

# «Теория принятия решений»

ст. преп. каф. СС и ПД  
Владимиров Сергей Александрович

## *Лекция 7-1-2*

### **Априорная неопределенность вероятностных моделей в задачах принятия решений. Методы динамического программирования.**

#### СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Учебные вопросы:

1. Уровни априорной неопределенности относительно статист. характеристик.
2. Основные методы преодоления априорной неопределенности при принятии статистических решений.
3. Характеристика многошаговых распределительных задач.
4. Методы динамического программирования. Постановка задачи прямой и обратной прогонки.
5. Методика реализации принципа оптимальности.
6. Метод множителей Лангранжа для задач с ограничениями в форме равенств.
7. Задачи нелинейного программирования с ограничениями в форме неравенств. Условия Куна-Таккера.

Заключение

## Литература:

1. Теория передачи сигналов: Учебник для вузов/ Зюко А.Г., Кловский Д.Д., Назаров М.В., Финк Л.М. \_М.: Связь, 1980.
2. Терентьев В.М. , Парашук И.Б. Теоретические основы управления сетями многоканальной радиосвязи. СПб.: ВАС 1995.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники.- М.: Радио и связь, 1989.
4. Щекотихин В.М., Терентьев В.М. Прикладная математика.- Орел: Академия ФАПСИ, 2002.
5. Терентьев В.М. Методика обоснования требований к показателям качества АСМКРС. -Л.: ВАС, 1991.
6. Таха Х. Введение в исследование операций . В двух книгах .Пер. с англ. М.: Мир 1985 .

## Введение

Полнота вероятностной математической модели определяется наличием всех априорных статистических данных относительно вида и параметров плотностей или функций распределения, представляемых ею реальных процессов моделируемого объекта. В случае отсутствия ряда данных о модели говорят о наличии априорной неопределенности, преодоление которой является существом задач математической статистики – построения алгоритмов обработки наблюдаемых выборочных данных с целью получения оптимальных статистических выводов.

Множество задач с подобной постановкой исходных данных в качестве выборочных параметров и построением обобщенных моделей применяются в реальных коммуникационных технических системах и сетях.

Коммуникационное оборудование почти всегда в реальных условиях работает в априорной параметрической неопределенности — это обусловлено как объемами проходящего трафика, так и незнанием параметров исходных распределений сигналов и помех, которые могут оказывать значительное влияние на качественные показатели устройств. Способы решения задач и методы преодоления подобных априорных неопределенностей различны и зависят от вида самой неопределенности.

## ***Уровни априорной неопределенности относительно статистических характеристик.***

*Основными понятиями, определяющими принятие статистических решений в условиях априорной неопределенности, являются:*

- **пространство наблюдений**  $\vec{z}(\vec{x}(t), t) \in Z$  – совокупность всех реализаций наблюдаемого случайного процесса  $\vec{x}(\vec{\theta}, t)$ ;
- **вероятностная мера на пространстве наблюдений** – совместная плотность (функция) распределения выборочных значений случайного процесса  $w(\vec{z}/\vec{\theta})$  - функция правдоподобия, условная по вектору априорно неизвестных параметров модели  $\vec{\theta}$  ;
- **априорное распределение неизвестных параметров**  $w(\vec{\theta})$  .

В зависимости от полноты априорных сведений о виде распределения случайного процесса  $\vec{x}(t)$  и его параметрах различают следующие **уровни априорной неопределенности**:

- **параметрический**, когда вид распределения  $w(\vec{x}(t), t)$  является заданным, а сведения о его параметрах, например, о среднем либо дисперсии в условиях задачи отсутствуют;
- **непараметрический** – нет априорных сведений ни о виде распределения, ни о его параметрах.

*Наличие априорной неопределенности в задаче принятия статистических решений приводит к необходимости проведения дополнительного по сравнению с традиционным подходом этапа обработки наблюдаемых данных (обучения):*  
**идентификации параметров модели** - в случае параметрического уровня и  
**идентификации вида распределения** – в случае непараметрической постановки задачи.

Этап обучения позволяет преодолеть априорную неопределенность за счет формирования оценок неизвестных заранее функций распределения либо их параметров на основе информации, заложенной в выборочных данных. При этом *выборки могут быть классифицированными (тестовыми) и не классифицированными.*

Восстановление априорно неизвестных данных по выборке приводит к возможности приспособления (адаптации) оптимальных для условий полной статистической определенности алгоритмов принятия решений к новым условиям путем использования полученных оценок распределений и их параметров вместо истинных.

Поэтому под *адаптивными алгоритмами* в дальнейшем *будем понимать алгоритмы обработки и принятия решений, использующие обучение (преодоление априорной неопределенности) на основе выборочных данных.*

Общим критерием качества работы адаптивных алгоритмов является их сходимость к алгоритмам, оптимальным в условиях полной априорной определенности.

