ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»

С. А. Владимиров

ОПТИМИЗАЦИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Практикум

СПб ГУТ)))

Санкт-Петербург
2019

УДК 519.86 (076)
ББК 22.18 я73
В 57

Рецензент
доктор технических наук,
профессор кафедры СС и ПД *О. С. Когновицкий*

Рекомендован к печати редакционно-издательским советом СПбГУТ

Владимиров, С. А.
В 57 Оптимизация и математические методы принятия решений : практикум / С. А. Владимиров ; СПбГУТ. — СПб, 2019. — 92 с.

Практикум призван ознакомить учащихся с основами теории принятия решений, включая методы оптимизации и математические методы принятия решений. Представленный материал служит справочным и методическим пособием при выполнении курса практических работ по дисциплинам «Теория принятия решений» и «Оптимизация и математические методы принятия решений».

Предназначено для студентов-бакалавров, обучающихся по направлениям 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

УДК 519.86 (076)
ББК 22.18 я73

Содержание

Практическая работа 1
Постановка функциональной задачи линейного программирования

1.1. Цели работы

Научиться представлять функциональную задачу линейного программирования в различных формах. Научиться формулировать целевую функцию задачи, составлять матрицы коэффициентов, свободных членов и переменных системы ограничений задачи. Научиться представлять исходные данные задачи в векторной форме. Научиться оперировать направлением экстремума в целевой функции задачи.

1.2. Теоретические сведения

Рассмотрим основные определения и постановку задач на примере линейного программирования.

В общем виде задача формулируется в виде целевой функции, определяющей направление поиска оптимального (наилучшего) решения, и некоторых условий (функций или системы ограничений), задающих область поиска таких решений.

Целевая функция или *критерий выбора оптимального решения* (критерий эффективности) есть число или система чисел, являющихся мерой для сравнения количественных или качественных характеристик рассматриваемой системы или модели, представляет собой функцию многих переменных, несущую определенный физический смысл в зависимости от поставленной задачи. Для правильного определения и формулировки целевой функции необходимо использовать следующие принципы:

- функция должна точно отражать конечную цель задачи и обеспечивать принятие оптимального решения;
- функция должна быть чувствительна к изменению основных факторов, влияющих на результат решения задачи;
- желательно, чтобы выбранная или составленная функция имела определенный физический смысл и представляла собой четкое аналитическое выражение.

Для задач *линейного программирования* характерно следующее:

- целевая функция $W = F(x)$ линейно зависит от некоторых элементов решения $x_1, x_2, \ldots, x_n$;
- ограничения, налагаемые на элементы решения, имеют вид линейных равенств или неравенств относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1.2.1. Постановка задачи

Дана *целевая функция* — цель задачи:

$$\max(\min)W = \max(\min)F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при *ограничениях*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{cases}$$

и при условии $x_j \geqslant 0, \quad$ где $\quad (j = 1, n)$.

Любое множество чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_n$, удовлетворяющее ограничениям, называется *допустимым решением* (допустимым планом).

Запишем коротко ограничения разных типов:

- уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b_i, \quad \text{где}(i = 1, m);$$

- неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \begin{bmatrix} \leqslant \\ \geqslant \end{bmatrix} b_i, \quad \text{где}(i = 1, m);$$

- уравнения и неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \begin{bmatrix} \leqslant \\ = \\ \geqslant \end{bmatrix} b_i, \quad \text{где}(i = 1, m);$$

- условия неотрицательности

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, n.$$

Матричная форма

$$\begin{gathered} \max(\min)\mathbf{CX} \\ \mathbf{AX} \leqslant \mathbf{B} \\ \mathbf{X} \geqslant 0, \end{gathered}$$

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$.

$\mathbf{CX}$ и $\mathbf{AX}$ — произведения матриц.

Векторная форма

$$\begin{gathered} \max(\min)CX \\ x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n \leqslant B \ , \\ X \geqslant 0 \end{gathered}$$

где $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ при $j = 1, n$ вектор-столбец коэффициентов x_j из элементов j столбца матрицы A;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ — вектор-столбец B свободных членов или значений уравнений (неравенств) системы ограничений;

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — вектор-строки переменных в задаче и коэффициентов целевой функции соответственно,

CX — скалярное произведение векторов.

Символика теории множеств

$$\max(\min)[CX : AX \leqslant B, \ X \geqslant 0].$$

1.2.2. Переходы в задачах

Задача max — min

Задача

$$\max \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geqslant b_i \ \ (i = 1, m)$$

эквивалентна задаче

$$\min(-\sum_{j=1}^{n} a_j x_j) \leqslant (-b_i) \ \ (i = 1, m).$$

Приведение неравенства к равенству

К исходному неравенству

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b_i \ \ (i = 1, m)$$

прибавляем

$$x_{n+1} \geqslant 0$$

и получаем

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j + x_{n+1} = b_i \ \ (i = 1, m).$$

Пример.

Задана целевая функция

$$\max(x_1 + 2x_2 + 5x_3)$$

с системой ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 1. \end{cases}$$

Вводим две переменные x_4 и x_5:

$$\begin{aligned} &x_4 = 4 - x_1 - x_2 + x_3, \\ &x_5 = -1 - x_1 + 2x_2 + x_3, \end{aligned}$$

при $x_4, x_5 \geqslant 0$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -1. \end{cases}$$

Приведение равенства к неравенству

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ (i = 1, m)$$

эквивалентно
$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \ \ (i=1,m), \\ \left(-\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \geqslant (-b_i) \ \ (i=1,m). \end{cases}$$

Если $x_j \not\subset x_j \geqslant 0$, то $x_j = u_j - v_j$ и $u_j \geqslant 0$, $v_j \geqslant 0$.

1.3. Варианты для выполнения задания

Вариант выбирается по номеру студента в журнале группы.

В рамках задания каждый учащийся получает целевую функцию задачи и систему ограничений, состоящую из двух равенств и трех неравенств.

1. Целевая функция:

$$\max(21x_1 + 17x_2 + 15x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 3x_6 + 17x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 11x_1 - 7x_2 + 12x_3 - 8x_4 - 5x_5 - 3x_6 + 2x_7 = 4, \\ 3x_1 + 14x_2 + 5x_3 - x_4 + 16x_5 + 14x_6 + 28x_7 = 87, \\ -10x_1 + 29x_2 - 4x_3 + 9x_4 + 18x_5 + 2x_6 + 26x_7 \geqslant 65, \\ 9x_1 - 3x_2 + 27x_3 - 10x_4 + 25x_5 - 7x_6 - 8x_7 \geqslant 28, \\ 9x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 23x_4 - 2x_5 + 21x_6 + 21x_7 \leqslant 85. \end{cases}$$

2. Целевая функция:

$$\max(3x_1 + 17x_2 + 20x_3 + 13x_4 + 11x_5 + 15x_6 + 29x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 27x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 19x_4 + 8x_5 - 3x_6 + 14x_7 = 84, \\ 14x_1 + 14x_2 + 19x_3 + 19x_4 - 2x_5 + 30x_6 + 8x_7 = 108, \\ -3x_1 + 5x_2 + 29x_3 - 10x_4 - 4x_5 + 3x_6 - 10x_7 \geqslant 5, \\ 5x_1 + 22x_2 - 3x_3 + 25x_4 + 8x_5 + 27x_6 + 27x_7 \geqslant 107, \\ -7x_1 + 23x_2 + 29x_3 + 25x_4 + x_5 + 7x_6 + 2x_7 \leqslant 86. \end{cases}$$

3. Целевая функция:

$$\max(14x_1 + 29x_2 + x_3 + 12x_4 + 4x_5 + 26x_6 + 3x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 10x_1 - 10x_2 + 13x_3 + 23x_4 + 23x_5 - 4x_6 + 26x_7 = 88, \\ 13x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 16x_4 + 13x_5 + 11x_6 + 4x_7 = 95, \\ 3x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 5x_4 + 3x_5 - x_6 - 2x_7 \geqslant 17, \\ 29x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 21x_4 - 6x_5 - 9x_6 + 13x_7 \geqslant 56, \\ -8x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_4 + 25x_5 + 12x_6 + 11x_7 \leqslant 53. \end{cases}$$

4. Целевая функция:

$$\max(30x_1 + 18x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 13x_6 + 3x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 5x_1 - 10x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 5x_5 - 8x_6 + 5x_7 = 18, \\ -6x_1 + 6x_2 + 17x_3 + 14x_4 + 26x_5 + 16x_6 + 20x_7 = 101, \\ 2x_1 - 8x_2 - x_3 + 8x_4 + 6x_5 + 28x_6 - 10x_7 \geqslant 18, \\ 26x_1 + 28x_2 + 18x_3 + 30x_4 + 14x_5 + 25x_6 + 29x_7 \geqslant 164, \\ -9x_1 + 9x_2 + x_3 + 28x_4 - 4x_5 + 26x_6 - 9x_7 \leqslant 47. \end{cases}$$

5. Целевая функция:

$$\max(30x_1 + 21x_2 + 19x_3 + 8x_4 + 2x_5 + 19x_6 + 10x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + 25x_3 + 10x_4 + 19x_5 - 3x_6 + 17x_7 = 89, \\ 12x_1 + 4x_2 + 19x_3 - x_4 - 4x_5 + 8x_6 + 24x_7 = 66, \\ 18x_1 - 10x_2 + 20x_3 - 2x_4 + 13x_5 + 14x_6 + 4x_7 \geqslant 53, \\ -7x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 5x_4 + 24x_5 + 4x_6 + 21x_7 \geqslant 23, \\ x_1 + 26x_2 - 6x_3 + 14x_4 - 5x_5 + 19x_6 + 5x_7 \leqslant 61. \end{cases}$$

6. Целевая функция:

$$\max(20x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 23x_4 + 27x_5 + x_6 + 26x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 22x_3 + 20x_4 + 10x_5 + x_6 + 10x_7 = 62, \\ -6x_1 + 6x_2 + 19x_3 + 5x_4 + 28x_5 + 2x_6 + 18x_7 = 77, \\ 15x_1 + 17x_2 + 28x_3 + 8x_4 + 25x_5 - 2x_6 + 21x_7 \geqslant 108, \\ -2x_1 - 3x_2 + 22x_3 + 17x_4 + 4x_5 + 24x_6 - 6x_7 \geqslant 49, \\ 16x_1 + 14x_2 - 8x_3 + 18x_4 + 21x_5 - 7x_6 + 13x_7 \leqslant 75. \end{cases}$$

