ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»

С. А. Владимиров

ОПТИМИЗАЦИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Лабораторный практикум

СПб ГУТ)))

Санкт-Петербург
2018

УДК XXX.XXX.X (XXX)
ББК XX.XX xXX
В 57

Рецензенты
— —

*Утверждено редакционно-издательским советом СПбГУТ
в качестве учебного пособия*

Владимиров, С. А.

В 57 Оптимизация и математические методы принятия решений : лабораторный практикум / С. А. Владимиров ; СПбГУТ. — СПб, 2018. — 63 с.

Учебное пособие призвано ознакомить учащихся с основами теории принятия решений, включая методы оптимизации и математические методы принятия решений. Представленный материал служит справочным и методическим пособием при выполнении курса лабораторных работ по дисциплинам «Теория принятия решений» и «Оптимизация и математические методы принятия решений».

Предназначено для студентов-бакалавров, обучающихся по направлениям 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

УДК XXX.XXX.X (XXX)
ББК XX.XX xXX

Содержание

Лабораторная работа 1
Ознакомление с системой численных вычислений Octave

1.1. Цель работы

Ознакомиться с общими принципами работы в системе компьютерной алгебры Octave.

1.2. Рекомендуемая литература

1. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова «Введение в Octave для инженеров и математиков» М. : ALT Linux, 2012. — 368 с.
2. Documentation // Octave-Forge.
URL: http://octave.sourceforge.net/docs.html

1.3. Теоретическая справка

Справка написана для ОС Debian Linux, использующейся в лабораториях кафедры, с учётом используемого интерфейса пользователя.

1.3.1. Запуск системы Octave в терминале

Программа Octave запускается в терминале. Для вызова терминала используется пункт главного меню «Терминал».

Команда для вызова Octave

```
user@host:[~]$ octave-cli -q
```

Флаг `-q`, указываемый после имени команды, говорит программе Octave не выводить приветствие и сразу переходить в командный режим.

В этом режиме пользователь должен последовательно вводить команды с клавиатуры, отправляя их на выполнение нажатием клавиши «Enter».

Также можно записать программу–скрипт на языке программирования Octave и передать файл с ней в качестве параметра при запуске программы. В этом случае Octave выполнит все команды из скрипта и завершит работу.

```
user@host:[~]$ octave-cli -q program.m
```

Для Octave, как и для системы Matlab, скрипт должен иметь расширение `*.m`.

1.3.2. Запуск системы Octave в графическом режиме

Для запуска системы Octave в графическом режиме необходимо использовать соответствующий пункт главного меню.

Также ее можно запустить через терминал командой

```
user@host:[~]$ octave &
```

Окно терминала после этого закрывать нельзя.

В системе Linux рабочим каталогом графической версии Octave по умолчанию является домашний каталог пользователя (на лабораторных компьютерах это каталог `/home/student`). Сменить рабочий каталог можно в «Диспетчере файлов» (обычно левый верхний угол окна программы).

Основная рабочая область окна Octave имеет три вкладки. Первая вкладка «Командное окно» предназначена для ввода команд и вывода результатов их выполнения. Также сюда выводится результат выполнения скриптов, написанных/открытых в «Редакторе».

Вторая вкладка «Редактор» предназначена для работы со скриптами. Написанный/открытый в редакторе скрипт должен располагаться в рабочем каталоге Octave (см. «Диспетчер файлов»). Для запуска скрипта на выполнение используется кнопка меню редактора «Сохранить файл и запустить» (желтая стрелка в шестеренке).

Третья вкладка предназначена для документации. На рабочих компьютерах лаборатории эта документация может отсутствовать.

1.3.3. Функции Octave

Функции Octave имеют вид

```
> function(par1, par2, ...);
```

Если функция завершается символом «;», то результат работы функции не будет выводиться на экран. В противном случае результат будет выведен.

Функции можно передавать как параметры

```
> func1(func2(par1))
```

В этом случае результат вычисления функции `func2(par1)` передаётся в функцию `func1()` в качестве параметра. Поскольку точки-с-запятой в конце нет, результат вычислений будет выведен на экран.

Справку по функции Octave можно получить, введя команду

```
> help function-name
```

1.3.4. Перевод из двоичной системы в десятичную

Для перевода из одной системы в другую используются функции `de2bi()` и `bi2de`.

Octave по умолчанию использует обратную запись двоичных чисел от старшей степени к младшей.

Пример ввода двоичного числа 110001_2.

```
> a=[1 0 0 0 1 1]
```

1.3.5. Ввод матриц и полиномов

Ввод матриц и полиномов рассмотрим на примере.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 12 & 6 \\ 7 & -4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

вводится как

```
> A=[1 3 5 -3 ; 3 5 12 6 ; 7 -4 -8 2]
A =

    1    3    5   -3
    3    5   12    6
    7   -4   -8    2
```

Полином

$$f(x) = 2 + 4x + 5x^2 + 3x^4 + 2x^6$$

записывается вектор-строкой коэффициентов, начиная со старшей степени

```
> f=[2 0 3 0 5 4 2]
f =

   2   0   3   0   5   4   2
```

Обратите внимание: коэффициенты при x^5 и x^3 равны 0.

Двоичный полином

$$f(x) = x^4 + x + 1$$

записывается как вектор-строка коэффициентов над простым конечным полем по основанию 2

```
> f=gf([1 0 0 1 1],1,3)
f =
GF(2) array.

Array elements =

   1   0   0   1   1
```

В данной записи функция `gf([A],1,3)` предназначена для перевода матрицы/вектора `A` в конечное поле степени 2^1, образованное полиномом $x+1$ (в системе Octave обозначается 3).

1.3.6. Операции с матрицами и полиномами

Операции с матрицами указываются как обычно. Для операции транспонирования используется унарная операция «’».

```
> A'
ans =

    1    3    7
    3    5   -4
    5   12   -8
   -3    6    2
```

Для вычисления обратной матрицы используется операция возведения в степень -1. Обратную матрицу можно вычислить только для квадратной матрицы.

```
> A^(-1)
```

Поскольку полиномы складываются как вектор-строки коэффициентов, то для сложения их необходимо привести к одной длине (по размеру большей строки), добавив нули в начало меньшего вектора.

Для умножения полиномов используется операция *свертки* `conv`, а для деления обратная ей операция `deconv`. В случае операций умножения и деления начальных нулей в векторе быть не должно. (Примеры приведены для двоичных полиномов.)

$$\begin{aligned} &a(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1,\\ &b(x) = x^2 + 1. \end{aligned}$$

Их произведение

$$a(x) \cdot b(x) = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x + 1.$$

Их частное и остаток от деления

$$\frac{x^5 + x^4 + x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = (x^3 + x^2 + 1) + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

В Octave

```
> a=gf([1 1 1 0 1 1],1,3);
> b=gf([1 0 1],1,3);
> conv(a,b)
ans =
GF(2) array.

Array elements =
```

```
   1    1    0    1    0    1    1    1

> [c,r]=deconv(a,b)
c =
GF(2) array.

Array elements =

   1    1    0    1

r =
GF(2) array.

Array elements =

   0    0    0    0    1    0
```

В случае функции деления `deconv`, частное записывается в переменную `c`, а остаток в переменную `r`.

1.4. Порядок выполнения задания

Задание выполняется каждым учащимся индивидуально.

Отчёт сдается преподавателю в печатном виде.

1.4.1.

Перевести десятичное число в двоичную систему счисления и совершить обратное преобразование. Число задано в табл. 1.1. Вариант выбирается по последним двум цифрам номера студенческого билета (зачетной книжки).

Таблица 1.1

Задание для перевода числа из десятичной системы счисления в двоичную

Предпосл. цифра номера	**Последняя цифра номера студ. билета**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
1	2217	2944	2819	2289	2489	2843	2121	2851	2665	2983
2	2226	2525	2617	2713	2166	2675	2113	2138	2301	2318
3	2232	2262	2100	2619	2528	2572	2697	2672	2535	2724
4	2587	2883	2453	2305	2621	2525	2591	2158	2587	2657
5	2980	2987	2525	2180	2467	2415	2203	2866	2907	2617
6	2929	2240	2142	2809	2129	2412	2201	2853	2608	2542
7	2738	2380	2228	2570	2962	2489	2773	2526	2186	2345
8	2446	2464	2482	2826	2672	2930	2322	2611	2785	2101
9	2496	2676	2909	2687	2990	2474	2850	2312	2619	2999
0	2589	2541	2632	2857	2628	2652	2551	2937	2201	2550

1.4.2.

Для заданных матриц A и B осуществить следующие операции.

1. Поэлементное сложение матриц.
2. Транспонирование матрицы B.
3. Умножение матрицы A на транспонированную матрицу B. Результат должен быть записан в матрицу C.
4. Обратную матрицу для C.

Матрица A выбирается из табл. 1.2 по предпоследней цифре номера студенческого билета (зачетной книжки). Матрица B выбирается из табл. 1.3 по последней цифре номера студенческого билета (зачетной книжки).

Таблица 1.2

Матрица A. Выбирается по предпоследней цифре номера студ. билета

Цифра номера	Матрица	Цифра номера	Матрица
1	$\begin{bmatrix} 9 & 19 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 19 & 19 \\ 9 & 5 & 16 & 7 \end{bmatrix}$	**6**	$\begin{bmatrix} 10 & 6 & 19 & 16 \\ 7 & 8 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 11 & 19 & 14 & 17 \\ 14 & 5 & 10 & 5 \\ 1 & 14 & 4 & 17 \end{bmatrix}$	**7**	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 12 & 5 \\ 9 & 19 & 4 & 8 \\ 12 & 4 & 20 & 4 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 4 & 20 & 13 & 6 \\ 7 & 18 & 12 & 16 \\ 9 & 10 & 10 & 8 \end{bmatrix}$	**8**	$\begin{bmatrix} 17 & 13 & 20 & 14 \\ 5 & 8 & 10 & 6 \\ 7 & 4 & 13 & 14 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 18 & 17 & 6 & 20 \\ 19 & 8 & 20 & 1 \\ 18 & 13 & 4 & 13 \end{bmatrix}$	**9**	$\begin{bmatrix} 6 & 12 & 13 & 15 \\ 11 & 7 & 9 & 9 \\ 9 & 16 & 11 & 9 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 3 & 12 & 17 & 15 \\ 7 & 9 & 20 & 11 \\ 10 & 14 & 16 & 9 \end{bmatrix}$	**0**	$\begin{bmatrix} 15 & 6 & 16 & 11 \\ 8 & 4 & 9 & 5 \\ 8 & 9 & 12 & 17 \end{bmatrix}$

Таблица 1.3

Матрица B. Выбирается по последней цифре номера студ. билета

Цифра номера	Матрица	Цифра номера	Матрица
1	$\begin{bmatrix} 1 & 18 & 6 & 20 \\ 13 & 17 & 6 & 16 \\ 17 & 7 & 14 & 15 \end{bmatrix}$	**6**	$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 10 & 16 \\ 16 & 9 & 1 & 16 \\ 5 & 12 & 15 & 12 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 14 & 14 & 15 & 15 \\ 10 & 16 & 8 & 16 \\ 3 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$	**7**	$\begin{bmatrix} 10 & 15 & 17 & 7 \\ 2 & 19 & 4 & 20 \\ 15 & 11 & 16 & 11 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 14 & 10 & 16 & 9 \\ 14 & 3 & 20 & 10 \\ 6 & 20 & 13 & 9 \end{bmatrix}$	**8**	$\begin{bmatrix} 7 & 12 & 1 & 4 \\ 2 & 12 & 18 & 5 \\ 2 & 18 & 15 & 6 \end{bmatrix}$

Продолжение табл. 1.3

Матрица B. Выбирается по последней цифре номера студ. билета

Цифра номера	Матрица	Цифра номера	Матрица
4	$\begin{bmatrix} 2 & 19 & 7 & 10 \\ 15 & 12 & 20 & 10 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	**9**	$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 3 & 7 \\ 19 & 12 & 7 & 16 \\ 13 & 16 & 6 & 11 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 17 & 16 & 10 & 7 \\ 4 & 18 & 12 & 18 \\ 12 & 20 & 11 & 12 \end{bmatrix}$	**0**	$\begin{bmatrix} 19 & 2 & 7 & 13 \\ 12 & 2 & 18 & 8 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

1.4.3.

Для заданных полиномов $a(x)$ и $b(x)$ осуществить следующие операции.

1. Сложить полиномы.
2. Перемножить полиномы.
3. Разделить полином $a(x)$ на полином $b(x)$.
4. Преобразовать полиномы $a(x)$ и $b(x)$ в двоичные полиномы.
5. Сложить двоичные полиномы.
6. Перемножить двоичные полиномы.
7. Разделить двоичный полином $a(x)$ на двоичный полином $b(x)$.

