

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ**  
**Федеральное государственное**  
**Образовательное бюджетное учреждение**  
**высшего профессионального образования**  
**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ**  
**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ**  
**ИМ. ПРОФ. БОНЧ-БРУЕВИЧА**

---

**П. З. Мкртычян, И. С. Перфилова**

**МАТЕМАТИКА**  
**ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ**

**Учебно-методическое пособие**  
**по выполнению самостоятельной работы**

**СПб ГУТ**  
**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ**

**2016**

**Мкртычян П. З., Перфилова И.С.**

Математика. Числовые ряды: учебно-методическое пособие по выполнению самостоятельной работы / П. З. Мкртычян, И.С. Перфилова ; СПбГУТ. – СПб., 2016. – 23с.

Изложены основные определения и теоремы теории числовых рядов. Разобрано большое количество задач. Приведены варианты контрольных заданий.

Данное издание можно использовать для самостоятельного освоения студентами-бакалаврами технических специальностей указанного раздела высшей математики.

## Содержание

Введение.....	4
§1. Основные определения.....	4
§2. Некоторые простые свойства рядов. Необходимый признак сходимости ряда.....	5
§ 3. Достаточные признаки сходимости положительных рядов.....	6
§4. Теоремы сравнения.....	8
§ 5. Знакопеременные ряды.....	10
§ 6. Решение типовых задач.....	11
§ 7. Варианты контрольных заданий.....	14
Список литературы.....	22

## Введение.

В настоящем пособии приведены определения и основные теоремы (без доказательств) теории числовых рядов. Материал излагается подробно на простом языке, доступном студентам технических специальностей, освоивших начала математического анализа. Разобрано большое количество задач. Приведены варианты десяти контрольных заданий.

Пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов технических специальностей к выполнению контрольных заданий по данному разделу математики.

### §1. Основные определения.

**Определение 1.1.** Числовым рядом, или просто рядом называется символ вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1.1)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$  — некоторая бесконечная последовательность чисел, которые называются членами ряда.

Вместо символа (1.1) можно писать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1.1')$$

При этом  $a_n$  называется общим членом ряда.

Иными словами, рядом называется сумма бесконечного числа слагаемых.

Само понятие суммы бесконечного числа слагаемых нуждается в определении. Действительно, как, к примеру, вычисляется сумма четырёх слагаемых? К первому слагаемому прибавляется второе, к полученной сумме прибавляется третье, к вновь полученной сумме прибавляется четвёртое слагаемое, и на этом процесс завершается. Если же слагаемых бесконечное множество, то этот процесс никогда не завершится.

**Определение 1.2.** Назовём  $n$  – ной частичной суммой  $S_n$  ряда сумму первых  $n$  членов ряда:  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Т.е.  $S_1 = a_1$ ,  $S_2 = a_1 + a_2$ ,  $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$  и т.д.

**Определение 1.3.** Суммой ряда называется конечный или бесконечный предел  $S$  частичных сумм  $S_n$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad (1.2)$$

и пишут  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Если предел (1.2) конечен, то ряд называется сходящимся, если предел (1.2) бесконечен либо не существует, то ряд называется расходящимся.

Сходимость и расходимость рядов обозначается соответственно  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ .

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.1.** Ряд  $a + aq + aq^2 + \dots + q^{n-1} + \dots$ ,  $a \neq 0$ , представляет собой сумму всех членов геометрической прогрессии, и знаком ещё из школьного курса математики. Используя легко проверяемое равенство  $1 - q^n = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$ , при  $q \neq 1$  получим:  $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ . Тогда, если  $|q| < 1$ , то сумма ряда  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$ , и ряд сходится; а если  $|q| > 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , и ряд расходится; при  $q = 1$   $S_n = na$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , и ряд также расходится.

**Пример 1.2.** Рассмотрим ряд  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ . Последовательность частичных сумм этого ряда имеет вид:  $S_1=1$ ,  $S_2=1 - 1=0$ ,  $S_3=1 - 1 + 1=1$ ,  $S_4=0$  и т.д. Очевидно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  не существует, следовательно, ряд расходится.

## §2. Некоторые простые свойства рядов. Необходимый признак сходимости ряда.

**Определение 2.1.** Два ряда называются равносходимыми, если из сходимости (расходимости) одного из них следует сходимость (расходимость) другого, и наоборот, т.е. если они сходятся (расходятся) одновременно. Равносходимость рядов будем обозначать знаком эквивалентности:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

**Определение 2.2.** Ряд  $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ , полученный из ряда (1.1') отбрасыванием первых  $m$  слагаемых, называется остатком ряда (1.1') после  $m$  – го члена.

Легко доказываются следующие свойства рядов:

1<sup>0</sup>. Ряд (1.1') равносходим с любым своим остатком.