7. Целевая функция:

$$\max(3x_1 + 26x_2 + 7x_3 + 12x_4 + x_5 + 4x_6 + 2x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 6x_1 - 10x_2 + 8x_3 + 26x_4 + 7x_5 - x_6 + 12x_7 = 52, \\ -2x_1 - 9x_2 - 5x_3 + 25x_4 + 27x_5 + 14x_6 + 11x_7 = 67, \\ 6x_1 + x_2 + 30x_3 + 27x_4 + 7x_5 + 16x_6 + 5x_7 \geqslant 87, \\ 23x_1 + 2x_2 + 23x_3 + 2x_4 + 2x_5 - 8x_6 + 2x_7 \geqslant 38, \\ 8x_1 - 2x_2 + 11x_3 - x_4 + 19x_5 - x_6 - 4x_7 \leqslant 35. \end{cases}$$

8. Целевая функция:

$$\max(x_1 + 14x_2 + 26x_3 + 10x_4 + 25x_5 + x_6 + 30x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 10x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 13x_4 + 29x_5 - 3x_6 - 3x_7 = 81, \\ -7x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 18x_4 + 12x_5 + 25x_6 + 13x_7 = 75, \\ 23x_1 + 21x_2 + 21x_3 + 18x_4 + 8x_5 + x_6 + 11x_7 \geqslant 98, \\ 2x_1 + 16x_2 + 6x_3 + 24x_4 + 3x_5 + 16x_6 + 25x_7 \geqslant 85, \\ 13x_1 + 4x_2 + 11x_3 + x_4 - 7x_5 + 8x_6 - 9x_7 \leqslant 29. \end{cases}$$

9. Целевая функция:

$$\max(19x_1 + 29x_2 + 25x_3 + 17x_4 + x_5 + 13x_6 + 14x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 7x_1 + 26x_2 + 29x_3 + 29x_4 + 2x_5 + 10x_6 - x_7 = 108, \\ 30x_1 - 10x_2 + 10x_3 + 19x_4 + 10x_5 + 14x_6 + 12x_7 = 93, \\ 21x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 15x_4 - 6x_5 + 27x_6 + 6x_7 \geqslant 54, \\ 28x_1 + 24x_2 + 16x_3 - 5x_4 - x_5 + 9x_6 - 4x_7 \geqslant 60, \\ -x_1 + 22x_2 + 13x_3 + 17x_4 - 8x_5 + 3x_6 + x_7 \leqslant 54. \end{cases}$$

10. Целевая функция:

$$\max(11x_1 + 18x_2 + 7x_3 + 13x_4 + x_5 + 14x_6 + 5x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 7x_1 + 26x_2 - 8x_3 + 16x_4 - 4x_5 + 26x_6 - 8x_7 = 60, \\ -5x_1 + 14x_2 + 18x_3 - 9x_4 + 30x_5 + 25x_6 + x_7 = 79, \\ 22x_1 - 4x_2 + 18x_3 + 8x_4 + 6x_5 + 15x_6 + 14x_7 \geqslant 72, \\ 3x_1 + 8x_2 - 10x_3 + x_4 + x_5 + 19x_6 + 29x_7 \geqslant 45, \\ 5x_1 + 15x_2 + x_3 - 10x_4 + 9x_5 + 11x_6 + 27x_7 \leqslant 62. \end{cases}$$

11. Целевая функция:

$$\max(5x_1 + 28x_2 + 15x_3 + 6x_4 + 21x_5 + 5x_6 + 19x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 27x_1 + 14x_2 + 2x_3 + 26x_4 - 8x_5 - 6x_6 + 14x_7 = 75, \\ 19x_1 + 19x_2 - 7x_3 + 20x_4 - 5x_5 + 29x_6 + 20x_7 = 99, \\ -3x_1 + 28x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 29x_5 + 16x_6 + 14x_7 \geqslant 76, \\ 14x_1 + 17x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 22x_5 + 27x_6 + 8x_7 \geqslant 91, \\ 21x_1 + 28x_2 - 6x_3 + 19x_4 - 3x_5 + 16x_6 + 4x_7 \leqslant 84. \end{cases}$$

12. Целевая функция:

$$\max(23x_1 + 19x_2 + 2x_3 + 29x_4 + 5x_5 + 15x_6 + 17x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 26x_3 - 3x_4 - 3x_5 + 10x_6 + 5x_7 = 47, \\ 29x_1 + 30x_2 + 2x_3 + 15x_4 + 16x_5 + 27x_6 - 7x_7 = 119, \\ 7x_1 + 26x_2 + 2x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 21x_6 + 10x_7 \geqslant 54, \\ -5x_1 + 13x_2 + 2x_3 + 21x_4 + 3x_5 + 29x_6 + 15x_7 \geqslant 72, \\ 23x_1 - x_2 + 8x_3 - 9x_4 + 6x_5 - 8x_6 + 19x_7 \leqslant 44. \end{cases}$$

13. Целевая функция:

$$\max(x_1 + 11x_2 + 13x_3 + 14x_4 + 3x_5 + 10x_6 + 20x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 25x_1 - 5x_2 + 16x_3 + 11x_4 + 17x_5 - 9x_6 + 22x_7 = 85, \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 17x_4 - 5x_5 + 21x_6 - 8x_7 = 43, \\ -10x_1 + 8x_2 - 9x_3 + 3x_4 + x_5 - 6x_6 + 23x_7 \geqslant 3, \\ -3x_1 + 3x_2 + 23x_3 + 4x_4 + 21x_5 - 5x_6 + 17x_7 \geqslant 54, \\ 19x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 16x_5 + 5x_6 + 8x_7 \leqslant 67. \end{cases}$$

14. Целевая функция:

$$\max(17x_1 + 30x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 15x_5 + 6x_6 + 19x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 8x_4 + 21x_5 + 3x_6 + 16x_7 = 70, \\ 18x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 10x_5 + 23x_6 + 5x_7 = 120, \\ -4x_1 - 6x_2 + 30x_3 + 10x_4 + 4x_5 + 14x_6 + 2x_7 \geqslant 44, \\ 23x_1 - 3x_2 + 12x_3 + 11x_4 + 16x_5 + 12x_6 + 9x_7 \geqslant 76, \\ -4x_1 + 21x_2 + 28x_3 + 17x_4 - 8x_5 + 3x_6 + 18x_7 \leqslant 79. \end{cases}$$

15. Целевая функция:

$$\max(21x_1 + 15x_2 + 3x_3 + 13x_4 + 15x_5 + 21x_6 + 29x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 7x_1 + 26x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 25x_5 + 7x_6 + 3x_7 = 106, \\ -10x_1 + 28x_2 + 12x_3 + 4x_4 - 7x_5 - 6x_6 + 24x_7 = 52, \\ 20x_1 - 6x_2 + 18x_3 + 4x_4 + 24x_5 - 5x_6 + 29x_7 \geqslant 79, \\ 3x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 29x_4 - 3x_5 + 26x_6 - 3x_7 \geqslant 62, \\ 8x_1 + x_2 + 12x_3 + 23x_4 + 19x_5 + 8x_6 + 13x_7 \leqslant 89. \end{cases}$$

16. Целевая функция:

$$\max(23x_1 + 18x_2 + 12x_3 + 24x_4 + 7x_5 + 26x_6 + 4x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 21x_1 + 21x_2 - 2x_3 + 25x_4 + 15x_5 - 4x_6 + 19x_7 = 99, \\ 2x_1 + 27x_2 + 16x_3 + 11x_4 + 25x_5 + 23x_6 + 25x_7 = 135, \\ 19x_1 - 3x_2 + 21x_3 + 20x_4 + x_5 - 6x_6 + 10x_7 \geqslant 56, \\ -8x_1 + 6x_2 - x_3 + 30x_4 + 25x_5 + 16x_6 - 2x_7 \geqslant 61, \\ 20x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 8x_4 + 30x_5 - 4x_6 + 22x_7 \leqslant 119. \end{cases}$$

17. Целевая функция:

$$\max(8x_1 + 11x_2 + 27x_3 + 22x_4 + 17x_5 + 22x_6 + x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} -10x_1 - 8x_2 - 10x_3 + 27x_4 - 8x_5 + 25x_6 + x_7 = 25, \\ 29x_1 + 2x_2 + 16x_3 + 11x_4 - x_5 - 8x_6 + 2x_7 = 51, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 26x_4 + 7x_5 + 19x_6 + 21x_7 \geqslant 66, \\ 3x_1 - 7x_2 + 20x_3 + 3x_4 - x_5 + 8x_6 + 2x_7 \geqslant 20, \\ 16x_1 + 15x_2 - 6x_3 + 14x_4 + 10x_5 + 16x_6 + 14x_7 \leqslant 87. \end{cases}$$

18. Целевая функция:

$$\max(2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 15x_4 + 5x_5 + 19x_6 + 6x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 21x_2 + 14x_3 - 2x_4 + 10x_5 + 28x_6 + 24x_7 = 101, \\ -5x_1 - 6x_2 + 17x_3 + 21x_4 + 30x_5 + 21x_6 + 3x_7 = 89, \\ 5x_1 + 5x_2 + 21x_3 + 2x_4 + 27x_5 + 22x_6 + 2x_7 \geqslant 80, \\ 25x_1 + 23x_2 + 11x_3 - 4x_4 + 5x_5 + 11x_6 + 18x_7 \geqslant 85, \\ -6x_1 + 27x_2 + 10x_3 + 28x_4 - 2x_5 + 7x_6 - 9x_7 \leqslant 63. \end{cases}$$

19. Целевая функция:

$$\max(15x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 15x_5 + 23x_6 + 12x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 18x_4 + 8x_5 + 21x_6 - 6x_7 = 63, \\ 25x_1 + 19x_2 - 9x_3 - 7x_4 + 25x_5 - 6x_6 + 2x_7 = 51, \\ -7x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 25x_5 - 2x_6 + 14x_7 \geqslant 44, \\ 27x_1 + 2x_2 + 22x_3 + 5x_4 + 19x_5 - 2x_6 + 15x_7 \geqslant 80, \\ 25x_1 + 17x_2 + 22x_3 + 11x_4 + 13x_5 + x_6 + 25x_7 \leqslant 121. \end{cases}$$

20. Целевая функция:

$$\max(23x_1 + 25x_2 + 19x_3 + 24x_4 + 25x_5 + 15x_6 + 12x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 - 8x_3 + 21x_4 - 9x_5 + 25x_6 + 20x_7 = 62, \\ 30x_1 + 17x_2 + 3x_3 + 18x_4 + 8x_5 + 29x_6 - 9x_7 = 101, \\ 13x_1 + 30x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 - 6x_6 + 16x_7 \geqslant 43, \\ 12x_1 - x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 5x_5 + 5x_6 + 11x_7 \geqslant 7, \\ -5x_1 + 30x_2 + 9x_3 - 5x_4 + 16x_5 + 13x_6 - 8x_7 \leqslant 56. \end{cases}$$