*Методы принятия решений в условиях риска.*

*Принятие решений при известных априорных вероятностях.*

Будем обозначать вероятности гипотез:  $Q_1=p(P_1), Q_2=p(P_2), \dots, Q_n=p(P_n)$ . Таким образом, мы считаем, что вероятности известны до того, как мы решили принять решение.

Решение – выбор оптимальной стратегии  $A$ . говорят, что это ситуация идеального наблюдателя.

Естественно, в качестве критерия выбирается средний выигрыш, который мы получим, если выберем стратегию  $A_i$ .  $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} Q_j$ . Это аналог математического ожидания. Решение принимается по критерию:  $\max_i \bar{a}_i$  - критерий максимального среднего выигрыша - критерий Лапласа [L].

Если задана матрица рисков, то можно для каждой строки вычислить средний риск:  $\bar{r}_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} Q_j$  и оптимальным будет являться решение, которое  $\min_i \bar{r}_i$ .

Слабым местом этого подхода является то, что *надо знать априорные вероятности*. Если они неизвестны, то необходимо их изучить. Это можно делать путём экспериментов, которые учитывают условия природы. Говорят, что мы эту систему обучаем. Такой подход называется принципом адаптации к условиям.

Если априорные вероятности изучить не удаётся, то применяется принцип недостаточности основания: *если не знаем о вероятности, то считаем, что гипотезы природы равновероятны*.

После этого применяем критерий идеального наблюдателя. Так как при равных вероятностях энтропия (неопределённость) максимальна, то мы применяем принцип пессимизма. Если сами значения вероятности неизвестны, но есть информация о предпочтениях гипотез, то существуют методы обработки предпочтений и получения вероятностей.

В некоторых случаях учитывается не только средний выигрыш, но также и дисперсия, т. е. величина разброса выигрыша в каждой строке:

$$\max_i (\bar{a}_i - k \times \sigma_{a_i}); \quad \sigma_{a_i} = \sqrt{D_{a_i}}$$

## **Принятие решений при неизвестной априорной информации.**

Если априорная информация неизвестна или ненадёжна, то применяются другие критерии:

1) **Критерий Вальда** ( $W$ ) : это максимально-минимальный критерий, т.е. выбирается максимальная стратегия  $A_k$ , для которой  $W = \max_i \min_j a_{ij}$ . Мы подходим к этой задаче, рассчитывая на самый худший случай.

2) **Критерий Сэвиджа** ( $S$ ) : это критерий минимаксного риска:  $S = \min_i \max_j r_{ij}$ . Этот критерий не эквивалентен критерию Вальда, т.е. оптимальный по Сэвиджу не обязательно так же будет эквивалентен по Вальду.

3) **Критерий Гурвица** ( $H$ ) : это комбинированный критерий, его так же называют критерием пессимизма-оптимизма:  $H = \max_i \left( \kappa \min_j a_{ij} + (1 - \kappa) \max_j a_{ij} \right)$ ;  $0 < \kappa < 1$  - коэффициент, который выполняет требования критерия быть более или менее оптимистичным. При  $\kappa = 1 \rightarrow H \rightarrow W$ , а при  $\kappa = 0$ ,  $H \rightarrow L$  крайний оптимизм. Существуют другие критерии и однозначный выбор одного критерия невозможен.



## ***Основные методы преодоления априорной неопределенности при принятии статистических решений.***

Для случаев когда объект или модель работает в условиях динамического изменения существенно влияющих на нее параметров и/или правил необходим переход к адаптивным алгоритмам формирования управлений, который предполагает лишь модификацию этапа стохастического оптимального оценивания состояния объекта управления путем добавления к алгоритму оценки процедуры предварительной идентификации неизвестных ранее данных. Ниже рассмотрим наиболее употребляемые алгоритмы идентификации для случаев параметрической и непараметрической априорной неопределенности относительно вероятностной модели объекта.

## *А. Алгоритм оценки – идентификации на основе расширенного фильтра Калмана.*

Пусть для случая полной априорной определенности модель состояния и наблюдения за объектом записывается в виде:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= -\alpha(k)x(k) + b(k)u(k) + g(k)v(k), \\z(k) &= h(k)x(k) + w(k), x(0) = \bar{x}.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $\alpha(k)$  неизвестный априори параметр, заданный плотностью распределения вероятностей его значений  $N(\bar{\alpha}, \sigma_{\alpha}^2)$  и экспоненциальной функцией корреляции.

