

«Теория принятия решений»

ст. преп. каф. СС и ПД

Владимиров Сергей Александрович

Лекция 9

Теория графов в задачах принятия решений. Основы теории графов.

Учебные вопросы:

Введение. Историческая справка.

1. Основные понятия. Элементы теории графов.
2. Матричное представление графа. Матрица смежности. Матрица инцидентий.
Матрицы достижимостей и контрадостижимостей.
3. Линейные графы сигналов и передача графа. Эквивалентные преобразования графов. Передача графа.

Заключение

Литература:

1. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари ; Под ред. Г.П. Гаврилова. — М. : Мир, 1973.
2. Басакер, Р. Конечные графы и сети / Р. Басакер, Т. Саати. — М. : Наука, 1974.
3. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. — М. : Мир, 1978.
4. Берж, К. Теория графов и ее применения / К. Берж. — М. : Изд-во Иностранной литературы, 1962.
5. Мэзон, С. Электронные цепи, сигналы и системы / С. Мэзон, Г. Циммерман ; Под ред. проф. П.А. Ионкина. — М. : Издательство иностранной литературы, 1963.
6. Деев, В.В. Методы модуляции и кодирования в современных системах связи / В.В. Деев. — Спб. : Наука, 2007. — ISBN: 978-5-02-025182-3.

Введение.

Историческая справка.

Основоположником теории графов является Леонард Эйлер (1707–1782), который решил в 1736 г. известную в то время задачу о семи кенигсбергских мостах. Впоследствии эта задача стала одной из классических задач теории графов. Впоследствии методы теории графов применялись и другими известными учеными в самых различных областях науки: в 1847г. Кирхгоф использовал теорию деревьев для расчета силы тока в электрической цепи; в 1857г. Кэли использовал деревья в решении задач органической химии. И таких примеров можно привести ещё много .

Теория графов является разделом дискретной математики, изучающим свойства графов. Эта область науки крайне обширна и столь же интересна, сколь и сложна. Этот математический инструмент находит применение во многих отраслях науки и промышленности. В качестве примеров использования теории графов можно привести поиск кратчайшего маршрута на карте, построение блок-схем алгоритмов, схем размещения элементов на печатных платах, принципиальные и структурные схемы устройств и многое другое.

Основные понятия. Элементы теории графов.

В общем смысле *граф* G задается множеством точек или *вершин* (узлов) x_1, x_2, \dots, x_n (обозначается символом X) и множеством линий или *ребер* a_1, a_2, \dots, a_m (обозначается A), которые соединяют между собой все или часть этих вершин. То есть, граф полностью задается и обозначается парой (X, A) . Существует и другое обозначение. Граф, содержащий n вершин и m ребер, называется (n, m) -графом, а $(1, 0)$ -граф называется *тривиальным*. Пример графа показан на рис.1.

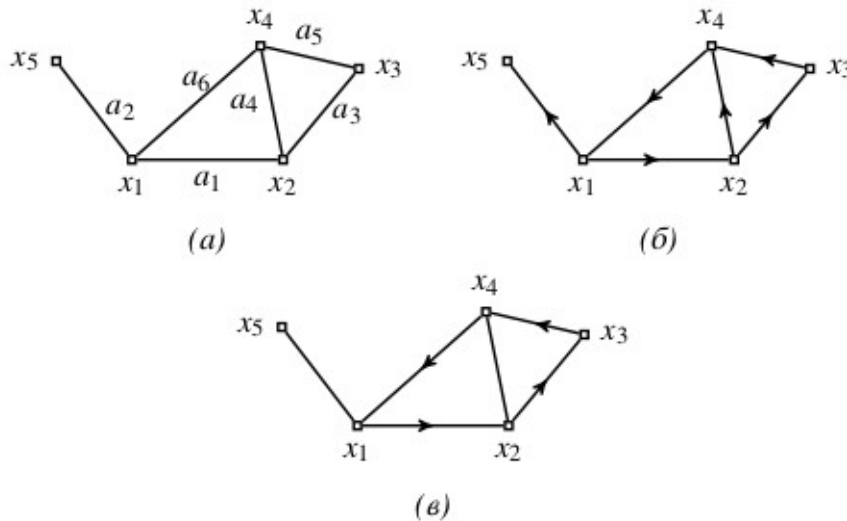


Рис.1. Примеры графа: (а) неориентированный граф; (б) ориентированный граф; (в) смешанный граф.

