}$$

то получим равенство

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\big(a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x\big)dx, \tag{7}$$

которое аналогично тригонометрическому ряду Фурье (4.2).

Рассмотрим частные случаи формул (6) и (7).

1. Пусть функция $f(x)$ является чётной. Тогда в первой из формул (6) подынтегральная функция является чётной, а во второй – нечётной. Поэтому $b(\omega)$=0 при всех ω, а

В формуле (7) при этом остаётся только первое слагаемое:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega x\,d\omega. \tag{9}$$

2. Пусть функция $f(x)$ является нечётной. Тогда в первой из формул (6) подынтегральная функция является нечётной, а во второй – чётной. Поэтому $a(\omega)$=0 при всех ω, а

$$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx. \tag{10}$$

В формуле (7) при этом остаётся только второе слагаемое:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega x\,d\omega. \tag{11}$$

Заметим, что в формулах (8) и (10) достаточно, чтобы функция $f(x)$ была определена только на промежутке $(0,\infty)$.

Формулы (9) и (11) приводят к следующим определениям преобразований.

<u>*Определение.*</u> ***Косинус-преобразованием Фурье*** *функции* $f(x)$ *называется функция*

$$f_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx. \tag{12}$$

<u>*Определение.*</u> ***Обратным косинус-преобразованием Фурье*** *функции* $f_c(\omega)$ *называется функция*

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f_c(\omega)\cos\omega x\,d\omega. \tag{13}$$

<u>*Определение.*</u> ***Синус-преобразованием Фурье*** *функции* $f(x)$ *называется функция*

$$f_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx. \tag{14}$$

<u>*Определение.*</u> ***Обратным синус-преобразованием Фурье*** *функции* $f_s(\omega)$ *называется функция*

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f_s(\omega)\sin\omega x\,d\omega. \tag{15}$$

Замечание 4. Пары формул (12), (13) и (14), (15) симметричны: прямое и обратное преобразования отличаются только обозначениями функций и переменных.

Замечание 5. Легко проверяются следующие утверждения:

если функция $f(x)$ *чётная, то* $f_c(\omega)=f(\omega)$;

если функция $f(x)$ *нечётная то i* $f_s(\omega)=f(\omega)$.

Замечание 6. Кроме того, формулы (9) и (13) дают чётное, а формулы (11) и (15) – нечётное продолжение функции $f(x)$ с промежутка (0,+∞) на всю числовую ось (с указанными выше поправками в точках разрыва и в точке x=0).

§ 7. Свойства преобразование Фурье

Тот факт, что функция $f(\omega)$ является Фурье-образом функции $f(x)$, будем обозначать в дальнейшем одним из следующих способов: $f = F(f)$, $f(x) \leftrightarrow f(\omega)$, $f(\omega) \leftrightarrow f(x)$. Кроме того, выписывая ту или иную формулу, будем предполагать, что выполнены условия существования выражений, входящих в эту формулу.

<u>Свойство</u> 1 (*теорема линейности*)**.** *Для функций* $f(x)$, $g(x)$ *и любой константы C справедливы равенства*

$$f + g = f + g\ ,$$

$$C f = C f\ .$$

<u>Свойство</u> 2 (*теорема подобия*)**.** *Если* $f(x) \leftrightarrow f(\omega)$, *то* $f(ax) \leftrightarrow \frac{1}{a} f\left(\frac{\omega}{a}\right)$, *где* $a > 0$ *– константа.*

<u>Свойство</u> 3 (*теорема смещения*). *Если* $f(x) \leftrightarrow f(\omega)$, *то* $f(x-b) \leftrightarrow e^{-ib\omega} f(\omega)$, *где* b *– константа.*

<u>Следствие</u> 1. *Справедливы формулы*:

$$\frac{1}{2}\big(f(x+a) + f(x-a)\big) \leftrightarrow f(\omega)\cos a\omega,$$

$$\frac{1}{2}\big(f(x+a) - f(x-a)\big) \leftrightarrow i\, f(\omega)\sin a\omega.$$

<u>Определение</u>. ***Свёрткой*** *функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *называется функция*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt\ .$$

<u>Свойство</u> 4 (*теорема о свертке*). *Фурье-образ свертки функций* f *и* g *равен произведению их Фурье-образов, умноженному на* $\sqrt{2\pi}$:

$$(f * g)(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot f(\omega) \cdot g(\omega)\ .$$

<u>Свойство</u> 5. (*теорема об образе производной*)**.** *Операция дифференцирования при преобразовании Фурье переходит в операцию умножения. Если* $f(x) \leftrightarrow f(\omega)$, *то*

$$f'(x) \leftrightarrow i \cdot \omega \cdot f(\omega) \ \text{ и } \ x \cdot f(x) \leftrightarrow i \frac{d}{d\omega} f(\omega).$$

<u>Следствие</u> 2. *Справедливы формулы*:

$$f^{(n)}(\omega)=(i\cdot\omega)^n\, f(\omega),\quad x^n\cdot f(x)\leftrightarrow i^n\frac{d^n}{d\omega^n}f(\omega).$$

Пример 1**.** Доказать, что

$$\frac{1}{2}\int\limits_{x-a}^{x+a} f(t)dt\leftrightarrow f(\omega)\frac{\sin a\omega}{\omega}$$

где a – *константа*.

*Доказательство***.** Положим

$$h(x)=\begin{cases}1, & |x|<a,\\ 0, & |x|<a.\end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\int\limits_{x-a}^{x+a} f(t)dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)h(x-t)dt=\frac{1}{2}(f*h)(x)$$

Поэтому, согласно теореме о свертке, имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{x-a}^{x+a} f(t)dt\leftrightarrow\frac{\sqrt{2\pi}}{2}f(\omega)\cdot h(\omega).$$

Осталось заметить, что

$$h(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-a}^{a}e^{-i\omega x}dx=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{-a}^{a}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin a\omega}{\omega}$$

Формула доказана.

Замечание. Преобразование Фурье распространяется на широкий класс функций. В частности, оно определено и для функций из пространства $L_2(-\infty,\infty)$, причём образ функции тоже принадлежит пространству $L_2(-\infty,\infty)$.

<u>*Свойство*</u> 6 (*равенства Парсеваля*)**.** Пусть $f(x)\leftrightarrow f(\omega)$ и $g(x)\leftrightarrow g(\omega)$. Тогда $(f,g)=\left(f,g\right)$ *и, в частности,* $\|f\|=\left\|f\right\|$, *т.е. скалярные произведения и нормы функций являются инвариантами преобразования Фурье.*

§ 8. Примеры решений индивидуальных заданий

Задание 1. Выполнить ортогонализацию Грамма-Шмидта в пространстве $L_2((a,b),p)$ - квадратично интегрируемых функций на промежутке (a,b) с весом p.

Пример. Дано: $(a,b)=(1,3),\ p(x)=x,\ f_1(x)=2,\ f_2(x)=4-x,\ f_3(x)=x^2+x$.