Введем расширенный вектор состояния объекта управления  $\vec{x}(k) = (x(k), \alpha(k))^T$ , объединяющий все компоненты, подлежащие как оценке, так и идентификации. При этом уравнения состояния и наблюдения примут вид:

$$\begin{aligned}\vec{x}(k+1) &= F(k)\vec{x}(k) + B(k)u(k) + G(k)\vec{v}(k), \\z(k) &= H(k)\vec{x}(k) + \vec{w}(k), x(0) = \bar{x},\end{aligned}\tag{2}$$

где  $F(k), B(k), G(k), H(k)$  - матрицы состояния, эффективности управления, возбуждения и наблюдения соответствующих размерностей;

$\vec{v}(k), \vec{w}(k)$  - взаимонезависимые векторные шумы возбуждения и наблюдения соответственно, являющиеся белыми гауссовскими последовательностями с нулевыми средними и диагональными матрицами дисперсий  $\sigma_{\vec{v}}^2, \sigma_{\vec{w}}^2$ .

Как видно из выражения (2) задача идентификации – оценивания приведена к классической задаче линейной фильтрации и может быть решена на основе использования векторного алгоритма фильтрации Калмана, обеспечивающего минимум среднеквадратичного отклонения оценок неизвестного параметра  $\hat{\alpha}(k)$  и состояния объекта  $\hat{x}(k)$  от их истинных значений:

$$\vec{\hat{x}}(k) = F(k)\vec{\hat{x}}(k-1) + B(k)u(k-1) + K(k)\left[\vec{z}(k) - H^T(k)(F(k)\vec{\hat{x}}(k-1) + B(k)u(k-1))\right], \quad (3)$$

где  $K(k) = P_2(k)H^T(k)\sigma_w^{-2}$  - коэффициент фильтра Калмана, рассчитываемый для линейного случая заранее, т.к. не зависит от текущих оценок;

$P_2(k)$  - матрица дисперсий ошибок оценивания, элементы которой для установившегося состояния работы фильтра определяются на основе ранее приводимых выражений.

Достоинством данного метода адаптации является универсальность и высокая точность алгоритма идентификации - оценивания, а недостатком - значительные вычислительные затраты в связи с ростом размерности вектора состояния.

## В. Алгоритм идентификации на основе процедуры стохастической аппроксимации Робинса - Монро.

Пусть наблюдения за априори неизвестным параметром  $\theta(k)$  представляют собой временной ряд  $\vec{z}(k)=(z(0), \dots, z(k), \dots, z(K))^T$ , каждый элемент которого описывается уравнением наблюдения  $z(k)=\theta(k)+w(k)$ .

Тогда условное среднее параметра  $M[\theta(k)/z(k)]$  может быть определено в соответствии с рекуррентной процедурой стохастической аппроксимации Робинса – Монро:

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-1)+\gamma(z(k)-\hat{\theta}(k-1)), \quad (4)$$

где  $\gamma=\frac{1}{k+1}$ ,  $\gamma'=\frac{1}{k+\sigma_w^2/P_2(k)}$  - весовые коэффициенты фильтра, удовлетворяющие

условиям Дворецкого по сходимости данного алгоритма;  $P_2(k)=\frac{\sigma_w^2}{(k+\sigma_w^2/\sigma_\theta^2(0))}$  -

апостериорная пошаговая дисперсия идентифицируемого параметра  $\theta(k)$ ;

$\sigma_w^2, \sigma_\theta^2(0)$  - априорно задаваемые дисперсии шума наблюдения и параметра  $\theta$ .

Нетрудно видеть, что при использовании второго весового коэффициента сходимость и точность оценки при высоких отношениях сигнал /шум становятся выше, однако это требует дополнительных по сравнению с первым случаем априорных данных о дисперсиях шума и идентифицируемого параметра.

Достоинством алгоритма является его простота, а недостатком низкая точность в силу низкого уровня учитываемых априорных данных об идентифицируемом параметре.

***С. Минимаксный алгоритм оценки состояния объекта при непараметрическом уровне априорной неопределенности модели.***

Пусть уровень непараметрической неопределенности относительно статистики оцениваемого параметра  $x(k)$  задан совокупностью плотностей распределения  $\{w_i(x)\}, i=1, \dots, n$ , ни одна из которых в отдельности не может надежно описывать реальную плотность распределения. Задача непараметрической оценки процесса  $x(k)$  в данной ситуации может быть решена на основе следующего минимаксного критерия:

$$\min_{\hat{x} \in X} \max_{w_i(x)} \left\{ \int w_i(x) \int L(x, \hat{x}) w(z/x) dz dx \right\}, \quad (5)$$

где  $w(x), w(z/x)$  – плотность распределения параметра  $x$  и функция правдоподобия, соответственно;

$L(x, \hat{x})$  – функция потерь.