Две вершины x_i и x_j , соединенные ребром a_k , называются *смежными*. Их иногда обозначают как $x_i \text{adj} x_j$. При этом говорят, что вершина x_i и ребро a_k *инцидентны*, как и x_j и a_k . Два различных ребра, инцидентных одной и той же вершине, также называются *смежными*. Так, на рис.1 вершины x_1 и x_2 смежные, также смежными являются ребра a_1 и a_3 , которые инцидентны вершине x_2 .

Если в графе $G=(X,A)$ ребра из множества A ориентированы (обычно показывается стрелкой), то такой граф называется *ориентированным графом* или *орграфом*, а сами ребра называются *дугами*. Граф, ребра которого не имеют ориентации, называется *неориентированным*, а содержащий и ориентированные, и неориентированные ребра — *смешанным*. Неориентированный граф, соответствующий орграфу $G=(X,A)$, обозначается как $G=(X,A)$ и называется *неориентированным дубликатом* или *неориентированным двойником* графа G . Примеры всех трех видов графа показаны на рис.1. При этом, граф на рис.1(а) является неориентированным дубликатом графа на рис.1(б).

Дуги орграфа удобно обозначать парами вершин вида (x_i, x_j) , указывая от какой вершины к какой направлена дуга. Например, на рис.1(б) можно выделить дугу (x_1, x_2) , соответствующую ребру a_1 неориентированного графа на рис.1(а).

Отдельно выделяют два вида графов. *Мультиграф* (см. рис.2(а)), в котором нет петель, но две вершины могут быть соединены более чем одним ребром — такие ребра называются *кратными*. *Петлей* называется ребро (дуга) начальная и конечная вершины которой совпадают. Граф, в котором допускаются и кратные ребра и петли, называется *псевдографом* (рис.2(б)).

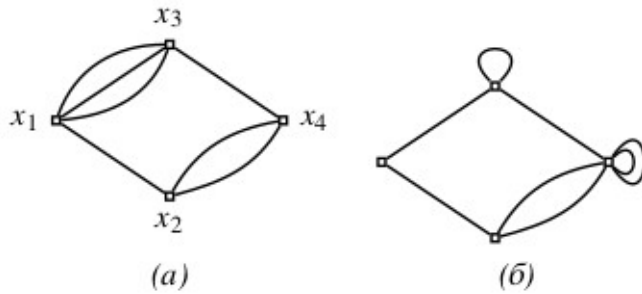


Рис.2. Мультиграф (а) и псевдограф (б).

Орграф, не имеющий симметричных пар дуг, называется *направленным графом*. При этом *симметричными* называют дуги, соединяющие одну и ту же пару вершин, но ориентированные в противоположных направлениях, например (x_i, x_j) и (x_j, x_i) . На рис.3(а) показан пример направленного графа. Дуги (x_2, x_4) и (x_4, x_2) ненаправленного графа на рис.3(б) являются симметричными.

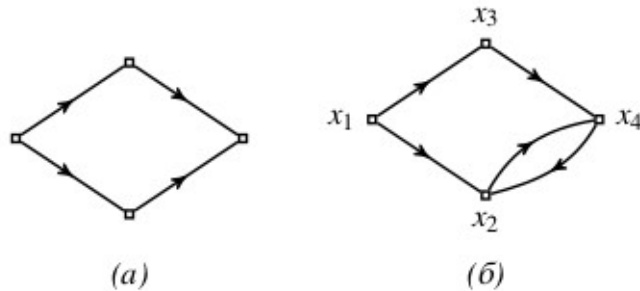


Рис.3. Направленный (а) и ненаправленный (б) графы.

