«Теория принятия решений»

ст. преп. каф. СС и ПД
Владимиров Сергей Александрович

Лекция 3

Методы теории вероятности, случайных процессов и математической статистики в задачах принятия решений.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Литература:

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.- М.: Физматгиз,1969.-564с.
2. Терентьев В.М. , Паращук И.Б. Теоретические основы управления сетями многоканальной радиосВентцель Е.вязи .С –Пб.: ВАС 1995 .
3. Бураченко Д.Л. и др. Общая теория связи.С=Пб.: ВАС, 1975г.

Случайные факторы, определяющие условия функционирования ИТКС и их моделирование.

В ходе изучения любого явления природы или технического эксперимента всегда производится одно из двух действий — либо опыт (работа, эксперимент), либо наблюдение — определим это как испытание — воспроизведение какого-либо комплекса условий большое число раз, то есть новое испытание — это есть повторение прежнего, в одних и тех же условиях. Результатом такого изучения или испытания всегда является *событие*.

События которые происходят неизбежно в результате каждого испытания называются *достоверными*. Некоторые события вовсе не могут произойти и такие события называют *невозможными*. Если появление одного события исключает появление другого, то такие события называют *несовместимыми (несовместными)*. События называют *равновозможными*, если есть основание считать, что одно из них не более возможно, чем другое.

Любое множество событий в рамках одного или каждого испытания можно свести в общее множество и назвать это полем событий, а сами события этого поля определить как *случайные*.

Все случайные факторы или события, и случайные изменения параметров сигналов, нагрузки от пользователей телекоммуникационной сети, помех на входе приемных или линейных устройств, а также технических отказов в аппаратуре, проявляются в виде одного из следующих типов: *случайные величины; случайные процессы; случайные поля.*

Случайные величины это величины, меняющиеся случайно (непредсказуемо) от одной реализации к другой, но постоянные в каждой конкретной реализации явления.

Случайные процессы это случайные величины, изменяющиеся не только от реализации к реализации, но и во времени.

Случайные поля это многопараметрические взаимно обусловленные случайные процессы, описывающие, как правило, распределенные в пространстве и во времени объекты или явления.

Примеры

Примерами случайных величин являются число ошибок в знаках при приеме телеграмм или число ошибочно принятых кодовых комбинаций в системах передачи, величина ошибки в юстировке антенн в ходе развертывания линии связи, число заявок на обслуживание от пользователей АТС в единицу времени.

Примерами случайных процессов могут служить процесс изменения амплитуды, фазы, частоты и угла прихода сигнала на выходе канала связи; почасовое изменение нагрузки на сеть связи; изменение числа отказов аппаратуры в зависимости от срока ее службы.

Примерами случайных полей являются изменение яркости изображения принимаемого телевизионного сигнала в двух координатах, определяющих точку на плоскости экрана, турбулентность атмосферы или диэлектрическая проницаемость тропосферы, в пределах границ распространения радиосигнала.

Виды распределения и параметры случайных величин, случайных процессов и полей.

1. Случайные величины.

Значения случайной величины x_i, i=1…N, которые она принимает в отдельных опытах, называются *реализациями* случайной величины.

Случайные величины бывают *скалярными* и *векторными*. Полной характеристикой случайной скалярной величины x является плотность распределения вероятностей ее значений w(x), интеграл от которой называют интегральной функцией распределения

$$F(x)=P(x\subseteq X)=\int_{-\infty}^{X} w(x)\,dx \quad .$$

со следующими свойствами:

1. значения функции $\subseteq[0;1]$, иначе $0\leqslant F(x)\leqslant 1,$ *или* $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0, \lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$

2. функция F(x) - неубывающая $F(x_2)\geqslant F(x_1),$ *если* $x_2\geqslant x_1$

Плотность скалярной величины обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}&w(x)\geq 0\,;\\&w(-\infty)=w(\infty)=0\,;\\&\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx=1\,.\end{aligned} \qquad (1)$$