**D. Алгоритмы идентификации плотностей и функций распределения для непараметрических уровней априорной неопределенности статистических характеристик.**

При неизвестных видах априорных распределений параметров объекта, подлежащих оценке необходимые для принятия решения эмпирические распределения могут быть получены непосредственно из наблюдений. Близость полученных эмпирических распределений известным аналитическим распределениям может быть проверена по критериям согласия следующего вида.

**1. Критерий Колмогорова - Смирнова.**

Обеспечивает получение оценки апостериорного распределения, оптимальной в смысле минимальной верхней границы:

$$I_1[\hat{w}(\vec{x})] = \inf_{\hat{w}(x)} \sup_{\vec{x} \in X} |w(\vec{x}) - \hat{w}(\vec{x})| \quad (6)$$

по всем значениям модулей их разности с распределением заданного класса  $w(x)$  для заданного ряда значений переменной состояния  $x$ .

**2. Критерий Ренье (относительный критерий согласия).**

$$I_2[\hat{w}(\vec{x})] = \inf_{\hat{w}(x)} \sup_{\vec{x} \in X} \left| \frac{w(\vec{x}) - \hat{w}(\vec{x})}{\hat{w}(\vec{x})} \right| \quad (7)$$

**3. Критерий Мизеса (интегральный критерий согласия).**

$$I_3[\hat{w}(\vec{x})] = \inf_{\hat{w}(x)} \sup_{\vec{x} \in X} \int [w(\vec{x}) - \hat{w}(\vec{x})]^2 \Psi[w, \vec{x}] dw(\vec{x}) \quad (8)$$

где  $\Psi(w, \vec{x})$  - вес квадрата отклонения эмпирической и гипотетической плотности для всего ряда значений переменной состояния  $x$  от первого до последнего.

*В качестве статистик при решении задач непараметрического оценивания могут быть использованы знаковые, порядковые либо ранговые.*

Пусть  $\vec{z}=(z_1, \dots, z_n)^T$  наблюдаемая выборка. Введем знаковую функцию

$$\operatorname{sgn} z = \frac{z}{\sqrt{|z|}} = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ -1, & z < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда знаковым вектором выборки  $\vec{z}$  назовем вектор  $\operatorname{sgn} \{ \vec{z} = (\operatorname{sgn} z_1, \dots, \operatorname{sgn} z_n)^T$ , образующий пространство всех знаковых векторов с общим числом точек  $2^n$ . Наконец, *произвольная функция компонент знакового вектора является знаковой статистикой*, а использующий ее алгоритм знаковым алгоритмом. Примером применения знаковой статистики является ее использование в задаче проверки симметричности относительно нуля априорно неизвестного распределения по знаку получаемых выборочных данных.

Если элементы выборки  $\vec{z}$  перегруппировать по мере возрастания их значения, то получим упорядоченную выборку  $\vec{z}'$  – вариационный ряд  $\vec{z}' = (z^1, \dots, z^n)$ , где  $-z^k \leq z^j - n p_{j-k} < j$ , называемую *вектором порядковых статистик*. *Произвольную функцию от данного вектора либо его элемента называют порядковой статистикой*. Совокупность порядковых статистик обычно представляет простую марковскую последовательность, если она была образована на основе однородной независимой выборки размером  $n$  из распределения, имеющего непрерывную плотность.

Рангом  $R_i$  элемента выборки  $z_i$  называется номер этого элемента в вариационном ряду  $\vec{z}' = z_1, \dots, z_n$ . Ранговым вектором  $\vec{R}(\vec{z}) = (R_1, \dots, R_n)^T$  выборки  $\vec{z}$  называется перестановка чисел  $1, 2, \dots$ , которая получается при замене элементов выборки их рангами. *Произвольная функция от рангового вектора называется ранговой статистикой.*

Исходную выборку  $\vec{z}$  можно восстановить, зная вектор порядковых статистик  $\vec{z}'$  и ранговый вектор  $\vec{R}$ . Ранг элемента  $z_i$  выборки размера  $n$  может быть определен на основе функции единичного скачка:

$$R_i = \sum_{k=1}^n u(z_i - z_k), i = 1, \dots, n,$$

$$u(z_i - z_k) = \begin{cases} 1, & z_i \geq z_k, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как для однородной независимой выборки функция правдоподобия инвариантна к группе перестановок ее аргументов, то все ранговые векторы для указанной выборки равновероятны ( т.е. попадание рангового вектора  $R_i$  в любую точку  $r_i, i=1, \dots, n!$  пространства возможных перестановок равна  $1/n!$ ) независимо от вида распределения, к которому принадлежит выборка. Это обстоятельство определило целесообразность использования ранговых статистик в задаче принятия решения об однородности и независимости выборки в непараметрической ее постановке.