Решение. Скалярное произведение в этом пространстве имеет вид

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)p(x)\,dx .$$

Процесс ортогонализации состоит в последовательном нахождении векторов e_1,e_2,e_3 по формулам:

$g_1=f_1 \qquad e_1=g_1\cdot\|g_1\|^{-1}$

$g_2=f_2-(f_2,e_1)\cdot e_1 \qquad e_2=g_2\cdot\|g_2\|^{-1}$

$g_3=f_3-(f_3,e_1)\cdot e_1-(f_3,e_2)\cdot e_2 \qquad e_3=g_3\cdot\|g_3\|^{-1}$

В нашем случае: $g_1=f_1=2$

$\|g_1\|^2=\int_1^3 g_1^2xdx=\int_1^3 4xdx=16$, $\|g_1\|=4$, $e_1=g_1\cdot\|g_1\|^{-1}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$;

$g_2=4-x-\int_1^3(4-x)\cdot\frac{1}{2}\cdot xdx\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{6}-x$, $\|g_2\|^2=\int_1^3\left(\frac{13}{6}-x\right)^2\cdot xdx=\frac{11}{9}$, $\|g_2\|=\frac{\sqrt{11}}{3}$,

$e_2=\left(\frac{13}{6}-x\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{11}}$;

$g_3=x^2+x-\int_1^3\left(x^2+x\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot xdx\cdot\frac{1}{2}-\int_1^3\left(x^2+x\right)\cdot\left(\frac{13}{6}-x\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{11}}xdx\cdot\left(\frac{13}{6}-x\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{11}}=x^2-\frac{228}{55}x+\frac{219}{55}$

$\|g_3\|^2=\int_1^3\left(x^2-\frac{228}{55}x+\frac{219}{55}\right)^2\cdot xdx=\frac{272}{825}$, $\|g_3\|=\frac{4\sqrt{17}}{5\sqrt{33}}$, $e_3=\left(x^2-\frac{228}{55}x+\frac{219}{55}\right)\cdot\frac{5\sqrt{33}}{4\sqrt{17}}$.

Таким образом:

$e_1=\frac{1}{2}$, $e_2=\left(\frac{13}{6}-x\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{11}}$, $e_3=\left(x^2-\frac{228}{55}x+\frac{219}{55}\right)\cdot\frac{5\sqrt{33}}{4\sqrt{17}}$.

Задание 2. В условии задачи 1, найти расстояние от функции $f_3(x)$ до линейной оболочки $\{f_1(x);\,f_2(x)\}$.

Пример. Дано $(a,b)=(1,3),\ p(x)=x,\ f_1(x)=2,\ f_2(x)=4-x,\ f_3(x)=x^2+x$.

Решение. Приведём два способа решения этой задачи.

Способ 1. Линейная оболочка $\{f_1,f_2\}$ совпадает с линейной оболочкой (e_1,e_2), тогда по минимальному свойству коэффициентов Фурье (следствие 1 §3) расстояние D от функции f_3 до линейной оболочки $\{f_1,f_2\}$ определяется соотношением $D=\sqrt{\|f_3\|^2-|c_1|^2-|c_2|^2}$, где $c_1=(f_3,e_1)$, $c_2=(f_3,e_2)$.

Из решения предыдущей задачи имеем $e_1=\frac{1}{2}$ и $e_2=\left(\frac{13}{6}-x\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{11}}$, тогда

$c_1=(f_3,e_1)=\int_1^3\frac{1}{2}(x^2+x)xdx=14\frac{1}{3}$, $c_2=(f_3,e_2)=\int_1^3(x^2+x)(\frac{13}{6}-x)\cdot\frac{3}{\sqrt{11}}xdx=-\frac{283}{15\sqrt{11}}$,

$\|f_3\|^2=\int_1^3(x^2+x)^2\cdot xdx=238\frac{2}{15}$.

Поэтому $D=\sqrt{\|f_3\|^2-|c_1|^2-|c_2|^2}=0{,}5742$.

Способ 2. Введём функцию:

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2)=\int_a^b (f_3(x)-\alpha_1 f_1(x)-\alpha_2 f_2(x))^2 xdx$$

Найдем значения α_1, α_2, при которых значение $\varphi(\alpha_1,\alpha_2)$ будет наименьшим.

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2)=\int_a^b (f_3(x))^2 xdx+\alpha_1^2\int_a^b (f_1(x))^2 xdx+\alpha_2^2\int_a^b (f_2(x))^2 xdx-2\alpha_1\int_a^b f_1(x)f_3(x)xdx-$$

$$-2\alpha_2\int_a^b f_2(x)f_3(x)xdx+2-2\alpha_1\alpha_2\int_a^b f_1(x)f_2(x)xdx$$

Обозначим скалярные произведения $\int_a^b f_i(x)f_j(x)xdx=J_{ij}$, Тогда

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2)=J_{33}+\alpha_1^2 J_{11}+\alpha_2^2 J_{22}-2\alpha_1 J_{13}-2\alpha_2 J_{23}+2\alpha_1\alpha_2 J_{12}.$$

Необходимым условием экстремума является равенство нулю частных производных: $\varphi'_{\alpha_1}=2\alpha_1 J_{11}-2J_{13}+2\alpha_2 J_{12}=0$, $\varphi'_{\alpha_2}=2\alpha_2 J_{22}-2J_{23}+2\alpha_1 J_{12}=0$.

В результате приходим к системе уравнений,

$$\begin{cases}\alpha_1 J_{11} & + & \alpha_2 J_{12} & = & J_{13}\\ \alpha_1 J_{12} & + & \alpha_2 J_{22} & = & J_{23}\end{cases}.$$

Согласно условию задачи:

$$J_{11}=\int_1^3 4xdx=16,\ J_{12}=\int_1^3 2(4-x)xdx=14\frac{2}{3},\ J_{13}=\int_1^3 2(x^2+x)xdx=57\frac{1}{3},$$

$$J_{22}=\int_1^3 (4-x)^2 xdx=14\frac{2}{3},\ J_{23}=\int_1^3 (4-x)(x^2+x)xdx=46\frac{4}{15}.$$

Решив систему

$$\begin{cases}16\alpha_1 & + & 14\frac{2}{3}\alpha_2 & = & 57\frac{1}{3}\\ 14\frac{2}{3}\alpha_1 & + & 14\frac{2}{3}\alpha_2 & = & 46\frac{4}{15}\end{cases},$$

получим $\alpha_1=8,3$, $\alpha_2=-5\frac{8}{55}$.

Тогда

$$D^2=\int_1^3 (x^2+x-8,3\cdot 2+5\frac{8}{55}(4-x))^2 xdx=0,3297, \text{ а } D=0,5742.$$

Задание 3. Дана функция $f(x)$, определённая на промежутке $[0;\mathrm{T}]$, и заданы точки x_0, x_1, x_2 из этого промежутка.

а) Записать ряд Фурье для функции $f(x)$ в комплексной форме.

б) Записать вещественную форму ряда Фурье функции $f(x)$.

в) Построить график функции $f(x)$ и суммы ее ряда Фурье.

г) Вычислить значение суммы ряда Фурье в заданных точках.

д) Записать ряд Фурье в амплитудно-фазовой форме.

е) Построить амплитудный спектр ряда Фурье, вычислить A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

ж) Выписать равенство Парсеваля.

Пример. Дано:

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & при \quad 0\le x<1\\ x-2, & при \quad 1\le x\le 2\end{cases}$$

$x_0=0;\;\; x_1=1;\;\; x_2=0,5.$

Решение. Функция $f(x)$ задана на промежутке $[0;2]$.