Статистические свойства векторной случайной величины полностью описываются совместной *плотностью распределения вероятностей*:

$$w(\vec{x})=w(x_1,x_2,\ldots,x_N)\ ,$$

а ее *интегральная функция распределения* имеет вид:

$$F(\vec{x}\subseteq\vec{X})=\iint\limits_{\vec{X}} w(x_1,x_2,\ldots,x_N)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_N \qquad (2)$$

Математическим ожиданием (средним) случайной величины называют начальный момент первого порядка:

$$M[x]=m_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xw(x)\,dx\ . \qquad (3)$$

Средневзвешенное отклонение центрированной случайной величины может быть определено следующим образом:

$$m_{\Delta x} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) w(x) dx \ . \qquad (4)$$

момент второго порядка:

$$M(\Delta x)^2 = D_x = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 w(x) dx \qquad (5)$$

называется *дисперсией* случайной величины, характеризующей степень разброса значения случайной величины относительно своего среднего значения. Наряду с дисперсией мерой рассеяния случайной величины является ее *среднеквадратическое отклонение*

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \ .$$

Мерой статистической взаимосвязи двух скалярных центрированных случайных величин может служить *взаимный корреляционный момент*:

$$K_{xy}=M[\Delta x\Delta y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)w(x,y)dxdy\ . \qquad (6)$$

Для отражения статистической связи значений одной и той же центрированной случайной величины служит *момент автокорреляции*.

Нормированный корреляционный момент – *коэффициент корреляции*:

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y},\sigma_x\geq 0,\sigma_y\geq 0\ . \qquad (7)$$

При этом,

если две СВ *x и y связаны линейно*, то $\mathbf{r_{xy}=1}$ (либо –1);

если эти величины оказываются *некоррелированными*, то $\mathbf{r_{xy}=0}$.

Распределения вероятностей случайных

дискретных и непрерывных величин:

Биномиальное распределение — дискретное распределение когда случайная величина имеет всего два значения 0 или 1 — событие наступило либо не наступило (бернуллиевская схема).

$$P(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,\ldots,n; q=1-p; p\geq 0, M(k)=np, D(k)=npq. \qquad (8)$$

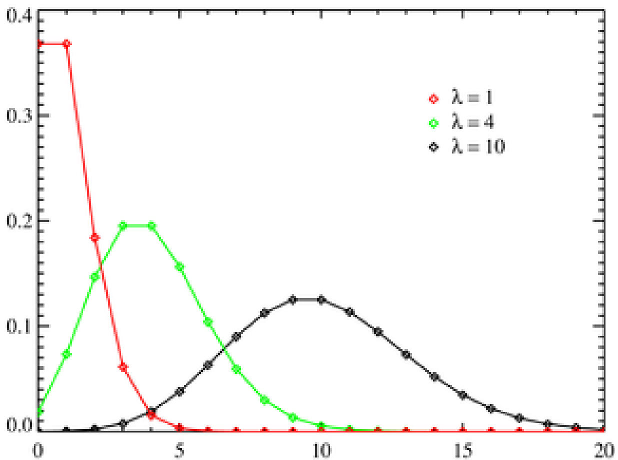
Здесь n - число проведенных испытаний (опытов), p - вероятность наступления события в одном опыте, k - число наступивших событий в n опытах.

Распределение Пуассона — вероятностное распределение дискретного типа, показывает случайную величину, представляющую число событий произошедших за фиксированное время — играет ключевую роль в теории массового обслуживания.