## ***Выводы***

Проблема априорной неопределенности относительно статистических характеристик оцениваемых параметров состояния управляемого объекта разрешается переходом к адаптивным алгоритмам принятия решений. При этом, в зависимости от уровня неопределенности, используются методы параметрической, либо непараметрической идентификации неизвестных априори статистических характеристик на основе обработки выборочных данных (данных наблюдения) в виде различного вида статистик.

Степень различия решений, полученных на основе адаптивных алгоритмов, к решениям, полученным из традиционных оптимальных алгоритмов, зависит от качества выполнения этапа идентификации и асимптотически стремится к нулю при увеличении размера выборки.

## *Методы динамического программирования*

Повышение эффективности вычислений при решении определенного класса задач математического программирования может быть достигнуто путем использования методов динамического программирования. Особенности методов динамического программирования являются использование для их реализации принципов инвариантного погружения и оптимальности. Принцип инвариантного погружения предполагает замену общей задачи на эквивалентную совокупность более простых (пошаговых) задач. Принцип оптимальности определяет возможность получения глобально-оптимальных стратегий (решений) на основе решений пошаговых задач оптимизации. Методы динамического программирования позволяют существенно сократить (по сравнению с полным перебором) число анализируемых вариантов решений в процессе определения глобально-оптимального решения за счет учета априорной информации о решениях, не являющихся допустимыми, и использования информации, полученной на предыдущих шагах оптимизации. Кроме того, достоинством методов динамического программирования является их инвариантность к классу целевой и ограничительных функций.

## ***Характеристика многошаговых распределительных задач.***

В распределительных задачах с большим числом различных результатов производственной деятельности ( $i=1, n$ ) и видов ресурсов ( $j=1, m$ ) общее решение задачи оптимизации может быть при определенных условиях заменено совокупностью последовательно решаемых менее сложных частных задач оптимизации, например, по каждому из отдельных видов производственной деятельности. При этом важными понятиями ДП являются: *последовательность шагов* оптимизации, *состояние* системы распределения ресурсов и *варианты решения* (области изменения оптимизируемых переменных)

### ***Методы динамического программирования. Постановка задачи прямой и обратной прогонки.***

Рассмотрим сущность динамического программирования и введенных выше понятий на примере общей задачи линейного программирования:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \Rightarrow \max,$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m,$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0,$$

где  $z$ -целевая функция, подлежащая максимизации;  
 $x_i$ -оптимизируемые переменные;  
 $i=1, n$ -номер оптимизируемой переменной;  
 $c_i$ - доход от реализации  $i$ -го вида производственной деятельности;  
 $j=1, m$ -номер ограничений на значения переменных;  
 $a_{ij}$ - коэффициенты уравнений-ограничений;  
 $b_j$ -величина  $j$ -го ресурса (правая часть ограничений).

Здесь каждый вид производственной деятельности  $i$  может рассматриваться как отдельный шаг оптимизации; множество возможных значений переменных (допустимая область решений)  $x_i$  как варианты решений, а количество каждого  $j$ -го вида ресурса ( $B_{i1}, \dots, B_{ij}, \dots, B_{im}$ ),  $0 \leq B_{ij} \leq b_j$ , доступного для распределения на всех предыдущих и текущем (либо текущем и всех последующих) шагах (по  $i$ -м типам деятельности) как состояние модели.

Тогда оптимальное значение целевой функции  $z$  для шагов  $i, i+1, \dots, n$  при заданных состояниях  $\{B_{ij}\}$  может быть записано в виде следующей рекуррентной функции Белмана (алгоритма прямой прогонки):

$$f_i(B_{i1}, \dots, B_{im}) = \max \{c_i x_i + f_{i-1}(B_{i1} - a_{i1}x_i, \dots, B_{im} - a_{im}x_i)\}, \quad (11),$$

$$0 \leq a_{ij}x_i \leq B_{ij}$$

$$i = 1, n; j = 1, m, 0 \leq B_{ij} \leq b_j,$$

с начальными условиями  $f_0(B_{01}, \dots, B_{0m}) = 0$ .

Оптимальное значение целевой функции для случая обратной прогонки, т.е. шагов  $n, \dots, i, i-1, \dots, 1$  при заданных состояниях  $\{B_{ij}\}$  может быть записано в виде следующего алгоритма:

$$f_n(B_{n1}, \dots, B_{nm}) = \max \{c_n x_n\},$$

$$0 \leq a_{nj} x_n \leq B_{nj}$$

$$f_i(B_{i1}, \dots, B_{im}) = \max \{c_i x_i + f_{i+1}(B_{i1} - a_{i1} x_i, \dots, B_{im} - a_{im} x_i)\}, i=1, n; j=1, m, \quad (12)$$

$$0 \leq a_{ij} x_i \leq B_{ij} \quad \text{где } 0 \leq B_{ij} \leq b_j.$$

Разница между прямым и обратным способами решения задачи заключается в определении *состояния* модели. В прямой модели  $B'_{ij}$  - количество ресурса  $j$ -го типа, распределяемого от первого шага до  $i$ -го, а для обратной модели  $B_{ij}$  - количество ресурса, распределяемого на шагах от  $n$ -го до  $i$ -го.