Полиномы $a(x)$ и $b(x)$ выбираются из табл. 1.4. Полином $a(x)$ по предпоследней цифре номера студенческого билета (зачетной книжки). Полином $b(x)$ по последней цифре номера студенческого билета (зачетной книжки).

Таблица 1.4

Полиномы $a(x)$ и $b(x)$

Предп. цифра	**Полином** $a(x)$	**Посл. цифра**	**Полином** $b(x)$
1	x^6+x^2+x+1	**1**	x^3+x^2+1
2	$x^7+x^4+x^2$	**2**	x^3+x+1
3	$x^6+x^5+x^3+1$	**3**	x^2+x+1
4	$x^7+x^3+x^2+1$	**4**	x^3+x^2
5	$x^6+x^4+x^2+x$	**5**	x^2+x
6	x^7+x^6+x+1	**6**	x^3+x
7	$x^6+x^3+x^2+1$	**7**	x^2+1
8	$x^7+x^5+x^4+x$	**8**	x^3+1
9	$x^6+x^4+x^3+1$	**9**	x^4+x^2+1
0	x^7+x^6+x+1	**0**	x^4+x+1

1.5. Порядок защиты лабораторной работы

Защита работы может осуществляться одним из нижеперечисленных способов или их сочетанием на усмотрение преподавателя.

1. Устный ответ по теме работы.
2. Тестирование по теме работы
3. Задача по теме работы.
4. Иные варианты на усмотрение преподавателя.

Лабораторная работа 2
Построение графиков в Octave

2.1. Цель работы

Ознакомиться с общими принципами построения графиков в системе компьютерной алгебры Octave. Получить навыки по использованию сценариев в графическом интерфейсе Octave.

2.2. Рекомендуемая литература

1. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова «Введение в Octave для инженеров и математиков» М. : ALT Linux, 2012. — 368 с.

2. Documentation // Octave-Forge.
URL: http://octave.sourceforge.net/docs.html

3. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова «Введение в Octave» // НОУ ИНТУИТ. URL: http://www.intuit.ru/studies/courses/3677/919/info

2.3. Теоретическая справка

Справка написана для ОС Debian Linux, использующейся в лабораториях кафедры, с учётом используемого интерфейса пользователя.

2.3.1. Служебные функции очистки

При написании скриптов Octave в ряде случаев удобно использовать функции очистки. К таким функция относятся

- `clc;` — очистка командного окна;
- `clear all;` — очистка области переменных и имен пользовательских функций;
- `close all;` — закрытие ранее открытых окон графика.

2.3.2. Построение двумерного графика функции

Для построения двумерного графика функции $f(x)$ используется функция

```
plot(x,y)
```

где x — массив координат по оси абсцисс, а y — массив значений функции (координаты по оси ординат).

При необходимости построения нескольких графиков на одной координатной сетке в функцию `plot` можно передать сразу несколько функций:

```
plot(x1,y1,x2,y2, ...)
```

Также в функцию `plot` можно передавать параметры, определяющие вид кривой графика функции. Например, для отрисовки первого графика красной линией, а второго — синими точками, необходимо использовать функцию

```
plot(x1,y1,"r",x2,y2,"b.", ...)
```

2.3.3. Построение трехмерного графика поверхности функции

Для построения трехмерного графика поверхности функции $f(x,y)$ используется функция

```
surf(x,y,z)
```

где x и y — массивы переменных, а z — массив значений функции.

Перед построением графика поверхности необходимо задать прямоугольную сетку координат из связанных между собой массивов x и y. Для этого необходимо использовать функцию

```
meshgrid(X array, Y array)
```

Например, чтобы задать диапазон x от -3 до 3 с шагом 0,2, а y от 0 до 5 с шагом 0,2 необходимо использовтаь функцию

```
[x y]= meshgrid(-3:0.2:3, 0:0.2:5);
```

2.3.4. Способы задания массивов данных

Основной способ задания массива данных:

```
x=b:s:e
```

где b и e — начальной и конечное значения, а s — шаг изменения. Например, для того чтобы задать массив значений x от 12 до 23 с шагом 0,25 необходимо использовать функцию

```
x=12:0.25:23
```

Также существует функция `linspace`, которая создает вектор равномерных интервалов (иногда также называемый вектором «линейно распределенных значений»).

Общий вид функции:

```
linspace(b,e,c)
```

где b и e — начальной и конечное значения, а c — количество точек между b и e. Например, для того чтобы задать массив значений x из 200 точек от 0 до 3π необходимо использовать функцию

```
x=linspace(0,3*pi,200)
```

2.3.5. Подписи осей

Для создания подписей осей координат используются функции

```
xlabel("x");
ylabel("y");
zlabel("z");
```

Эти функции необходимо размещать после функции `plot`.

2.3.6. Название графика

Для вывода названия графика используется функция

```
title("Name of the plot");
```

Эту функцию необходимо размещать после функции `plot`.

2.3.7. Легенда графика

Для вывода легенды используется функция

```
legend("Legend 1","Legend 2", ..., m);
```

Параметр m определяет месторасположение легенды в графическом окне: 1 — в правом верхнем углу графика (значение по умолчанию); 2 — в левом верхнем углу графика; 3 — в левом нижнем углу графика; 4 — в правом нижнем углу графика.

Эту функцию необходимо размещать после функции `plot`.

2.3.8. Размещение надписи (метки)

Для размещения на графике произвольной надписи в заданных координатах используется функция

```
text(x,y,"Text of the label");
```

где x и y — координаты по соответствующим осям, левее которых будет выведена надпись.

Эту функцию необходимо размещать после функции `plot`.

2.3.9. Размещение нескольких графиков в одном окне

Для размещения нескольких графиков в одном окне перед каждой функцией `plot` используется функция

```
subplot(Number of rows,Num of columns,Position)
```

где «Number of rows» и «Num of columns» указывают число строк и столбцов на которые делится окно графика, а «Position» — расположение текущего графика.

Например, для размещения в окне шести графиков — два по горизонтали, три по вертикали — используется функция

```
subplot(3,2,Position)
```

«Position» может принимать значения от 1 до 6. Отсчет идет с левого верхнего графика обычным способом — слева-направо, сверху-вниз.

2.3.10. Ограничение графика по осям

Для ограничения графика по оси абсцисс используется функция

```
xlim([X1, X2]);
```

где $X1$ и $X2$ — нижняя и верняя границы диапазона.

Для ограничения графика по оси ординат используется функция

```
ylim([Y1, Y2]);
```

где $Y1$ и $Y2$ — нижняя и верняя границы диапазона.

Эти функции необходимо размещать после функции `plot`.

2.3.11. Вывод сетки

Для вывода сетки с заданными диапазоном и шагом используется функция

```
set(gca,'XTick',X1:Xs:X2)
set(gca,'YTick',Y1:Ys:Y2)
grid
```

где $X1$ и $X2$ — нижняя и верняя границы диапазона по оси абсцисс, а Xs — шаг сетки. Для оси ординат аналогично.

Эту функцию необходимо размещать после функции `plot`.

2.4. Порядок выполнения задания

Задание выполняется каждым учащимся индивидуально. По результатам работы необходимо сформировать отчет, в котором отразить цель работы, последовательность выполненных действий, в качестве которых должны фигурировать написанные сценарии Octave с поясняющими комментариями, а также результаты выполнения работы — графики функций.

Отчёт сдается преподавателю в электронном виде.

2.4.1. Построение графика функции

1. Запустить систему Octave в графическом режиме. Перейти на вкладку «Редактор».
2. Сохранить создаваемый сценарий в домашнем каталоге. Имя файла должно быть записано латиницей без пробелов.
3. Построить график функции

$$f(x) = sin(x) + a_1 sin(\omega_1 x) + a_2 sin(\omega_2 x)$$

для параметров, заданных в табл. 2.1 и диапазона x от -10 до 10 с шагом 0,1. График построить красной сплошной линией.

4. Задать подписи осей абсцисс («x») и ординат («f(x)»). Задать название графика — номер группы, ФИО студентов, вариант, номер задания.
5. Разместить на графике надпись (метку) с формулой построенной функции.
6. Изменить график так, чтобы на нем в дополнение к функции $f(x)$ отображалась функция

$$f_2(x) = cos(x) + a_1 cos(\omega_1 x) + a_2 cos(\omega_2 x)$$

, вычисленная для тех же исходных параметров и в том же диапазоне x. Цвет нового графика — синий.

7. Добавить на график легенду.

Таблица 2.1

Варианты задания (указаны согласно номеру студента в журнале)

№ вар.	a_1	a_2	ω_1	ω_2	x_1	x_2
1	0.5	0.6	2	3	1530	1570
2	0.25	0.7	3	3	1500	1540
3	0.15	0.8	4	4	1510	1550
4	0.2	0.5	5	4	1520	1560
5	0.3	0.4	6	5	1530	1575
6	0.4	0.3	2	5	1540	1580
7	0.6	0.2	3	2	1550	1590
8	0.7	0.25	4	2	1560	1600
9	0.8	0.15	5	3	1570	1610
10	0.2	0.7	6	3	1490	1530
11	0.3	0.8	7	4	1505	1545
12	0.4	0.6	3	4	1515	1555
13	0.5	0.5	4	5	1525	1565
14	0.33	0.4	5	5	1535	1575
15	0.6	0.3	6	3	1545	1585
16	0.3	0.2	2	3	1555	1595

Продолжение табл. 2.1

Варианты задания (указаны согласно номеру студента в журнале)

№ вар.	a_1	a_2	ω_1	ω_2	x_1	x_2
17	0.25	0.4	3	4	1565	1605
18	0.15	0.5	4	4	1575	1615
19	0.35	0.6	5	2	1485	1625
20	0.45	0.7	6	2	1495	1635
21	0.55	0.8	7	3	1500	1545
22	0.5	0.45	4	3	1510	1555
23	0.3	0.15	5	4	1520	1565
24	0.6	0.25	2	4	1530	1575
25	0.7	0.35	3	5	1540	1585
26	0.2	0.45	4	5	1550	1595
27	0.4	0.55	5	2	1560	1605
28	0.3	0.65	6	2	1570	1615
29	0.2	0.5	2	3	1535	1580
30	0.25	0.6	4	3	1565	1615

2.4.2. Построение нескольких графиков по данным из файла

1. Создать и сохранить новый сценарий.
2. Скачать с сайта файл «lb02ex.csv» с точками данных.
3. Считать содержимое файла в массив. Для этого необходимо использовать функцию

```
f = dlmread('lb02ex.csv',';',"A19500:B21100");
```

Здесь «lb02ex.csv» — имя файла с данными, «;» — разделитель колонок данных, «A19500:B21100» — диапазон данных, считываемых из файла, где буквами обозначаются столбцы, а цифрами — строки. При этом формируется массив данных f соответствующего размера.

4. Построить два графика один над другим.
5. В качестве первого (верхнего) графика взять весь считанный из файла диапазон. Воспользоваться функцией

```
plot(f(:,1),f(:,2))
```

6. Ниже изобразить график, ограниченный диапазоном x_1–x_2 (табл. 2.1).
7. На графике 2 вывести сетку с шагом 5 по оси абсцисс и шагом по оси ординат на выбор студента.
8. Для каждого графика задать подписи осей, название и легенду.

2.4.3. Построение трехмерного графика поверхности функции

1. Создать и сохранить новый сценарий.

2. Построить график поверхности функции

$$f(x,y) = \sqrt{a_1(sin(\omega_1 x))^2 + a_2(cos(\omega_2 y))^2}$$

для параметров, заданных в табл. 2.1 и диапазона x от -2 до 2 с шагом 0,05, а y от 0 до 4 с шагом 0,05. Для вычисления квадратного корня используется функция

```
sqrt(x);
```

Для возведения в степень необходимо использовать оператор поэлементного возведения в степень

```
.^
```

3. Задать подписи осей и название.

2.5. Порядок защиты лабораторной работы

Защита работы может осуществляться одним из нижеперечисленных способов или их сочетанием на усмотрение преподавателя.

1. Устный ответ по теме работы.
2. Тестирование по теме работы
3. Задача по теме работы.
4. Иные варианты на усмотрение преподавателя.

Лабораторная работа 3
Нахождение целевой функции и оптимального решения симплекс-методом с использованием пакета Octave. Решение двойственной задачи

3.1. Цель работы

Научиться применять симплекс метод для решения задач нахождения оптимального плана, целевой функции и двойственной задачи с использованием современных методов программирования пакета Octave.