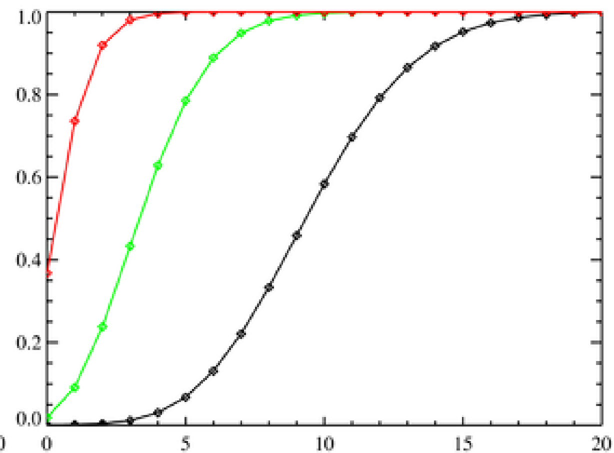
$$P(k)=\frac{a^k}{k!}\exp(-a), a>0, k=0,1,\ldots, M(k)=a, D(k)=a. \qquad (9)$$

Здесь $a = \lambda t$ - среднее число событий, происходящих с интенсивностью λ за заданный временной интервал t, k-число событий, происходящих за время t.

Функция плотность вероятности



Функция распределения



Равномерное распределение на интервале.

$$P(k)=\frac{1}{n}, k=0,1,\dots,n>0, M(k)=(n+1)/2, D(k)=(n^2+1)/12. \qquad (10)$$

Здесь n- число возможных состояний ДСВ, k- номер состояния ДСВ.

Показательный закон распределения непрерывной СВ.

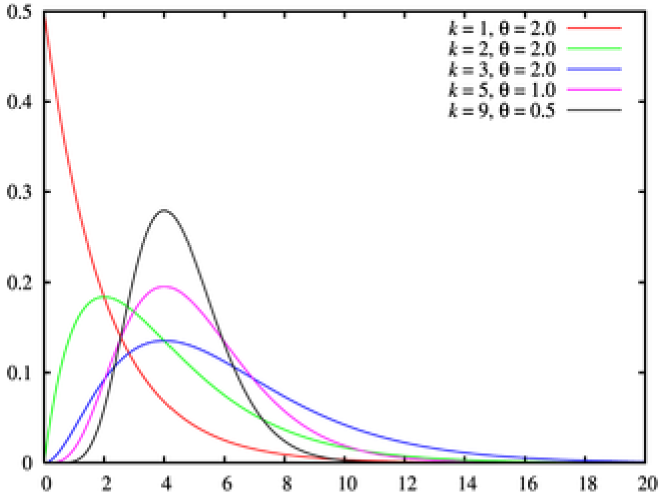
$$w(x)=\lambda\exp(-\lambda x), \lambda>0, M(x)=1/\lambda, D(X)=1/\lambda^2. \qquad (11)$$

Здесь λ - параметр распределения.

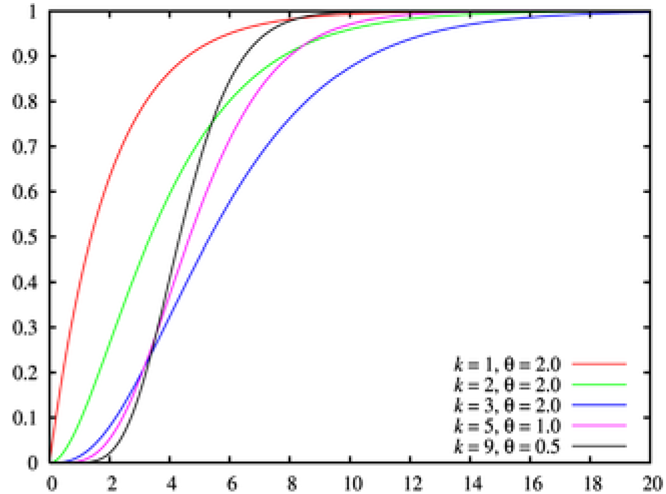
Гамма распределение — распределение Эрланга.

$$w(x)=\frac{\lambda(\lambda x)^{h-1}\exp(-\lambda x)}{\Gamma(h)}, x\geq 0, \lambda.>0, h>0, \Gamma(h)>0$$
$$\Gamma(h)=\int_0^\infty e^{-\theta}\theta^{h-1}d\theta - \text{гамма} - \text{функция Эйлера}; M(x)=h/\lambda, D(x)=h/\lambda^2. \qquad (12)$$

Плотность вероятности



Функция распределения



Нормальный закон распределения — Гаусса или Гаусса-Лапласа.