Если вершины графа имеют какие-либо метки, отличающие их друг от друга, то такой граф называется *помеченным* или *перенумерованным*. Например, графы на рис.2(а) и рис.3(б) являются помеченными, а графы на рис.2(б) и 3(а) — нет.

Граф G_1 , все вершины и ребра которого принадлежат графу G , называется *подграфом* графа G , а G , в свою очередь, является *надграфом* для G_1 . Подграф графа G , содержащий все его вершины, называется *остовным подграфом* или *частичным графом*. Графы на рис.4(б) и 4(в) являются подграфами графа 4(а), который является для них надграфом. При этом, граф 4(в) является остовным подграфом графа 4(а).

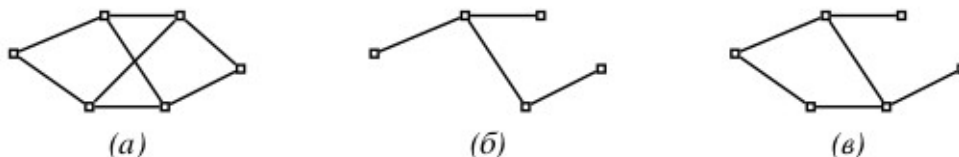


Рис.4. Граф (а) и его подграфы (б) и (в).

Маршрутом в графе G называют чередующуюся последовательность вершин и ребер $x_1, a_1, x_2, a_2, \dots, x_{n-1}, a_{n-1}, x_n$, которая начинается и заканчивается вершиной, а каждое ребро инцидентно двум вершинам — непосредственно предшествующей и непосредственно следующей за ним. Фактически, достаточно говорить просто про последовательность вершин или про последовательность ребер — одно подразумевает другое. Такой маршрут, соединяющий вершины x_1 и x_n , иногда называют $(x_1 - x_n)$ - *маршрутом*. Если $x_1 = x_n$, то маршрут называется *замкнутым*, в ином случае — *открытым*. Маршрут, все ребра которого различны, называется *цепью*. Если при этом различны все вершины, то маршрут называется *простой цепью*. Замкнутая цепь называется *циклом*, а если все n вершин замкнутого маршрута различны и $n \geq 3$, то он называется *простым циклом*.

В случае, если речь идет об ориентированных графах, используют понятие *ориентированный маршрут* или *путь*, под которым понимают последовательность дуг (и, соответственно, вершин), в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей. Аналогично понятиям цепи и простой цепи выделяют *ориентированную цепь* (*орцепь*) и *простую орцепь*.

Длина (*мощность*) *маршрута* определяется количеством ребер в нем. При этом, каждое ребро считается столько раз, сколько оно встречается в этом маршруте. *Расстоянием* $d(x_i, x_j)$ между вершинами x_i и x_j графа называется длина кратчайшей простой цепи, соединяющей их. Для несоединенных x_i и x_j полагают $d(x_i, x_j) = \infty$.

Иногда дугам (x_i, x_j) графа G ставится в соответствие некоторое число c_{ij} , называемое *весом* (*длиной*, *стоимостью*) дуги. Такой граф G называется *графом со взвешенными дугами*. Если же некоторые веса v_i приписаны вершинам x_i , то такой граф называется *графом со взвешенными вершинами* или просто *взвешенным*. Иногда *взвешенным* называют граф, дуги и вершины которого имеют соответствующие им веса.

В том случае, если рассматривается некоторый путь μ , представленный последовательностью дуг, то за его *вес* принимается число $l(\mu)$, равное сумме весов всех дуг, входящих в μ :

$$l(\mu) = \sum_{(x_i, x_j) \in \mu} c_{ij}.$$

Матричное представление графа

Для алгебраического задания граф удобно представлять в виде матриц.

Для примера возьмем граф G , представленный на рис.5.