21. Целевая функция:

$$\max(17x_1 + 19x_2 + 4x_3 + 28x_4 + 21x_5 + 27x_6 + 19x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 2x_5 - 9x_6 + x_7 = 16, \\ -x_1 + 12x_2 + 21x_3 + 22x_4 + 9x_5 + 5x_6 - 8x_7 = 68, \\ 21x_1 + 30x_2 + x_3 + 3x_4 + 23x_5 - 4x_6 + 3x_7 \geqslant 72, \\ x_1 + x_2 + 20x_3 + 13x_4 + 2x_5 + 16x_6 + 2x_7 \geqslant 50, \\ -9x_1 - x_2 + 24x_3 - 8x_4 + 19x_5 + 5x_6 + x_7 \leqslant 36. \end{cases}$$

22. Целевая функция:

$$\max(12x_1 + 2x_2 + 18x_3 + 22x_4 + 26x_5 + 24x_6 + 12x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 20x_1 + 20x_2 - 10x_3 + 2x_4 + 18x_5 + 20x_6 + 15x_7 = 91, \\ 23x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 6x_4 - 4x_5 + 3x_6 + 6x_7 = 29, \\ 5x_1 + 8x_2 - 10x_3 - 6x_4 - 9x_5 + 14x_6 - 7x_7 \geqslant -10, \\ 21x_1 - 7x_2 + 11x_3 + 12x_4 + 10x_5 - 3x_6 - 7x_7 \geqslant 30, \\ -10x_1 + 12x_2 - 6x_3 + 16x_4 + 14x_5 + 10x_6 + 5x_7 \leqslant 45. \end{cases}$$

23. Целевая функция:

$$\max(13x_1 + 15x_2 + 24x_3 + 27x_4 + 6x_5 + 13x_6 + 14x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 20x_1 + 14x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 20x_5 + 21x_6 + 17x_7 = 131, \\ 2x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 14x_4 + x_5 - x_6 + 3x_7 = 42, \\ 30x_1 + 18x_2 + 29x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 10x_6 + 25x_7 \geqslant 102, \\ -2x_1 + 25x_2 - 7x_3 - 8x_4 - 9x_5 + 10x_6 + 24x_7 \geqslant 29, \\ 17x_1 + 23x_2 + 25x_3 - 5x_4 + 20x_5 + 14x_6 + 28x_7 \leqslant 129. \end{cases}$$

24. Целевая функция:

$$\max(30x_1+17x_2+13x_3+3x_4+15x_5+25x_6+10x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 20x_1-6x_2+13x_3-3x_4+7x_5-6x_6-7x_7=25, \\ 3x_1-4x_2+16x_3-4x_4+7x_5+x_6+20x_7=45, \\ 29x_1+22x_2+2x_3+21x_4+16x_5+30x_6-x_7\geqslant 112, \\ 19x_1+2x_2+24x_3+19x_4+25x_5+5x_6+3x_7\geqslant 89, \\ 8x_1-9x_2+6x_3+2x_4-3x_5+3x_6+29x_7\leqslant 43. \end{cases}$$

25. Целевая функция:

$$\max(17x_1+24x_2+25x_3+17x_4+19x_5+3x_6+15x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 24x_1+4x_2-8x_3-x_4+21x_5+14x_6+25x_7=85, \\ -2x_1+x_2+29x_3-8x_4-7x_5+7x_6+26x_7=50, \\ 26x_1+23x_2-4x_3+25x_4+23x_5-5x_6-7x_7\geqslant 75, \\ 5x_1+18x_2+15x_3+10x_4-9x_5+7x_6+20x_7\geqslant 62, \\ 27x_1+20x_2+5x_3+28x_4+17x_5-9x_6+23x_7\leqslant 117. \end{cases}$$

26. Целевая функция:

$$\max(7x_1+26x_2+14x_3+30x_4+4x_5+24x_6+16x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} -x_1+18x_2-3x_3+27x_4-4x_5+5x_6-3x_7=47, \\ -7x_1+14x_2+5x_3+24x_4-3x_5+7x_6+19x_7=64, \\ 30x_1+26x_2+13x_3+2x_4+23x_5-5x_6-7x_7\geqslant 75, \\ 21x_1-2x_2+12x_3+11x_4-5x_5+13x_6+27x_7\geqslant 71, \\ 19x_1+10x_2+13x_3+27x_4+21x_5+22x_6+16x_7\leqslant 134. \end{cases}$$

27. Целевая функция:

$$\max(15x_1+7x_2+22x_3+8x_4+23x_5+10x_6+24x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 21x_1+24x_2+13x_3+21x_4-5x_5+17x_6+4x_7=100, \\ 24x_1+3x_2+15x_3-9x_4-10x_5+20x_6+16x_7=67, \\ 25x_1+3x_2+5x_3-8x_4+9x_5+10x_6-x_7\geqslant 38, \\ -4x_1+20x_2+14x_3+5x_4+28x_5+10x_6+13x_7\geqslant 82, \\ 25x_1+10x_2+10x_3+9x_4-6x_5+16x_6+24x_7\leqslant 95. \end{cases}$$

28. Целевая функция:

$$\max(11x_1+24x_2+28x_3+4x_4+18x_5+18x_6+17x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 4x_1+19x_2+27x_3+12x_4+24x_5+21x_6+13x_7=124, \\ 3x_1-3x_2+15x_3+11x_4-x_5-2x_6+29x_7=60, \\ 24x_1-9x_2+20x_3+29x_4+6x_5+3x_6+11x_7 \geqslant 80, \\ -3x_1+x_2-3x_3+19x_4-9x_5-4x_6+8x_7 \geqslant 3, \\ 18x_1+15x_2+23x_3+16x_4+12x_5+21x_6-9x_7 \leqslant 100. \end{cases}$$

29. Целевая функция:

$$\max(7x_1+16x_2+18x_3+26x_4+8x_5+3x_6+2x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 21x_1-8x_2+28x_3-6x_4-7x_5-3x_6-x_7=28, \\ 26x_1+5x_2-3x_3+19x_4+18x_5+16x_6+20x_7=106, \\ -8x_1+18x_2+10x_3-9x_4-x_5+13x_6+3x_7 \geqslant 19, \\ 3x_1-x_2+28x_3-6x_4+29x_5-8x_6-4x_7 \geqslant 37, \\ 18x_1+25x_2-10x_3-x_4+27x_5+6x_6+27x_7 \leqslant 97. \end{cases}$$

30. Целевая функция:

$$\max(8x_1+x_2+24x_3+3x_4+x_5+18x_6+25x_7).$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2+10x_3+27x_4+18x_5-7x_6-4x_7=59, \\ -x_1+20x_2+17x_3+27x_4+18x_5-7x_6-6x_7=75, \\ -5x_1+2x_2+20x_3-9x_4-6x_5+9x_6-2x_7 \geqslant 3, \\ 17x_1+11x_2+25x_3+15x_4+27x_5+23x_6+13x_7 \geqslant 124, \\ 30x_1+22x_2+22x_3+22x_4+4x_5+x_6-2x_7 \leqslant 103. \end{cases}$$

1.4. Порядок выполнения задания

1. Выписать согласно своему номеру варианта исходные данные для выполнения практической работы.

2. Записать исходную задачу в матричной и в векторной формах.

3. Выполнить переход к эквивалентной задаче минимума, записав целевую функцию.

4. Преобразовать систему ограничений с неравенствами в систему уравнений. Записать ее. Записать преобразованную задачу в матричной и в векторной формах.

5. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

6. Оформить отчет в печатном виде согласно рекомендациям преподавателя. В отчете должны быть подробно расписаны исходные данные задачи согласно номеру варианта, ход решения и полученные результаты по каждому пункту задания. В титульном листе отчета обязательно должны быть указаны номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося.

7. Защитить по отчету выполненную работу.

Примечание. Работа выполняется индивидуально.

1.5. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте общий принцип оптимизации функциональной задачи.
2. Что такое целевая функция (критерий эффективности)?
3. Для чего производится трансформация неравенств и преобразование задачи в различные формы?

Список использованных источников

1. Таха, Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха. — М. : Вильямс, 2005. — 912 с.
2. Номоконов, М. К. Лекции и практические занятия по курсу «Математическое программирование» / М. К. Номоконов. — СПб. : СПВВИУС, 1992. — 172 с.
3. Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи и принципы методологии / Е. С. Вентцель. — М. : Наука, 1988. — 208 с.

Практическая работа 2
Нахождение базиса и приведение задачи к базисным переменным

2.1. Цели работы

Научиться приводить системы ограничений к базисным формам и находить допустимое опорное решение. Научиться оперировать условиями ограничений в векторной и матричной формах.

2.2. Теоретические сведения

2.2.1. Основные определения

1. $W = F(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$ — целевая функция.

2. Вектор $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — допустимый план, удовлетворяющий ограничениям. Допустимый план, который максимизирует или минимизирует целевую функцию, называется *оптимальным планом* или *решением задачи*.

3. Число $W_{\max}(W_{\min}) = F_{\max}(x)(F_{\min}(x))$ — значение оптимального решения.

4. Вектор $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — вектор коэффициентов целевой функции.

5. Вектор $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ и матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — вектор значений свободных членов и матрица коэффициентов переменных функций ограничений.

2.2.2. Допустимые решения целевой функции

Ответом на вопрос о *существовании допустимых* максимальных или минимальных *решений целевой функции* $W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x)$, при $x_j \geqslant 0$, $j = (1, n)$, может быть один из вариантов:

1. Система ограничений несовместна, следовательно, решений не имеет, значит, допустимых планов нет. Задача не имеет решения.

2. Система совместная и определенная. При этом $m = n = r$. Матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ квадратная и $\Delta\mathbf{A} = \Delta(a_{ij}) \neq 0$, так как r — порядок не равного нулю $\Delta\mathbf{A}$. Следовательно, система имеет только одно решение $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если все найденные $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неотрицательны, то решение допустимое и оптимальное. Если хотя бы одно найденное x_n из $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отрицательно, то решение недопустимое и задача не имеет решения. Сам случай простой и решается обычными матметодами.

3. Если система совместная и неопределенная, то она имеет бесчисленное множество решений, из которых необходимо найти допустимые. В этом

случае $r \leqslant m < n$ и останется только r уравнений, соответствующих базисному минору. В левой части уравнений сохраняем $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ и называем их *базисными переменными*, а весь набор $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ — *базисом неизвестных*. В правую часть переносим оставшиеся $(n-r)$ и называем их *свободными неизвестными*. Решаем систему относительно базисных неизвестных, что возможно единственным образом.