Нормальное и усеченное нормальное распределения следующего вида:

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\exp\left(\frac{-(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right); \qquad (13)$$

$$w(x)=\frac{C_0}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right), 0<x\le\infty \quad , \qquad (14)$$

где $C_0=\dfrac{1}{1+\Phi\left(\dfrac{m_x}{\sqrt{\sigma_x^2}}\right)}$ - коэффициент нормирования, определяемый на основе табулированного интеграла вероятности.

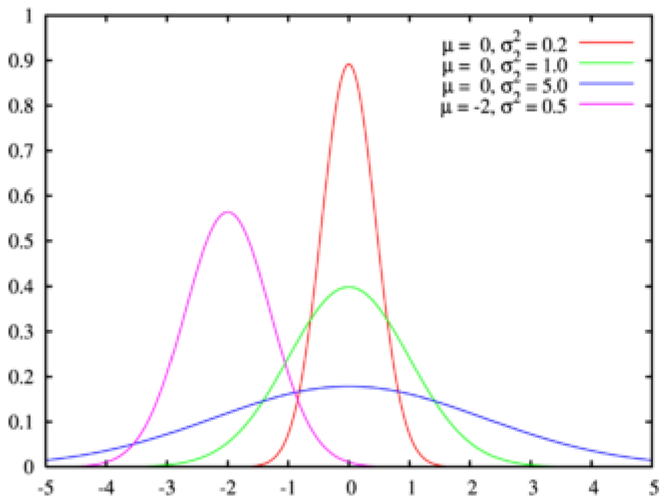
При этом вероятность попадания реализации СВ x в интервал $[\alpha,\beta]$ равна:

$$P(\alpha<x\le\beta)=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\exp\left(\frac{-(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)dx \; .$$

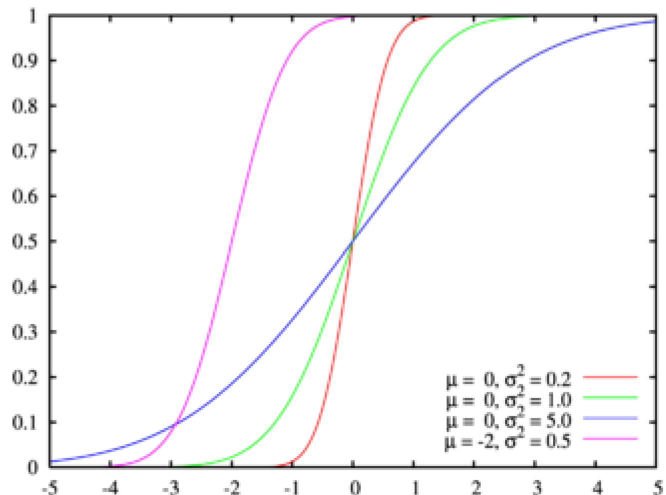
При замене переменной $t=\frac{x-m_x}{\sqrt{\sigma_x^2}}$ вычисление интеграла (12) сводятся к вычислению табулированного интеграла вероятности:

$$
\begin{aligned}
&P(\alpha < x \le \beta) = [\Phi(B) - \Phi(A)],\\
&A = \frac{\alpha - m_x}{\sqrt{\sigma_x^2}};\ B = \frac{\beta - m_x}{\sqrt{\sigma_x^2}};\\
&\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,\ \Phi(x) = -\Phi(-x).
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

Плотность вероятности



Функция распределения



Для случая линейного преобразования случайной величины: y=Ax+b, соотношения для числовых характеристик векторной случайной величины $\vec{x}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} &\vec{m}_y = A\,\vec{m}_x + \vec{b}\,, \\ &A = \{a_{ij}\}, \vec{b} = \{b_i\}\,, i = 1 \ldots N\,, j = 1 \ldots N\,; \\ &K_y = [AK]_x\, A^T; \\ &\sigma_{y_l}^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{\mathrm{ij}}^2 K_{xij}\,. \end{aligned} \qquad (16)$$