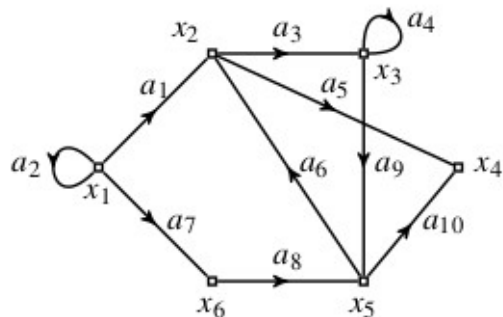


Рис.5. Пример графа представления

Матрица смежности

Матрица смежности графа G полностью определяет структуру графа. Она обозначается как $\mathbf{A}=[a_{ij}]$, где

$a_{ij}=1$, если в G существует дуга (x_i, x_j) ,

$a_{ij}=0$, если в G отсутствует дуга (x_i, x_j) .

Таким образом, для графа G на рис.5 матрица смежности будет равна

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

Матрица инциденций

Матрица инциденций графа G с n вершинами и m дугами, обозначается как $\mathbf{B}=[b_{ij}]$. Она имеет размерность $n \times m$ и определяется как

$$\begin{aligned} b_{ij} &= 1, & \text{если } x_i &\text{ — начальная вершина дуги } a_j, \\ b_{ij} &= -1, & \text{если } x_i &\text{ — конечная вершина дуги } a_j, \\ b_{ij} &= 0, & \text{если } x_i &\text{ не инцидентна } a_j \text{ или } a_j \text{ — петля.} \end{aligned}$$

Таким образом, для графа G на рис.5 матрица инциденций будет равна

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c|cccccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} .$$

Так как каждая дуга инцидентна двум различным вершинам, кроме случая, когда она образует петлю, каждый столбец матрицы инциденций либо содержит и $\langle\langle 1 \rangle\rangle$ и $\langle\langle -1 \rangle\rangle$, либо все его элементы равны $\langle\langle 0 \rangle\rangle$.

Для неориентированного графа матрица инциденций определяется аналогично, за исключением того, что $\langle\langle -1 \rangle\rangle$ заменяется на $\langle\langle 1 \rangle\rangle$.

Матрицы достижимостей и контрадостижимостей

Матрица достижимостей $\mathbf{R}=[r_{ij}]$ определяется как

$$\begin{aligned} r_{ij} &= 1, & \text{если вершина } x_j &\text{ достижима из } x_i, \\ r_{ij} &= 0, & \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

Множество вершин $R(x_i)$ графа G , достижимых из заданной вершины x_i , состоит из таких x_j , для которых элемент r_{ij} в матрице \mathbf{R} равен $\langle\langle 1 \rangle\rangle$. Все диагональные

элементы \mathbf{R} равны $\ll 1 \gg$, так как каждая вершина достижима из себя самой с помощью пути длины 0. Матрица достижимостей \mathbf{R} для графа G на рис.5 равна

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}.$$

Матрица контрадостижимостей (или матрица обратных достижимостей) $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$ определяется как

$$\begin{aligned} r_{ij} &= 1, & \text{если вершина } x_i \text{ достижима из } x_j, \\ r_{ij} &= 0, & \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

Таким образом, контрадостижимое множество $Q(x_i)$ графа G — это множество таких вершин, что из любой вершины этого множества можно достигнуть вершины x_i .

Из определений матриц \mathbf{Q} и \mathbf{R} следует, что матрица контрадостижимостей \mathbf{Q} равна транспонированной матрице достижимостей \mathbf{R}^T :

Матрица контрадостижимостей $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$. \mathbf{Q} для графа G на рис.5 равна

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Линейные графы сигналов и передача графа

Граф сигналов — это графическое представление соотношений между несколькими переменными. В случае линейности этих соотношений, граф выражает систему линейных алгебраических уравнений и называется *линейным графом сигналов*. Такой способ представления позволяет наглядно выразить систему уравнений и решить ее непосредственно путем анализа графа.

Граф сигналов представляет из себя ориентированную цепь, в которой каждая дуга¹ (x_j, x_k) связана с числом t_{jk} , называемым *передачей дуги*, а каждому узлу x_j соответствует так называемый *узловой сигнал* X_j .

В дальнейшем, говоря в этом разделе о графах, будем иметь в виду именно линейные графы сигналов.