Воспользуемся матричной формой $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Предположим, что $r = m < n$ — ранг матрицы равен m. Это значит, что m векторов системы линейно независимы. Полагаем, что это первые m векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Обозначим базисные переменные как

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}$$

и свободные переменные как

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

В матрице $\mathbf{A} = (a_{ij})$ выделим матрицу $\mathbf{D}$, состоящую из коэффициентов при базисных переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, и матрицу $\mathbf{S}$, состоящую из коэффициентов при свободных неизвестных $(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$. Тогда $\mathbf{AX} = (\mathbf{DS})\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \tilde{X} \end{pmatrix} = \mathbf{D}\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{B}$, и если ранг $\mathbf{D}$ равен m, то $\Delta\mathbf{D} \neq 0$ и $\mathbf{D}$ — невырожденная матрица, обратная к $\mathbf{D}$ матрица $\mathbf{D}^{-1}$. Умножаем обе части последнего равенства на $\mathbf{D}^{-1}$, получаем $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}$ или $\mathbf{E}\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}$, но $\mathbf{E}\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}$, а значит $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{X}}$.

Обозначим $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B} = \beta$ — вектор-столбец с элементами β_i $(i = 1,m)$ и $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S} = \alpha$ — матрица размером $(m \times (n-r))$ с элементами α_{ij}, получаем систему $\bar{\mathbf{X}} = \beta - \alpha\tilde{\mathbf{X}}$ равносильную исходной $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Далее разворачиваем систему из матричного вида в классический

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (\alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \alpha_{1,m+2}x_{m+2} + \ldots + \alpha_{1,n}x_n), \\ x_2 = \beta_2 - (\alpha_{2,m+1}x_{m+1} + \alpha_{2,m+2}x_{m+2} + \ldots + \alpha_{2,n}x_n), \\ \ldots \\ x_m = \beta_m - (\alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \alpha_{m,m+2}x_{m+2} + \ldots + \alpha_{m,n}x_n), \end{cases}$$

переносим все неизвестные влево и получаем систему с единичным базисом:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_m + \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \alpha_{1,m+2}x_{m+2} + \ldots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1, \\ 0x_1 + 1x_2 + \ldots + 0x_m + \alpha_{2,m+1}x_{m+1} + \alpha_{2,m+2}x_{m+2} + \ldots + \alpha_{2,n}x_n = \beta_2, \\ \ldots \\ 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 1x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \alpha_{m,m+2}x_{m+2} + \ldots + \alpha_{m,n}x_n = \beta_m. \end{cases}$$

Запишем систему в матричной форме $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{X} = \beta$, где

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1,m+1} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_{2,m+1} & \ldots & \alpha_{2,n} \\ \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{m,m+1} & \ldots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Если в такой системе с единичным базисом принять все небазисные переменные равными нулю, то получится базисное решение системы:

$$X = (\underbrace{\beta_1, \beta_2, \ \ldots, \beta_m,}_{m} \underbrace{0, \ \ldots, 0}_{n-m}).$$

2.2.3. Определения

1. Если базисное решение $X = (\beta_1, \beta_2, \ \ldots, \beta_m, 0, \ \ldots, 0)$ удовлетворяет условию неотрицательности $(\beta_i \geqslant 0)$, то оно называется *допустимым опорным решением* или *допустимым опорным планом*.

2. Если среди β_i, $(i = 1, m)$ нет равных нулю, то опорный план называется *невырожденным*. Если нули есть, то опорный план называется *вырожденным*.

На опорном плане целевая функция всегда принимает значение равное ее свободному члену.

Заменим в целевой функции $W = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$ базисные переменные на

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (\alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \alpha_{1,m+2}x_{m+2} + \ldots + \alpha_{1,n}x_n), \\ x_2 = \beta_2 - (\alpha_{2,m+1}x_{m+1} + \alpha_{2,m+2}x_{m+2} + \ldots + \alpha_{2,n}x_n), \\ \ldots, \\ x_m = \beta_m - (\alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \alpha_{m,m+2}x_{m+2} + \ldots + \alpha_{m,n}x_n). \end{cases}$$

Тогда она будет выражена через небазисные (свободные) переменные

$$W = \dot{c}_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \dot{c}_j x_j,$$

где $\dot{c}_0$ и $\dot{c}_j$ — новые коэффициенты целевой функции.

Если свободные переменные $(x_{m+1}, x_{m+2}, \ \ldots, x_n)$ примут нулевые значения, то целевая функция $W = \dot{c}_0$.

2.3. Варианты для выполнения задания

Вариант выбирается по номеру студента в журнале группы. Варианты приведены в практической работе 1 в п. 1.3.

2.4. Порядок выполнения задания

1. Выписать согласно своему номеру варианта исходные данные для выполнения практической работы.
2. Определить и записать матрицу ограничений **A** и вектор-столбец **B**.
3. Привести ограничения к уравнениям и записать новую матрицу **A** и вектор-столбец **B**.
4. Определить ранг базисных переменных m.
5. Определить и записать матрицы **D** и **S**.
6. Найти обратную матрицу $\mathbf{D}^{-1}$.
7. Вычислить коэффициенты β_i.
8. Вычислить коэффициенты α_{ij}.
9. Записать уравнение в базисных переменных и выполнить анализ решения. Сделать выводы.
10. Оформить отчет в печатном виде согласно рекомендациям преподавателя. В отчете должны быть подробно расписаны исходные данные задачи согласно номеру варианта, ход решения и полученные результаты по каждому пункту задания. В титульном листе отчета обязательно должны быть указаны номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося.
11. Защитить по отчету выполненную работу.

Примечание. Работа выполняется индивидуально. При проведении расчетов допускается использовать систему Octave.

2.5. Контрольные вопросы

1. Дать определение допустимого опорного решения (плана).
2. Какой план называется вырожденным? невырожденным?
3. Что такое оптимальный план?
4. Что такое базисные переменные?

Список использованных источников

1. Таха, Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха. — М. : Вильямс, 2005. — 912 с.
2. Номоконов, М. К. Лекции и практические занятия по курсу «Математическое программирование» / М. К. Номоконов. — СПб. : СПВВИУС, 1992. — 172 с.
3. Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи и принципы методологии / Е. С. Вентцель. — М. : Наука, 1988. — 208 с.

Практическая работа 3
Принятие оптимального решения в условиях неопределенности

3.1. Цель работы

Приобретение навыков решения поставленной в условиях неопределенности задачи путем проведения оценки ситуации различными критериями и нахождения оптимальной альтернативы из всех возможных.

3.2. Теоретические сведения

3.2.1. Описание алгоритма решения задачи в условиях неопределенности

Принятие решения в условиях неопределенности требует определения альтернативных действий, которым соответствуют расходы или доходы, зависящие от случайных состояний или условий. Матрицу в задаче принятия решений с m-возможными действиями (альтернативами) и n-состояниями (условиями) можно представить в виде следующей модели (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Модель принятия решения в условиях неопределенности

	s_1	s_2	$\dots$	s_n
a_1	$V_{(a_1,s_1)}$	$V_{(a_1,s_2)}$	$\dots$	$V_{(a_1,s_n)}$
a_2	$V_{(a_2,s_1)}$	$V_{(a_2,s_2)}$	$\dots$	$V_{(a_2,s_n)}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_m	$V_{(a_m,s_1)}$	$V_{(a_m,s_2)}$	$\dots$	$V_{(a_m,s_n)}$

Следовательно, математическая модель задачи принятия решений определяется множеством состояний $\{S_j = 1,n\}$, множеством планов (стратегий) $\{A_i = 1,m\}$ и матрицей возможных результатов $\|V_{i,j}\|$. Для принятия оптимальных решений и анализа ситуации в условиях неопределенности используется ряд критериев. Рассмотрим некоторые из них.

1. Критерий Лапласа.
2. Минимаксный критерий (критерий Вальда).
3. Критерий Сэвиджа.
4. Критерий Гурвица.

Эти критерии отличаются по степени консерватизма, который проявляет индивидуум, принимающий решение перед лицом неопределенности.

3.2.1.1. Критерий Лапласа

Критерий Лапласа опирается на принцип недостаточного обоснования, который гласит, что, поскольку распределение вероятностей состояния $P(s_j)$ неизвестно, нет причин считать их различными. Следовательно, используется оптимистическое предположение, что вероятности всех состояний равны между собой, то есть

$$P(s_1) = P(s_2) = P(s_j) = P(s_n) = \frac{1}{n}.$$

Если при этом $V(a_j,s_i)$ представляет получаемую прибыль, то наилучшим решением является то, которое обеспечивает

$$\max_{a_i}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} V(a_i,s_j)\right\}.$$

Если величина $V(a_j,s_i)$ представляет собой расходы лица, принимающего решение, то оператор max заменяется на min.

3.2.1.2. Минимаксный (максиминный) критерий

Минимаксный (максиминный) критерий основан на консервативном подходе и осторожном поведении лица принимающего решение, и сводится к выбору наименьшей альтернативы из наибольших или наоборот — из наименьших альтернатив выбирают наибольшую.

Если величина представляет получаемую $V(a_j,s_i)$ прибыль, то в соответствии с максиминным критерием в качестве оптимального выбирается решение, обеспечивающее

$$\max_{a_i}\left\{\min_{s_j} V(a_i,s_j)\right\}.$$

Если величина $V(a_j,s_i)$ представляет потери, используется минимаксный критерий, который определяется следующим соотношением:

$$\min_{a_i}\left\{\max_{s_j} V(a_i,s_j)\right\}.$$

3.2.1.3. Критерий Сэвиджа

Критерий Сэвиджа стремится смягчить определенный консерватизм минимаксного (максиминного) критерия путем замены матрицы платежей (выигрышей или проигрышей) $V(a_j,s_i)$ матрицей рисков (потерь) $r(a_j,s_i)$, которая определяется следующим образом:

$$r(a_i,s_j)=\begin{cases}\max\limits_{a_k}\left\{V(a_k,s_j)\right\}-V(a_i,s_j), & \text{если } v \text{ — доход,}\\ V(a_i,s_j)-\min\limits_{a_k}\left\{V(a_k,s_j)\right\}, & \text{если } v \text{ — потери.}\end{cases}$$

Независимо от того, является ли $V(a_j,s_i)$ выигрышами или потерями, $r(a_j,s_i)$ во всех случаях определяют величину потерь лица, принимающего решения. Следовательно, к рискам $r(a_j,s_i)$ можно применять только *минимаксный* критерий.