Решение задачи (11) основывается на двух основополагающих принципах.

**Принципе инвариантного погружения**, определяющего декомпозицию решения общей задачи на пошаговое решение частных (для каждого вида производственной деятельности) задач, объединяемых общим ресурсом и значением целевой функции.

**Принципе оптимальности**, определяющем независимость решений, получаемых на каждом текущем шаге оптимизации, от решений, полученных на предыдущих (последующих) шагах, а лишь их зависимость от цели оптимизации и состояния ресурсов на  $i$ -м шаге. При этом гарантируется оптимальность глобальной стратегии (последовательности решений) при оптимальных локальных (пошаговых) решениях.

*Процесс решения задачи методом динамического программирования включает два этапа.*

*На первом этапе* пошаговые задачи оптимизации приводят к условно-оптимальным по ресурсу (состояниям) решениям и одному (конечному) безусловно-оптимальному решению.

*На втором этапе* формируется окончательная безусловно-оптимальная стратегия  $(x_1^{opt}, \dots, x_i^{opt}, \dots, x_n^{opt})$  путем учета полученного на первом этапе конечного решения и затрат ресурсов на его реализацию, а также обратного по шагам анализа множества условно-оптимальных решений и выделения из него оптимальной стратегии.

### **Выводы**

Метод динамического программирования предназначен для повышения эффективности вычислений при решении задач математического программирования путем их декомпозиции на относительно простые, а следовательно легче решаемые задачи. Принцип оптимальности является основой поэтапного решения задачи, при этом последовательность и число этапов определяются числом оптимизируемых переменных в общей задаче, возможные варианты решений допустимыми областями их определения, а состояние системы количеством ресурсов, распределяемых на текущем и предыдущих (последующих) шагах оптимизации.

### *Методика реализации принципа оптимальности.*

Большинство практических задач оптимизации связано с наличием ограничений на область допустимых значений переменных. Данные ограничения существенно уменьшают размеры области, в которой осуществляется поиск оптимума, что, однако, не приводит к упрощению задачи. Напротив, наличие ограничений на область допустимых значений аргументов создает дополнительные трудности при попытке непосредственного использования методов, связанных с отысканием стационарных точек. Указанные трудности связаны с тем, что при наличии ограничений экстремум целевой функции может находиться на краю области допустимых значений аргументов, где первая производная (градиент) от целевой функции может быть не равной нулю. Это обстоятельство приводит к необходимости анализа не только всех стационарных, но и всех точек на границе области допустимых решений.

## *Метод множителей Лагранжа для задач с ограничениями в форме равенств.*

Одним из путей преодоления трудностей при оптимизации целевой функции при наличии ограничений является применение методов, связанных с увеличением размерности решаемой задачи. В частности, при наличии ограничений в форме равенств для идентификации точки оптимума может быть использован метод множителей Лагранжа. При этом задача с ограничениями преобразуется в эквивалентную задачу безусловной оптимизации.

Пусть задача оптимизации заключается в отыскании вектора  $\{x_i\}$ , доставляющего экстремум целевой функции

$$F(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (21)$$

и удовлетворяющего следующим ограничениям:

$$\begin{aligned}
 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
 g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0
 \end{aligned} \quad (22)$$

В качестве особенностей данной задачи оптимизации можно отметить следующие: среди ограничений нет неравенств, нет условий неотрицательности переменных и их дискретности.



Положим, что функция (21) и функции  $g_i(\vec{x})$  обладают непрерывными частными производными по всем своим аргументам.

В соответствии с методом множителей Лагранжа задача (21-22) преобразуется в следующую задачу безусловной оптимизации: требуется найти вектор  $\vec{x}'$ , при котором

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\vec{x}) \rightarrow \min_{\{\vec{x}\}} (\max) \quad (23)$$

При этом функция  $L(\vec{x}, \vec{\lambda})$  называется функцией Лагранжа, а числа  $\lambda_j$  – неопределенными множителями Лагранжа, т.е. неизвестными величинами, значения которых необходимо определить. На знак  $\lambda_j$  никаких требований не накладывается.