Узловые сигналы определяются уравнениями вида:

$$X_k = \sum_j X_j t_{jk}, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

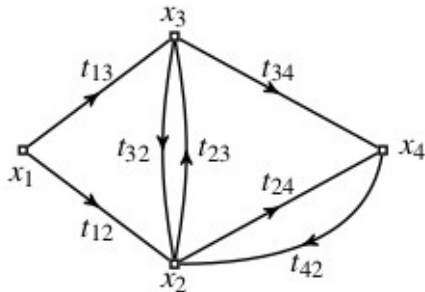


Рис.6. Пример графа сигналов

1 В источниках (например, [5] и [6]) также используют термины <<ребро>> и <<ветвь>>.

Для примера рассмотрим граф сигналов на рис.6. Согласно формуле его узловые сигналы будут равны

$$X_2 = X_1 t_{12} + X_3 t_{32} + X_4 t_{42};$$

$$X_3 = X_1 t_{13} + X_2 t_{23};$$

$$X_4 = X_2 t_{24} + X_3 t_{34}.$$

Таким образом, можно сказать, что линейный граф сигналов представляет из себя систему линейных уравнений, представленную особым образом — вместо символов <<+>>, <<=>> используются направленные дуги и узлы. Каждое уравнение в этой системе имеет форму <<причина — следствие>>. При этом каждый зависимый узловой сигнал выражен один раз в виде явного *следствия*, вызванного другими узловыми сигналами, действующими в качестве *причин*. Совокупность этих свойств приводит к тому, что уравнения вида могут быть решены непосредственно путем вычисления графа .

Эквивалентные преобразования графов

При решении графов сигналов используются эквивалентные преобразования, позволяющие упростить структуру графа и уменьшить сложность расчетов. На рис.7 приведены элементарные эквивалентные схемы графов.

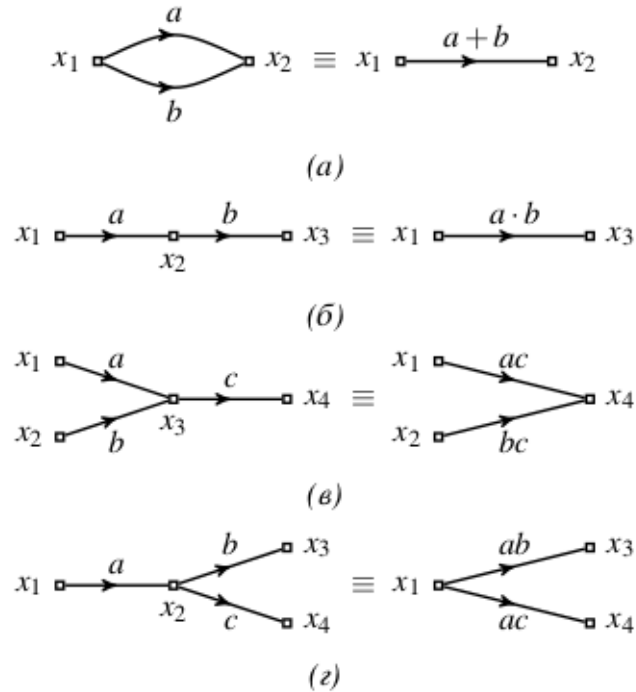


Рис.7. Элементарные эквивалентные схемы графов:

- (а) сложение; (б) умножение; (в) распределение (разложение) на множители справа;
- (г) распределение (разложение) на множители слева

Преобразования на рис.7 являются обратимыми.

На рис.8 приведено исключение узла в звезде. Такое преобразование в общем случае не является обратным. То есть, если задан граф в виде квадрата (рис.8(б)), то не следует ожидать, что эквивалентный ему граф будет иметь форму звезды (рис.8(а)).



Рис. 8.8. Исключение узла в звезде:
(а) исходная звезда; (б) итоговый квадрат

Если преобразуемый граф содержит любые замкнутые цепи, то при его преобразовании появляются одна или больше петель, как показано на рис.9.