а) Ряд Фурье в комплексной форме для функции $f(x)$ имеет вид $S(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\frac{\pi k}{e}x}$ (см. (4.1)). Учитывая замечание 2 в §4, найдем коэффициенты c_k, учитывая, что $T=2$, $l=1$.

$$c_k=\frac{1}{2}\left(\int_0^1(1-x)e^{-i\pi kx}dx+\int_1^2(x-2)e^{-i\pi kx}dx\right)$$

Применим формулу интегрирования по частям. В первом интеграле:

$$u=1-x,\; du=-dx,\; dv=e^{-i\pi kx}dx,\; v=-\frac{1}{i\pi k}e^{-i\pi kx}.$$

Во втором интеграле:

$$u=x-2,\; du=dx,\; dv=e^{-i\pi kx}dx,\; v=-\frac{1}{i\pi k}e^{-i\pi kx}.$$

Получим:

$$c_k=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{i\pi k}(1-x)e^{-i\pi kx}\Big|_0^1-\frac{1}{i\pi k}\int_0^1 e^{-i\pi kx}dx-\frac{1}{i\pi k}(x-2)e^{-i\pi kx}\Big|_1^2+\frac{1}{i\pi k}\int_1^2 e^{-i\pi kx}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i\pi k}-\frac{1}{(\pi k)^2}e^{-i\pi k}+\frac{1}{(\pi k)^2}-\frac{1}{i\pi k}e^{-i\pi k}+\frac{1}{(\pi k)^2}e^{-2i\pi k}-\frac{1}{(\pi k)^2}e^{-i\pi k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi k}\left(i\left(e^{-i\pi k}-1\right)+\frac{1}{\pi k}\left(e^{-2i\pi k}-2e^{-i\pi k}+1\right)\right)$$

Используя формулу $e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha$, с учетом $\sin\pi k=0$ и $\cos\pi k=(-1)^k$, получим:

$$c_k=\frac{1}{2\pi k}\left(1-(-1)^k\right)\left(\frac{2}{\pi k}-i\right)/$$

Следовательно, ряд Фурье в комплексной форме имеет вид:

$$S(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi k}\left(1-(-1)^k\right)\left(\frac{2}{\pi k}-i\right)e^{i\pi kx}.$$

б) Вещественная форма ряда Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2\pi kx}{T}+b_k\sin\frac{2\pi kx}{T}\right),$$

где $T=2$. Вычислим коэффициенты a_0, a_k, b_k (см. (4.3)):

$$a_0 = \frac{2}{\text{T}}\int_0^{\text{T}} f(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-2)dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right)\Bigg|_1^2 = 0,$$

$$a_k = \frac{2}{\text{T}}\int_0^{\text{T}} f(x)\cos\frac{2\pi kx}{\text{T}}dx = \int_0^1 (1-x)\cos\pi kx dx + \int_1^2 (x-2)\cos\pi kx dx.$$

Используем формулу интегрирования по частям. В первом интеграле:

$$u = 1-x,\ du = -dx,\ dv = \cos\pi kx dx,\ v = \frac{1}{\pi k}\sin\pi kx.$$

Во втором интеграле:

$$u = x-2,\ du = dx,\ dv = \cos\pi kx dx,\ v = \frac{1}{\pi k}\sin\pi kx.$$

Получим:

$$a_k = \frac{1}{\pi k}(1-x)\cdot\sin\pi kx\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi k}\int_0^1 \sin\pi kx dx + \frac{1}{\pi k}(x-2)\cdot\sin\pi kx\Big|_1^2 - \frac{1}{\pi k}\int_1^2 \sin\pi kx dx =$$

$$= \frac{2}{(\pi k)^2} - \frac{2}{(\pi k)^2}\cos\pi k = \frac{2}{(\pi k)^2}(1-(-1)^k).$$

Далее

$$b_k = \frac{2}{\text{T}}\int_0^{\text{T}} f(x)\sin\frac{2\pi kx}{\text{T}}dx = \int_0^1 (1-x)\sin\pi kx dx + \int_1^2 (x-2)\sin\pi kx dx.$$

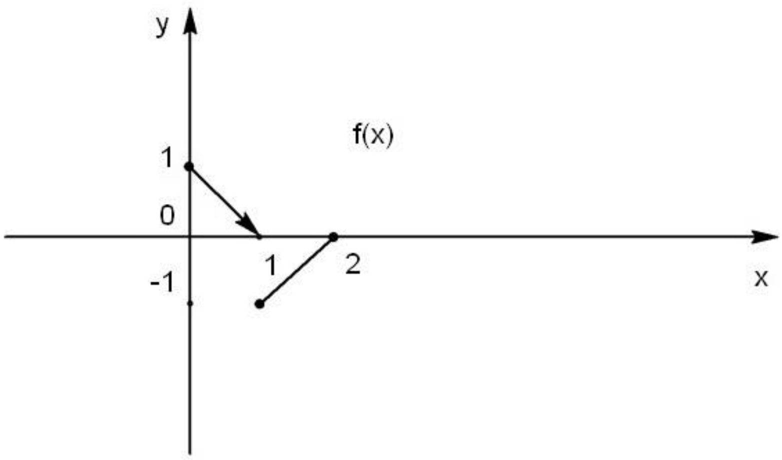
Интегрируя, получим:

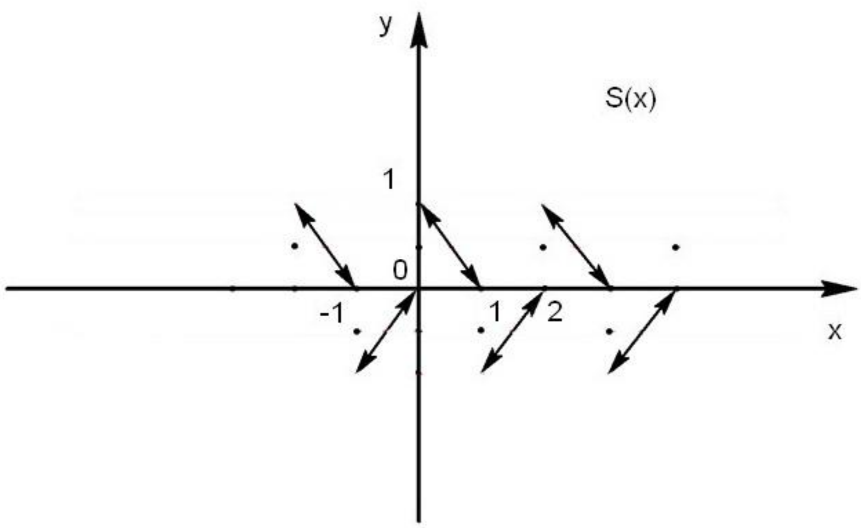
$$b_k = \frac{1}{\pi k}(1-(-1)^k).$$

Следовательно, вещественный ряд Фурье для функции $f(x)$ имеет вид:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right)\left(\frac{2}{\pi k}\cos\pi kx + \sin\pi kx\right).$$

в) Графики данной функции и суммы её ряда Фурье.





г) Найдем значение суммы ряда Фурье в заданных точках.

Точка $x_0 = 0$ - конец промежутка $[0;2]$. Согласно теореме Дирихле, имеем

$$S(0) = \frac{1}{2}(f(0+0) + f(2-0)) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to 0+0}(1-x) + \lim_{x\to 2-0}(x-2)) = \frac{1}{2}(1+0) = 0,5 .$$

Точка $x_1 = 1$ - точка разрыва, поэтому

$$S(1) = \frac{1}{2}(f(1-0) + f(1+0)) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to 1-0}(1-x) + \lim_{x\to 1+0}(x-2)) = \frac{1}{2}(0-1) = -0,5 .$$

Точка $x_2 = 0,5$ - точка непрерывности функции, следовательно,

$$S(0,5) = f(0,5) = 1 - 0,5 = 0,5 .$$

Таким образом, $S(0) = 0,5$, $S(1) = -0,5$, $S(0,5) = 0,5$.