Задача (23) может быть решена путем взятия частных производных от функции Лагранжа  $L(\vec{x}, \vec{\lambda})$  по всем переменным  $x_i (i=\overline{1, n})$  и множителям Лагранжа  $\lambda_j (j=\overline{1, m})$  и приравнивания их нулю. При этом получается система из  $n+m$  уравнений с таким же числом неизвестных, которые определяют необходимые условия наличия экстремума:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_1} = 0 \\
&\dots\dots\dots \\
&\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_i} = 0 \\
&\dots\dots\dots \\
&\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_n} = 0 \\
&\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_1} = 0 \\
&\dots\dots\dots \\
&\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_m} = 0
\end{aligned}
\tag{24}$$

Решение системы (24) позволяет определить стационарные точки функции  $L(\vec{x}, \vec{\lambda})$ . В последующем должна быть организована процедура проверки на минимум или максимум. Данная процедура может быть осуществлена, например, путем анализа матрицы Гессе функции  $L(\vec{x}, \vec{\lambda})$  от аргумента  $\vec{x}$ . Стационарная точка  $\vec{x}'$  будет являться точкой минимума, если матрица Гессе в точке  $\vec{x}'$  положительно полуопределена, и точкой максимума, если матрица Гессе в данной точке отрицательно полуопределена.

### Пример.

Пусть требуется минимизировать целевую функцию  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 + 2)^2$  при ограничении  $g(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 + 4 = 0$ .

Поскольку целевая функция нелинейного типа, а ограничительная функция задана в форме равенства, для решения задачи воспользуемся методом множителей Лангранжа.

1. Составим функцию Лангранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + (x_2 + 2)^2 - \lambda \cdot (2x_1 - x_2 + 4).$$

2. Найдем производные от функции Лангранжа по  $x_1, x_2, \lambda$  и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 - 2\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 2x_2 + 4 + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 2x_1 - x_2 + 4 = 0.$$

Решив полученную систему уравнений, находим

$$x_1 = \frac{4}{5}; \quad x_2 = -\frac{12}{5}; \quad \lambda = \frac{4}{5}.$$

3. Проверим достаточные условия экстремума. Матрица Гессе для рассматриваемой функции Лагранжа имеет вид:

$$\nabla^2 L(\vec{x}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Так как угловые главные миноры данной матрицы равны соответственно 2 и 4, рассматриваемая матрица Гессе положительно определена, следовательно,  $\vec{x}' = \left\{ \frac{4}{5}, -\frac{12}{5} \right\}$  – точка минимума.

***Задачи нелинейного программирования с ограничениями в форме  
неравенств. Условия Куна-Таккера.***

Естественным обобщением метода множителей Лагранжа является построение критериев оптимальности на случай общей задачи нелинейного программирования с ограничениями как в виде равенств, так и неравенств.

Рассмотрим вначале случай наличия только прямых ограничений, которые соответствуют требованиям неотрицательности переменных. Задача формулируется следующим образом: требуется найти вектор  $\vec{x}'$ , обеспечивающий

$$f(\vec{x}') \rightarrow \max_{\{\vec{x}\}} \quad (25)$$

при следующих ограничениях

$$g_j(\vec{x}) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (26)$$

$$x_i' \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (27)$$

Большинство известных методов позволяют определить только локальный оптимум целевой функции. Для практики же наибольший интерес представляют задачи нахождения глобального оптимума. Поэтому важно знать условия, при которых локальный оптимум одновременно является и глобальным. Известно, что если целевая функция вогнутая (для задач максимизации) или выпуклая (для задач минимизации), и область допустимых значений выпукла, то каждый локальный оптимум является и глобальным.

Составим функцию Лагранжа для задачи (25-27):

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\vec{x}) .$$

Тогда, при выполнении вышеназванных условий вектор определяется решением следующей системы:

$$\frac{\partial L(\vec{x}', \{\vec{\lambda}'\})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\vec{x}')}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j(\vec{x}')}{\partial x_i} \leq 0, \quad (28)$$

$$x_i' \frac{\partial L(\vec{x}', \{\vec{\lambda}'\})}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (29)$$

$$x_i' \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial L(\vec{x}', \{\vec{\lambda}'\})}{\partial \lambda_j} = g_j(\vec{x}') = 0, \quad j = \overline{1, m'}. \quad (31)$$

Рассмотрим теперь более общий случай, когда не только прямые, но и функциональные ограничения представлены в виде неравенств. Задача оптимизации в этом случае формулируется следующим образом: требуется найти вектор  $\vec{x}'$ , обеспечивающий

$$f(\vec{x}') \rightarrow \max_{\{\vec{x}\}} \quad (32)$$

при следующих ограничениях

$$g_j(\vec{x}) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (33)$$

$$x_i' \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (34)$$

Задача (32-34) может быть сведена к задаче (25-27) путем замены функциональных ограничений в форме неравенств  $g_j(\vec{x}) \leq 0, j = \overline{1, m}$ , в эквивалентные им ограничения в форме равенств  $g_j(\vec{x}) + Z_j = 0, j = \overline{1, m}$ , путем

добавления к исходным ограничениям неотрицательных переменных  $Z_j$ . В новой задаче содержится  $n+m$  переменных, на каждую из которых наложено требование неотрицательности.