Совместная плотность $w(\vec{x}) = w(y, z)$ устанавливает статистическую взаимосвязь между всеми составляющими вектора $\vec{x}$ и может быть определена через условную плотность распределения вероятностей w(y|z) и w(z|y), если вектор $\vec{x} = (y\,; z)$ имеет своими компонентами случайные величины y и z. Из формулы полной вероятности имеем:

$$w(\vec{x}) = w(y, z) = w(y|Z)\,w(z) = w(z|Y)\,w(y)\,, \qquad (17)$$

Для условных плотностей распределения справедлива формула Байеса— формула позволяющая переоценить вероятность гипотез (предположений, условий) после того, когда стали известны результаты испытаний или экспериментов:

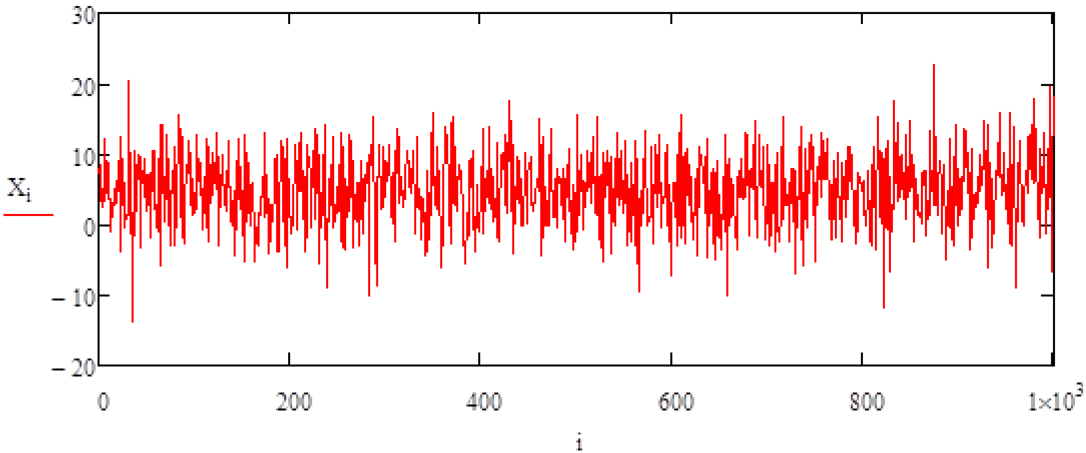
$$w(y|Z)=\frac{w(\vec{x})}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(z|Y)w(y)dy}=\frac{w(y)w(z|Y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(z|Y)w(y)dy};$$
$$w(z|Y)=\frac{w(\vec{x})}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(y|Z)w(z)dz}=\frac{w(z)w(y|Z)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(y|Z)w(z)dz}. \qquad (18)$$

Если вектор $\vec{x}$ состоит из N независимых случайных величин, то

$$w(\vec{x})=\prod_{i=1}^{N} w(x_i). \qquad (19)$$

2 . Случайные процессы.

Процесс изменения во времени некоторой случайной величины называется случайным процессом. Примером случайного процесса может служить изменение амплитуды, фазы и частоты сигнала на выходе канала связи. Одна из реализаций этого процесса изменения амплитуды сигнала представлена на рис.1.



Для удобства статистического описания случайного процесса его можно рассматривать как множество случайных величин, соответствующих различным моментам времени на рассматриваемом интервале:

$$x(t)=[x(t_1),\dots,x(t_k),\dots,x(t_N)],[t_1,\dots,t_N].$$

И полным статистическим описанием случайного процесса будет его многомерная плотность распределения вероятностей значений процесса во всех временных сечениях внутри заданной временной области:

$$w(x(t),t)=w(x_1,t_1;\dots;x_k,t_k;\dots;x_N,t_N). \qquad (20)$$

- Наиболее распространенными моделями случайных процессов являются:
- процессы с независимыми приращениями;
- нормальные случайные процессы;
- марковские процессы.