д) Для ряда Фурье в амплитудно-фазовой форме

$$S(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\frac{k\pi x}{e} + \varphi_k)$$

найдем амплитуды A_0 и A_k.

$$A_0 = \frac{1}{2} a_0 = 0,$$

$$A_k = \sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2} = \sqrt{\frac{4}{(\pi k)^4}(1-(-1)^k)^2 + \frac{1}{(\pi k)^2}(1-(-1)^k)^2} = \frac{1}{(\pi k)^2}(1-(-1)^k)\sqrt{4+(\pi k)^2}.$$

В результате, ряд Фурье в амплитудно-фазовой форме имеет вид

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi k)^2}(1-(-1)^k)\sqrt{4+(\pi k)^2}\sin(\pi k x + \varphi_k),$$

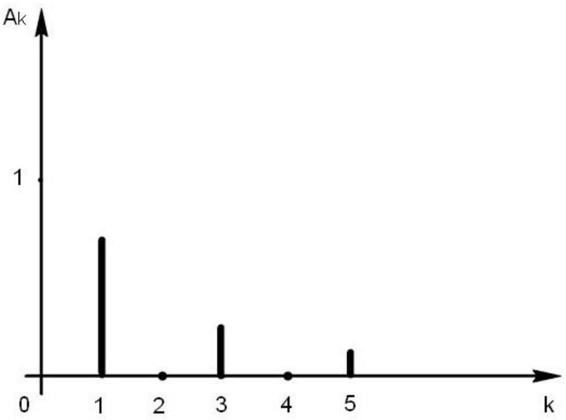
где фазы φ_k находятся из условий

$$\sin\varphi_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2}} \text{ и } \cos\varphi_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2}}.$$

е) Для построения графика амплитудного спектра вычислим:

$A_1 = \frac{1}{\pi^2} \cdot 2 \cdot \sqrt{4+\pi^2} = 0,75$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{1}{(3\pi)^2} \cdot 2 \cdot \sqrt{4+(3\pi)^2} = 0,22$, $A_4 = 0$,

$A_5 = \frac{1}{(5\pi)^2} \cdot 2 \cdot \sqrt{4+(5\pi)^2} = 0,13$.



ж) Равенство Парсеваля в этой ортогональной системе имеет вид

$$\frac{2}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx = \frac{a^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

В условии нашей задачи левая часть равна

$$\int_0^1 (1-x)^2 dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx = -\frac{(1-x)^3}{3}\Bigg|_0^1 + \frac{(x-2)^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{2}{3}.$$

Тогда равенство Парсеваля примет вид:

$$\frac{2}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi k)^4}(1-(-1)^k)^2(4+(\pi k)^2).$$

Задание 4. Для функции $f(x)$ из задания №3:

а) выписать ряд Фурье по ортогональной системе функций $1,\ \cos\dfrac{\pi x}{T}$, …, $\cos\dfrac{k\pi x}{T}\dots$;

б) построить график суммы этого ряда Фурье.

в) выписать равенство Парсеваля.

Пример. Дано:

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{при} \quad 0\le x<1,\\ x-2, & \text{при} \quad 1\le x\le 2.\end{cases}$$

Решение. Ряд Фурье по ортогональной системе $1,\ \cos\dfrac{\pi x}{T}$, …, $\cos\dfrac{k\pi x}{T}\dots$ (разложение по косинусам, см. (4.4)) имеет вид:

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi kx}{T},$$

где $a_k=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\cos\frac{\pi kx}{T}dx$, $k=0,1,2\dots$.

Найдем коэффициенты a_k. По условию задачи $T=2$. Тогда:

$$a_0=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-2)dx=0,\quad a_k=\int_0^1(1-x)\cos\frac{\pi kx}{2}dx+\int_1^2(x-2)\cos\frac{\pi kx}{2}dx.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$a_k=(1-x)\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}\bigg|_0^1+\frac{2}{\pi k}\int_0^1\sin\frac{\pi kx}{2}dx+(x-2)\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}\bigg|_1^2-\frac{2}{\pi k}\int_1^2\sin\frac{\pi kx}{2}dx=$$

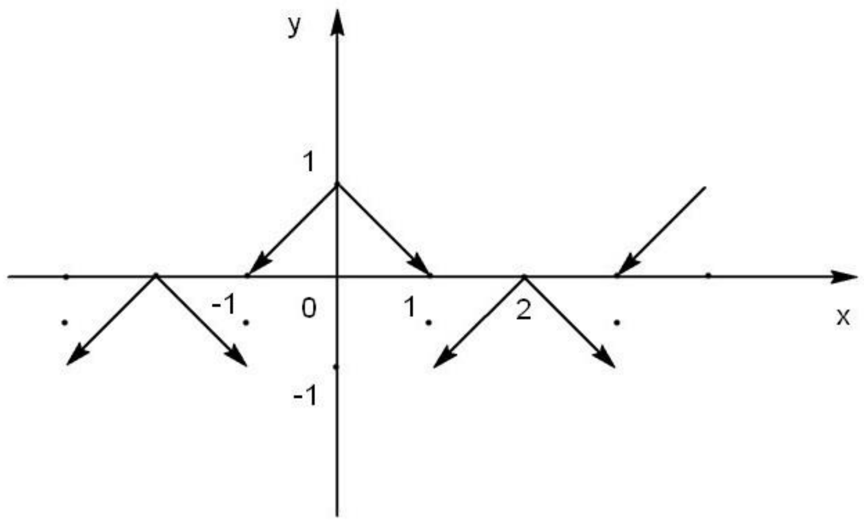
$$=-\frac{4}{(\pi k)^2}\left(\cos\frac{\pi k}{2}-1\right)+\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}+\frac{4}{(\pi k)^2}\left(\cos\pi k-\cos\frac{\pi k}{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}+\frac{4}{(\pi k)^2}\left(1+(-1)^k-2\cos\frac{\pi k}{2}\right).$$

Тогда разложение по косинусам данной функции

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}+\frac{4}{(\pi k)^2}\left(1+(-1)^k-2\cos\frac{\pi k}{2}\right)\right)\cos\frac{\pi kx}{2}$$

График суммы этого ряда:



$S(x)$ - четная функция, ее график получен отражением графика функции $f(x)$ относительно оси Oy и периодическим продолжением с периодом $2\text{T} = 4$.

Равенство Парсеваля для указанной в условии задачи ортогональной системы выглядит так:

$$\frac{2}{\text{T}}\int_0^{\text{T}} | f(x)|^2 \, dx = \frac{a_0^{\ 2}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\ 2}$$

Вычисляем левую часть этого равенства

$$\int_0^1 (1-x)^2 dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx = \frac{2}{3},$$

и получаем требуемое равенство Парсеваля

$$\frac{2}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi k} \sin\frac{\pi k}{2} + \frac{4}{(\pi k)^2} \left(1 + (-1)^k - 2\cos\frac{\pi k}{2} \right) \right)^2 .$$

Задание 5. Для функции $f(x)$ из задания №3:

а) выписать ряд Фурье по ортогональной системе функций $\sin\frac{\pi x}{\text{T}}$, $\sin\frac{2\pi x}{\text{T}}$, … , $\sin\frac{k\pi x}{\text{T}}$, …

б) построить график суммы этого ряда Фурье.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \textit{при} \quad 0 \le x < 1, \\ x - 2, & \textit{при} \quad 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Решение. Ряд Фурье по ортогональной системе $\sin\frac{\pi x}{\text{T}}$, $\sin\frac{2\pi x}{\text{T}}$, … , $\sin\frac{k\pi x}{\text{T}}$, … (разложение по синусам, см. (4.5)) имеет вид:

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k x}{\mathrm{T}},\ \text{где}\ b_k=\frac{2}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(x)\sin\frac{\pi k x}{\mathrm{T}}dx,\ k=0,1,2\ldots .$$