2<sup>0</sup>. Если ряд сходится, то сумма  $\alpha_m$  его остатка после  $m$  – го члена с возрастанием  $m$  стремится к нулю.

3<sup>0</sup>.  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

4<sup>0</sup>. Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходятся, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

Приведём необходимый признак сходимости ряда.

**Теорема 2.1.** Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю. Т.е. из сходимости ряда следует, что его общий член стремится к нулю:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Особо отметим следующее

**Замечание 2.1.** Обратное, вообще говоря, неверно. Т.е. из того, что общий член ряда стремится к нулю, вообще говоря, не следует, что ряд обязательно сходится.

Т.е. может быть так, что общий член ряда стремится к нулю, а ряд при этом расходится.

**Пример 2.1** Ниже будет показано, что так называемый гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится. Но его общий член, очевидно, стремится к нулю.

Но справедливо следующее следствие из необходимого признака.

**Следствие 2.1** Если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

### § 3. Достаточные признаки сходимости положительных рядов.

**Определение 3.1.** Ряды, составленные из неотрицательных слагаемых для краткости будем называть положительными.

Исследование рядов на сходимость производится следующим образом: сначала нужно посчитать предел общего члена; если окажется, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то по следствию 2.1 ряд расходится; если же окажется, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то согласно замечанию 2.1, из этого нельзя делать вывод о сходимости ряда. В этом случае нужно исследовать ряд, используя так называемые достаточные признаки сходимости рядов. Три таких признака будут рассмотрены в этом параграфе.

**Теорема 3.1** (Интегральный признак Коши). Пусть задан положительный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n > 0$ ), члены которого совпадают со значениями некоторой монотонно убывающей функции  $f(x)$  в целочисленных точках ( $a_n = f(n)$ ). Тогда ряд равносходим с несобственным интегралом

$$\int_1^{\infty} f(x) dx,$$

т.е. если сходится интеграл, то сходится и ряд; если расходится интеграл, то расходится и ряд.

**Пример 3.1.** Рассмотрим гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Посчитаем интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty$ ; следовательно, по интегральному признаку Коши ряд расходится.

**Пример 3.2.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Посчитаем интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-1-\varepsilon} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{-\varepsilon}}{-\varepsilon} \Big|_1^b = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b^\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon};$$

следовательно, по интегральному признаку Коши ряд сходится.

**Пример 3.3.** Используя интегральный признак Коши, легко показать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ , расходится для любых  $\alpha \in (0; 1)$ .

**Замечание 3.1.** Таким образом, доказано, что ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  сходятся при  $\alpha > 1$ , и расходятся при  $0 < \alpha \leq 1$ .

**Теорема 3.2.** (Признак Даламбера). Пусть задан положительный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n > 0$ ). Пусть существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ . Тогда:

- 1) если  $q < 1$ , то ряд сходится;
- 2) если  $q > 1$ , то ряд расходится;
- 3) если  $q = 1$ , то ряд может сходиться, а может и расходиться.

**Пример 3.4.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ . Тогда  $a_n = \frac{n}{2^n}$ ,  $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1$ , следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится.

**Пример 3.5.** Если применять признак Даламбера к ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ , то получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^\alpha = 1.$$

Но при  $\alpha > 1$  ряды сходятся, а при  $0 < \alpha \leq 1$  расходятся (см. примеры 3.1-3.3) т.е. к этим рядам признак Даламбера не применим.

**Теорема 3.3.** (Радикальный признак Коши). Пусть задан положительный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n \geq 0$ ), и существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ . Тогда:

- 1) если  $q < 1$ , то ряд сходится;
- 2) если  $q > 1$ , то ряд расходится;
- 3) если  $q = 1$ , то ряд может сходиться, а может и расходиться.

**Пример 3.6.** Применим радикальный признак Коши к ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$ .  
Имеем:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} < 1$ ; следовательно, ряд расходится.

**Пример 3.7.** Если применим радикальный признак Коши к ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ , то получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{\alpha}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\ln n})^{-\frac{\alpha}{n}} = e^{-\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = e^0 = 1,$$

т.е. радикальный признак Коши к этим рядам не применим.

#### §4. Теоремы сравнения.

Часто бывает удобно исследовать ряды на сходимость, сравнивая их с ранее исследованными рядами, в частности, с рядами вида  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ . Делать это позволяют следующие теоремы сравнения.

**Теорема 4.1.** Пусть заданы ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , причём  $0 < a_n < b_n$ . Тогда:

- 1) если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ;
- 2) если расходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , то расходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**Замечание 4.1.** В силу свойства 1<sup>о</sup> §2 достаточно, чтобы условие  $0 < a_n < b_n$ , теоремы 4.1 было выполнено, начиная с некоторого номера  $n$ .