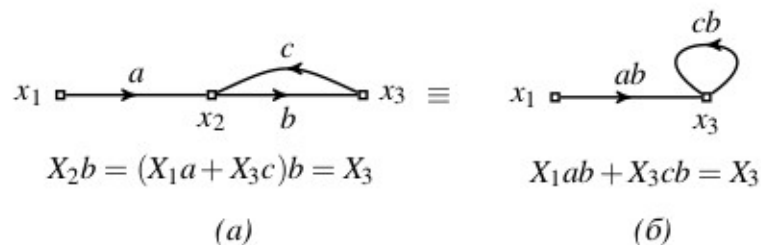


Рис. 8.9. Пример образования петли при разделении дуги:
(а) исходный граф; (б) итоговый граф с петлей

Уравнение для узлового сигнала, приведенное на рис.9(б) можно преобразовать к виду

$$X_1 a b = X_3 (1 - c b) \Rightarrow X_3 = \frac{X_1 a b}{1 - c b}.$$

Таким образом, граф на рис.9(б) можно свести к одной дуге $(x_1 x_3)$ с передачей, равной $\frac{X_1 a b}{1 - c b}$.

Передача графа

Передача T графа равна сигналу, возникающему в некотором зависимом узле, на единицу сигнала в некотором заданном узле-источнике. Если в графе содержится только один узел - сток x_k , то есть узел, имеющий только входящие ветви, и один узел - источник x_j только с исходящими ветвями, то передача графа определяется

однозначно по формуле
$$T = \frac{X_k}{X_j}.$$

Отметим, что индексы у передачи графа в этом случае не указываются.

Если же в графе есть источник, но нет стока, или стоков несколько, а также в случае произвольной структуры графа при отсутствии источников и стоков, необходимо указывать между какими узлами считается передача графа. В этом случае она обозначается как T_{jk} — передача графа между узлами x_j и x_k .

При определении передачи графа используются его топологические свойства. Важными топологическими параметрами графа являются его пути и контуры.

Путь — это непрерывная последовательность дуг (в указанном направлении), вдоль которой каждый узел встречается не более одного раза. Произведение передач дуг вдоль этого пути образует *передачу пути* P .

Контур (или контур обратной связи) — это простой замкнутый путь, вдоль которого каждый узел встречается не более одного раза за один обход контура. *Передача контура* L равна произведению передач ветвей в этом контуре.

Для примера рассмотрим граф на рис.6. Он содержит четыре различных пути от узла x_1 до узла x_4 : $P_1=t_{13}t_{34}$, $P_2=t_{13}t_{32}t_{24}$, $P_3=t_{12}t_{23}t_{34}$ и $P_4=t_{12}t_{24}$. Также в нем присутствует 3 контура: $L_1=t_{23}t_{32}$, $L_2=t_{24}t_{42}$ и $L_3=t_{23}t_{34}t_{42}$.

Зная все пути между узлами x_j и x_k и все контуры в графе можно полностью выразить передачу графа T_{jk} .

Для расчета передачи любого графа T_{jk} через p путей и m контуров используется общее правило, которое часто называют формулой Мэсона–Циммермана.

$$T_{jk} = \frac{[(P_1 + P_2 + \dots + P_p)(1 - L_1)(1 - L_2) \dots (1 - L_m)]^*}{[(1 - L_1)(1 - L_2) \dots (1 - L_m)]^*}.$$

Знак угла означает, что при умножении коэффициентов внутри скобок приравнивается к нулю любой член, который содержит произведение передач двух контуров или произведение передач пути и контура, которые касаются друг друга в графе.

Формулу можно переписать в виде

$$T_{jk} = \frac{\left[\sum_i P_i \prod_v (1 - L_v) \right]^*}{\left[\prod_{w=1}^m (1 - L_w) \right]^*} = \frac{\left[\sum_i P_i \prod_v (1 - L_v) \right]^*}{1 - \sum_{w=1}^m L_w + \left[\sum_{s,t} L_s L_t \right]^* - \left[\sum_{s,t,u} L_s L_t L_u \right]^* + \dots},$$

где P_i — передача i -го прямого пути (без замкнутых циклов) между узлами x_j и x_k ($i=1..p$); L_v — передача v -го контура.