Найдем коэффициенты b_k. По условию задачи $\mathrm{T}=2$. Тогда:

$$b_k=\int_0^1(1-x)\sin\frac{\pi k x}{2}dx+\int_1^2(x-2)\sin\frac{\pi k x}{2}dx$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$a_k=-(1-x)\frac{2}{\pi k}\cos\frac{\pi k x}{2}\Big|_0^1-\frac{2}{\pi k}\int_0^1\cos\frac{\pi k x}{2}dx+(x-2)\frac{2}{\pi k}\cos\frac{\pi k x}{2}\Big|_1^2+\frac{2}{\pi k}\int_1^2\cos\frac{\pi k x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{\pi k}-\frac{4}{(\pi k)^2}\sin\frac{\pi k x}{2}\Big|_0^1+\frac{2}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{2}+\frac{4}{(\pi k)^2}\sin\frac{\pi k x}{2}\Big|_1^2=$$

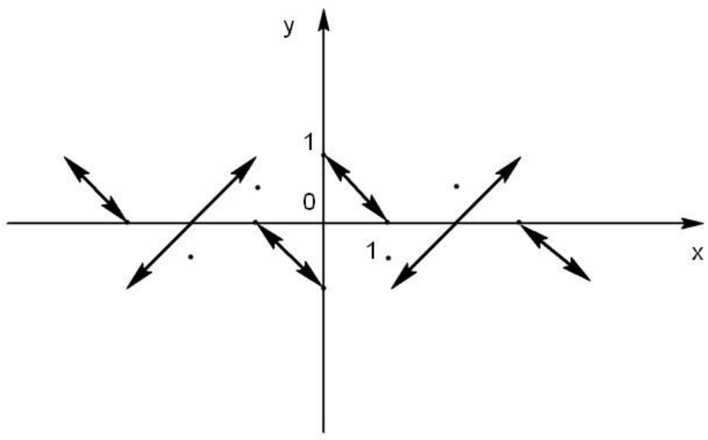
$$=\frac{2}{\pi k}-\frac{4}{(\pi k)^2}\sin\frac{\pi k}{2}+\frac{2}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{2}-\frac{4}{(\pi k)^2}\sin\frac{\pi k}{2}=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\left(1-\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{4}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\right).$$

Тогда разложение по косинусам данной функции имеет вид:

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi k}\left(1-\cos\frac{\pi k}{2}-\frac{4}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}\right)\sin\frac{\pi k x}{2}.$$

График суммы этого ряда:



Сумма ряда $S(x)$ - нечетная функция, ее график получен отражением графика функции $f(x)$ относительно начал координат и периодическим продолжением с периодом $2\mathrm{T}=4$.

Задание 6. Выписать ряд Фурье для заданной функции $f(x)$ по ортогональной системе, составленной из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

Решения задачи проводим в следующем порядке:

1. Находим общее решение линейного однородного дифференциального уравнения (4.8). Как известно из теории этих уравнений, общее решение имеет вид

$$v = C_1 y_1(x,\lambda) + C_2 y_2(x,\lambda), \tag{1}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные, а $y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x,\lambda)$ - линейно независимые частные решения уравнения (4.8). В обозначениях специально отражена зависимость этих решений от параметра λ.

2. Подставим общее решение (1) в краевые условия (4.9) или (4.10). Получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1 и C_2.

3. Т.к. требуется найти ненулевое решение уравнения (4.8), то хотя бы одна из констант C_1 или C_2. должна быть отлична от нуля. Поэтому однородная система линейных алгебраических уравнений должна иметь много решений. Это означает в силу теоремы Кронекера-Капелли, что определитель системы линейных уравнений должен равняться нулю. Так получаем уравнение для определения значений параметра λ. Из этого уравнения находим последовательность $\{\lambda_n\}$ собственных значений рассматриваемой задачи Штурма-Лиувилля

4. Подставляя поочерёдно найденные собственные значения λ_n в систему линейных алгебраических уравнений, относительно неизвестных C_1 и C_2, выражаем одну константу через другую. В результате получаем решение уравнения (4.8), зависящее от одной константы в качестве множителя. Значение этой константы выберем как угодно, например, считаем её равной единице. Часто эту константу выбирают так, чтобы норма решения равнялась единице, т.е. получают ортонормированную систему (о.н.с.) функций $\{v_n\}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L_2}\big((a,b),\ \rho\big)$.

5. Далее для заданной функции $f(x)$ выписываем ряд Фурье (4.7) и формулу Парсеваля.

Приведём пример индивидуального задания и его решения.

Пример. Выписать ряд Фурье для заданной функции $f(x) = x - 1$ по ортогональной системе, составленной из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' + \lambda 2y = 0 \\ y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

Здесь рассматривается промежуток $[0,1]$, $\rho = 2$, $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ (см. (4.8)).

Заметим сначала, что собственные числа этой задачи вещественны и не отрицательны. Если $\lambda = 0$, то общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 + C_2 x$. Из краевых условий выводим

$$\begin{cases} y'(0) - y(0) = C_2 - C_1 = 0 \\ y(1) = C_1 + C_2 = 0 \end{cases}.$$

Отсюда вытекает равенство нулю коэффициентов C_1, C_2 и, следовательно, решение является нулевой функцией. Таким образом, собственные числа положительны.

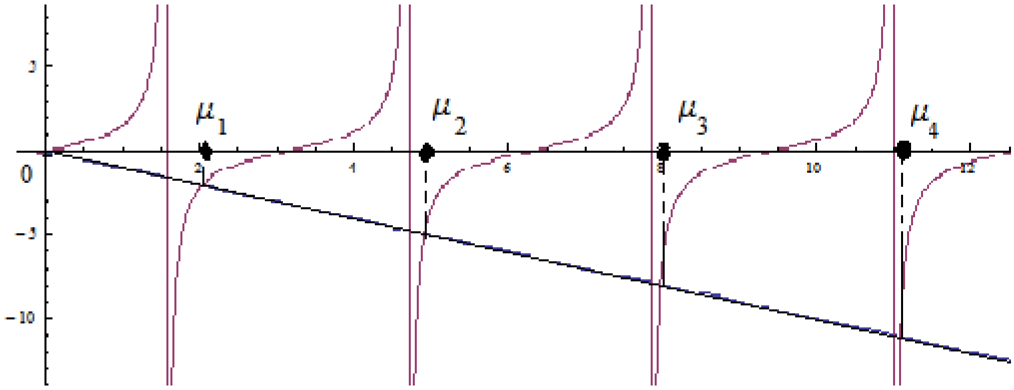
Если $\lambda > 0$, то общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda 2}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda 2}x$. Из граничных условий вытекает

$$\begin{cases} y'(0) - y(0) = C_1\sqrt{\lambda 2} - C_2 = 0 \\ y(1) = C_1 \sin\sqrt{\lambda 2} + C_2 \cos\sqrt{\lambda 2} = 0 \end{cases}.$$

Нетривиальное решение этой системы существует, если

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\lambda 2} & -1 \\ \sin\sqrt{\lambda 2} & \cos\sqrt{\lambda 2} \end{vmatrix} = \sqrt{\lambda 2}\cos\sqrt{\lambda 2} + \sin\sqrt{\lambda 2} = 0, \quad \lambda > 0.$$

Поэтому λ определяется из трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda 2} = -\sqrt{\lambda 2}$, положительные решения которого и будут собственными значениями. Подробнее, рассмотрим уравнение $\operatorname{tg}\mu = -\mu$. У этого уравнения бесконечно много положительных корней. Занумеровав эти корни в порядке возрастания, получим последовательность μ_n, $n = 1, 2, \ldots$. Первые четыре положительных корня $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ отмечены на рисунке



Таким образом, $\sqrt{\lambda_n 2} = \mu_n$ и $\lambda_n = \mu_n^2/2$.