**Теорема 4.2.** Пусть заданы положительные ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ( $a_n > 0$ ,  $b_n > 0$ ) и пусть существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ , причём  $c \neq 0, c \neq \infty$ . Тогда ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  равносходимы.



**Пример 4.1** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ . Сравним его по теореме 4.1 с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Очевидно, что  $\frac{\sin^2 n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ . Поскольку ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится (см. пример 3.2), то и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$  тоже сходится.

**Пример 4.2.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin^2 n}{n}$ . Сравним его по теореме 4.1 с гармоническим рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Поскольку  $\frac{1+\sin^2 n}{n} \geq \frac{1}{n}$ , а гармонический ряд расходится, то по теореме 4.1 исследуемый ряд также расходится.

**Пример 4.3** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n^4+1}}$ . Сравним его по теореме 4.2 с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Посчитаем предел отношения общих членов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{3n+1}{\sqrt{n^4+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n(3n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4(1+\frac{1}{n^4})}}{n^2(3+\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}{n^2(3+\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$$

Предел конечен и отличен от нуля, следовательно, ряды равносходимы. Т.к. гармонический ряд расходится, то и исследуемый ряд тоже расходится.

**Пример 4.4.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3\sqrt{n^6+1}}$ . Сравним его с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  по второй теореме сравнения. Посчитаем предел отношения общих членов:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n+1}{3\sqrt{n^6+1}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n^6+1}}{n^2(n+1)} = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6(1+\frac{1}{n^6})}}{n^3(1+\frac{1}{n})} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt{1+\frac{1}{n^6}}}{n^3(1+\frac{1}{n})} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}}{1+\frac{1}{n}} = 3 \end{aligned}$$

Предел конечен и отличен от нуля, следовательно, ряды равносходимы. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится, следовательно, и исследуемый ряд тоже сходится.

**Замечание 4.1.** Заметим, что ряды, рассмотренные в примерах 4.1 и 4.2 сравнивать с рядами  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  соответственно, по теореме 4.2 невозможно, так как получающиеся при этом пределы не существуют.

Поясним, как нужно выбирать ряды для сравнения по теоремам 4.1 и 4.2.

Если общий член ряда представляет собой дробь, у которой числитель растёт как  $n^l$ , а знаменатель, как  $n^m$ , то такой ряд нужно сравнивать с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{m-l}}$ .

Если сравнение осуществляется по теореме 4.1 и предполагается, что исследуемый ряд сходится, то для сравнения нужно найти сходящийся ряд, члены которого больше членов исследуемого ряда; если же предполагается, что исследуемый ряд расходится, то для сравнения нужно подобрать расходящийся ряд, члены которого меньше членов исследуемого ряда.

## § 5. Знакопеременные ряды.

**Определение 5.1.** Ряд называется знакопеременным, если среди его членов есть и положительные и отрицательные числа.

**Теорема 5.1.** Пусть задан знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Тогда, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  также сходится.

Эта теорема делает оправданным следующее.

**Определение 5.2.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

**Определение 5.3.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  расходится.

Ниже мы убедимся, что условно сходящиеся ряды существуют.

**Определение 5.4.** Ряд вида

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^{n+1} b_n + \dots, \quad (5.1)$$

где  $b_k > 0$ , называется знакочередующимся.

Иначе ряд (5.1) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n, \quad b_n > 0 \quad (5.1')$$

Для знакочередующихся рядов справедлив следующий признак сходимости Лейбница.

**Теорема 5.1.** (признак Лейбница). Пусть члены ряда (5.1) удовлетворяют условиям:

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ;
- 2)  $b_0 > b_1 > b_2 > \dots > b_n > b_{n+1} > \dots$

Тогда ряд (5.1) сходится, причём его сумма  $S$  удовлетворяет неравенству  $0 < S < b_1$ .

**Пример 5.1.** Ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , удовлетворяют всем условиям теоремы 5.1 и, следовательно, сходятся. Причём, поскольку  $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$ , то при  $\alpha > 1$  сходятся абсолютно, а при  $0 < \alpha \leq 1$  сходятся условно (см. примеры 3.1-3.3 и замечание 3.1).

## § 6. Решение типовых задач.

В предыдущих параграфах уже рассматривались некоторые примеры, необходимые для пояснения теоретического материала.

Рассмотрим ещё ряд примеров, аналогичных предлагаемым в индивидуальных заданиях следующего параграфа.

**Пример 6.1.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+3) \arcsin \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}$ . Посчитаем предел общего члена, учитывая, что при  $n \rightarrow \infty$   $\arcsin \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+3) \arcsin \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{\sqrt{4n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+\frac{3}{n})}{n\sqrt{4(1+\frac{1}{n^2})}} = \frac{1}{2}.$$

Так как предел общего члена не равен нулю, то по следствию 2.1 из необходимого признака сходимости ряда рассматриваемый ряд расходится.