3.2.1.4. Критерий Гурвица

Критерий Гурвица охватывает ряд различных подходов к принятию решений — от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного (консервативного). Для описания склонности лица к оптимизму используется параметр оптимизма $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Пусть величины $V(a_j,s_i)$ представляют доходы. Тогда решению, выбранному по критерию Гурвица, соответствует

$$\max_{a_i}\left\{\alpha\cdot\max_{s_j}\left\{V(a_i,s_j)\right\}+(1-\alpha)\cdot\min_{s_j}\left\{V(a_i,s_j)\right\}\right\}.$$

Если $\alpha=0$, то критерий Гурвица становится консервативным, так как его применение эквивалентно применению обычного минимаксного критерия. Если $\alpha=1$, то критерий Гурвица становится слишком оптимистичным, ибо рассчитывает на наилучшее из наилучших условий. Степень оптимизма (или пессимизма) можно конкретизировать надлежащим выбором величины α из интервала $[0,1]$. При отсутствии ярко выраженной склонности к оптимизму или пессимизму выбор $\alpha=0{,}5$ представляется разумным.

Если величины $V(a_j,s_i)$ представляют собой потери, то критерий принимает следующий вид:

$$\min_{a_i}\left\{\alpha\cdot\min_{s_j}\left\{V(a_i,s_j)\right\}+(1-\alpha)\cdot\max_{s_j}\left\{V(a_i,s_j)\right\}\right\}.$$

3.2.2. Пример решения задачи

3.2.2.1. Формулировка задачи

В некотором городе планируется построить санаторий. Организаторы посчитали, что количество отдыхающих в зависимости от времени года может быть различно и составлять 150, 200, 300 или 350 человек.

Пусть переменные a_1–a_4 представляют собой возможные по количеству отдыхающих размеры санатория, а переменные s_1–s_4 соответствуют различным уровням обслуживания отдыхающих.

Матрица затрат (в тыс. рублей) приведена в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Матрица затрат на постройку санатория

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	100	120	160	185
a_2	120	110	145	170
a_3	140	145	140	175
a_4	170	165	150	190

Определить оптимальный размер санатория, характеризующийся наименьшими затратами.

3.2.2.2. Решение по критерию Лапласа

При заданных вероятностях $P(s_j) = \frac{1}{4} = 0{,}25$, где $j = 1,2,3,4$, ожидаемые значения затрат для различных возможных решений вычисляются следующим образом:

$$M_1\{a_1\} = \tfrac{1}{4}(100+120+160+185) = 141{,}25$$
$$M_2\{a_2\} = \tfrac{1}{4}(120+110+145+170) = 136{,}25 \quad \leftarrow \quad \text{оптимум}$$
$$M_3\{a_3\} = \tfrac{1}{4}(140+145+140+175) = 150$$
$$M_4\{a_4\} = \tfrac{1}{4}(170+165+150+190) = 168{,}75$$

Так как исходная матрица представляет собой расходы, то оптимальное решение достигается при реализации альтернативы, характеризующейся минимальными затратами.

Вывод: наименьший уровень расходов был получен при использовании альтернативы a_2. Организаторы решают построить санаторий на 200 отдыхающих.

3.2.2.3. Решение по минимаксному критерию

Эту же задачу можно решить с помощью минимаксного критерия

$$\min_{a_i}\left\{\max_{s_j}\{V(a_i,s_j)\}\right\},$$

так как в данном случае рассматривается матрица расходов (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Решение задачи по минимаксному критерию

	s_1	s_2	s_3	s_4	$\max\left\{V(a_i,s_j)\right\}$
a_1	100	120	160	185	185
a_2	120	110	145	170	**170** минимакс
a_3	140	145	140	175	175
a_4	170	165	150	190	190

Вывод: наименьший уровень расходов был получен при использовании альтернативы a_2. Организаторы решают построить санаторий на 200 отдыхающих.

3.2.2.4. Решение по критерию Сэвиджа

Для случая исследования расходов, согласно критерию Сэвиджа, составляется матрица рисков, элементы которой определяются по данным исходной матрицы из следующего соотношения:

$$r(a_i,s_j) = V(a_i,s_j) - \min\left\{V(a_k,s_j)\right\},$$

где V — потери, $\min\left\{V(a_k,s_j)\right\}$ — минимальное значение элемента в столбце матрицы (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Решение задачи по критерию Сэвиджа. Определение минимумов

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	100	120	160	185
a_2	120	110	145	170
a_3	140	145	140	175
a_4	170	165	150	190
$\min\left\{V(a_k,s_j)\right\}$	100	110	140	170

Матрица рисков в данном случае имеет следующий вид (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Решение задачи по критерию Сэвиджа. Матрица рисков

	s_1	s_2	s_3	s_4	Максимум по строке
a_1	0	10	20	15	**20** минимакс
a_2	20	0	5	0	**20** минимакс
a_3	40	35	0	5	40
a_4	70	55	10	20	70

Вывод: наименьший уровень расходов получен при использовании альтернатив a_1 или a_2, организаторы могут выбрать любую из этих двух альтернатив.

3.2.2.5. Решение по критерию Гурвица

Для отражения своего мнения по рассматриваемому процессу принятия решения примем показатель оптимизма $\alpha = 0{,}25$ (высказывается точка зрения, направленная к оптимизму).

Оптимальное решение (табл. 3.6) ищется из соотношения

$$\min_{a_i} \left\{ \alpha \cdot \min_{s_j} \left\{ V(a_i, s_j) \right\} + (1-\alpha) \cdot \max_{s_j} \left\{ V(a_i, s_j) \right\} \right\}.$$

Таблица 3.6

Решение задачи по критерию Гурвица

	s_1	s_2	s_3	s_4	$\min\{V\}$	$\max\{V\}$	Решение $\min\{\dots\}$
a_1	100	120	160	185	100	185	$0{,}25 \cdot 100 + (1-0{,}25) \cdot 185 = 163{,}75$
a_2	120	110	145	170	110	170	$0{,}25 \cdot 110 + (1-0{,}25) \cdot 170 = \mathbf{155}$
a_3	140	145	140	175	140	175	$0{,}25 \cdot 140 + (1-0{,}25) \cdot 175 = 166{,}25$
a_4	170	165	150	190	150	190	$0{,}25 \cdot 150 + (1-0{,}25) \cdot 190 = 180$

Вывод: наименьший уровень расходов был получен при использовании альтернативы a_2. Организаторы решают построить санаторий на 200 отдыхающих.

3.3. Варианты для выполнения задания

1. При выборе стратегии развития бизнеса R_j ($j = 1$–5) каждому возможному состоянию природы S_i ($i = 1$–4) соответствует один результат (исход) V_{ji} ($j = 1$–4; $i = 1$–5). Элементы V_{ji}, являющиеся мерой потерь при принятии решения, приведены в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Меры потерь при принятии решения

Стратегии	Состояние природы			
	s_1	s_2	s_3	s_4
R_1	2	6	5	8
R_2	3	10	1	4
R_3	5	1	7	2
R_4	7	3	10	5
R_5	9	4	11	6

2. Фирма рассматривает вопрос о строительстве станции технического обслуживания (СТО) автомобилей. Составлена смета расходов на строительство станции с различным количеством обслуживаемых автомобилей, а также рассчитан ожидаемый доход в зависимости от удовлетворения прогнозируемого спроса на предлагаемые услуги СТО (прогнозируемое количество обслуженных автомобилей в действительности). В зависимости от проектного количества обслуживаемых автомобилей в сутки R_j и величины прогнозируемого спроса на услуги СТО — построена табл. 3.8 ежегодных финансовых результатов (доход).

Таблица 3.8

Меры потерь при принятии решения

Проекты СТО	Прогнозируемая величина спроса					
	0	10	20	30	40	50
20	-120	60	240	250	260	260
30	-160	15	190	380	390	390
40	-210	-20	150	330	540	590

3. Определить оптимальную стратегию рекламной компании по заданной в табл. 3.9 платежной матрице (матрице доходов).

Таблица 3.9

Матрица доходов

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
R_1	15	12	1	-3	18	20
R_2	3	15	9	7	1	3
R_3	0	6	17	21	-2	5
R_4	8	20	12	2	0	4

4. Из пяти станков необходимо выбрать один для изготовления партии изделий, размер которой Q может принимать три значения: 150, 200 и 350. Производственные затраты C_i для i станка задаются формулой

$$C_i = P_i + c_i \cdot Q,$$

где P_i и c_i принимают значения, данные в табл. 3.10.

Таблица 3.10

Данные P_i и c_i

Показатели	Модель станка				
	1	2	3	4	5
P_i	30	80	60	160	100
c_i	14	8	10	7	4

5. Намечается крупномасштабное производство кроссоверов. Имеются четыре варианта проекта автомобиля R_j ($j = 1$–4). Определена экономическая эффективность V_{ji} каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении трех заданных сроков S_i ($i = 1$–3) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в табл. 3.11. Требуется выбрать лучший проект кроссовера для производства.

Таблица 3.11

Меры потерь при принятии решения

Проекты	Состояние природы		
	s_1	s_2	s_3
R_1	20	26	15
R_2	27	24	10
R_3	15	28	11
R_4	9	30	23

6. Определите тип электростанции, которую необходимо построить для удовлетворения энергетических потребностей комплекса крупных промышленных предприятий региона. Множество возможных стратегий в задаче включает следующие параметры строительства:

- R_1 — сооружается гидростанция;
- R_2 — сооружается теплостанция;
- R_3 — сооружается атомная станция.

Экономическая эффективность сооружения электростанции зависит от влияния случайных факторов, образующих множество состояний природы S_i ($i = 1$–5). Результаты расчета экономической эффективности приведены в табл. 3.12.

Таблица 3.12

Меры потерь при принятии решения

Тип станции	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	40	70	30	25	45
R_2	60	50	45	20	30
R_3	50	30	40	35	65

7. Определите оптимальную стратегию технологического переоснащения производства R_i по заданной в табл. 3.13 матрице расходов.

Таблица 3.13

Матрица расходов

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	1	2	11	-3	18
R_2	26	-5	19	-8	16
R_3	10	16	25	28	-2
R_4	18	27	15	3	20
R_5	5	6	8	9	3

8. Намечается строительство городского торгового комплекса. Имеются пять проектов строительства R_j ($j = 1$–5). Определена экономическая эффективность V_{ji} каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении четырех сроков S_i ($i = 1$–4) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в табл. 3.14. Требуется выбрать лучший проект строительства.