Для нахождения собственных функций, рассмотрим любое из уравнений системы для неизвестных констант C_1, C_2. Используя, например, первое уравнение, получим после несложных преобразований собственную функцию $y_n(x)$, соответствующую собственному числу λ_n, $n = 1, 2, \ldots$,

$$y_n(x)=C_1\left(\sin\sqrt{2\lambda_n}x+\sqrt{2\lambda_n}\cos\sqrt{2\lambda_n}x\right)=C_1\left(\sin\sqrt{2\lambda_n}x-\operatorname{tg}\sqrt{2\lambda_n}\cos\sqrt{2\lambda_n}x\right)=$$

$$=\frac{C_1}{\cos\sqrt{\lambda_n 2}}\left(\sin\sqrt{2\lambda_n}x\cdot\cos\sqrt{2\lambda_n}-\sin\sqrt{2\lambda_n}\cdot\cos\sqrt{2\lambda_n}x\right)=C\sin\left(\sqrt{2\lambda_n}\,(x-1)\right)$$

Здесь положим $C=1$. Таким образом, ортогональная система собственных функций имеет вид

$$y_n(x)=\sin\left(\sqrt{2\lambda_n}\,(x-1)\right),\quad n=1,2,\dots\ .$$

Далее, выпишем ряд Фурье. Согласно формулам (4.7), находим квадраты норм собственных функций $y_n(x)$

$$\|y_n\|^2=\int_0^1\left(\sin\left(\sqrt{2\lambda_n}\,(x-1)\right)\right)^2 2dx=\int_0^1\left(1-\cos\left(2\sqrt{2\lambda_n}\,(x-1)\right)\right)dx=1-\frac{\sin\left(2\sqrt{2\lambda_n}\right)}{2\sqrt{2\lambda_n}}$$

,

затем интегрируя по частям, вычисляем скалярные произведения данной функции $f(x)=x-1$ с функциями $y_n(x)$

$$(f,y_n)=\int_0^1(x-1)\sin\left(\sqrt{2\lambda_n}\,(x-1)\right)2dx=\frac{\sin\sqrt{2\lambda_n}-\sqrt{2\lambda_n}\cos\sqrt{2\lambda_n}}{\lambda_n}\,.$$

Таким образом, коэффициенты Фурье для функции $f(x)$ равны

$$f_n=\frac{(f,y_n)}{\|y_n\|^2}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}}\frac{\sin\sqrt{2\lambda_n}-\sqrt{2\lambda_n}\cos\sqrt{2\lambda_n}}{2\sqrt{2}-\sin 2\sqrt{2\lambda_n}}\,,$$

и ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin\left(\sqrt{2\lambda_n}\,(x-1)\right).$$

§9. Индивидуальные задания

Задание 1. Выполнить ортогонализацию в пространстве $L_2((a,b),p)$ - квадратично интегрируемых функций на промежутке (a,b) с весом p с помощью процесса Грамма-Шмидта.

1.1. $(a,b)=(1,2),\ p(x)=x,\ f_1(x)=3,\ f_2(x)=2-x,\ f_3(x)=x^2-x$.

1.2. $(a,b)=(1,2),\ p(x)=x,\ f_1(x)=4,\ f_2(x)=1+x,\ f_3(x)=x^2+x$.

1.3. $(a,b)=(1,3),\ p(x)=x,\ f_1(x)=3,\ f_2(x)=2+x,\ f_3(x)=x^2-1$.

1.4. $(a,b)=(1,3),\ p(x)=x,\ f_1(x)=2,\ f_2(x)=3-x,\ f_3(x)=x^2+1$.

1.5. $(a,b)=(1,4),\ p(x)=x,\ f_1(x)=1,\ f_2(x)=3+x,\ f_3(x)=x^2+x$.

1.6. $(a,b)=(1,4),\ p(x)=x,\ f_1(x)=1,\ f_2(x)=4+x,\ f_3(x)=x^2+2x$.

1.7. $(a,b)=(1,2),\ p(x)=x,\ f_1(x)=4,\ f_2(x)=1-x,\ f_3(x)=x^2-2x$.

1.8. $(a,b)=(1,2),\ p(x)=x,\ f_1(x)=3,\ f_2(x)=4+x,\ f_3(x)=x-x^2$.

1.9. $(a,b)=(1,3),\ p(x)=x,\ f_1(x)=3,\ f_2(x)=x-1,\ f_3(x)=x^2+2$.

1.10. $(a,b)=(1,3),\ p(x)=x,\ f_1(x)=2,\ f_2(x)=x-4,\ f_3(x)=x^2-x$.

1.11. $(a,b)=(1,4),\ p(x)=x,\ f_1(x)=4,\ f_2(x)=2x+1,\ f_3(x)=x^2-1$.

1.12. $(a,b)=(1,4),\ p(x)=x,\ f_1(x)=2,\ f_2(x)=5+x,\ f_3(x)=x^2-x$.

1.13. $(a,b)=(1,2),\ p(x)=x,\ f_1(x)=1,\ f_2(x)=5-x,\ f_3(x)=x^2+3x$.

1.14. $(a,b)=(1,2),\ p(x)=x,\ f_1(x)=1,\ f_2(x)=5+x,\ f_3(x)=x^2-3x$.

1.15. $(a,b)=(1,3),\ p(x)=x,\ f_1(x)=4,\ f_2(x)=4+x,\ f_3(x)=x^2-2x$.

1.16. $(a,b)=(1,3),\ p(x)=x,\ f_1(x)=4,\ f_2(x)=6-x,\ f_3(x)=x^2-2x$.

1.17. $(a,b)=(1,4),\ p(x)=x,\ f_1(x)=2,\ f_2(x)=6+x,\ f_3(x)=x^2-x$.

1.18. $(a,b)=(1,4),\ p(x)=x,\ f_1(x)=3,\ f_2(x)=1-x,\ f_3(x)=2x^2+1$.

1.19. $(a,b)=(1,2),\ p(x)=x,\ f_1(x)=4,\ f_2(x)=2-x,\ f_3(x)=2x^2-1$.

1.20. $(a,b)=(1,2),\ p(x)=x,\ f_1(x)=3,\ f_2(x)=5-x,\ f_3(x)=x^2-x$.

1.21. $(a,b)=(1,3),\ p(x)=x,\ f_1(x)=4,\ f_2(x)=3+x,\ f_3(x)=x^2-2x$.

1.22. $(a,b)=(1,3),\ p(x)=x,\ f_1(x)=1,\ f_2(x)=6-2x,\ f_3(x)=x^2+x$.

1.23. $(a,b)=(1,4),\ p(x)=x,\ f_1(x)=1,\ f_2(x)=2-x,\ f_3(x)=x^2-x$.

1.24. $(a,b)=(1,4),\ p(x)=x,\ f_1(x)=3,\ f_2(x)=1-x,\ f_3(x)=x^2-2x$.

1.25. $(a,b)=(1,2),\ p(x)=x,\ f_1(x)=1,\ f_2(x)=3+x,\ f_3(x)=x^2+x+1$.

1.26. $(a,b)=(1,2),\ p(x)=x,\ f_1(x)=2,\ f_2(x)=1-x,\ f_3(x)=x^2-x+1$.

1.27. $(a,b)=(1,3),\ p(x)=x,\ f_1(x)=2,\ f_2(x)=1+x,\ f_3(x)=x^2+6$.

1.28. $(a,b)=(1,3),\ p(x)=x,\ f_1(x)=4,\ f_2(x)=7+x,\ f_3(x)=x^2+x$.

1.29. $(a,b)=(1,4),\ p(x)=x,\ f_1(x)=3,\ f_2(x)=7-x,\ f_3(x)=x^2-x$.