Ещё раз особо заметим, что если бы предел общего члена был равен нулю, то нельзя было бы делать вывод, что ряд обязательно сходится (см. замечание 2.1 и пример 2.1).

В § 4 было показано, как исследуются на сходимость ряды по теоремам сравнения 4.1 и 4.2. При этом рассматриваемые в примерах 4.1-4.4 ряды сравнивались с рядами  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  с правильным образом подобранным  $\alpha$ .

Рассмотрим ещё один пример, в котором рассматриваемый ряд сравнивается с рядом, члены которого составляют геометрическую прогрессию.

**Пример 6.2** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+2}}{9^{n+5}}$ . Сравним его по теореме 4.2 с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n$ , который, очевидно, сходится. Посчитаем предел отношения общих членов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+2}}{9^{n+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{7}{9}\right)^n \left(\frac{1 + \frac{2}{7^n}}{1 + \frac{5}{9^n}}\right)}{\left(\frac{7}{9}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{7^n}}{1 + \frac{5}{9^n}} = 1.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля, то сравниваемые ряды равносходимы, и, следовательно, исследуемый ряд сходится.

**Пример 6.3.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$ .

Если общий член ряда представляет из себя некоторое выражение в степени  $n$  (или в степени, неограниченно возрастающей с ростом  $n$ ), то его, как правило, бывает удобно исследовать по радикальному признаку Коши (теорема 3.2). Применим теорему 3.2 к рассматриваемому ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Т.к.  $\frac{2}{3} < 1$ , то по теореме 3.2 ряд сходится.

**Пример 6.4.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ .

Если общий член ряда содержит факториал, то такой ряд удобно исследовать по признаку Даламбера (теорема 3.1). При этом нужно знать свойство факториала:  $(n+1)! = n!(n+1)$ . Посчитаем предел отношения  $(n+1)$ -го члена ряда к  $n$ -ному:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \cdot n!}{(n+1)! \cdot 5^n} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Т.к.  $0 < 1$ , то по теореме 3.1 ряд сходится.

Напомним, что в § 3 был рассмотрен пример 3.4, также исследованный по признаку Даламбера.

**Пример 6.5.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \ln(n+5) \ln^8(\ln(n+5))}$ .

Применим к нему интегральный признак Коши (теорема 3.1). Посчитаем несобственный интеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+5) \ln(x+5) \ln^8(\ln(x+5))} &= \int_1^{+\infty} \frac{d \ln(x+5)}{\ln(x+5) \ln^8(\ln(x+5))} = \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{d \ln(\ln(x+5))}{\ln^8(\ln(x+5))} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \ln^{-8}(\ln(x+5)) d \ln(\ln(x+5)) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{7} \ln^{-7}(\ln(x+5)) \right) \Big|_1^b = \frac{1}{7} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln^{-7} \ln 6 - \ln^{-7} \ln b) = \frac{1}{7} \ln^{-7} \ln 6. \end{aligned}$$

Интеграл сходится, следовательно, по теореме 3.2 ряд тоже сходится.

Напомним, что в § 3 в примерах 3.1 и 3.2 ряды также были исследованы по интегральному признаку Коши.

**Пример 6.6.** Рассмотрим знакопередающийся ряд  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(n^2+1)}$  (6.1).

Применим к нему признак Лейбница. Покажем, что общий член ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(n + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} = 0.$$

Покажем теперь, что члены ряда монотонно убывают. Т.е., что

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}.$$

Действительно, это неравенство эквивалентно неравенству

$(n+1)(n^2+1) \leq n((n+1)^2+1)$ , которое, как легко убедиться, равносильно неравенству  $n^2+n+1 > 0$ , справедливому при всех  $n$ .

Следовательно, по признаку Лейбница, рассматриваемый ряд сходится.

Проверим теперь, сходится ли ряд абсолютно. Рассмотрим ряд составленный из абсолютных величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \tag{6.2}$$

По теореме сравнения 4.2 легко показать, что этот ряд равносходим с гармоническим рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , следовательно, ряд (6.2) расходится, а значит ряд (6.1) сходится условно.

**Пример 6.7.** Вычислим сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n(2n+1)}}$  с точностью до 0,001.

Положим  $b_n = \frac{1}{5^{n(2n+1)}}$ . Тогда  $b_3 = \frac{1}{875} = 0,001428$ ,  $b_4 = \frac{1}{5625} = 0,0001777$ . Представим ряд в виде  $\sum_{n=0}^3 (-1)^n b^n + \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n b^n$ .