3.2. Рекомендуемая литература

1. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова «Введение в Octave для инженеров и математиков» М. : ALT Linux, 2012. — 368 с.
2. Documentation // Octave-Forge. URL: http://octave.sourceforge.net/docs.html
3. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова «Введение в Octave» // НОУ ИНТУ-ИТ. URL: http://www.intuit.ru/studies/courses/3677/919/info
4. Лекции по дисциплине

3.3. Теоретическая справка

3.3.1. Задача о планировании производства

Для выпуска двух типов продукции используется три вида сырья. Производственные коэффициенты (количество сырья, требующееся для производства единицы продукции), объёмы запасов и рыночные цены на продукции приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Исходные данные задачи планирования производства

Продукция	Сырьё			Цена
A	7	6	1	2
B	3	9	5	1
Объём запасов	60	80	35	

Требуется, предполагая ненасыщенность рынка, составить такой план производства $x = (x_1, x_2)$, при котором выручка от продаж будет максимальна.

Определить, как изменится решение в предположении, что x может иметь только целочисленные значения?

Формальная постановка задачи

$$2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 & \leqslant 60 \\ 6x_1 + 9x_2 & \leqslant 80 \\ x_1 + 5x_2 & \leqslant 35 \\ x_1, x_2 > 0 \end{cases}$$

3.3.2. Двойственная задача в линейном программировании

Таблица 3.2

Двойственная задача в линейном программировании

Первая задача	Определения	Вторая задача
Прямая или исходная	Задача	Двойственная
Максимизировать $W(x_j)$	Целевая функция	Минимизировать $P(y_i)$
$W_{\max} = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\Longleftrightarrow$	$P_{\min} = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i$
Все $x_j \geqslant 0$	Ограничения	Все $y_i \geqslant 0$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \ (i = \overline{1,m})$	$\Longleftrightarrow$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \geqslant c_j \ (j = \overline{1,n})$
i-строки, j-столбцы	$A = [a_{ij}]_{m\times n} \Longleftrightarrow [a_{ji}]_{n\times m} = A^T$	j-строки, i-столбцы
Пример		
$x_1 + 3x_2 \leq 90$	Ограничения	$y_1 + 10y_2 \geq 1$
$10x_1 + 7x_2 \leq 440$		$3y_1 + 7y_2 \geq 1$
$x_j \geq 0, (j = \overline{1,n})$		$y_i \geq 0, (i = \overline{1,m})$
$\max W = x_1 + x_2$	Целевая функция	$\min P = 90y_1 + 440y_2$

1. Если прямая задача является задачей максимизации, то двойственная будет задачей минимизации.

2. Коэффициенты целевой функции c_1, c_2, …, c_n прямой задачи становятся свободными членами системы ограничений двойственной задачи (или значениями функции ограничения).

3. Свободные члены b_1, b_2, …, b_m ограничений прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи.

4. Матрицу ограничений $(a_{ji})_{n\times m}$ двойственной задачи получают транспонированием матрицы ограничений прямой задачи.

5. Знаки неравенств в ограничениях изменяются на обратные.

6. Число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной задачи, а число ограничений двойственной задачи равно числу пе-

ременных прямой задачи. В случае когда исходная задача будет общего вида, добавляется следующий пункт.

7. Каждому i-му ограничению–неравенству исходной задачи соответствует в двойственной задаче условие неотрицательности $(y_i \geq 0)$, а равенству — переменная y_i без ограничений на знак (произвольная).
Наоборот, неотрицательной переменной $(x_k \geq 0)$ соответствует в двойственной задаче k-е ограничение–неравенство, а произвольной переменной — равенство.

Рассмотренные связи между прямой и двойственной задачами лучше видны при их экономической интерпретации.

Прямая задача. Сколько и какой продукции $x_j (j = \overline{1,n})$ необходимо произвести, чтобы при заданных стоимостях $c_j (j = \overline{1,n})$ единицы продукции и размерах имеющихся ресурсов $b_i (i = \overline{1,m})$ максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении?

Двойственная задача. Какова должна быть цена единицы каждого из ресурсов $y_i (i = \overline{1,m})$, чтобы при заданном количестве ресурсов $b_i (i = \overline{1,m})$ и величине стоимости единицы продукции $c_j (j = \overline{1,n})$ минимизировать общую стоимость затрат.

Переменные $y_i (i = \overline{1,m})$ называются оценками или учетными (теневыми) ценами.

3.3.3. Задача линейного программирования с ограничениями-равенстами

Пример

1. Требуется решить задачу

$$f \equiv c^{\mathrm{T}} x \to \max, \quad Ax = b, \quad 0 \leqslant x \leqslant u,$$

где

$$c = \begin{pmatrix} -3 \\ -20 \\ 13 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 5/2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Построить и так же решить двойственную задачу.

3.3.4. Функция glpk

Для решения задач линейного программирования (в том числе, целочисленного и смешанного линейного программирования) в Octave служит функция `glpk`. При вызове с тремя параметрами `glpk(c, A, b)` решает задачу

$$\begin{aligned}&c^{\mathrm{T}}x \to \min\\&Ax = b\\&x \geqslant 0\end{aligned}$$

Формат функции `glpk` (пишется в одну строку):

```
[xopt,fopt,errnum,extra]=glpk(c,A,b,lb,ub,ctype,
   vartype,sense,param)
```

Передача функции дополнительных параметров позволяет решать задачи с нестрогими ограничениями, устанавливать тип искомого экстремума (минимум или максимум).

Полный перечень параметров функции

- `c` — вектор-столбец коэффициентов целевой функции.
- `A` — матрица с коэффициентами ограничений.
- `b` — вектор-столбец со значениями свободных членов.
- `lb` — вектор-столбец с нижними границами для каждой переменной (по умолчанию, 0).
- `ub` — вектор-столбец с верхними границами для каждой переменной (если нет, то переменные считаются не ограниченными сверху).
- `ctype` — массив символов с типами ограничений. Элементы массива интерпретируются следующим образом:
  - `F` — свободное ограничение (ограничение будет проигнорировано при решении задачи);
  - `U` — ограничение сверху (если этот символ стоит в позиции i параметра `ctype`, $A(i,:)$ обозначает i строку матрицы с коэффициентами ограничений A, а $b(i)$ обозначает i элемент вектора b, то для допустимого решения должно выполняться условие $A(i,:)\cdot x \leqslant b(i)$);
  - `S` — равенство ($A(i,:)\cdot x = b(i)$);
  - `L` — ограничение снизу ($A(i,:)\cdot x \geqslant b(i)$);
  - `D` — двухстороннее ограничение: $A(i,:)\cdot x \geqslant -b(i)$ и $A(i,:)\cdot x \leqslant b(i)$.
- `vartype` — строка с типами переменных:
  - `C` — непрерывная переменная;
  - `I` — дискретная переменная.
- `sense` — если параметр `sense` принимает значение 1 (по умолчанию), то решается задача минимизации, а если -1, то задача максимизации.

- `param` — позволяет в определенных рамках настроить то, как именно должна быть решена задача: какой использовать метод, применять ли масштабирование переменных, сколько итераций симплекс-метода проделать и т. п. Подробную информацию о возможных настройках можно получить, введя `help glpk` в командной строке Octave.

Результаты, возвращаемые функцией

- `xopt` — значения переменных, соответствующие оптимальному значению целевой функции (в смысле, управляемом параметром `sense`).
- `fopt` — оптимальное значение целевой функции.
- `errnum` — код ошибки. Некоторые, наиболее часто встречающиеся коды ошибок:
  - 0 — нет ошибки, найдено решение (дополнительные характеристики найденного решения содержатся в поле `extra.status`);
  - 2 — матрица коэффициентов ограничений вырождена;
  - 10 — (прямая) задача не имеет допустимых решений;
  - 11 — двойственная задача не имеет допустимых решений (следовательно, в прямой задаче функция неограниченно возрастает или убывает, в зависимости от направления оптимизации);
  - 15 — ни прямая, ни двойственная задачи не имеют допустимых решений.
- `extra` — структура данных, позволяющая получить дополнительную информацию о решении. Структура содержит следующие поля:
  - `lambda` — теневые цены (значения двойственных переменных).
  - `redcosts` — приведенные цены.
  - `time` — время (в секундах), затраченное на решение задачи.
  - `status` — статус решения задачи (содержащегося в `xopt` и `fopt`):
    * 1 — решение не определено;
    * 2 — допустимое решение;
    * 3 — недопустимое решение;
    * 4 — задача не имеет допустимых решений;
    * 5 — оптимальное решение;
    * 6 — задача не имеет конечного решения.

3.3.5. Пример решения задачи в системе Octave

На листинге 3.1 приведен пример решения задачи о планировании производства в системе Octave с использованием функции `glpk`.

Важно: Напрямую копировать текст программы из PDF документа в редактор Octave не получится. Скопированный текст программы потребует правок. В частности необходимо будет исправить символы апострофа и кавычек, а также, при необходимости, удалить лишние пробелы.

Листинг 3.1

Задача о планировании производства

```
%          Задача о планировании производства
% Для выпуска двух типов продукции используется три вида сырья.
% Производственные коэффициенты (количество сырья, требующееся для производства
% единицы продукции), объёмы запасов
% и рыночные цены на продукции приведены в таблице:
%    Продукция          Сырьё    Цена
%         A          7    6    1      2
%         B          3    9    5      1
% Объём запасов   60   80   35
%
% Требуется, предполагая ненасыщенность рынка, составить такой план производства
%   x = (x1 , x2),  при котором выручка от продаж будет максимальна.
% Как изменится решение в предположении, что x может иметь только
% целочисленные значения?
% Формальная постановка задачи
%  цель  2x1 +  x2 -> max
%  / 7x1 + 3x2 <= 60
%  | 6x1 + 9x2 <= 80
%  |  x1 + 5x2 <= 35
%  \  x1,x2 >= 0
% Задача ЛП с ограничениями равенствами
% Двойственная задача  z = [bT,hT]y -> min, [AT,E]y >= c,  y4,5,6,7,8 >= 0
%  Исходная задача F = cTx -> max, Ax=b, 0<=x<=u
c=[ -3; -20; 13; 9; 7];
u=[5, 3, 5, 4, 5/2];
b=[9; 8; 1];
A=[ -1, 1, 1,-1, 3;
    -1,-4, 3, 1, 2;
     1, 0,-2, 3, 0];
printf("Решение задачи и значение целевой функции\n")
[Xopt,Fval] = glpk(c,A,b,[],u,'SSS','CCCCC',-1)
printf("Решение задачи целочисленного программирования\n")
[Xopt,Fval] = glpk(c,[A;eye(5)],[b;u'],[],[],'SSSUUUUU','CCCCC',-1)
printf("Решение двойственной задачи\n")
[Yopt,Zval] = glpk([b;u'], [A',eye(5)], c, [-Inf(1,3), zeros(1,5)], [],
    'LLLLL', 'CCCCCCCC')
```

Результат выполнения программы (лист. 3.1) в системе Octave приведен на листинге 3.2.

Листинг 3.2

Решение задачи о планировании производства

```
Решение задачи и значение целевой функции
Xopt =

   2.0000
   3.0000
   5.0000
   3.0000
   2.0000

Fopt =   40
```

```
Решение задачи целочисленного программирования
Xopt =

   2.0000
   3.0000
   5.0000
   3.0000
   2.0000

Fopt =  40
Решение двойственной задачи
Yopt =

  -1.00000
   5.00000
   1.00000
   0.00000
   1.00000
   1.00000
   0.00000
   0.00000

Zopt =  40
```

3.4. Варианты для выполнения задания

Номер варианта выбирается учащимися по номеру в журнале группы.

Задача для нечетных вариантов (1, 3, ...)

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют три вида сырья S_1, S_2, S_3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемой от реализации единицы продукции, приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Исходные данные задачи для нечетных вариантов (1, 3, ...)

Вид сырья	Запас сырья	Единиц сырья на ед. прод.	
		P_1	P_2
S_1	20	2	5
S_2	40	8	5
S_3	30	5	6
Прибыль от ед. прод.		50	40

Построить математическую модель рассматриваемой экономической задачи, руководствуясь целью получить максимальную прибыль при реализации получаемой продукции.

Задача для четных вариантов (2, 4, . . .)

Предприятие после выполнения основной производственной программы располагает запасами сэкономленного сырья в трех видах S_1, S_2, S_3. Из этого сырья может быть изготовлено 2 вида изделий Q_1 и Q_2. Количество единиц сырья, идущего на изготовление единицы вида изделия, и доход, получаемый от реализации одной единицы каждого вида изделия, приведены в табл. 3.4.

Требуется сформулировать математически задачу линейного программирования, руководствуясь целью получить максимальную прибыль при реализации всей продукции предприятия.

Таблица 3.4

Исходные данные задачи для четных вариантов (2, 4, . . .)