1.30. $(a,b)=(1,4),\ p(x)=x,\ f_1(x)=3,\ f_2(x)=2+x,\ f_3(x)=x^2+x+1$.

Задание 2. В условиях задачи 1, найти расстояние от функции $f_3(x)$ до линейной оболочки функций $(f_1(x); f_2(x))$.

Задание 3. Дана функция $f(x)$ на промежутке $[0;\mathrm{T}]$, и заданы точки x_0, x_1, x_2 на этом промежутке. Требуется:

а) выписать ряд Фурье для функции $f(x)$ в комплексной форме,

б) выписать вещественную форму ряда Фурье функции $f(x)$,

в) построить график функции $f(x)$ и суммы ее ряда Фурье,

г) вычислить значение суммы ряда Фурье в заданных точках,

д) выписать ряд Фурье в амплитудно-фазовой форме, е) построить амплитудный спектр ряда Фурье, вычислить A_1, A_2, A_3, A_4, A_5,

ж) выписать равенство Парсеваля.

3.1. $f(x)=\begin{cases} x, & при \quad 0 \le x < 2, \\ 1, & при \quad 2 \le x \le 4, \end{cases}$

$x_0=1;\ \ x_1=2;\ \ x_2=4.$

3.2. $f(x)=\begin{cases} 1-x, & при \quad 0 \le x < 1, \\ 1, & при \quad 1 \le x \le 2, \end{cases}$

$x_0=0;\ \ x_1=1;\ \ x_2=1,5.$

3.3. $f(x)=\begin{cases} 2x, & при \quad 0 \le x < 1, \\ 2-x, & при \quad 1 \le x \le 2, \end{cases}$

$x_0=0;\ \ x_1=1;\ \ x_2=0,5.$

3.4. $f(x)=\begin{cases} 2, & при \quad 0 \le x < 2, \\ x-2, & при \quad 2 \le x \le 4, \end{cases}$

$x_0=1;\ \ x_1=2;\ \ x_2=4.$

3.5. $f(x)=\begin{cases} x, & при \quad 0 \le x < 3, \\ 3-x, & при \quad 3 \le x \le 6, \end{cases}$

$x_0=2;\ \ x_1=3;\ \ x_2=6.$

3.6. $f(x)=\begin{cases} 2-x, & при \quad 0 \le x < 2, \\ -1, & при \quad 2 \le x \le 4, \end{cases}$

$x_0=1;\ \ x_1=2;\ \ x_2=4.$

3.7. $f(x)=\begin{cases} x-1, & при \quad 0 \le x < 1, \\ 2-x, & при \quad 1 \le x \le 2, \end{cases}$

$x_0=0;\ \ x_1=1;\ \ x_2=1,5.$

3.8. $f(x)=\begin{cases} x-2, & при \quad 0 \le x < 2, \\ x-1, & при \quad 2 \le x \le 4, \end{cases}$

$x_0=0;\ \ x_1=1;\ \ x_2=2.$

3.9. $f(x)=\begin{cases} x+1, & при \quad 0 \le x < 1, \\ 1, & при \quad 1 \le x \le 2, \end{cases}$

$x_0=0,5;\ \ x_1=1;\ \ x_2=2.$

3.10. $f(x)=\begin{cases} 1-x, & при \quad 0 \le x < 1, \\ x, & при \quad 1 \le x \le 2, \end{cases}$

$x_0=0,5;\ \ x_1=1;\ \ x_2=2.$

3.11. $f(x)=\begin{cases} x, & при \quad 0 \le x < 3, \\ 3, & при \quad 3 \le x \le 6, \end{cases}$

$x_0=0;\ \ x_1=3;\ \ x_2=6.$

3.12. $f(x)=\begin{cases} x, & при \quad 0 \le x < 2, \\ -2, & при \quad 2 \le x \le 4, \end{cases}$

$x_0 = 0; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 2.$

3.13. $f(x)=\begin{cases} 2x, & при \quad 0 \le x < 1, \\ 1, & при \quad 1 \le x \le 2, \end{cases}$

$x_0 = 0; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 0,5.$

3.14. $f(x)=\begin{cases} -x, & при \quad 0 \le x < 1, \\ x-1, & при \quad 1 \le x \le 2, \end{cases}$

$x_0 = 1; \quad x_1 = 1,5; \quad x_2 = 2.$

3.15. $f(x)=\begin{cases} x-1, & при \quad 0 \le x < 1, \\ 1, & при \quad 1 \le x \le 2, \end{cases}$

$x_0 = 0; \quad x_1 = 0,5; \quad x_2 = 1.$

3.16. $f(x)=\begin{cases} x+2, & при \quad 0 \le x < 1, \\ 2, & при \quad 1 \le x \le 2, \end{cases}$

$x_0 = 0,5; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 2.$

3.17. $f(x)=\begin{cases} 1-x, & при \quad 0 \le x < 2, \\ -1, & при \quad 2 \le x \le 4, \end{cases}$

$x_0 = 1,5; \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 4.$

3.18. $f(x)=\begin{cases} 2x, & при \quad 0 \le x < 2, \\ 2, & при \quad 2 \le x \le 4, \end{cases}$

$x_0 = 1; \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 4.$

3.19. $f(x)=\begin{cases} x, & при \quad 0 \le x < 3, \\ 2, & при \quad 3 \le x \le 6, \end{cases}$

$x_0 = 1; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 6.$

3.20. $f(x)=\begin{cases} 2-x, & при \quad 0 \le x < 2, \\ x, & при \quad 2 \le x \le 4, \end{cases}$

$x_0 = 0; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 2.$

3.21. $f(x)=\begin{cases} 2, & при \quad 0 \le x < 1, \\ x-2, & при \quad 1 \le x \le 2, \end{cases}$

$x_0 = 1; \quad x_1 = 1,5; \quad x_2 = 2.$

3.22. $f(x)=\begin{cases} -2, & при \quad 0 \le x < 2, \\ x-2, & при \quad 2 \le x \le 4, \end{cases}$

$x_0 = 2; \quad x_1 = 2,5; \quad x_2 = 4.$

3.23. $f(x)=\begin{cases} 3, & при \quad 0 \le x < 1, \\ x+1, & при \quad 1 \le x \le 2, \end{cases}$

$x_0 = 1; \quad x_1 = 1,5; \quad x_2 = 2.$

3.24. $f(x)=\begin{cases} x, & при \quad 0\le x<1, \\ 1-x, & при \quad 1\le x\le 2, \end{cases}$

$x_0=0;\ \ x_1=1;\ \ x_2=1,5.$

3.25. $f(x)=\begin{cases} 2, & при \quad 0\le x<1, \\ 1-x, & при \quad 1\le x\le 2, \end{cases}$

$x_0=1;\ \ x_1=1,5;\ \ x_2=2.$

3.26. $f(x)=\begin{cases} 4, & при \quad 0\le x<1, \\ x+2, & при \quad 1\le x\le 2, \end{cases}$

$x_0=0;\ \ x_1=0,5;\ \ x_2=1.$

3.27. $f(x)=\begin{cases} 2, & при \quad 0\le x<1, \\ 2x, & при \quad 1\le x\le 2, \end{cases}$

$x_0=0;\ \ x_1=1;\ \ x_2=1,5.$

3.28. $f(x)=\begin{cases} x+2, & при \quad 0\le x<2, \\ 1, & при \quad 2\le x\le 4, \end{cases}$

$x_0=0;\ \ x_1=0,5;\ \ x_2=2.$

3.29. $f(x)=\begin{cases} 2-x, & при \quad 0\le x<2, \\ 3, & при \quad 2\le x\le 4, \end{cases}$

$x_0=0;\ \ x_1=1;\ \ x_2=2.$

3.30. $f(x)=\begin{cases} 2x, & при \quad 0\le x<1, \\ 1-x, & при \quad 1\le x\le 2, \end{cases}$

$x_0=0;\ \ x_1=0,5;\ \ x_2=1.$

Задание 4. Для функции $f(x)$ из задания №3:

а) выписать ряд Фурье по ортогональной системе функций $1,\ \cos\frac{\pi x}{T},\ \ldots,$ $\cos\frac{k\pi x}{T}\ldots;$

б) построить график суммы этого ряда Фурье;

в) выписать равенство Парсеваля.