Таблица 3.14

Меры потерь при принятии решения

Проекты	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	41	2	34	25
R_2	32	3	28	16
R_3	23	8	30	17
R_4	15	4	44	20
R_5	34	2	24	19

9. При выборе проекта развития R_j ($j = 1$–4) каждому возможному состоянию природы S_i ($i = 1$–4) соответствует один результат (исход) V_{ji}. Элементы V_{ji}, являющиеся мерой прибыли при принятии решения, приведены в табл. 3.15. Необходимо выбрать оптимальное решение.

Таблица 3.15

Меры прибыли при принятии решения

Проекты	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	6	1	7	4
R_2	7	9	1	5
R_3	8	2	6	4
R_4	9	5	2	3

10. При выборе проекта R_j ($j = 1$–5) каждому возможному состоянию природы S_i ($i = 1$–5) соответствует один результат (исход) V_{ji}. Элементы V_{ji}, являющиеся мерой потерь при принятии решения, приведены в табл. 3.16. Необходимо выбрать оптимальное решение.

Таблица 3.16

Меры потерь при принятии решения

Проекты	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	6	5	4	8	7
R_2	4	8	9	2	1
R_3	5	3	1	6	2
R_4	8	6	4	9	5
R_5	9	7	3	8	4

11. Определите оптимальный вариант инвестиций R_i по заданной в табл. 3.17 матрице доходов.

Таблица 3.17

Матрица доходов

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	27	22	12	-1
R_2	2	16	19	7
R_3	10	-6	15	23
R_4	8	26	14	3
R_5	13	7	34	2
R_6	-3	4	8	10

12. Рассматривается производство автомобильных кранов. Имеются три варианта проекта автокранов R_j ($j = 1$–3). Определена экономическая эффективность V_{ji} каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении четырех сроков S_i ($i = 1$–4) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности (доход) для различных проектов и состояний природы приведены в табл. 3.18. Требуется выбрать лучший проект автокрана для производства.

Таблица 3.18

Значения экономической эффективности

Проект автокрана	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	33	21	45	25
R_2	45	24	24	14
R_3	53	35	38	17

13. Имеются пять вариантов проекта систем водоочистки R_j ($j = 1$–5). Определена экономическая эффективность V_{ji} каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении четырех сроков S_i ($i = 1$–4) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности (доход) для различных проектов водоочистки и состояний природы приведены в табл. 3.19. Выбрать лучший проект системы водоочистки.

Таблица 3.19

Значения экономической эффективности

Проекты	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	20	26	47	35
R_2	59	23	34	43
R_3	33	35	43	32
R_4	40	28	24	14
R_5	34	36	39	15

14. Имеются пять проектов строительства R_j ($j = 1$–5) электрической подстанции. Определена экономическая эффективность V_{ji} каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении трех сроков S_i ($i = 1$–3) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в табл. 3.20. Требуется выбрать лучший проект строительства электроподстанции.

Таблица 3.20

Значения экономической эффективности

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	35	23	24
R_2	22	24	34
R_3	45	28	25
R_4	26	41	27
R_5	34	49	36

15. При выборе варианта рекламной компании R_j ($j = 1$–4) каждому возможному состоянию природы S_i ($i = 1$–5) соответствует один результат (исход) V_{ji}. Элементы V_{ji}, являющиеся мерой потерь при принятии решения, приведены в табл. 3.21. Выберите оптимальное решение.

Таблица 3.21

Меры потерь при принятии решения

Вариант рекламы	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	7	4	9	8	3
R_2	8	6	9	5	1
R_3	9	3	8	6	2
R_4	11	5	13	11	6

Примечание. Вариант выбирается по номеру бригады.

3.4. Порядок выполнения задания

1. Изучить теоретический материал по теме работы (практикум, лекции, учебники).
2. Выписать по номеру варианта исходные данные для выполнения практической работы.
3. Найти оптимальное решение, используя все предложенные критерии.
4. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.
5. При подготовке решений и оценок альтернатив по критериям использовать программный пакет Octave.
6. Оформить отчет в печатном виде согласно рекомендациям преподавателя. В отчете должны быть подробно расписаны исходные данные задачи согласно номеру варианта, ход решения и полученные результаты по каждому пункту задания. В титульном листе отчета обязательно должны быть указаны номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося.
7. Защитить по отчету выполненную работу.

Примечание. Работа выполняется бригадой учащихся не более двух человек. При проведении расчетов допускается использовать систему Octave.

3.5. Контрольные вопросы

1. Что понимается под понятием неопределенность?
2. Матмодель задачи принятия решений в условиях неопределенности.
3. Что понимается под понятием риск?
4. Как определяется матрица рисков?
5. Раскройте суть критерия минимакса?
6. Каковы преимущества и недостатки критерия Сэвиджа?
7. Разъясните критерий Лапласа.
8. Объясните критерий Гурвица и показатель оптимизма.

Список использованных источников

1. Таха, Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха. — М. : Вильямс, 2005. — 912 с.

2. Есипов, Б. А. Методы исследования операций / Б. А. Есипов. — СПб. : Лань, 2013. — 304 с.

3. Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи и принципы методологии / Е. С. Вентцель. — М. : Наука, 1988. — 208 с.

4. Черноруцкий, И. Г. Методы принятия решений / И. Г. Черноруцкий. — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 416 с.

Практическая работа 4
Способы задания нечетких множеств

4.1. Цели работы

Научиться формализовать и записывать в математической форме, пригодной для постановки задачи принятия решений, величины и предположения, основанные на теории нечетких множеств или сформулированные в неявном виде. Научиться определять возможный диапазон таких значений и записывать функции принадлежности в аналитическом виде для множества вещественных чисел.

4.2. Теоретические сведения

4.2.1. Понятие нечетких множеств

Нечеткое множество представляет собой совокупность элементов произвольной природы, относительно которых нельзя с полной определенностью утверждать — принадлежит ли тот или иной элемент рассматриваемой совокупности данному множеству или нет. Однако все рассматриваемые элементы должны принадлежать универсальному (базовому) множеству U.

Определение

Нечеткое множество $A = \{\langle x,\, \mu_A(x)\rangle\}$ — это множество пар $\langle x,\, \mu_A(x)\rangle$, где $x \in U$, а $\mu_A(x)$ — функция принадлежности, которая ставит в соответствие каждому из элементов $x \in U$ некоторое действительное число из отрезка $[0, 1]$.

Нечеткое множество A с конечным носителем $S(A)$ может быть задано перечислением его элементов с отличными от нуля значениями функции принадлежности $\mu_A(x)$, т. е. в виде

$$A = \{\langle x_1,\, \mu_A(x_1)\rangle,\, \langle x_2,\, \mu_A(x_2)\rangle,\, \ldots,\, \langle x_n,\, \mu_A(x_n)\rangle\}, \tag{4.1}$$

где $n = |A|$ — мощность носителя.

Это же множество часто записывают в следующем виде:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}, \tag{4.2}$$

где $\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$ означает пару $\langle x_i,\, \mu_A(x_i)\rangle$, а знаки суммирования «$+$, $\sum$» интерпретируются как объединение элементов во множество.

Последняя запись имеет символьный характер. Горизонтальная черта в формуле не означает деление, а обозначает приписывание конкретным элементам $x_1, \ldots, x_n$ степеней принадлежности $\mu_A(x_i)$.

Заметим, что сама функция принадлежности может быть задана аналитически.

Нечеткое множество A с бесконечным носителем $S(A)$ может быть записано в символьном виде $A = \int\limits_{x} \frac{\mu_A(x)}{x} dx$, где $\mu_A(x)$ — некоторая функция принадлежности, заданная аналитически, а знак интегрирования интерпретируется как объединение элементов в множество.

Нечеткое множество A с конечным или бесконечным носителем $S(A)$ удобно задавать графически в форме совокупности отдельных точек на плоскости для соответствующей этому нечеткому множеству функции принадлежности или некоторой линии.

Пример 4.1

Пусть $U = N$ или $U = R$. Требуется задать нечеткое множество, которое задает нечеткое число — «нечеткую девятку».

Решение задачи. Если $U = N$, то нечеткое число можно описать, например, нечетким множеством

$$A_1 = \frac{0{,}2}{6} + \frac{0{,}5}{7} + \frac{0{,}8}{8} + \frac{1}{9} + \frac{0{,}8}{10} + \frac{0{,}5}{11} + \frac{0{,}2}{12}$$

или нечетким множеством

$$A_2 = \frac{0{,}1}{5} + \frac{0{,}2}{6} + \frac{0{,}5}{7} + \frac{0{,}8}{8} + \frac{1}{9} + \frac{0{,}8}{10} + \frac{0{,}5}{11} + \frac{0{,}2}{12} + \frac{0{,}1}{13}.$$

Возможны и другие варианты.

Если $U = R$, то нечеткое число можно описать, например, нечетким множеством

$$A_3 = \int\limits_{x} \frac{\mu_{A_3}(x)}{x} dx = \int\limits_{x} \frac{[1 + (x-9)^2]^{-1}}{x} dx,$$

графическая форма которого показана на рис. 4.1(а), или нечетким множеством A_4, которое определяется функцией принадлежности вида

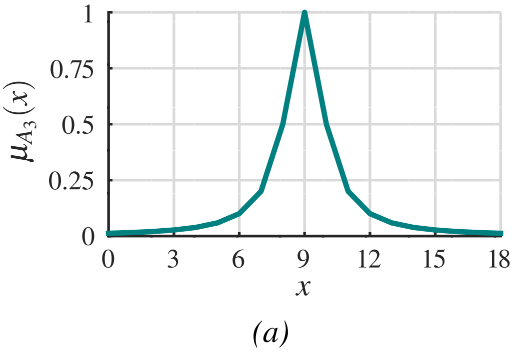
$$\mu_{A_4} = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{|x-9|}{3}}, & \text{при } 6 \leqslant x \leqslant 12, \\ 0 \text{ — в противном случае,} \end{cases}$$

графическая форма которой показана на рис. 4.1(б). Возможны и другие варианты.

Пример 4.2

Надо формализовать нечеткое определение «подходящая температура для купания в море».

Решение задачи. Зададим область рассуждений (базовое множество) в виде множества $U = [10^\circ,\ \ldots,\ 30^\circ]$. Первый отдыхающий, для которого



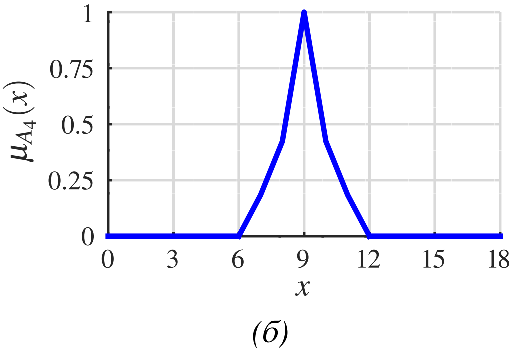


Рис. 4.1. Графическая форма нечетких множеств $\mu_{A_3}(x)$ (а) и $\mu_{A_4}(x)$ (б).