Вид сырья	Запас сырья	Расход сырья на изделие	
		Q_1	Q_2
S_1	21	3	1
S_2	30	2	2
S_3	16	0	3
Прибыль от ед. издел.		3	2

3.5. Порядок выполнения задания

Задание лабораторной работы выполняется побригадно. По результатам работы необходимо сформировать отчет (см. содержание отчета). Отчёт сдается преподавателю оформленным в печатном виде.

3.5.1. Ход работы

1. Изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лабораторный практикум, лекции, учебники).
2. Согласно номера своего варианта выбрать условие задачи.
3. Выполнить постановку задачи и записать условия задачи неравенствами.
4. Привести задачу к уравнениям и решить ее с использованием системы Octave, используя приведенный в пункте 3.3.5 пример.
5. При решении использовать систему вычислений Octave.
6. Оформить отчет по лабораторной работе.
7. Защитить лабораторную работу.

3.5.2. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) титульный лист с названием работы и номером варианта (см. образец в конце практикума);

2) цель работы;

3) формулировку задания;

4) аналитическое решение задачи своего варианта;

5) результаты вычислений и полученные значения или параметры;

6) при наличии — программный код решения задачи;

7) при наличии — графики и таблицы исходных данных и результатов;

8) при наличии — схемы и диаграммы исходных данных и результатов;

9) анализ полученных результатов и вывод о проделанной работе.

Порядок представления данных и результатов пп. 4, 5, 6, 7, 8 определить самостоятельно, исходя из логики задания.

3.5.3. Порядок защиты лабораторный работы

Защита работы может осуществляться одним из нижеперечисленных способов или их сочетанием на усмотрение преподавателя.

1. Устный ответ по теме работы.
2. Тестирование по теме работы.
3. Задача по теме работы.
4. Иные варианты на усмотрение преподавателя.

3.5.4. Контрольные вопросы к защите лабораторной работы

1. Сформулируйте типовую задачу линейного программирования?
2. Напишите в различных формах типовую математическую модель задачи линейного программирования?
3. Дайте определение плана, невырожденного и вырожденного опорного плана, оптимального плана.
4. Как экономически интерпретировать двойственную задачу?
5. В чем состоит двойственность в линейном программировании?

Лабораторная работа 4
Принятие решения по оптимизации размещения узла доступа на сети связи района

4.1. Цель работы

Изучить и решить задачу размещения с точки зрения оптимизации строительства линейных сооружений. Составить программу решения задачи размещения.

4.2. Рекомендуемая литература

1. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова «Введение в Octave для инженеров и математиков» М. : ALT Linux, 2012. — 368 с.

2. Documentation // Octave-Forge.
URL: http://octave.sourceforge.net/docs.html

3. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова «Введение в Octave» // НОУ ИНТУИТ. URL: http://www.intuit.ru/studies/courses/3677/919/info

4. Лекции по дисциплине

4.3. Теоретическая справка

4.3.1. Задача размещения узла доступа на сети связи района

При планировании сети связи любого уровня для компаний-операторов часто возникает задача правильного размещения узла доступа, в котором находится оборудование для предоставления услуг связи и сервисов оператора. Задача выражается в том, что необходимо разместить узел доступа (объект связи) таким образом, чтобы расстояние обслуживания жителей было оптимально. Это важно как с точки зрения минимизации затрат при строительстве линейных сооружений, так и при планировании радиосетей. Всегда рассматривают две ситуации:

1. Для радиосетей — минимальное расстояние до наиболее удаленных объектов обслуживания (минимаксная задача).
2. Для узлов доступа — минимальные суммы расстояний от места размещения до абонентов и обратно (минисуммная задача).

4.3.2. Формулировка задачи в общем виде

Дана сеть с n вершинами x_i $(i = 1 \ldots n)$, которым сопоставлены веса $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Найти точку U на сети такую, что

$$F_i = \sum_{i=1}^{n} d_{iU} p_i \longrightarrow \min . \tag{4.1}$$

где d_{iU} — расстояние от i вершины до точки U.

4.3.3. Пример

Дана сеть с семью вершинами (рис. 4.1), где вершины отвечают за населѐнные пункты, в которых проживают потенциальные абоненты оператора. Число предполагаемых абонентов в вершинах заданы числами

$$\mathbf{P} = (80, 100, 140, 90, 60, 50, 40).$$

В графе на ребрах указаны расстояния между населенными пунктами. Необходимо определить населенный пункт в котором размещение узла доступа (объекта связи) будет оптимально.

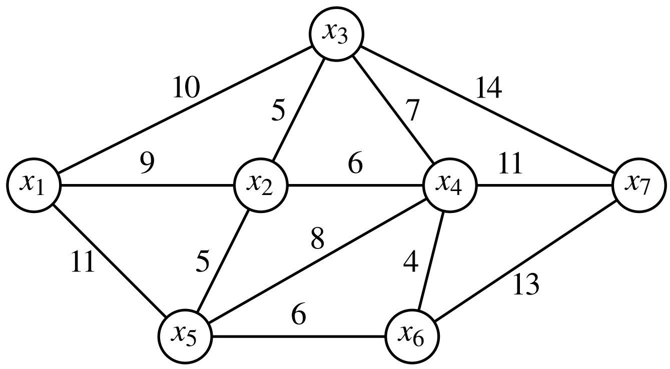

Рис. 4.1. Граф сети населенных пунктов

Решение

Построить матрицу кратчайших расстояний d_{ij} из каждой вершины в каждую (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Матрица кратчайших расстояний d_{ij}

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	9	10	15	11	17	24
x_2	9	0	5	6	5	10	17
x_3	10	5	0	7	10	11	14
x_4	15	6	7	0	8	4	11
x_5	11	5	10	8	0	6	19
x_6	17	10	11	4	6	0	13
x_7	24	17	14	11	19	13	0

Найти значения функции F по формуле (4.1) в каждой вершине.

$$F_1 = 80\cdot0+9\cdot100+10\cdot140+15\cdot90+11\cdot60+17\cdot50+24\cdot40 = 6120$$
$$F_2 = 9\cdot80+0\cdot100+5\cdot140+6\cdot90+5\cdot60+10\cdot50+17\cdot40 = 3440$$
$$F_3 = 10\cdot80+5\cdot100+0\cdot140+7\cdot90+10\cdot60+11\cdot50+14\cdot40 = 3640$$
$$F_4 = 15\cdot80+6\cdot100+7\cdot140+0\cdot90+8\cdot60+4\cdot50+11\cdot40 = 3800$$
$$F_5 = 11\cdot80+5\cdot100+10\cdot140+8\cdot90+0\cdot60+6\cdot50+19\cdot40 = 4560$$
$$F_6 = 17\cdot80+10\cdot100+11\cdot140+4\cdot90+6\cdot60+0\cdot50+13\cdot40 = 4930$$
$$F_7 = 24\cdot80+17\cdot100+14\cdot140+11\cdot90+19\cdot60+13\cdot50+0\cdot40 = 8360$$

Среди найденных значений функции F_i выбираем минимальное.

$$F_{\min} = \min(F_i) = F_2 = 3440.$$

Ответ: Узел доступа необходимо разместить во второй вершине графа.

4.4. Варианты для выполнения задания

Номер варианта выбирается учащимися по номеру в журнале группы.

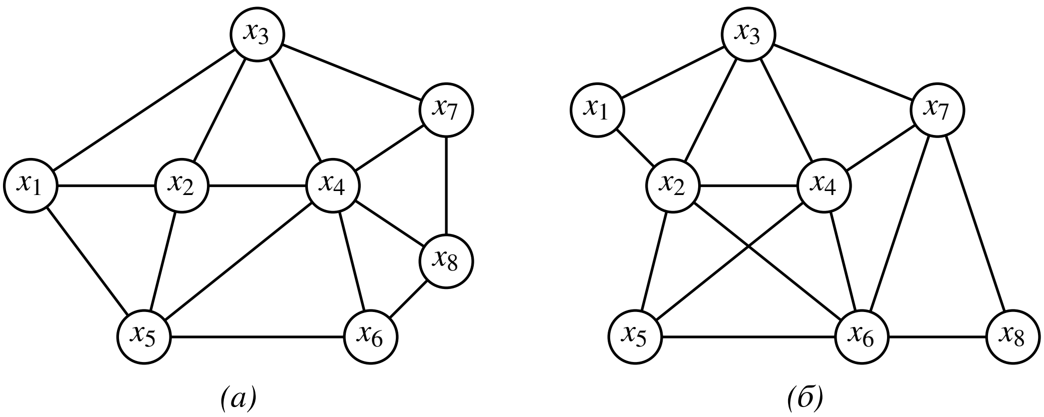

Рис. 4.2. Граф сети населенных пунктов:
(а) нечетные варианты (1, 3, ...); (б) четные варианты (2, 4, ...)

Таблица 4.2

Количество абонентов в населенных пунктах (веса узлов графа)

№ вар.	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
1	70	60	60	70	130	40	60	80
2	90	80	90	100	100	90	130	60
3	140	100	50	70	110	80	110	110
4	50	70	90	50	70	140	80	110
5	100	80	50	110	130	50	90	110
6	90	140	130	140	50	70	70	40
7	60	80	120	90	40	80	110	120

Окончание табл. 4.2

Количество абонентов в населенных пунктах (веса узлов графа)

№ вар.	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
8	80	120	120	90	90	130	70	90
9	140	70	50	130	60	70	90	80
10	90	100	110	70	50	60	80	100
11	40	100	120	50	110	110	140	50
12	90	80	40	130	70	140	50	140
13	100	110	90	40	100	60	90	110
14	50	70	140	120	90	80	80	40
15	50	120	70	90	100	130	120	80
16	140	110	60	110	120	40	50	130
17	110	140	130	140	80	60	60	60
18	50	60	140	120	60	80	60	60
19	50	40	140	90	130	60	60	140
20	110	100	100	80	120	140	80	70
21	120	90	90	50	120	40	40	60
22	60	80	100	80	90	40	80	40
23	120	90	70	110	110	140	130	60
24	130	60	40	110	110	90	140	110
25	80	80	100	60	140	70	80	60
26	60	60	140	120	120	120	80	110
27	100	100	40	100	100	110	140	80
28	120	70	50	140	60	120	100	60
29	130	80	60	90	80	50	60	40
30	70	80	60	50	40	60	40	90

Расстояния между населенными пунктами (длины ребер графа) учащиеся назначают самостоятельно из диапазона 3–15 км.

4.5. Порядок выполнения задания

Задание лабораторной работы выполняется побригадно. По результатам работы необходимо сформировать отчет (см. содержание отчета). Отчёт сдается преподавателю оформленным в печатном виде.

4.5.1. Ход работы

1. Изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лабораторный практикум, лекции, учебники).
2. Согласно номера своего варианта выбрать условие задачи.

3. Выполнить постановку задачи для своего варианта и аналитически решить задачу размещения узлов доступа.

4. При решении использовать систему вычислений Octave.

5. Оформить отчет по лабораторной работе.

6. Защитить лабораторную работу.

4.5.2. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) титульный лист с названием работы и номером варианта (см. образец в конце практикума);
2) цель работы;
3) формулировку задания;
4) аналитическое решение задачи своего варианта;
5) результаты вычислений и полученные значения или параметры;
6) при наличии — программный код решения задачи;
7) при наличии — графики и таблицы исходных данных и результатов;
8) при наличии — схемы и диаграммы исходных данных и результатов;
9) анализ полученных результатов и вывод о проделанной работе.

Порядок представления данных и результатов пп. 4, 5, 6, 7, 8 определить самостоятельно, исходя из логики задания.

4.5.3. Порядок защиты лабораторный работы

Защита работы может осуществляться одним из нижеперечисленных способов или их сочетанием на усмотрение преподавателя.

1. Устный ответ по теме работы.
2. Тестирование по теме работы.
3. Задача по теме работы.
4. Иные варианты на усмотрение преподавателя.

4.5.4. Контрольные вопросы к защите лабораторной работы

1. Какого типа задачи относятся к задачам размещения объектов?
2. Сформулируйте задачу размещения в общем виде.
3. Какие критерии применяются в задаче для принятия оптимального решения?

Лабораторная работа 5
Оптимизация работ методом сетевого планирования и управления

5.1. Цель работы

Приобретение навыков решения задач и их оптимизации методом сетевого планирования и управления. Составить программу решения технологической задачи по сетевой модели.

5.2. Рекомендуемая литература

1. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова «Введение в Octave для инженеров и математиков» — М. : ALT Linux, 2012. — 368 с.
2. Documentation // Octave-Forge. URL: http://octave.sourceforge.net/docs.html
3. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова «Введение в Octave» // НОУ ИНТУИТ. URL: http://www.intuit.ru/studies/courses/3677/919/info
4. Лекции по дисциплине

5.3. Теоретическая справка

5.3.1. Метод сетевого планирования и управления

Сетевое планирование применяется для создания оптимального плана выполнения работ в сфере промышленного производства, строительства, организации научно-исследовательских работ и других в рамках задачи управления и оптимизации технологическими процессами. Исходными данными для задачи сетевого планирования является программа выполнения работ, которая содержит перечень работ с указанием длительности выполнения каждой. На основе этих данных строится сетевая модель (график).