Задание 5. Для функции $f(x)$ из задания №3:

а) выписать ряд Фурье по ортогональной системе функций $\sin\frac{\pi x}{T},\ \sin\frac{2\pi x}{T},$ $\ldots,\ \sin\frac{k\pi x}{T},\ \ldots;$

б) построить график суммы этого ряда Фурье.

Задание 6. Требуется написать ряд Фурье и формулу Парсеваля для заданной функции $f(x)$ по ортогональной системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dv(x)}{dx}\right)+q(x)v(x)-\lambda\rho(x)v(x)=0,$$

удовлетворяющих краевым условиям:

$$\begin{cases}\alpha_1 v'(a)+\beta_1 v(a)=0\\ \alpha_2 v'(b)+\beta_2 v(b)=0\end{cases}$$

или периодическим условиям

$$\begin{cases}v(a)=v(b)\\ v'(a)=v'(b)\end{cases}.$$

Исходными данными для индивидуальных заданий являются: длина промежутка l (полагаем $[a,b]=[0,l]$), функции $p(x)>0,\ \rho(x)>0,\ q(x)$; числа $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$.

1. $l=1,\ p(x)=2,\ q(x)=1,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=\beta_2=0,$
$$f(x)=\cos(\pi x).$$

2. $l=\pi,\ p(x)=1,\ q(x)=2,\ \rho(x)=2,\ \alpha_1=\alpha_2=0,\ \beta_1=\beta_2=1,$
$$f(x)=\sin x.$$

3. $l=1,\ p(x)=2,\ q(x)=0.5,\ \rho(x)=2,$ периодические краевые условия,
$$f(x)=x.$$

4. $l=\pi,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=2,\ \alpha_1=\beta_2=0,\ \beta_1=\alpha_2=1,$
$$f(x)=1+\sin x.$$

5. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=1,\ \rho(x)=2,\ \ \beta_1=\alpha_2=0,\ \alpha_1=\beta_2=1,$
$$f(x)=e^x.$$

6. $l=2\pi,\ p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=4,$ периодические краевые условия,
$$f(x)=\cos(x).$$

7. $l=2,\ p(x)=3,\ q(x)=2,\ \rho(x)=1,\ \alpha_1=0,\ \alpha_2=\ \beta_1=1, \beta_2=2,$
$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

8. $l=1,\ p(x)=1,\ q(x)=2,\ \rho(x)=3,\ \alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=0,\ \beta_2=4,$
$$f(x)=\cos(\pi x).$$

9. $l=1,\ p(x)=0.5,\ q(x)=0,\ \rho(x)=2,$ периодические краевые условия,
$$f(x)=1-x.$$

10. $l = 1,\ p(x) = 2,\ q(x) = 3,\ \rho(x) = 1,\ \alpha_1 = \beta_2 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \beta_1 = 2,$

$$f(x) = \sin(\pi x).$$

11. $l = 1,\ p(x) = 1,\ q(x) = 4,\ \rho(x) = 3,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 0,$

$$f(x) = x.$$

12. $l = 2,\ p(x) = 1,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 3,\ \ \alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \beta_1 = \beta_2 = 1,$

$$f(x) = x(2 - x).$$

13. $l = \pi/2\,,\ p(x) = 0.5,\ q(x) = 2,\ \rho(x) = 1,$ периодические краевые условия,

$$f(x) = \sin(2x).$$

14. $l = 1,\ p(x) = 2,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 4,\ \ \alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \ \beta_1 = \beta_2 = 0,$

$$f(x) = e^x.$$

15. $l = 2,\ p(x) = 1,\ q(x) =\ \rho(x) = 2,$ периодические краевые условия,

$$f(x) = x^2.$$

16. $l = \pi/2\,,\ p(x) = 0.5,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = \beta_2 = 2,$

$$f(x) = x.$$

17. $l = 1,\ p(x) = 2,\ q(x) = 1,\ \rho(x) = 4,\ \alpha_1 = \beta_2 = 0,\ \beta_1 = \alpha_2 = 1,$

$$f(x) = 2x + 1.$$

18. $l = 1,\ p(x) = 1,\ q(x) =\ \rho(x) = 0.5,\ \alpha_2 =\ \beta_1 = 0,\ \alpha_1 = \beta_2 = 1,$

$$f(x) = x.$$

19. $l = 1,\ p(x) = 3,\ q(x) = \rho(x) = 0.5,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 =\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 3,$

$$f(x) = \cos(2x).$$

20. $l = 2,\ p(x) = 2,\ q(x) = 1,\ \rho(x) = 0.5,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \ \beta_1 = \beta_2 = 0,$

$$f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}.$$

21. $l = 4,\ p(x) = 3,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 2,$ периодические краевые условия,

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

22. $l = 4\pi,\ p(x) = q(x) =\ \rho(x) = 1,$ периодические краевые условия,

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

23. $l = 10,\ p(x) = 1,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 5,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = 0, \beta_2 = 10,$
$$f(x) = \sin(10\pi x).$$

24. $l = 2,\ p(x) = 2,\ q(x) = \rho(x) = 3$, периодические краевые условия,
$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

25. $l = \pi/4, p(x) = 1,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 0.5,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = 0, \beta_2 = 10,$
$$f(x) = \cos(4x).$$

26. $l = 1,\ p(x) = 2,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 1.5,\ \alpha_1 = \beta_2 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \beta_1 = 1,$
$$f(x) = \sin(2\pi x).$$

27. $l = 1,\ p(x) = 3,\ q(x) = 1,\ \rho(x) = 2,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = -1,\ \beta_2 = 0,$
$$f(x) = x^2.$$

28. $l = 1,\ p(x) = 1,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 0.25$, периодические краевые условия,
$$f(x) = \mathrm{sh}(x).$$

29. $l = 2,\ p(x) = q(x) = 2,\ \rho(x) = 0.5,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \beta_1 = 1,\ \beta_2 = -1,$
$$f(x) = 0.5\ \sin(\pi x).$$

30. $l = 1,\ p(x) = 2,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 0.25$, периодические краевые условия,
$$f(x) = \mathrm{ch}(x).$$

Литература

1. Н.С. Пискунов, Дифференциальное и интегральное исчисление. СПб, Ф-М лит., 1996.
2. М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко, Е.В. Шикин, В.И. Заляпин, С.К. Соболев. Главы XVII - XXV. Вся высшая математика. Том 3. 2001.
3. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.3. «Наука», 1966.
4. Н.Н. Бари. Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
5. Н.Н.Воробьёв. Теория рядов. Москва, «Наука», 1986.
6. П.К.Суетин. Классические ортогональные многочлены. Москва, «Наука», 1976.

Содержание

Алексеев Александр Борисович, Попова Наталья Владимировна,
Тащиян Григорий Михайлович

РЯД И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Учебно-методическое пособие

Редактор
Компьютерная верстка

План 2017 г., п.

Подписано к печати
Объем усл.-печ. л. Тираж экз. Заказ

Редакционно-издательский центр СПбГУТ
191186 СПб., наб. р. Мойки, 61
Отпечатано в СПбГУТ