комфортной является температура 21°, может определить для себя нечеткое множество «температура около 21° комфортна для купания в море»:

$$A_1 = \frac{0{,}1}{17} + \frac{0{,}2}{18} + \frac{0{,}5}{19} + \frac{0{,}8}{20} + \frac{1}{21} + \frac{0{,}95}{22} + \frac{0{,}7}{23} + \frac{0{,}6}{24} + \frac{0{,}3}{25},$$

а второй отдыхающий — нечеткое множество «температура около 23° комфортна для купания в море»:

$$A_2 = \frac{0{,}1}{20} + \frac{0{,}6}{21} + \frac{0{,}9}{22} + \frac{1}{23} + \frac{0{,}9}{24} + \frac{0{,}75}{25} + \frac{0{,}4}{26} + \frac{0{,}1}{27}.$$

Пример 4.3

Надо формализовать нечеткое определение «небольшое натуральное число».

Решение задачи. Здесь областью рассуждений (базовым множеством) является множество $U = N$. Тогда нечеткое множество A, представляющее в данном контексте «небольшое натуральное число», может быть задано следующим образом:

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0{,}9}{3} + \frac{0{,}8}{4} + \frac{0{,}6}{5} + \frac{0{,}5}{6} + \frac{0{,}4}{7} + \frac{0{,}2}{8} + \frac{0{,}1}{9}.$$

Пример 4.4

Надо формализовать нечеткое определение «большое действительное число».

Решение задачи. Здесь областью рассуждений (базовым множеством) является множество $U = R$. Тогда нечеткое множество $A = \int\limits_x \frac{\mu_A(x)}{x} dx$, представляющее в некотором контексте «большое действительное число», может быть описано функцией принадлежности следующего вида:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{x-1}{x}, & \text{при } 1 \leqslant x < \infty, \end{cases} \tag{4.3}$$

графическая форма которой при $x \in [0, 25]$ показана на рис. 4.2.

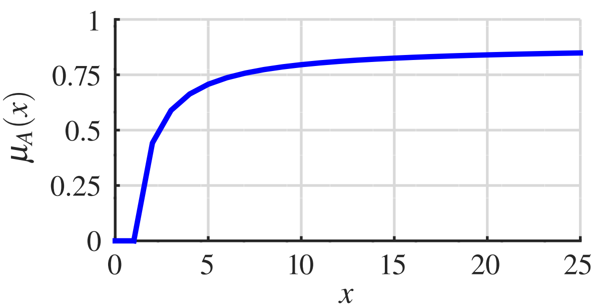


Рис. 4.2. Графическая форма функции принадлежности (4.3)

4.2.2. Основные типы функций принадлежности

Задать функцию принадлежности для нечеткого множества можно одним из следующих способов.

1. ***Кусочно-линейные функции принадлежности.*** Наиболее характерным примером таких функций являются «треугольная» и «трапециевидная» функции принадлежности.

• Функция принадлежности класса t **(треугольная)** в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$t(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leqslant x \leqslant c, \\ 0, & c \leqslant x, \end{cases}$$

где a, b, c — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением $a \leqslant b \leqslant c$.

• Функция принадлежности класса T **(трапециевидная)** в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$T(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & b \leqslant x \leqslant c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leqslant x \leqslant d, \\ 0, & d \leqslant x, \end{cases}$$

где a, b — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$.

Заданные таким образом функции используются для придания множеству свойств, которые характеризуют неопределенности типа «приблизительно равно», «среднее значение», «расположен в интервале», «подобен объекту», «похож на предмет», а также нечеткие числа типа интервалов: «примерно в районе», «где-то около».

2. ***Z-образные функции принадлежности*** **класса Z.** Например, Z-образные функции принадлежности могут быть заданы аналитически выражениями

$$Z_1(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x < a, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x-b}{b-a}\pi\right), & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & x > b; \end{cases}$$

$$Z_2(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x \leqslant a, \\ 1 - 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a < x \leqslant \frac{a+b}{2}, \\ 2\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} < x < b, \\ 0, & b \leqslant x \end{cases}$$

или в виде линейной Z-образной функции класса L

$$L(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x \leqslant a, \\ \frac{b-x}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & x \geqslant b, \end{cases}$$

где a, b, c — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением $a < b$.

Заданные таким образом функции используются для придания множествам свойств, которые характеризуют неопределенности типа «малое количество», «небольшое значение», «незначительная величина», «низкая себестоимость продукции», «низкий уровень цен или доходов», «низкая процентная ставка» и многие подобные.

3. ***S-образные функции принадлежности*** **класса** S. S-образные функции принадлежности могут быть заданы аналитически следующими выражениями:

$$S_1(x, a, b) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x-b}{b-a}\pi\right), & a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & x > b; \end{cases}$$

$$S_2(x, a, b) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a, \\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a < x \leqslant \frac{a+b}{2}, \\ 1 - 2\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} < x < b, \\ 1, & b \leqslant x \end{cases}$$

или в виде линейной S-образной функции класса γ

$$\gamma(x, a, b) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & x \geqslant b, \end{cases}$$

где a, b, c — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением $a < b$.

Заданные таким образом функции используются для придания множествам свойств, которые характеризуют неопределенности типа «большое количество», «большое значение», «значительная величина», «высокий уровень доходов и цен», «высокая норма прибыли», «высокое качество услуг», «высокий сервис обслуживания» и многие другие.

Задание функций принадлежности с использованием известных вариантов

Обратите внимание, что ранее заданные L и γ-*образные функции* могут быть использованы для построения рассмотренных выше t **и** T***-образных функций*** принадлежности по формулам

$$t(x, a, b, c) = \min_{x \in X} \{\gamma(x,a,b), L(x, b, c)\};$$

$$T(x, a, b, c, d) = \min_{x \in X} \{\gamma(x,a,b), L(x, c, d)\}.$$

σ-образная функция принадлежности.

Сигмоидальная функция принадлежности относится к классам S и Z-образных функций одновременно и при условии $a < b$ задается аналитически следующим выражением:

$$\sigma(x, a, b) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-b)}}.$$

При этом в случае $b > 0$ имеем S-образную функцию принадлежности, а в случае $a < 0$ имеем Z-образную функцию принадлежности.

П-*образные функции принадлежности* класс П.

П-образные функции принадлежности могут быть заданы аналитически следующими выражениями:

$$\Pi_1(x;\ a, b;\ c, d) = S(x;\ a, b) * Z(x;\ c, d),$$

где a, b, c, d — числовые параметры, $a \leqslant |b| \leqslant |c| \leqslant d$;

$$\Pi_2(x;\ a, b;\ c, d) = \sigma(x;\ a, b) * \sigma(x;\ c, d),$$

где a, b, c, d — числовые параметры, причем $a > 0$, $c < 0$, $a \leqslant |b| \leqslant |c| \leqslant d$;

$$\Pi_3(x;\, a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}},$$

где a, b, c — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением $a < b < c$, причем $b > 0$. Такую функцию называют ***колоколообразной функцией***;

$$\Pi_4(x, \sigma, c) = e^{\frac{-(x-c)^2}{2\sigma^2}},$$

где σ и c — числовые параметры. Эту функцию в теории вероятности называют ***функцией плотности нормального распределения*** в предположении, что $\sqrt{2\pi}\sigma = 1$, где σ^2 — дисперсия, c — математическое ожидание распределения.

4.3. Варианты для выполнения задания

Формализуйте и запишите заданную фразу при $U = N$, $U = R$. Вариант задания выбирается по номеру бригады.

1. «Малая скорость автомобиля».
2. «Вчера было не жарко».
3. «Вечером прохладно — для лета».
4. «Утром прохладно — для весны».
5. «Вечером прохладно — для зимы».
6. «Утром прохладно — для осени».
7. «Вода для купания прохладная».
8. «Вода для купания холодная».
9. «Большая скорость автомобиля».
10. «Завтра будет жарко».
11. «Автобус вот-вот придет».
12. «Что-то долго нет маршрутки».
13. «Число много больше 13».
14. «Низкая температура (в смысле погоды)».
15. «Не очень далеко».

4.4. Порядок выполнения задания

1. Изучить теоретический материал по теме работы (практикум, лекции, учебники).

2. Выписать согласно своему номеру варианта исходные данные для выполнения практической работы.

3. Задать свой интервал рассмотрения — область допустимых значений.

4. Определить свои границы оптимального значения величины.

5. Формализовать значения и записать их в числовом и аналитическом видах.

6. Представить запись в графическом виде с помощью программного пакета Octave.

7. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

8. Оформить отчет в печатном виде согласно рекомендациям преподавателя. В отчете должны быть подробно расписаны исходные данные задачи согласно номеру варианта, ход решения и полученные результаты по каждому пункту задания. В титульном листе отчета обязательно должны быть указаны номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося.

9. Защитить по отчету выполненную работу.

Примечание. Работа выполняется бригадой учащихся не более двух человек. При проведении расчетов допускается использовать систему Octave.

4.5. Контрольные вопросы

1. Что такое величины, заданые в области определения нечеткого множества?

2. Что такое границы оптимальных значений заданной величины?

3. Что такое область допустимых значений заданной величины?

4. Обьясните понятие «функция принадлежности», диапазон значений аргумента и функции.

5. Поясните запись:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}.$$

Список использованных источников

1. Ярушкина, Н. Г. Основы теории нечетких и гибридных систем / Н. Г. Ярушкина. — М. : Финансы и статистика, 2004. — 320 с.

2. Рыбин, В. В. Основы теории нечетких множеств и нечеткой логики : учебное пособие / В. В. Рыбин. — М. : МАИ, 2007. — 96 с.

Практическая работа 5
Построение игровых моделей

5.1. Цели работы

Изучение способов и приобретение навыков построения игровых моделей. Постановка задачи, определение стратегии и принятие решения в условиях спорной или конфликтной ситуации.

5.2. Теоретические сведения

5.2.1. Основные понятия теории игр

Реальная ситуация, при которой эффективность решения, принимаемого одной стороной, зависит от предпринимаемых действий другой стороны, или ситуация, в которой одна или более сторон стремятся решить свои интересы за счет других сторон, называется спорной или конфликтной. Задача, сложившаяся в рамках игровой модели, подразумевает существование нескольких сторон как лиц, принимающих решения и действующих независимо в своих интересах, с учетом неопределенности, вызванной действиями (намерениями) других сторон.

Теория, занимающаяся принятием решения в условиях спорной или конфликтной ситуации, называется теорией игр. Предполагаемая математическая модель спорной или конфликтной ситуации представляет собой игру.