Сетевая модель — графическое отображение выполняемых работ в их технологической последовательности с указанием времени выполнения каждой работы (5.1).

Основными элементами сетевой модели являются:

1. Событие — фиксируемый момент времени завершения i-й работы и начало выполнения $(i+1)$-й работы. На сетевом графике событие обозначается кружком с порядковым номером.

2. Работа — это активные действия по созданию материального или интеллектуального продукта с привлечением различных ресурсов: финансовых, материальных, энергетических и прочих.
Различают несколько видов работ:

- действительная работа, определение дано выше (на сетевом графике изображается сплошной линией со стрелкой);

- фиктивная работа — логическая связь между событиями, не требующая затрат каких-либо ресурсов (изображается на сетевом графике пунктирной линией).

3. Путь — это непрерывная последовательность событий и работ, которые включаются (исполняются) только один раз.

4. Критический путь — это путь, который содержит работы, не имеющие резерва по времени для своей реализации. Работы, имеющие резерв по времени, называются некритическими.

5. Исходное событие. Любая сетевая модель всегда имеет одно исходное событие, из которого вытекает одна или несколько работ. Исходное событие всегда не имеет входящих работ.

6. Завершающее событие. Каждая сетевая модель всегда имеет одно завершающее событие, в котором заканчивается одна или несколько работ. Завершающее событие всегда не имеет выходящих работ.

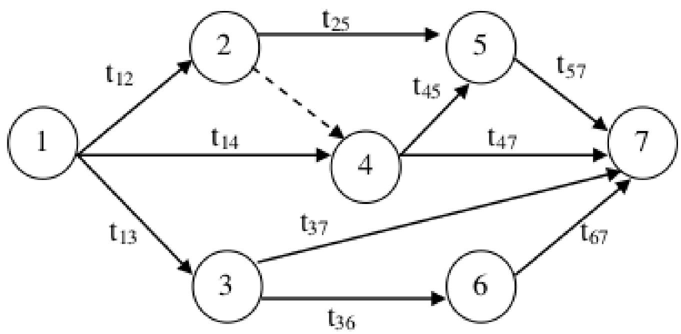

Рис. 5.1. Сетевая модель работ

5.3.2. Расчет временных параметров сетевой модели

Главной характеристикой сетевого графика является длина критического пути. Расчет критического пути выполняют в два этапа (от начала к концу сетевого графика и от конца к началу сетевого графика). На первом этапе определяют ранние сроки наступления событий, а на втором — поздние сроки наступления событий.

1. Ранние сроки наступления событий вычисляются по формуле 5.1.

$$t_{\text{р}}(j) = \max[t_{\text{р}}(i) + t(i,j)], \tag{5.1}$$

где $t_{\text{р}}(i)$ и $t_{\text{р}}(j)$ — соответственно ранние сроки свершения предыдущего и последующего событий; $t(i,j)$ — время выполнения работ.

2. Поздние сроки наступления событий вычисляются по формуле 5.2.

$$t_{\text{п}}(i) = \min[t_{\text{п}}(j) - t(i,j)], \tag{5.2}$$

где $t_{\text{п}}(i)$ и $t_{\text{п}}(j)$ — соответственно поздние сроки свершения предыдущего и последующего событий; $t(i,j)$ — время выполнения работ.

3. Полный резерв времени вычисляется по формуле 5.3.

$$R(j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(j). \tag{5.3}$$

Для оперативного контроля, полученные параметры наносят на сетевую модель, где каждое событие представляется в виде рис. 5.2.

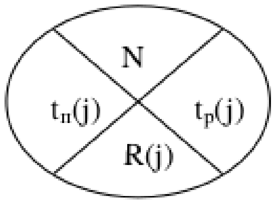

Рис. 5.2. Обозначение события сетевой модели с параметрами

Пример 5.1

На основании технологической последовательности выполнения работ и предварительных расчетов построена сетевая модель (рис. 5.3). Требуется определить величину критического пути и полный резерв времени.

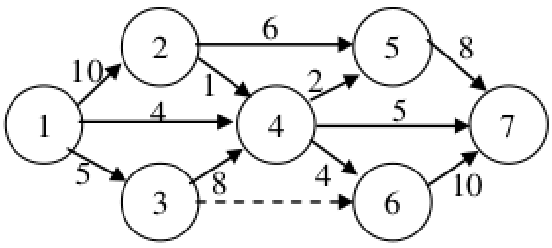

Рис. 5.3. Сетевая модель технологической последовательности выполнения работ

Решение:

1. Вычислим ранние сроки свершения событий по формуле 5.1:

$$t_{\text{р}}(1) = 0$$
$$t_{\text{р}}(2) = \max[t_{\text{р}}(1) + t_{12}] = \max[0 + 10] = 10$$
$$t_{\text{р}}(3) = \max[t_{\text{р}}(1) + t_{13}] = \max[0 + 5] = 5$$
$$t_{\text{р}}(4) = \max \begin{bmatrix} t_{\text{р}}(1) + t_{14} \\ t_{\text{р}}(2) + t_{24} \\ t_{\text{р}}(3) + t_{34} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 0+4 \\ 10+1 \\ 5+8 \end{bmatrix} = 13$$
$$t_{\text{р}}(5) = \max \begin{bmatrix} t_{\text{р}}(2) + t_{25} \\ t_{\text{р}}(4) + t_{45} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 10+6 \\ 13+2 \end{bmatrix} = 16$$

$$t_р(6) = \max \begin{bmatrix} t_р(3) + t_{36} \\ t_р(4) + t_{46} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 5+0 \\ 13+4 \end{bmatrix} = 17$$

$$t_р(7) = \max \begin{bmatrix} t_р(4) + t_{47} \\ t_р(5) + t_{57} \\ t_р(6) + t_{67} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 13+5 \\ 16+8 \\ 17+10 \end{bmatrix} = 27$$

2. Вычислим поздние сроки свершения событий по формуле 5.2:

$$t_п(7) = t_р(7) = 27$$

$$t_п(6) = \min[t_п(7) - t_{67}] = \min[27 - 10] = 17$$

$$t_п(5) = \min[t_п(7) - t_{57}] = \min[27 - 8] = 19$$

$$t_п(4) = \min \begin{bmatrix} t_п(7) - t_{47} \\ t_п(6) - t_{46} \\ t_п(5) - t_{45} \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 27-5 \\ 17-4 \\ 19-2 \end{bmatrix} = 13$$

$$t_п(3) = \min \begin{bmatrix} t_п(6) - t_{36} \\ t_п(4) - t_{34} \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 17-0 \\ 13-8 \end{bmatrix} = 5$$

$$t_п(2) = \min \begin{bmatrix} t_п(5) - t_{25} \\ t_п(4) - t_{24} \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 19-6 \\ 13-1 \end{bmatrix} = 12$$

$$t_п(1) = \min \begin{bmatrix} t_п(4) - t_{14} \\ t_п(3) - t_{13} \\ t_п(2) - t_{12} \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 13-4 \\ 5-5 \\ 12-10 \end{bmatrix} = 0$$

3. Вычислим полный резерв времени каждого события по формуле 5.3:

$$R(1) = 0 - 0 = 0 \qquad R(5) = 19 - 16 = 3$$
$$R(2) = 12 - 10 = 2 \qquad R(6) = 17 - 17 = 0$$
$$R(3) = 5 - 5 = 0 \qquad R(7) = 27 - 27 = 0$$
$$R(4) = 13 - 13 = 0$$

Обозначим все параметры на сетевой модели (рис. 5.4).

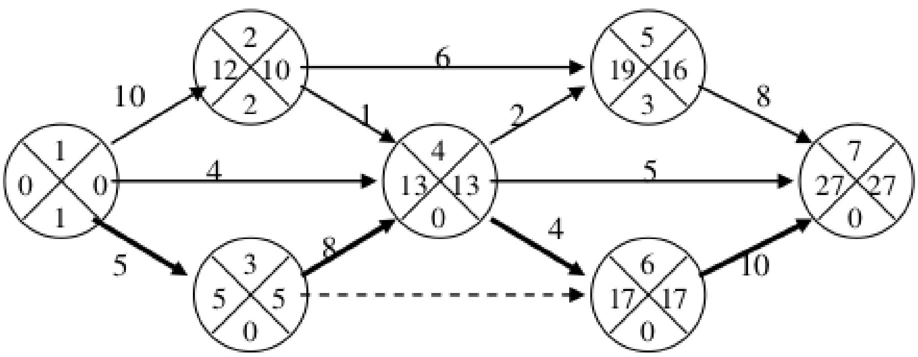

Рис. 5.4. Сетевая модель с нанесенными временными параметрами

Ответ: Длина критического пути равна 27. На критическом пути находятся события: 1, 3, 4, 6, 7.

5.4. Варианты для выполнения задания

Номер варианта выбирается учащимися по номеру бригады в журнале группы.

Рассчитать непосредственно на предложенном сетевом графике технологического комплекса работ, согласно своему варианту (рис. 5.5):

- ранние и поздние сроки свершения событий,
- резервы времени событий,
- минимальное время выполнения всего комплекса (критический срок).

Выделить на сетевом графике критический путь.

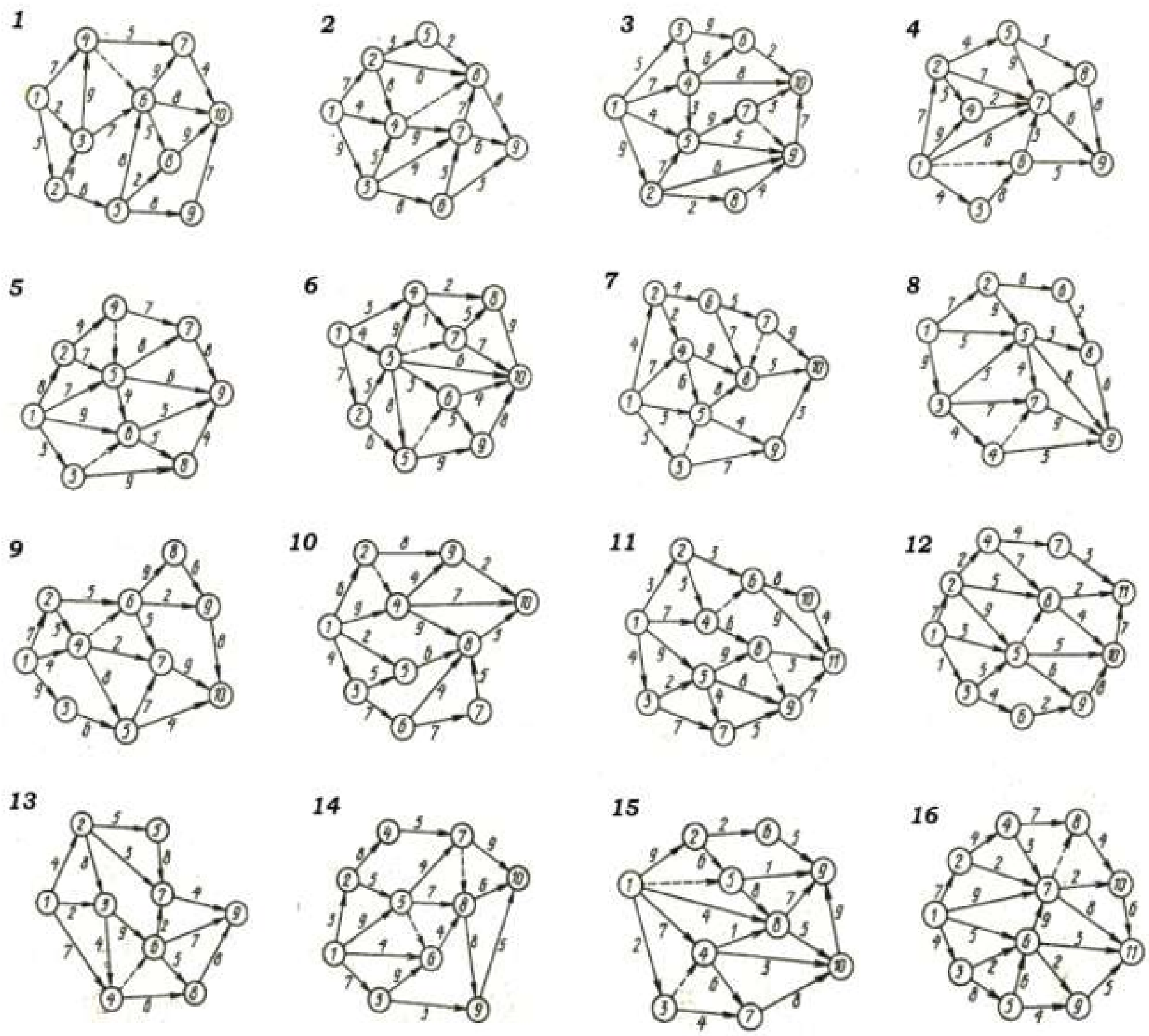

Рис. 5.5. Варианты заданий для лабораторной работы

5.5. Порядок выполнения задания

Задание лабораторной работы выполняется по бригадно. По результатам работы необходимо сформировать отчет (см. содержание отчета). Отчёт сдается преподавателю оформленным в печатном виде.