Сумма знакопередающегося ряда  $\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n b^n$  по признаку Лейбница будет меньше первого члена, т.е.  $b_4 = 0,0001777$ . Тогда сумма  $\sum_{n=0}^3 (-1)^n b^n$  будет приближать сумму ряда с точностью 0,0001. Имеем:

$$\sum_{n=0}^3 (-1)^n b^n = 1 - \frac{1}{15} + \frac{1}{125} - \frac{1}{875} = \frac{2534}{2625}.$$

**Пример 6.8.** Представить бесконечную периодическую дробь  $1,9(75)$  в виде обыкновенной дроби.

Имеем:

$$\begin{aligned} 1,9(75) &= \frac{19}{10} + \frac{75}{1000} + \frac{75}{10000} + \frac{75}{1000000} + \dots = \\ &= \frac{19}{10} + \frac{75}{1000} \left( 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} + \frac{1}{(100)^3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Выражение в скобках представляет собой сумму всех членов геометрической прогрессии с первым членом  $a = 1$  и знаменателем  $q = \frac{1}{100}$ . Тогда эта сумма будет равна  $\frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{100}{99}$  (см. пример 1.1), в силу чего

$$\begin{aligned} 1,9(75) &= \frac{19}{10} + \frac{100}{99} \cdot \frac{75}{1000} = \frac{19}{10} + \frac{25}{330} = \frac{19}{10} + \frac{5}{66} = \frac{1}{2} \left( \frac{19}{5} + \frac{5}{33} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{652}{165} = \frac{326}{165}. \end{aligned}$$

## § 7. Варианты контрольных заданий.

1. Исследовать ряд на сходимость с помощью необходимого признака сходимости.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{n}$ ;
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$ ;
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{2^n}$ ;
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+3)}$ ;
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{\sqrt[3]{4n+n^6}}$ ;
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$ ;
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ ;
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+5}$ ;
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{\sqrt[3]{n+n^6}}$ ;
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt{n^2+1}}$ ;
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ;
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[4]{3n+n^4}}$ ;
13.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n}$ ;
14.  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{n+1}$ ;
15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{3+2n}$ ;
16.  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \cos \frac{\pi}{n}$ ;
17.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n}$ ;
18.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+5}\right)^n$ ;
19.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ ;
20.  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+2) \cdot \sin \frac{1}{2n}$ ;
21.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ;
22.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$ ;
23.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$ ;
24.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+4}\right)^n$ ;
25.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+5}}{4^n}$ .

2. Исследовать ряд на сходимость с помощью первой теоремы сравнения.

1.  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$ ;
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+2)+3}{\sqrt[3]{n+3}}$ ;
3.  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{n \sin^2(n+1)}{n^3+1}$ ;
4.  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\sin^2 n+1}{n}$ ;
5.  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\cos^4 n}{(n+5)^2}$ ;
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\sin n+2)}{n^2+1}$ ;
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n+2}{(n+1)^2}$ ;
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\cos n+2}}{(n+3)^{\frac{3}{2}}}$ ;
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(\cos n+3)}{(n+2)^3}$ ;
10.  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\cos^2 n+2}{(n+1)^2}$ ;
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\sin n+2}}{(n+2)^{\frac{5}{2}}}$ ;
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n+5}{\sqrt{4n^2-1}}$ ;
13.  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\cos n+3}{n+1}$ ;
14.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\cos n+3}}{n+1}$ ;
15.  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\cos^4(n+1)}{n^2+3}$ ;
16.  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\cos^2 n+1}{n+2}$ ;
17.  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\sin^4(n+1)}{4}$ ;
18.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+1)+5}{\sqrt[3]{8n^3-1}}$ ;
19.  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\sin^3 n+4}{(n+1)^4}$ ;
20.  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\cos^4(n+2)}{n^2+1}$ ;
21.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-\sin n}{\sqrt{n+1}}$ ;
22.  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\cos^2(n+1)}{n^3}$ ;
23.  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\sin^2(n+2)}{n^2+3}$ ;
24.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\cos n}{\sqrt{4n^2-1}}$ ;
25.  $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\cos(n+1)+2}{\sqrt{n}}$ .

3. Исследовать ряд на сходимость с помощью второй теоремы сравнения.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^2-5n+6}$ ;
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n^2}{3n^4+7}$ ;
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+1}}$ ;
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{n^3+n+1}$ ;
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{2n^2-1+n}$ ;
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^3}{n^4+2n+5}$ ;
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{n^4+1}$ ;
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n+n^4-1}$ ;
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{n^3+3n^2+3n}$ ;
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$ ;
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n^2+1}$ ;
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3-n+2}$ ;
13.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{2n^2-1}$ ;
14.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{n^4+n+1}$ ;
15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{5n+n^4}$ ;
16.  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{n^2}$ ;
17.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{5^n}$ ;
18.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2n}{n^2+2n+1}$ ;
19.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{5^{n+3}}$ ;
20.  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{2n^2}$ ;
21.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+n}{n^2+20}$ ;
22.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+3n-1}{n^5+2n}$ ;
23.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+2n}{n^3+n+2}$ ;
24.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$ ;
25.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3n}{n^2+n-1}$ .