Для рассматриваемой задачи строится обобщенная функция Лагранжа

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{Z}) = f(\vec{x}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j (g_j(\vec{x}) + Z_j) = f(\vec{x}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\vec{x}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j Z_j, \quad (35)$$

которая в точке оптимума численно равна обычной функции Лагранжа  $L(\vec{x}', \{\vec{\lambda}'\})'$

. При заданных ограничениях  $g_j(\vec{x}) \leq 0$  необходимым условием оптимальности является неотрицательность (неположительность)  $\lambda$  в задаче максимизации (минимизации). Этот результат устанавливается следующим образом. Рассмотрим задачу максимизации. Множители  $\lambda$  выражают скорость изменения  $f(\vec{x})$  по отношению к изменениям  $g_j(\vec{x})$ , т.е.  $\lambda_j = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial g_j(\vec{x})}$ . Как только правая часть ограничения  $g_j(\vec{x}) \leq 0$  увеличивается и становится большей нуля, область допустимых решений расширяется. Следовательно, оптимальное значение целевой



функции не может уменьшиться. Это означает, что  $\lambda_j \geq 0$ . Аналогично при увеличении правой части ограничения в задаче минимизации оптимальное значение  $f(\vec{x})$  не может увеличиться, откуда следует что  $\lambda_j \leq 0$ . Если же ограничения заданы в виде равенств  $g_j(\vec{x})=0$ , то на знак  $\lambda_j$  никаких условий не накладывается.

Оптимальный вектор в рассматриваемом случае находится решением следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial L(\vec{x}', \{\vec{\lambda}'\})}{\partial x_i} \leq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (36)$$

$$x_i' \frac{\partial L(\vec{x}', \{\vec{\lambda}'\})}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (37)$$

$$x_i' \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial L(\vec{x}', \{\vec{\lambda}'\})}{\partial \lambda_j} \leq 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (39)$$

$$\lambda_j' \frac{\partial L(\vec{x}', \{\vec{\lambda}'\})}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = \overline{1, m}' \quad (40)$$

$$\lambda_j' \geq 0, \quad j = \overline{1, m}' \quad (41)$$

Условия (36-41) для общей задачи максимизации составляют содержание теоремы Куна-Таккера.

На практике определение принадлежности целевой функции к классу выпуклых (вогнутых) функций, как правило, не представляет особого труда. Несколько сложнее оказывается задача анализа выпуклости множества допустимых решений, которая может быть решена путем исследования функций  $g_j(\vec{x})$ ,  $j=\overline{1, m}$ , составляющих ограничения.

Приведем перечень требований, достаточных для выполнения условий Куна-Таккера, полагая, что задача нелинейного программирования формулируется в самой общей постановке

$$f(\vec{x}) \rightarrow \min_{\vec{x}} (\max)$$

при следующих ограничениях

$$g_j(x) \leq 0, \quad j=1, 2, \dots, r,$$

$$g_j(x) \geq 0, \quad j=r+1, \dots, p,$$

$$g_j(x)=0, j=p+1, \dots, m.$$

При этом обобщенная функция Лангранжа представляется в виде:

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}, \vec{Z})=f(\vec{x})-\sum_{j=1}^r \lambda_j(g_j(\vec{x})+Z_j)-\sum_{j=r+1}^p \lambda_j(g_j(\vec{x})-Z_j)-\sum_{j=p+1}^m \lambda_j g_j(\vec{x})$$

Требования, устанавливающие достаточность условий Куна-Такера, представлены в таблице 1.

Таблица 1

Тип оптимизации	Требования		
	$f(\vec{x})$	$g_j(\vec{x})$	$\lambda_j$
Максимизация	Вогнутая	Выпуклая	$'\geq 0 (1 \leq j \leq r)$
		Вогнутая	$'\leq 0 (r+1 \leq j \leq p)$
		Линейная	Нет ограничений ( $p+1 \leq j \leq m$ )
Минимизация	Выпуклая	Выпуклая	$'\leq 0 (1 \leq j \leq r)$
		Вогнутая	$'\geq 0 (r+1 \leq j \leq p)$
		Линейная	Нет ограничений ( $p+1 \leq j \leq m$ )

Следует иметь в виду, что требования, представленные в таблице 1, охватывают не все случаи, соответствующие условиям Куна-Такера, поскольку область допустимых решений может быть выпуклой и в случаях, не соответствующих указанным в таблице требованиям.

Прямое решение задачи нелинейной оптимизации, основанное на решении уравнений Куна-Таккера, сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Тем не менее, условия Куна-Таккера имеют важное теоретическое значение для алгоритмов решения задач нелинейного программирования.