В числителе формулы должны находиться только те сомножители $(1-L_v)$, для которых контур L_v не соприкасается с путем P_i . Знак угла за скобкой показывает, что среди членов соответствующих сумм в произведениях должны отсутствовать соприкасающиеся или пересекающиеся контуры.

Для примера рассмотрим нахождение передачи графа для диаграммы состояний сверточного кода, которая используется для решения задачи определения весового спектра сверточного кода.

На рис.10 приведены диаграмма состояний сверточного кода (рис.10(а)) и модифицированная диаграмма состояний (рис.10(б)), в которой узел x_1 разделен на начальный узел x_1 и конечный узел x_1' . При этом рассматриваются только те пути, которые выходят из узла x_1 и в него же возвращаются, не попадая в это состояние в промежуточные моменты — именно поэтому на модифицированной диаграмме (рис.10(б)) отсутствует петля t_{11} .

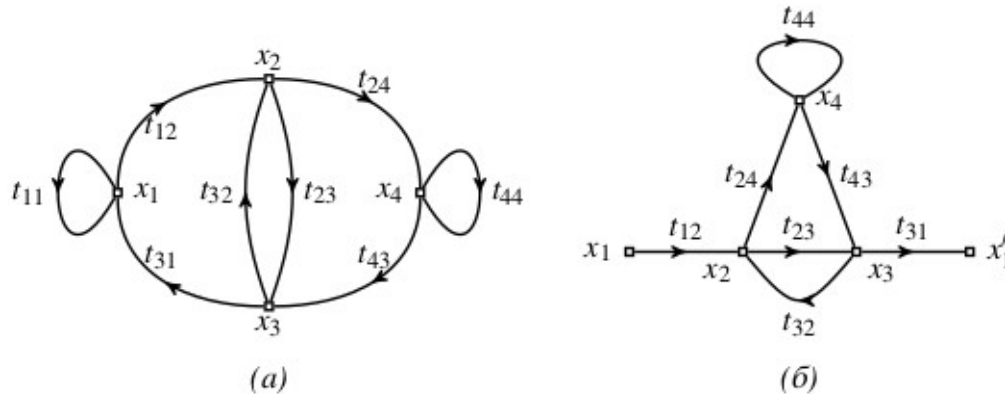


Рис.10. Диаграмма состояний сверточного кода:
(а) исходная; (б) модифицированная

Модифицированная диаграмма на рис.10(б) содержит два пути между узлами x_1 и x_1'

$$P_1 = (x_1 x_2 x_3 x_1') = t_{12} t_{23} t_{31};$$

$$P_2 = (x_1 x_2 x_4 x_3 x_1') = t_{12} t_{24} t_{43} t_{31}.$$

Также она содержит три контура

$$L_1 = (x_4 x_4) = t_{44};$$

$$L_2 = (x_2 x_3 x_2) = t_{23} t_{32};$$

$$L_3 = (x_2 x_4 x_3 x_2) = t_{24} t_{43} t_{32}.$$

Таким образом, согласно формуле , передача графа для диаграммы на рис.10(б) между узлами x_1 и x_1' равна

$$T_{11}' = \frac{P_1(1-L_1)+P_2}{1-(L_1+L_2+L_3)+L_1L_2}.$$

В практической деятельности постоянно возникают задачи “наилучшего” - оптимального размещения оборудования в сетях или графах – с объективным требованием минимизации наибольшего расстояния от произвольной вершины графа до пункта размещения. Такие задачи называются минимаксными задачами размещения.

Второй тип задач для таких моделей, ориентированный чаще на поиск максимальных значений - это задачи сетевого планирования и управления.

Еще один большой класс задач теории графов – задача о развозке(доставке), технической трассировке электрических цепей, маршрутные задачи и подобные, приведенные к ним задачи нахождения кратчайших путей и оптимизации маршрутов, включая задачи максимальных и минимальных потоков.