4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Даламбера.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ ;
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$ ;
15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$ ;
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ ;
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{n^2(n+3)}$ ;
16.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n}$ ;
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ;
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n}{(n+1)!}$ ;
17.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n}{n!}$ ;
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{4^n}$ ;
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n^2+1}$ ;
18.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)}$ ;
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$ ;
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ ;
19.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{n!}$ ;
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^n \cdot n^2}$ ;
13.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}$ ;
20.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}}$ ;
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{3^n}$ ;
14.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{3^n}$ ;
21.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$ ;
22.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n!}$ ;
23.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n n}$ ;
24.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n n^2}$ ;
25.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2^n} n}{(n+1)!}$ .



5. Исследовать ряд на сходимость с помощью радикального признака Коши.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+9}{2n+1}\right)^n$  ;
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \cdot \frac{1}{3^{n^2}}$  ;
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2^{n^2}}$  ;
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$  ;
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$  ;
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{2^n}$  ;
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$  ;
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n$  ;
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+5}\right)^n \cdot \frac{1}{5^n}$  ;
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{2n}$  ;
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$  ;
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n+1)^n}$  ;
13.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$  ;
14.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{n+1}$  ;
15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$  ;
16.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{5n}\right)^n$  ;
17.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+2}{2n^2-1}\right)^n$  ;
18.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^n \cdot \frac{1}{7^n}$  ;
19.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2-1}{3n^2+1}\right)^n$  ;
20.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{7n}\right)^n$  ;
21.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n}\right)^n$  ;
22.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$  ;
23.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)^n$  ;
24.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{2^n}$  ;
25.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{3^n}$  .

6. Исследовать ряд на сходимость с помощью интегрального признака Коши.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)\ln(n^2+1)}$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^4+2)\ln(n^4+2)}$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)\ln^2(n+1)}$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n^5+3)\ln^3(n^5+3)}$
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1)\ln(n^3+1)}$
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln(n+5)\ln^3(n+5)}$
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1)\sqrt{\ln(n^3+1)}}$
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)\ln^5(5n+1)}$
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(n^3+1)\ln(n^3+1)}$
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)\ln^3(3n+5)}$
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln(n+5)\ln\ln(n+5)}$
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\sqrt{\ln(2n+3)}}$
13.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln(n+5)\ln^2\ln(n+5)}$
14.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+9)\ln(\sqrt{n}+9)}$
15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln(3n+1)}$
16.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+10)\ln^2(\sqrt{n}+10)}$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^3(2n+3)}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+8)\ln^3(\sqrt{n}+8)}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-\frac{2}{3}}}{\left(\frac{1}{n^3}+8\right)\ln\left(\frac{1}{n^3}+8\right)}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)\sqrt{\ln(4n+1)}}$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-\frac{2}{3}}}{\left(\frac{1}{n^3}+7\right)\ln^2\left(\frac{1}{n^3}+7\right)}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+3)\ln^3(5n+3)}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-\frac{3}{4}}}{\left(\frac{1}{n^4}+9\right)\ln\left(\frac{1}{n^4}+9\right)}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^4+1)\ln^3(n^4+1)}$$

7. Исследовать ряд на сходимость по признаку Лейбница. Если ряд сходится, выяснить, сходится он абсолютно или условно.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)};$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n+1}};$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^4 - n^2 + 1};$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2};$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1};$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{3n^2};$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{n^2};$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)^3};$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{3n+5}};$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2n}}{\sqrt{n}};$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^4};$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\sqrt{n+2}};$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{2\sqrt{n}};$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}};$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3n+2}};$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}} \sin \frac{1}{\sqrt{n+2}};$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2};$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{n};$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)} \sin \frac{1}{\sqrt{n+3}};$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}};$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+4)^{3/4}};$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n(n+1)};$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{n}.$$

8. Вычислить сумму ряда с точностью  $\alpha$ .

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}, \alpha = 0,01;$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!n!}, \alpha = 0,00001;$$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \alpha = 0,01;$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{n(n+1)}}, \alpha = 0,001;$
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}, \alpha = 0,001;$
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^{n(2n+1)}}, \alpha = 0,001;$
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(2n+1)}, \alpha = 0,001;$
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}, \alpha = 0,01;$
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}, \alpha = 0,0001;$
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)^n}, \alpha = 0,001;$
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}, \alpha = 0,1;$
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^n}, \alpha = 0,001;$
13.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{3^n}, \alpha = 0,1;$
14.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}, \alpha = 0,01;$
15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, \alpha = 0,001;$
16.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4+1}, \alpha = 0,01;$
17.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{7^n}, \alpha = 0,0001;$
18.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+3)}, \alpha = 0,01;$
19.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n!}, \alpha = 0,01;$
20.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^3+1)^2}, \alpha = 0,001;$
21.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!2n}, \alpha = 0,00001;$
22.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2+n^3}, \alpha = 0,01;$
23.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}, \alpha = 0,001;$
24.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n^3+1)^2}, \alpha = 0,001;$
25.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n n!}, \alpha = 0,0001.$

9. Представить бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби.