5.5.1. Ход работы

1. Изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лабораторный практикум, лекции, учебники).
2. Согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи.
3. Решить задачу методом сетевого планирования и управления аналитически.
4. При решении использовать систему вычислений Octave.
5. Оформить отчет по лабораторной работе.
6. Защитить лабораторную работу.

5.5.2. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) титульный лист с названием работы и номером варианта (см. образец в конце практикума);
2) цель работы;
3) формулировку задания;
4) аналитическое решение задачи своего варианта;
5) результаты вычислений и полученные значения или параметры;
6) при наличии — программный код решения задачи;
7) при наличии — графики и таблицы исходных данных и результатов;
8) при наличии — схемы и диаграммы исходных данных и результатов;
9) анализ полученных результатов и вывод о проделанной работе.

Порядок представления данных и результатов пп. 4, 5, 6, 7, 8 определить самостоятельно, исходя из логики задания.

5.5.3. Порядок защиты лабораторный работы

Защита работы может осуществляться одним из нижеперечисленных способов или их сочетанием на усмотрение преподавателя.

1. Устный ответ по теме работы.
2. Тестирование по теме работы.
3. Задача по теме работы.
4. Иные варианты на усмотрение преподавателя.

5.5.4. Контрольные вопросы к защите лабораторной работы

1. Что такое событие?

2. Какая работа называется действительной, фиктивной работой?
3. Дайте определение исходному событию, завершающему событию?
4. Чем отличается критический путь от любого другого пути?
5. Какие работы и события называются критическими?
6. Что называется сетевой моделью?
7. Основные правила построения сетевой модели.
8. Как вычисляются ранние сроки свершения событий?
9. Как вычисляются поздние сроки свершения событий?
10. Что такое резервы времени и как они определяются?

Лабораторная работа 6
Решение задач оптимизации методом динамического программирования

6.1. Цель работы

Научиться и приобрести навыки постановки и решения задач оптимизации методом динамического программирования.

6.2. Рекомендуемая литература

1. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова «Введение в Octave для инженеров и математиков» — М. : ALT Linux, 2012. — 368 с.
2. Documentation // Octave-Forge. URL: http://octave.sourceforge.net/docs.html
3. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова «Введение в Octave» // НОУ ИНТУИТ. URL: http://www.intuit.ru/studies/courses/3677/919/info
4. Лекции по дисциплине

6.3. Теоретическая справка

6.3.1. Метод динамического программирования

Под динамическим программированием понимают некоторый специальный метод оптимизации, суть которого состоит в отыскании оптимального решения путем выполнения вычислений в несколько шагов (этапов). Вся задача оптимизации разделяется на несколько шагов, причем все шаги могут быть уникальными или одинаковыми и чередоваться друг с другом.

При использовании динамического программирования многошаговая задача решается дважды: от конца к началу (определение условно-оптимального решения) и от начала к концу (определение безусловно-оптимального решения). Первый этап длительный и трудоемкий, второй — короткий и уточняет решение первого этапа.

6.3.2. Основное функциональное уравнение динамического программирования

$$F_i(x_{i-1};U_i) = \underset{U_i}{\operatorname{extr}}(Z_i(x_{i-1};U_i) + F_{i+1}(x_i)), \quad i = \overline{1,N}, \tag{6.1}$$

где: x_{i-1} — множество состояний, в которых система находится перед i-м шагом; x_i — множество состояний системы в конце i-го шага; U_i — множество управлений на i-ом шаге, под воздействием которых система переходит в одно из состояний множества x_i; $F_i(x_{i-1};U_i)$ — условно-оптимальное значение целевой функции на интервале от i-го до N-го шага включительно; $Z_i(x_{i-1};U_i)$ — значение целевой функции на i-ом шаге для всех управлений из множества U_i; $F_{i+1}(x_i)$ — условно-оптимальное значение целевой функции на интервале от $(i+1)$-го шага до N-го включительно.

На последнем N шаге справедлива следующая формула:

$$F_N(x_{N-1};U_N) = \underset{U_N}{\mathrm{extr}}(Z_N(x_{N-1};U_N)) \tag{6.2}$$

Пример 6.1

На районной сети дорог (6.1) перевозчиком указаны стоимости доставки единицы груза из одного населенного пункта в соседние пункты. Найти наиболее экономный маршрут перевозки груза из пункта 1 в пункт 10.

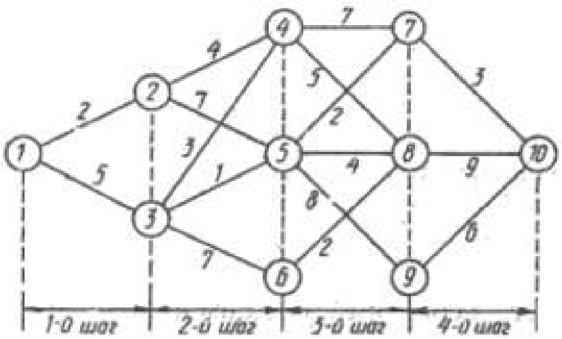

Рис. 6.1. Районная сеть дорог и стоимость доставки груза между населенными пунктами

Решение:

Разобьем все пункты района на группы (табл. 6.1). К группе I отнесем пункт 1, к группе II — пункты, в которые можно попасть непосредственно из пункта 1 (пункты 2 и 3), к группе III отнесем пункты, в которые можно попасть непосредственно из любого пункта группы II (4,5 и 6) и т. д. В результате движения транспорта с грузом из пункта 1 в пункт 10 можно рассматривать как четырехшаговый процесс.

Таблица 6.1

Разбиение районной сети дорог на группы

I	II	III	IV	V
	2	4	7	
1	3	5	8	10
		6	9	

В качестве перевозчика выступает автотранспорт, перемещающий груз из начала маршрута — пункта 1 в конечную точку маршрута — пункт 10, и сеть районных дорог. Множество x_i — множество пунктов назначения на i-м шаге. Действие оператора управления U_i на i-м шаге состоит в выборе дороги

(i,j), по которой следует направлять груз из данного пункта в соседний в общем направлении к пункту 10. Значение z_i целевой функции на i-м шаге — это затраты на перевозку единицы груза из данного пункта в выбранный соседний пункт.

Первый этап условной оптимизации начнем с анализа четвертого шага. $i = N = 4$, функциональное уравнение имеет вид (6.3):

$$F_4(x_3, u_4) = \min_{u_4}(z_4(x_3, u_4)), \tag{6.3}$$

где $x_4 = \{c_{10}\}$; $x_3 = \{c_7, c_8, c_9\}$; $u_4 = \{(7,10), (8,10), (9,10)\}$; $z_4 = \{3, 9, 6\}$.

Анализ четвертого шага оформим в таблице 6.2.

Таблица 6.2

Первый этап условной оптимизации

X_3	U_4	X_4	F_4
$\mathbf{C_7}$	$\mathbf{(7,10)}$	$\mathbf{C_{10}}$	**3**
C_8	$(8,10)$	C_{10}	9
C_9	$(9,10)$	C_{10}	6

Переходим ко **второму этапу** условной оптимизации — анализу третьего шага,

Запишем функциональное уравнение при $i = N - 1 = 3$ (6.4):

$$F_3(x_2, u_3) = \min_{u_3}(z_3(x_2, u_3) + F_4(x_3)). \tag{6.4}$$

Анализ третьего шага рассмотрим в таблице 6.3.

Таблица 6.3

Второй этап условной оптимизации

X_2	U_3	X_3	Z_3	F_4	$Z_3 + F_4$	F_3
C_4	$(4,7)$	C_7	7	3	10	10
	$(4,8)$	C_8	5	9	14	—
$\mathbf{C_5}$	$\mathbf{(5,7)}$	$\mathbf{C_7}$	2	3	5	**5**
	$(5,8)$	C_8	4	9	13	—
	$(5,9)$	C_9	8	6	14	—
C_6	$(6,8)$	C_8	2	9	11	11

Третий этап условной оптимизации — анализ второго шага — осуществляется совершенно аналогично второму этапу. Функциональное уравнение для второго шага запишется в следующей форме (6.5), $i = 2$.

$$F_2(x_1, u_2) = \min_{u_2}(z_2(x_1, u_2) + F_3(x_2)). \tag{6.5}$$

Анализ второго шага рассмотрим в таблице 6.4.

Таблица 6.4

Третий этап условной оптимизации

X_1	U_2	X_2	Z_2	F_3	Z_2+F_3	F_2
C_2	$(2,4)$	C_4	4	10	14	—
	$(2,5)$	C_5	7	5	12	12
$\mathbf{C_3}$	$(3,4)$	C_4	3	10	13	—
	$(\mathbf{3},\mathbf{5})$	$\mathbf{C_5}$	**1**	5	6	**6**
	$(3,6)$	C_6	7	11	18	—

Заключительным этапом процедуры условной оптимизации является анализ первого шага.

Функциональное уравнение для этого шага имеет вид (6.6), $i=1$.

$$F_1(x_0,u_1)=\min_{u_1}(z_1(x_0,u_1)+F_2(x_1)). \tag{6.6}$$

Результаты вычислений приведены в таблице 6.5.

Таблица 6.5

Четвертый этап условной оптимизации

X_0	U_1	X_1	Z_1	F_2	Z_1+F_2	F_1
$\mathbf{C_1}$	$(1,2)$	C_2	2	12	14	—
	$(\mathbf{1},\mathbf{3})$	$\mathbf{C_3}$	5	6	12	**11**

При безусловной оптимизации остается пройти еще раз весь оптимизируемый процесс, но уже в прямом направлении, начиная с первого и кончая четвертым шагом, и «прочитать» искомое оптимальное управление, которое будет составлено из найденных ранее шаговых условно-оптимальных управлений.

Ответ: таким образом, рассматривая таблицы решения с последней по первую, получаем наиболее экономный маршрут перевозки, который проходит через пункты 1, 3, 5, 7, 10 при этом транспортные расходы составляют 11 денежных единиц на единицу груза.

6.4. Задания для лабораторной работы

На региональной сети дорог (рис. 6.2) имеется несколько маршрутов, по которым можно доставить груз из пункта 1 в пункт 10. Известны стоимости c_{ij} перевозки единицы груза между пунктами сети. Требуется:

1. Методом динамического программирования найти на сети наиболее экономный маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 10 и определить соответствующие ему затраты.

2. Выписать оптимальные маршруты перевозки груза из всех остальных пунктов сети в пункт 10 и указать соответствующие им минимальные затраты на доставку.

3. При аналитическом решении вручную привести формулы и таблицы оптимизации по этапам, при программном решении — сопроводить скриптовый код подробными комментариями.

4. Результаты работы оформить в виде таблицы или колонок с данными: н. п. «А» — н. п. «Б» — ОПТИМАЛЬНЫЙ МАРШРУТ — затраты.

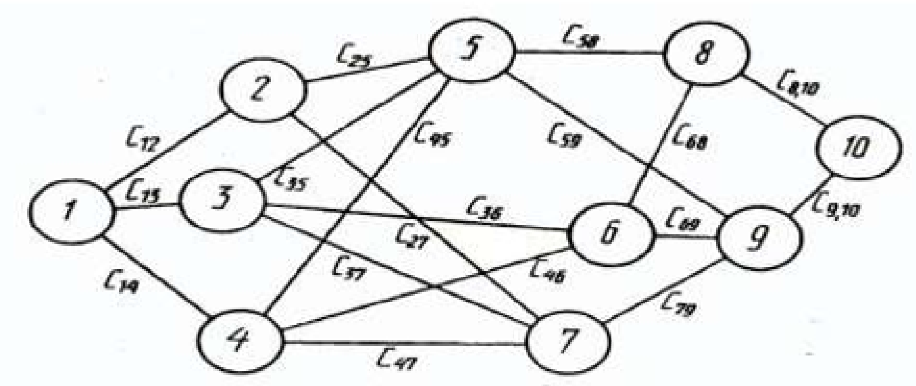

Рис. 6.2. Региональная сеть дорог с тарифами на перевозку груза

Все необходимые числовые данные вариантов 1–15 приведены в таблице 6.6.