Случайный процесс называют *процессом с независимыми приращениями*, если для любых сечений времени, внутри заданного временного интервала, приращения процесса являются независимыми случайными величинами.

Случайный процесс, у которого n-мерная плотность распределения вероятностей является *гауссовской*, называется *нормальным*.

Случайный процесс относится к классу *марковских*, если для его n-мерной плотности распределения выполняется условие:

$$w(x_k, t_k | X_1, t_1; \ldots; X_{k-1}, t_{k-1}) = w(x_k, t_k | X_{k-1}, t_{k-1}) \tag{21}$$

Для стационарных в широком смысле процессов выполняется постоянство во времени его моментов: среднего и дисперсии, а также инвариантность к временному сдвигу корреляционной функции:

$$\begin{aligned}
&m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(x(t), t) dx = m_x(t-\tau) = m_x;\\
&\sigma_x^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m_x(t))^2 w(x(t), t) dx = \sigma_x^2(t-\tau) = \sigma_x^2;\\
&K(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)] \times\\
&w(x(t_1), t_1; x(t_2), t_2) dx_1 dx_2 = K(t_1 - \tau, t_2 - \tau) = K(t_2 - t_1)
\end{aligned} \tag{22}$$

При t_2-t_1=0 корреляционная функция случайного процесса равна его дисперсии K(0)=D_x=const. Интервал времени $\tau=\tau_{кор}$, за пределами которого корреляционная функция $K_x(\tau)$ не превосходит некоторую малую (0,05-0,1)D_x величину, называют интервалом корреляции процесса $\tau_{кор}$.

К стационарным процессам в узком смысле относятся процессы, у которых сама n-мерная плотность распределения вероятностей инвариантна к временному сдвигу τ :

$$w(x_1,t_1;x_2,t_2;\ldots;x_k,t_k) = w(x_1,t_1+\tau;\ldots;x_k,t_k+\tau), \text{ для любого } \tau .$$

Для эргодического процесса усреднение по статистике совпадает с усреднением по времени:

$$\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau)=0 .$$

Для эргодического процесса усреднение по множеству (статистике) может быть заменено усреднением по времени, а, следовательно, значение спектра (спектральной плотности мощности) процесса G(w) связано со спектральной плотностью сигнала S(jw) соотношением:

$$G(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{|S(j\omega)|^2}{\pi T},$$

где T- время наблюдения процесса.

Используя вычисленную функцию корреляции можно определить спектр (спектральную плотность мощности) стационарного случайного процесса, используя теорему Винера-Хинчина:

$$\begin{aligned} G_x(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\,; \\ K_x(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega\,. \end{aligned} \qquad (23)$$

Под эффективной шириной спектра случайного процесса с неравномерной спектральной плотностью мощности понимается полоса частот, удовлетворяющая соотношению:

$$\Delta\Omega_{эф}=\frac{\int_0^\infty G(\omega)\,d\omega}{G_{\max}}=\frac{K(\tau=0)}{G_{\max}}.$$

Случайный процесс, спектр которого непрерывен и сосредоточен возле некоторой фиксированной частоты w_0, а также выполняется условие:

$$\frac{\Delta\Omega}{\omega_0}\ll 1,$$ называется узкополосным.

Используя понятие эффективной ширины спектра можно установить следующую связь между ее значением и интервалом корреляции случайного процесса:

$$\tau_{кор}=\frac{\pi G(0)}{2\,G_{\max}\,\Delta\Omega_{эф}},$$

где G_{max}, G(0) – значение спектральной плотности мощности процесса в точке максимума и в точке w = 0.

Примеры корреляционных функций типовых случайных процессов.