1. 3,7(12);      2. 6,2(51);      3. 1,5(23);      4. 7,2(53);
5. 5,3(21);      6. 2,3(16);      7. 5,1(32);      8. 1,8(27);
9. 4,2(13);      10. 3,2(61);      11. 2,5(24);      12. 8,1(72);
13. 2,4(31);      14. 2,4(17);      15. 5,2(42);      16. 1,1(29);
17. 7,1(14);      18. 4,2(71);      19. 7,1(25);      20. 1,7(41);
21. 1,3(18);      22. 1,7(52);      23. 2,6(15);      24. 3,1(81);
25. 2,7(35).

10. Можно ли сделать вывод о сходимости ряда, и какой, если известно, что:

1. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sqrt{n} = 3$ ; г)  $|a_n| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ ; д)  $|a_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}$ ; е)  $a_n < \frac{1}{n^4}$ ; ж)  $|a_n| < \frac{1}{n^4}$ .

2. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sqrt[3]{n} = 3$ ; г)  $|a_n| < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ; д)  $|a_n| > \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ; е)  $a_n < \frac{1}{n^3}$ ; ж)  $|a_n| < \frac{1}{n^3}$ .

3. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^3 = 3$ ; г)  $|a_n| < \frac{1}{n^5}$ ; д)  $a_n > \frac{1}{n^5}$ ; е)  $a_n < \frac{1}{n^5}$ ; ж)  $|a_n| < \frac{1}{n^{1/5}}$ .

4. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{5}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^5 = 5$ ; г)  $|a_n| < \frac{1}{n^{1/4}}$ ; д)  $a_n > \frac{1}{n^{1/4}}$ ; е)  $a_n < \frac{1}{n^6}$ ; ж)  $|a_n| < \frac{1}{n^6}$ .

5. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{5}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{1/5} = 4$ ; г)  $|a_n| < \frac{1}{n^{3/4}}$ ; д)  $a_n > \frac{1}{n^{3/4}}$ ; е)  $a_n < \frac{1}{n^{4/3}}$ ; ж)  $|a_n| < \frac{1}{n^{4/3}}$ .

6. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{7}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^6 = 3$ ; г)  $|a_n| < \frac{1}{n^{3/5}}$ ; д)  $a_n > \frac{1}{n^{3/5}}$ ; е)  $a_n < \frac{1}{n^{5/3}}$ ; ж)  $|a_n| < \frac{1}{n^{5/3}}$ .

7. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{7}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^7 = 5$ ; г)  $|a_n| < \frac{1}{n^{4/7}}$ ; д)  $a_n > \frac{1}{n^{4/7}}$ ; е)  $a_n < \frac{1}{n^{5/2}}$ ; ж)  $|a_n| < \frac{1}{n^{5/2}}$ .

8. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{8}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{1/9} = 5$ ; г)  $|a_n| < \frac{1}{n^{5/7}}$ ; д)  $a_n > \frac{1}{n^{5/7}}$ ; е)  $a_n < \frac{1}{n^{8/7}}$ ; ж)  $|a_n| < \frac{1}{n^{8/7}}$ .

9. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{8}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^8 = 5$ ; г)  $|a_n| < \frac{1}{n^{5/8}}$ ; д)  $a_n > \frac{1}{n^{5/8}}$ ; е)  $a_n < \frac{1}{n^{8/5}}$ ; ж)  $|a_n| < \frac{1}{n^{8/5}}$ .

10. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{9}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{1/9} = 5$ ; г)  $|a_n| < \frac{1}{n^{5/9}}$ ; д)  $a_n > \frac{1}{n^{2/9}}$ ; е)  $a_n < \frac{1}{n^{9/5}}$ ; ж)  $|a_n| < \frac{1}{n^{3/5}}$ .

11. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{11}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{1/7} = 5$ ; г)  $|a_n| < \frac{1}{n^{1/11}}$ ; д)  $a_n > \frac{1}{n^{1/11}}$ ; е)  $a_n < \frac{1}{n^{11/5}}$ ; ж)  $|a_n| < \frac{1}{n^{3/2}}$ .

$$12. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{5}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{12} = 2; \text{ г) } |a_n| < \frac{1}{n^{2/11}}; \quad \text{д) } \\ a_n > \frac{1}{n^{2/11}}; \text{ е) } a_n < \frac{1}{n^{12/5}}; \text{ ж) } |a_n| < \frac{1}{n^{12/5}}.$$

$$13. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{7}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{6/7} = 5; \text{ г) } |a_n| < \frac{1}{n^{3/11}}; \quad \text{д) } \\ a_n > \frac{1}{n^{3/11}}; \text{ е) } a_n < \frac{1}{n^{13/5}}; \text{ ж) } |a_n| < \frac{1}{n^{13/5}}.$$

$$14. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{7}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{14} = 5; \text{ г) } |a_n| < \frac{1}{n^{4/11}}; \quad \text{д) } \\ a_n > \frac{1}{n^{4/11}}; \text{ е) } a_n < \frac{1}{n^{13/7}}; \text{ ж) } |a_n| < \frac{1}{n^{13/7}}.$$

$$15. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{15}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{15} = 3; \text{ г) } |a_n| < \frac{1}{n^{4/15}}; \quad \text{д) } \\ a_n > \frac{1}{n^{4/15}}; \text{ е) } a_n < \frac{1}{n^{15}}; \text{ ж) } |a_n| < \frac{1}{n^{15}}.$$

$$16. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{16}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{16} = 2; \text{ г) } |a_n| < \frac{1}{n^{4/16}}; \quad \text{д) } \\ a_n > \frac{1}{n^{4/16}}; \text{ е) } a_n < \frac{1}{n^{16}}; \text{ ж) } |a_n| < \frac{1}{n^{16}}.$$

$$17. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{17}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{1/7} = 2; \text{ г) } |a_n| < \frac{1}{n^{1/17}}; \\ \text{д) } a_n > \frac{1}{n^{1/17}}; \text{ е) } a_n < \frac{1}{n^{17}}; \text{ ж) } |a_n| < \frac{1}{n^{17}}.$$

$$18. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{9}{19}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{19} = 2; \text{ г) } |a_n| < \frac{1}{n^{1/19}}; \quad \text{д) } \\ a_n > \frac{1}{n^{1/19}}; \text{ е) } a_n < \frac{1}{n^{18}}; \text{ ж) } |a_n| < \frac{1}{n^{19}}.$$

$$19. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{18}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{18} = 2; \text{ г) } |a_n| < \frac{1}{n^{1/18}}; \quad \text{д) } \\ a_n > \frac{1}{n^{1/18}}; \text{ е) } a_n < \frac{1}{n^{18}}; \text{ ж) } |a_n| < \frac{1}{n^{18}}.$$

$$20. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{20}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{5/8} = 2; \text{ г) } |a_n| < \frac{1}{n^{5/8}}; \quad \text{д) } \\ a_n > \frac{1}{n^{5/8}}; \text{ е) } a_n < \frac{1}{n^{20}}; \text{ ж) } |a_n| < \frac{1}{n^{20}}.$$

$$21. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{21}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{21} = 2; \text{ г) } |a_n| < \frac{1}{n^{5/7}}; \quad \text{д) } \\ a_n > \frac{1}{n^{5/7}}; \text{ е) } a_n < \frac{1}{n^{21}}; \text{ ж) } |a_n| < \frac{1}{n^{21}}.$$

$$22. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{22}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{22} = 7; \text{ г) } |a_n| < \frac{1}{n^{6/7}}; \quad \text{д) } \\ a_n > \frac{1}{n^{6/7}}; \text{ е) } a_n < \frac{1}{n^{22}}; \text{ ж) } |a_n| < \frac{1}{n^{22}}.$$

23. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{23}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{23} = 2$ ; г)  $|a_n| < \frac{1}{n^{5/8}}$ ; д)  $a_n > \frac{1}{n^{5/8}}$ ; е)  $a_n < \frac{1}{n^{23}}$ ; ж)  $|a_n| < \frac{1}{n^{23}}$ .

24. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{24}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{24} = 2$ ; г)  $|a_n| < \frac{1}{n^{5/9}}$ ; д)  $a_n > \frac{1}{n^{5/9}}$ ; е)  $a_n < \frac{1}{n^{24}}$ ; ж)  $|a_n| < \frac{1}{n^{24}}$ .

25. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{25}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{25} = 4$ ; г)  $|a_n| < \frac{1}{n^{8/9}}$ ; д)  $a_n > \frac{1}{n^{8/9}}$ ; е)  $a_n < \frac{1}{n^{25}}$ ; ж)  $|a_n| < \frac{1}{n^{25}}$ .

### Список литературы.

1. *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа: часть 2 / Г. М. Фихтенгольц. – Изд. «Лань», 2008, 464с.

2. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике: часть 2 / Д. Т. Письменный. – Изд. «Айрис-пресс», 2014, 252с.

**Мкртычян Павел Зорикович, Перфилова Ирина Сергеевна**

**МАТЕМАТИКА  
ТЕОРИЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ  
Учебно-методическое пособие  
по выполнению самостоятельной работы**