Таблица 6.6

Стоимости перевозки груза между пунктами на региональной сети дорог (тарифы)

Тариф	Номер варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C12	7	4	9	1	5	8	3	6	1	4	2	4	5	3	3
C13	3	8	2	6	3	1	5	2	9	6	5	6	2	5	5
C14	5	4	5	2	8	5	4	6	3	1	7	7	4	7	6
C25	2	6	3	5	2	9	1	7	8	3	9	8	6	9	4
C27	7	1	7	3	5	2	6	3	7	5	4	4	7	2	3
C35	9	9	4	6	8	6	2	9	4	7	6	6	8	5	7
C36	3	3	6	8	1	8	7	2	9	3	2	7	1	8	9
C37	1	5	8	4	7	4	4	8	3	6	1	8	4	1	4
C45	8	4	1	7	5	5	6	5	7	2	3	2	5	4	6
C46	4	8	3	2	9	2	8	2	4	5	5	1	7	8	7
C47	5	2	5	9	1	6	3	9	8	9	2	8	8	3	4
C58	2	7	8	5	3	1	7	4	6	1	6	9	5	5	3
C59	6	4	7	3	5	8	2	6	3	8	7	3	3	7	1
C68	1	9	1	6	8	3	9	7	1	2	8	5	4	9	2
C69	9	6	4	1	4	6	2	4	8	3	2	7	1	1	3
C79	4	1	5	4	9	2	8	6	9	5	6	3	4	3	4
C8,10	3	7	9	6	2	5	1	7	1	3	7	2	5	2	5
C9,10	8	2	5	1	7	9	3	6	4	8	9	3	9	1	8

6.5. Порядок выполнения задания

Задание лабораторной работы выполняется побригадно. По результатам работы необходимо сформировать отчет (см. содержание отчета). Отчёт сдается преподавателю оформленным в печатном виде.

6.5.1. Ход работы

1. Изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лабораторный практикум, лекции, учебники).
2. Согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи.
3. Выполнить постановку задачи и решить ее аналитически методом динамического программирования.
4. При решении использовать систему вычислений Octave.
5. Оформить отчет по лабораторной работе.
6. Защитить лабораторную работу.

6.5.2. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) титульный лист с названием работы и номером варианта (см. образец в конце практикума);
2) цель работы;
3) формулировку задания;
4) аналитическое решение задачи своего варианта;
5) результаты вычислений и полученные значения или параметры;
6) при наличии — программный код решения задачи;
7) при наличии — графики и таблицы исходных данных и результатов;
8) при наличии — схемы и диаграммы исходных данных и результатов;
9) анализ полученных результатов и вывод о проделанной работ.

Порядок представления данных и результатов пп. 4, 5, 6, 7, 8 определить самостоятельно исходя из логики задания.

6.5.3. Порядок защиты лабораторный работы

Защита работы может осуществляться одним из нижеперечисленных способов или их сочетанием на усмотрение преподавателя.

1. Устный ответ по теме работы.
2. Тестирование по теме работы.
3. Задача по теме работы.
4. Иные варианты на усмотрение преподавателя.

6.5.4. Контрольные вопросы к защите лабораторной работы

1. Что понимается под динамическим программированием?

2. Какие задачи можно решать методом динамического программирования?

3. Объяснить алгоритм решения задач динамического программирования.

4. Основное функциональное уравнение динамического программирования.

5. На какие 2 этапа распадается вычислительная процедура метода динамического программирования? В чем заключаются эти этапы?

Лабораторная работа 7
Решение многокритериальных задач методом аддитивной оптимизации

7.1. Цель работы

Научиться и приобрести навык постановки и решения многокритериальных задач методом аддитивной оптимизации.

7.2. Рекомендуемая литература

1. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова «Введение в Octave для инженеров и математиков» — М. : ALT Linux, 2012. — 368 с.

2. Documentation // Octave-Forge. URL: http://octave.sourceforge.net/docs.html

3. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова «Введение в Octave» // НОУ ИНТУИТ. URL: http://www.intuit.ru/studies/courses/3677/919/info

4. Лекции по дисциплине

7.3. Теоретическая справка

7.3.1. Многокритериальная задача выбора оптимального решения

Математические модели исследуемых явлений или процессов для анализа и принятия решения часто могут быть заданы в виде таблиц, элементами которых являются значения частных критериев эффективности функционирования системы, вычисленные для каждой из сравниваемых стратегий при строго заданных внешних условиях, параметры значимых величин и другие условия, важные с точки зрения принятия решения по конкретной задаче.

Выбор оптимального решения по комплексу нескольких стратегически важных или значимых критериев является ***задачей многокритериальной***.

Один из подходов к решению таких многокритериальных задач управления или выбора решений связан с процедурой образования обобщенной функции

$$F_i(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}),$$

монотонно зависящей от критериев — a_{i1}, a_{i2}, …, a_{in}.

Данная процедура называется ***процедурой (методом) свертывания критериев***. Существует несколько методов свертывания, один из них — метод аддитивной оптимизации.

7.3.2. Метод аддитивной оптимизации свертывания критериев

Аддитивный критерий оптимальности определяется по формуле 7.1.

$$F_i[a_{ij}] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{7.1}$$

где a_{ij} — частные критерии; λ_j — весовые коэффициенты.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \qquad \lambda_j \geqslant 0. \tag{7.2}$$

Обобщенная целевая функция (7.1) может быть использована для свертывания частных критериев оптимальности, если:

- частные критерии количественно соизмеримы по важности;
- частные критерии являются однородными.

Если частные критерии не однородны, т. е. имеют различные единицы измерения, то в этом случае требуется нормализация критериев. Под ***нормализацией критериев*** понимается такая последовательность процедур, с помощью которой все критерии приводятся к единому, безразмерному масштабу измерения. Рассмотрим некоторые способы нормализации.

Определим максимум и минимум каждого частного критерия, т. е.

$$a_j^+ = \max(a_{ij}), \quad i = \overline{1,m}, \tag{7.3}$$

$$a_j^- = \min(a_{ij}), \quad i = \overline{1,m}. \tag{7.4}$$

Выделим группу критериев a_j, $j = \overline{1,k}$, которые максимизируются при решении задачи, и группу критериев a_j, $j = \overline{k+1,n}$, которые минимизируются при решении задачи.

В соответствии с принципом максимальной эффективности нормализованные критерии определяются из соотношений (7.5), (7.6), (7.7), (7.8).

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = \overline{1,k}, \tag{7.5}$$

$$\hat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = \overline{k+1,n} \tag{7.6}$$

или

$$\hat{a}_{ij} = \frac{(a_{ij} - a_j^-)}{(a_j^+ - a_j^-)}, \quad j = \overline{1,k}, \tag{7.7}$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{(a_j^+ - a_{ij})}{(a_j^+ - a_j^-)}, \quad j = \overline{k+1,n}. \tag{7.8}$$

Оптимальным будет тот вариант, который обеспечивает максимальное значение целевой функции:

$$F_i[a_{ij}] = \max \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{a}_{ij}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{7.9}$$

В соответствии с принципом минимальной потери нормализованные критерии определяются соотношениями (7.10), (7.11), (7.12), (7.13).

$$\hat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = \overline{1,k}, \tag{7.10}$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = \overline{k+1,n}, \tag{7.11}$$

или

$$\hat{a}_{ij} = \frac{(a_j^+ - a_{ij})}{(a_j^+ - a_j^-)}, \quad j = \overline{1,k}. \tag{7.12}$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{(a_{ij} - a_j^-)}{(a_j^+ - a_j^-)}, \quad j = \overline{k+1,n}, \tag{7.13}$$

При этом оптимальным будет тот вариант, который обеспечивает минимальное значение целевой функции:

$$F_i[a_{ij}] = \min \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{a}_{ij}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{7.14}$$

Пример 7.1

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по обеспечению нового производства оборудованием. С помощью экспериментальных наблюдений были определены значения частных критериев функционирования соответствующего оборудования, выпускаемого тремя заводами-изготовителями. На основе экспертных оценок были также определены веса частных критериев. Все данные приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1

Данные примера

Варианты оборудования	Частные критерии			
	Производительность, д.е.	Стоимость, д.е.	Энергоемкость, у.е.	Надежность, у.е.
Оборудование завода 1	5	7	5	6
Оборудование завода 2	3	4	7	3
Оборудование завода 3	4	6	2	4
Весовые коэффициенты	0.4	0.2	0.1	0.3

Решение:

1. Определим максимум каждого частного критерия: a_{15}, a_{27}, a_{37}, a_{46}.

2. При решении задачи максимизируются первый (производительность) и четвертый (надежность) критерии, а минимизируются второй (стоимость) и третий (энергоемкость) критерии.

3. Исходя из принципа максимизации эффективности, нормализуем критерии, используя формулы (7.5), (7.6):

$$\hat{a}_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_1^+}, \quad i = \overline{1,3}$$

$\hat{a}_{11} = \frac{a_{11}}{a_1^+} = \frac{5}{5} = 1$	$\hat{a}_{21} = \frac{a_{21}}{a_1^+} = \frac{3}{5} = 0{,}6$	$\hat{a}_{31} = \frac{a_{31}}{a_1^+} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$$\hat{a}_{i4} = \frac{a_{i4}}{a_4^+}, \quad i = \overline{1,3}$$

$\hat{a}_{14} = \frac{a_{14}}{a_4^+} = \frac{6}{6} = 1$	$\hat{a}_{24} = \frac{a_{24}}{a_4^+} = \frac{3}{6} = 0{,}5$	$\hat{a}_{34} = \frac{a_{34}}{a_4^+} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$\hat{a}_{i2} = 1 - \frac{a_{i2}}{a_2^+}, \quad i = \overline{1,3}$$

$$\hat{a}_{i3} = 1 - \frac{a_{i3}}{a_3^+}, \quad i = \overline{1,3}$$

$\hat{a}_{12} = 1 - \frac{a_{12}}{a_2^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0$	$\hat{a}_{22} = 1 - \frac{a_{22}}{a_2^+} = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$	$\hat{a}_{32} = 1 - \frac{a_{32}}{a_2^+} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$
$\hat{a}_{13} = 1 - \frac{a_{13}}{a_3^+} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$	$\hat{a}_{23} = 1 - \frac{a_{23}}{a_3^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0$	$\hat{a}_{33} = 1 - \frac{a_{33}}{a_3^+} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

4. Определим обобщенную функцию цели по каждому варианту, используя формулу (7.9).

$$\begin{aligned}
F_1 &= \lambda_1\hat{a}_{11} + \lambda_2\hat{a}_{12} + \lambda_3\hat{a}_{13} + \lambda_4\hat{a}_{14} = \\
&= 0{,}4\cdot 1 + 0{,}2\cdot 0 + 0{,}1\cdot \tfrac{2}{7} + 0{,}3\cdot 1 \approx 0{,}729 \\
F_2 &= \lambda_1\hat{a}_{21} + \lambda_2\hat{a}_{22} + \lambda_3\hat{a}_{23} + \lambda_4\hat{a}_{24} = \\
&= 0{,}4\cdot 0{,}6 + 0{,}2\cdot \tfrac{3}{7} + 0{,}1\cdot 0 + 0{,}3\cdot 0{,}5 \approx 0{,}476 \\
F_3 &= \lambda_1\hat{a}_{31} + \lambda_2\hat{a}_{32} + \lambda_3\hat{a}_{33} + \lambda_4\hat{a}_{34} = \\
&= 0{,}4\cdot 0{,}8 + 0{,}2\cdot \tfrac{1}{7} + 0{,}1\cdot \tfrac{5}{7} + 0{,}3\cdot \tfrac{2}{3} \approx 0{,}603
\end{aligned}$$

5. Оптимальным является первый вариант оборудования, так как

$$F_{\max} = F_1 = 0{,}729.$$

7.4. Задания для лабораторной работы

Вариант №1

Для шести проектов транспортных устройств определены относительные единичные показатели технологического совершенства конструкции.

Численные значения единичных показателей и соответствующие весовых коэффициентов приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Показатели транспортных устройств

Варианты транспортных устройств	Скорости (К1)	Прочности (К2)	Перегрузки (К3)	Устойчивости (К4)	Металлоемкости (К5)	Мощности (К6)
1	1,1	0,798	0,92	1,0	1,0	0,77
2	1,0	1,1	0,65	0,92	0,94	0,92
3	1,0	0,93	0,924	1,0	0,98	0,95
4	0,87	0,96	0,91	0,915	0,99	0,85
5	0,87	0,97	1,0	0,90	0,7	0,82
6	0,88	0,78	0,75	0,967	0,8	1,0
Весовые коэф.	0,21	0,195	0,174	0,157	0,124	0,14

Найти и выбрать оптимальное транспортное устройство.