1. Для белого гауссовского шума, определяемого как нормальный случайный процесс x(t), его значения в сколь угодно близкие моменты времени остаются не коррелированными, т.е. имеют корреляционную функцию вида:

$$K_x(t_1, t_2) = N(t_1)\,\delta(t_2 - t_1), \qquad (24)$$

где N(t)- интенсивность БГШ, являющаяся постоянной для стационарного случая и равной единице для стандартного БГШ;

$$\delta(t_2 - t_1) = \begin{Bmatrix} \infty, \text{при } t_1 = t_2; \\ 0, \text{в} - \text{остальных} - \text{случаях}. \end{Bmatrix}$$ - дельта- функция.

Используя теорему Винера-Хинчина, получим спектральную плотность мощности БГШ:

$$G_x(\omega) = \frac{N}{2\pi} = const.$$

Из выражения (18) следует, что дисперсия БГШ $\sigma_ш^2 = K_x(0) = \infty$ в силу бесконечного спектра $\Delta\Omega_{эф}$ этого процесса, а интервал корреляции БГШ равен:

$$\tau_{кор} = \frac{\pi}{2(\Delta\Omega_{эф} = \infty)} = 0.$$

2. Экспоненциально коррелированным процессом называют процесс с функцией корреляции вида:

$$K_x(\tau)=D_x\exp(-\alpha|\tau|). \qquad (25)$$

Соответствующая спектральная плотность мощности процесса имеет вид:

$$G_x(\omega)=\frac{D_{x\alpha}}{\pi\left(\alpha^2+\omega^2\right)}. \qquad (26)$$

3. Случайные поля.

Векторное случайное поле **u(x)**, у которого аргумент **x**=(x, y, z, t) является вектором, содержащим три пространственные координаты и время t, может быть задан в рамках корреляционной теории вектором математических ожиданий $m_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})=$ $\left[m_{u_x}, m_{u_y}, m_{u_z}\right]^T$ и матричной корреляционной функцией $K_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$.

Рассмотрим стационарный, эргодический процесс с нормальным распределением (13) его мгновенных значений x(t) $=A(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)]$.

Определим плотности распределения вероятностей его параметров:

A(t) - амплитуды и $\theta(t)-$ фазы.

Решение задачи целесообразно провести для квадратурного представления сигнала:

$$x(t)=[A_c(t)\cos\theta(t)+A_s(t)\sin\theta(t)]\cos\omega_0 t, \qquad (27)$$

где $A(t)=\sqrt{A_c^2(t)+A_s^2(t)}-$ огибающая сигнала;

$\theta(t)=arctg\dfrac{A_s(t)}{A_c(t)}-$ фаза сигнала.

Квадратуры сигнала A_c, A_s имеют распределение, аналогичное мгновенным значениям сигнала, так как квадратуры формируются на основе линейного сдвига по частоте, поэтому:

$$w(A_{c(s)})=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{c(s)}^2}}\exp\left(-\frac{A_{c(s)}{}^2}{2\sigma_{c(s)}^2}\right).$$

Учитывая статистическую независимость квадратур, совместная плотность распределения вероятностей квадратур сигнала имеет вид:

$$w(A_c, A_s) = w(A_c) w(A_s) = \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(\frac{-A^2}{2\sigma_x^2}\right). \quad \text{, при этом} \quad \sigma_x^2 = \sigma_c^2 + \sigma_s^2 \qquad (28)$$

Плотность распределения (28) может быть без труда декомпозирована на две плотности распределений вероятностей, а именно плотность распределения амплитуды w(A) и фазы $w(\theta)$, которые имеют вид распределения Релея и равномерного распределения в пределах [0-2 π] соответственно:

$$w(A) = \frac{A}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right);$$

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi}. \qquad (29)$$

Заключение.

На лекции рассмотрены вопросы классификации случайных факторов, определяющих качество процесса функционирования линий и сетей связи, введены основные понятия и характеристики случайных величин, сигналов, процессов и полей.