Вариант №2

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению производства оборудованием. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии функционирования необходимого оборудования.

Исходные данные представлены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Локальные критерии эффективности оборудования

Варианты оборудования	Локальные критерии эффективности оборудования			
	производительность, д. е.	стоимость оборудования, д. е.	объем памяти, у. е.	надежность, у. е.
I	100	5	5	8
II	150	6	8	5
III	120	4	6,5	6
IV	200	7	6	4
Весовые коэф.	0,25	0,2	0,32	0,23

Определить и выбрать оптимальный вариант поставки оборудования

Вариант №3

Для пяти проектов технических систем определены относительные единичные показатели технического совершенства конструкции и весовые коэффициенты единичных показателей.

Численные значения единичных показателей и весовых коэффициентов приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Показатели проектов технических систем

Варианты технических систем	Относительные единичные показатели					
	сложности	веса	времени подготовки	автоматизации	мощности	унификации
I	1,0	0,88	1,0	1,0	0,72	0,614
II	0,72	1,2	0,8	0,78	0,81	0,42
III	0,658	0,358	0,765	0,782	0,525	0,915
IV	0,425	0,97	0,755	0,7	0,98	0,31
V	0,467	0,555	0,865	0,705	0,865	0,65
Весовые коэф.	0,157	0,124	0,21	0,195	0,174	0,14

Определить оптимальный проект технической системы.

Вариант №4

Абсолютные показатели качества различных вариантов двигателей приведены в табл. 7.5.

Таблица 7.5

Показатели качества двигателей

Варианты двигателей	Показатели качества		
	мощность, л. с.	крутящий момент, кгс·м	масса, кг
1	180	67	850
2	176	70	1002
3	176	68	860
4	181	67	818
5	177	68	860
6	180	66	801
Весовые коэф.	0,4	0,24	0,36

Выбрать из предложенных вариантов оптимальный двигатель.

Вариант №5

Экономические показатели эффективности работы предприятий приведены в табл. 7.6.

Таблица 7.6

Показатели эффективности работы предприятий

№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий				
	Прибыль, д. е.	Себест. единицы продукции, д. е.	Доходы, д. е.	Фондо-отдача, у. е.	Производит. у. е.
1	30.0	40,0	20,0	0,2	300
2	25,0	20,0	30,0	0,3	200
3	40,0	45,0	54,0	0,1	250
4	28,0	30,0	35,0	0,4	160
5	15,0	12,0	20,0	0,25	280
6	50,0	30,0	40,0	0,21	120
Весов. коэф.	0,32	0,23	0,15	0,2	0,1

Определить и выбрать наиболее эффективно работающее предприятие

.

Вариант №6

Для пяти проектов транспортных устройств определены относительные единичные показатели технологического совершенства конструкции.

Численные значения единичных показателей и соответствующие весовые коэффициенты приведены в табл. 7.7.

Таблица 7.7

Показатели транспортных устройств

Вар-ты транспортных устр-в	Скорость (К1)	Прочность (К2)	Перегрузка (К3)	Устойчивость (К4)	Мощность (К6)
1	0,78	0,98	0,72	1,0	0,87
2	1,0	1,0	0,65	0,9	0,94
3	0,89	0,93	0,92	1,0	0,96
4	0,87	0,95	0,81	0,91	0,85
5	0,87	0,97	1,3	0,90	0,82
Весовые коэф.	0,31	0,19	0,173	0,147	0,18

Определить вариант проекта оптимального транспортного устройства.

Вариант №7

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению процесса производства оборудованием. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии эффективности функционирования вариантов необходимого оборудования.

Исходные данные представлены в табл. 7.8.

Таблица 7.8

Локальные критерии эффективности оборудования

Варианты оборудования	Локальные критерии эффективности оборудования			
	производительность, д. е.	стоимость оборудования, д. е.	объем памяти, у. е.	надежность, у. е.
I	100	5	5	8
II	150	6	8	5
III	120	4	6,5	6
IV	200	7	6	4
V	130	5	7	7
Весовые коэф.	0,20	0,25	0,23	0,32

Выбрать наиболее эффективный вариант поставки оборудования

Вариант №8

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в табл. 7.9.

Таблица 7.9

Показатели качества двигателей

Варианты двигателей	Показатели качества		
	Мощность, л. с.	Крутящий момент, кгс·м	Масса, кг
1	183	71	857
2	186	72	902
3	172	69	840
4	181	66	828
5	175	68	860
6	180	66	803
7	175	67	1005
Весовые коэф.	0,26	0,40	0,34

Найти и рекомендовать оптимальный вариант двигателя.

Вариант №9

Показатели эффективности работы предприятий приведены в табл. 7.10.

Таблица 7.10

Показатели эффективности работы предприятий

№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий				
	Прибыль, д. е.	Себест. единицы продукции, д. е.	Доходы, д. е.	Фондо-отдача, у. е.	Производит. у. е.
1	32,0	43,0	30,0	0,1	200
2	27,0	25,0	40,0	0,4	300
3	30,0	40,0	44,0	0,3	260
4	28,0	37,0	37,0	0,25	280
5	17,0	22,0	35,0	0,25	250
Весовые коэф.	0,22	0,33	0,15	0,25	0,10

Выбрать наиболее эффективно работающее предприятие.

Вариант №10

Для семи проектов транспортных устройств определены относительные единичные показатели технологического совершенства конструкции.

Численные значения единичных показателей и соответствующие весовые коэффициенты приведены в табл. 7.11.

Таблица 7.11

Показатели транспортных устройств

Варианты транспортных устройств	Скорость (К1)	Прочность (К2)	Перегрузка (К3)	Мощность (К6)
1	0,89	0,78	0,82	0,77
2	1,2	1,0	0,65	0,94
3	1,0	0,94	0,92	0,95
4	0,97	0,95	0,91	0,85
5	0,87	0,97	1,0	0,86
6	0,98	0,88	0,85	1,0
Весовые коэф.	0,22	0,185	0,165	0,430

Выбрать оптимальное транспортное устройство.

Вариант №11

Показатели экономической эффективности работы предприятий приведены в табл. 7.12.

Таблица 7.12

Показатели экономической эффективности работы предприятий

№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий				
	Прибыль, д. е.	Себест. единицы продукции, д. е.	Доходы, д. е.	Фондо-отдача, у. е.	Производит. у. е.
1	40,0	43,0	26,0	0,4	200
2	35,0	23,0	40,0	0,35	300
3	45,0	42,0	56,0	0,15	260
4	38,0	35,0	45.0	0,2	180
5	25,0	22,0	26,0	0,24	260
Весовые коэф.	0,23	0,33	0,14	0,1	0,2

Определить наиболее эффективно работающее предприятие.

Вариант №12

Технические и эксплуатационные характеристики различных вариантов двигателей приведены в табл. 7.13.

Таблица 7.13

Технические и эксплуатационные характеристики двигателей

Варианты двигателей	Параметры двигателей			
	Мощность, л. с.	Прочность	Крутящий момент, кгс·м	Масса, кг
1	170	0,92	67	950
2	186	0,95	70	1000
3	176	0.96	68	960
4	183	0,89	67	920
5	187	0,93	68	960
6	180	0.90	66	800
7	175	0,89	69	880
Весовые коэф.	0,34	0,16	0,24	0,26

Определить и выбрать оптимальный вариант двигателя.

Вариант №13

Для пяти проектов технических систем определены относительные параметры технического совершенства конструкции.

Значения параметров и весовых коэффициентов приведены в табл. 7.14.

Таблица 7.14

Параметры проектов технических систем

Вариант технической системы	Сложность конструкции	Масса и габарит	Время подготовки к работе	Уровень автоматизации	Мощность
I	0,542	0,881	1,0	0,79	0,82
II	0,623	1,0	0,91	0,88	0,81
III	0,558	0,558	0,965	0,82	0,65
IV	0,525	0,972	0,851	0,71	0,98
V	0,567	0,565	0,867	0,77	0,86
Весовые коэф.	0,177	0,124	0,24	0,295	0,164

Выбрать оптимальный проект технической системы.

Вариант №14

Для четырех вариантов проектов технических систем определены относительные параметры технического совершенства конструкции.

Значения параметров и весовых коэффициентов приведены в табл. 7.15.

Таблица 7.15

Параметры проектов технических систем

Вариант технической системы	Сложность конструкции	Масса и габарит	Время подготовки к работе	Уровень автоматизации	Мощность	Уровень унификации
I	0,84	0,98	1,0	1,0	0,72	0,612
II	0,82	1,0	0,78	0,78	0,82	0,618
III	0,65	0,88	0,76	0,78	0,625	0,917
IV	0,58	0,97	0,75	0,72	0,98	0,711
Весовые коэф.	0,124	0,157	0,21	0,174	0,195	0,14

Выбрать оптимальный проект технической системы.

Вариант №15

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную вариант по техническому обеспечению производства оборудованием. С помощью статистических данных и информации разных заводов-изготовителей были определены необходимые критерии эффективности функционирования поставляемого оборудования.

Исходные данные представлены в табл. 7.16.

Таблица 7.16

Критерии эффективности оборудования

Варианты поставки оборудования	Критерии эффективности оборудования			
	Производительность, д. е.	Стоимость оборудования, д. е.	Объем памяти, у. е.	Надежность, у. е.
I	200	6.5	6	7
II	170	6	8	5
III	130	5	6.5	5.8
IV	220	7	7	6
V	150	4.5	7	7
VI	180	4	6	5
Весовые коэф.	0,32	0,25	0,23	0,20

Определить и рекомендовать оптимальный вариант поставки оборудования

7.5. Порядок выполнения задания

Задание лабораторной работы выполняется побригадно. По результатам работы необходимо сформировать отчет (см. содержание отчета). Отчёт сдается преподавателю оформленным в печатном виде.

7.5.1. Ход работы

1. Изучить теоретически и проработать на примере материал по теме лабораторной работы (лабораторный практикум, лекции, учебники).
2. Согласно номера своего варианта выбрать условие задачи.
3. Сформулировать, записать исходные данные и решить аналитически многокритериальную задачу методом аддитивной оптимизации.
4. При решении использовать систему вычислений Octave.
5. Оформить отчет по лабораторной работе.
6. Защитить лабораторную работу.

7.5.2. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) титульный лист с названием работы и номером варианта (см. образец в конце практикума);
2) цель работы;
3) формулировку задания;
4) аналитическое решение задачи своего варианта;
5) результаты вычислений и полученные значения или параметры;
6) при наличии — программный код решения задачи;
7) при наличии — графики и таблицы исходных данных и результатов;
8) при наличии — схемы и диаграммы исходных данных и результатов;
9) анализ полученных результатов и вывод о проделанной работе.

Порядок представления данных и результатов пп. 4, 5, 6, 7, 8 определить самостоятельно исходя из логики задания;

7.5.3. Порядок защиты лабораторный работы

Защита работы может осуществляться одним из нижеперечисленных способов или их сочетанием на усмотрение преподавателя.

1. Устный ответ по теме работы.
2. Тестирование по теме работы.
3. Задача по теме работы.
4. Иные варианты на усмотрение преподавателя.

7.5.4. Контрольные вопросы к защите лабораторной работы

1. Математическая модель задач принятия решений в условиях определенности.
2. Какие задачи называются многокритериальными?
3. Какие существуют методы свертывания критериев в многокритериальных задачах?
4. В чем заключается метод аддитивной оптимизации?
5. Что такое весовой коэффициент?
6. Как определяется обобщенная целевая функция в методе аддитивной оптимизации?
7. В чем заключается алгоритм нормализации критериев?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Образец титульного листа

Федеральное агенство связи
ФГБОУ ВО СПбГУТ им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Кафедра Сетей связи и передачи данных

Дисциплина: Оптимизация и математические методы принятия решений

Лабораторная работа № 1

Вариант № 1

Название лабораторной работы

Группа:	ИКХХ-00
Студент(ы):	Петров Василий Иванович Иванов Иван Петрович
Преподаватель:	ст.преп. Владимиров С.А.

Санкт-Петербург
2018

Владимиров Сергей Александрович

ОПТИМИЗАЦИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Лабораторный практикум

Редактор *Х. Х. Ххххххххххх*

План изданий 20ХХ г., п. ХХ

Подписано к печати ХХ.ХХ.20ХХ
Объем Х,ХХ усл.-печ. л. Тираж ХХ экз. Заказ ХХХ

Редакционно-издательский отдел СПбГУТ
193232 СПб., пр. Большевиков, 22
Отпечатано в СПбГУТ