Игра — это совокупность правил, описывающих сущность конфликтной ситуации. Эти правила устанавливают:

- выбор варианта действия игроков на каждом этапе игры;
- объем информации, которой обладает каждый игрок при осуществлении такого выбора;
- текущую плату для каждого из игроков после завершения любого этапа игры.

В зависимости от количества конфликтующих сторон, игры делятся на парные и множественные.

Стратегией игры называется совокупность правил, определяющих поведение игрока на каждом этапе от начала игры до ее завершения. Стратегии каждого игрока определяют выбор варианта действий в зависимости от сложившейся ситуации и, соответственно, результаты или платежи в игре.

Игра называется игрой с нулевой суммой, если проигрыш одного игрока равен выигрышу другого, в противном случае она называется игрой с ненулевой суммой. Игра называется конечной, если у каждого игрока имеется конечное число стратегий.

Результаты конечной парной игры с нулевой суммой можно задавать матрицей, строки и столбцы которой соответствуют различным стратегиям, а ее элементы — выигрышам одной стороны (равные проигрышам другой). Эта матрица называется **платежной матрицей** или матрицей игры.

5.2.2. Парная игра с нулевой суммой в чистых стратегиях

Пусть заданы множество возможных стратегий: для первого игрока $\{A_i\}$, для второго игрока $\{B_j\}$, платежная матрица $A_{m\times n} = \left\|a_{ij}\right\|$, где a_{ij} — выигрыш первого игрока или проигрыш второго игрока при выборе ими стратегий $\{A_i\}$ и $\{B_j\}$ соответственно. В ходе игры каждый из игроков однозначно с вероятностью 1 выбирает некоторую стратегию, т. е. пользуется при выборе решения **чистой стратегией**. Поскольку интересы игроков противоположны, то первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, а второй игрок, наоборот, стремится минимизировать свой проигрыш.

Решение игры состоит в определении каждым игроком наилучшей стратегии. Решение игры двух лиц с конечной нулевой суммой использует критерий **минимакса-максимина**.

Если первый игрок применяет стратегию $\{A_i\}$, то второй будет стремиться к тому, чтобы выбором соответствующей стратегии $\{B_j\}$ свести выигрыш первого игрока к минимуму, что равнозначно сведению своего проигрыша к минимуму. Величина этого минимума находится по формуле:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, \quad i = \overline{1;m}. \tag{5.1}$$

Первый игрок (при любых ответах противника) будет стремиться найти такую стратегию, при которой α_i обращается в максимум:

$$\alpha_i = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}, \quad i = \overline{1;m}, \quad j = \overline{1;n}. \tag{5.2}$$

Величина α называется **нижней ценой игры**. Придерживаясь ее, первый игрок при любых стратегиях противника обеспечит себе выигрыш не меньший α. Другими словами, нижняя цена игры является гарантированным выигрышем первого игрока при любых стратегиях второго игрока.

Аналогично определим по каждому столбцу матрицы:

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, \quad j = \overline{1;n}. \tag{5.3}$$

Найдем минимальное значение β_j:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}, \quad i = \overline{1;m}, \quad j = \overline{1;n}. \tag{5.4}$$

Величина β называется **верхней ценой игры**. Она представляет собой максимально возможный выигрыш первого игрока или проигрыш второго игрока при любой стратегии первого игрока.

Замечание. Для любой матрицы $A = \|a_{ij}\|$ выполняется неравенство $\beta \geqslant \alpha$.

Если для двух игроков $\beta = \alpha$, то соответствующие чистые стратегии называются оптимальными, а про игру говорят, что она имеет **седловую точку**. Эта точка является **точкой равновесия игры**, однозначно определяющей оптимальные стратегии для обоих игроков. Оптимальность в этом случае означает, что ни один игрок не стремится изменить свою стратегию, потому что его соперник может на это ответить другой стратегией, дающей худший для игрока результат.

Величина $C = \beta = \alpha$ называется **ценой игры**. Она определяет средний выигрыш игрока А и средний проигрыш игрока В при использовании ими оптимальных стратегий.

5.2.3. Пример решения задачи

Пример 5.1

Для двух игроков задана платежная матрица, которая определяет выигрыши игрока А:

$$\begin{bmatrix} 9 & 4 & 11 & 7 \\ 7 & 6 & 9 & 19 \\ 6 & 2 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Определить нижнюю и верхнюю цены этой игры.
Решение. Представим игровую модель в виде табл. 5.1.

Таблица 5.1

Решение для игровой матрицы

Стратегии 1-го игрока	Стратегии 2-го игрока				$\min\ \alpha_i$	$\max\min\ \alpha$
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	9	4	11	7	4	—
A_2	7	6	9	19	6	6
A_3	6	2	1	11	1	—
$\max\ \beta_j$	9	6	11	19		
$\min\max\ \beta$	—	6	—	—		

Игрок А, исходя из максиминного критерия, выбирает стратегию A_2, которая будет его гарантированным выигрышем при любых стратегиях игрока В. $\alpha = 6$ д. е. — нижняя цена игры.

Игрок В выбирает стратегию B_2, которая минимизирует его максимальные проигрыши. Величина $\beta = 6$ д. е. — верхняя цена игры, которая будет максимально возможным проигрышем игрока В при любых стратегиях игрока А. Так как $\beta = \alpha$, то седловая точка $c = 6$ д. е.

Пример 5.2

Игроки А и В, каждый, записывают одно из чисел 1, 4, 6 или 9, затем они одновременно показывают написанное. Если оба числа оказались одинаковой четности, то игрок А выигрывает столько очков, какова сумма этих чисел, если разной четности — сумму чисел выигрывает игрок В. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю цены игры, максиминную и минимаксную стратегии игроков А и В соответственно.

Решение. Чистыми стратегиями игрока А будут: A_1 — записать число 1; A_2 — записать число 4; A_3 — записать число 6; A_4 — записать число 9. У игрока В чистыми будут аналогичные стратегии (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Платежная матрица игры

Стратегии 1-го игрока	Стратегии 2-го игрока				$\min \alpha_i$	$\max\min \alpha$
	$B_1(1)$	$B_2(4)$	$B_3(6)$	$B_4(9)$		
$A_1(1)$	2	-5	-7	10	-7	-7
$A_2(4)$	-5	8	10	-13	-13	—
$A_3(6)$	-7	10	12	-15	-15	—
$A_4(9)$	10	-13	-15	18	-15	—
$\max \beta_j$	10	10	12	18		
$\min\max \beta$	10	10	—	—		

Элемент $a_{11} = 2$, так как в ситуации (A_1, B_1) оба игрока записывают нечетное число 1. Выигрыш игрока А равен $1 + 1 = 2$. Элемент $a_{12} = -5$, так как в ситуации (A_1, B_2) игрок А записывает число 1, а игрок В — число 4, т.е. числа разной четности. Выигрыш игрока В равен 5, а выигрыш игрока А соответственно составит -5. Аналогичным образом вычисляются остальные элементы платежной матрицы. После определения α_i и β_j отмечаем, что нижняя цена игры $\alpha = \max\limits_i \alpha_i = -7$ не равна верхней цене игры $\beta = \min\limits_j \beta_j = 10$, поэтому данная игра не имеет седловой точки. Максиминной для игрока А будет чистая стратегия A_1. Пользуясь такой стратегией, игрок А выигрывает не менее -7 очков (проигрывает не более 7). Минимаксными для игрока В будут чистые стратегии B_1 и B_2, при которых он проигрывает не более 10 очков.

5.3. Варианты для выполнения задания

Вариант задания выбирается по номеру бригады в журнале группы.

Задание 1

Задана платежная матрица. Найти цены игры, определить наличие седловой точки и стратегии игроков согласно номеру своего варианта (табл. 5.3).

Таблица 5.3

Варианты задания. Платежные матрицы игры

№ вар.	Матрица	№ вар.	Матрица
1	$\begin{bmatrix} 7 & 9 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 9 & 7 & 9 \end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$	4	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & 3 \end{bmatrix}$
11	$\begin{bmatrix} 7 & 9 & 7 & 5 & 6 & 12 \\ 9 & 10 & 6 & 5 & 8 & 9 \\ 8 & -5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$
13	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
15	$\begin{bmatrix} 9 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$		

Задание 2

Построить игровую модель индивидуальной задачи. Провести эксперименты ситуаций.

1. Игроки А и В записывают цифры 1 и 2. Игра заключена в том, что, кроме цифры 1 или 2, каждый игрок записывает еще и ту цифру, которую, по его мнению, записал партнер. Если оба игрока угадали или оба ошиблись, то партия заканчивается вничью; если же угадал только один игрок, то он получает столько очков, какова сумма записанных им цифр. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.
2. Игрок А может записать одну из цифр: 2, 4 или 7; игрок В может записать 1, 3, 4 или 8. Если обе цифры окажутся одинаковой четности, то игрок А получает столько очков, какова сумма записанных цифр; если разной четности — то очки достаются игроку В. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.
3. Участники парной игры независимо друг от друга могут записать одну из цифр: 3, 5 или 8. Если разность между цифрами, записанными игроками А и В, окажется положительной, то игрок А выигрывает столько очков, какова получившаяся разность; если разность будет отрицательной, то соответствующее количество очков выигрывает игрок В; если же разность окажется равной нулю, то и выигрыш игроков будет равен нулю. Составить платежную матрицу, найти максимин и минимакс.
4. Каждый из игроков А и В может показать один или два пальца. Если число одновременно показанных пальцев у обоих игроков одинаково, то игрок А получает одно очко; если же число пальцев разное, то очко получает игрок В. Составить модель игровой ситуации и провести эксперимент.
5. Два игрока поочередно бросают по одной игровой кости. Если сумма очков, выпавших на двух игровых костях, четная, то на выпавшую сумму увеличивается счет первого игрока, если нечетная, то — второго. На игровой кости 6 граней с количеством точек от 1 до 6. Составить модель игровой ситуации и провести эксперимент.
6. Игроки А и В записывают цифры 2 и 4. Игра состоит в том, что, кроме цифры 2 или 4, каждый игрок записывает еще и ту цифру, которую, по его мнению, записал партнер. Если оба игрока угадали или оба ошиблись, то партия заканчивается вничью; если же угадал только один игрок, то он получает столько очков, каково произведение записанных им цифр. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

7. Игрок A может записать одну из цифр: 1, 2 или 3; игрок B может записать 4, 5, 6 или 7. Если обе цифры окажутся одинаковой четности, то игрок A получает столько очков, какова сумма записанных цифр; если разной четности — то очки достаются игроку B. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

8. Игрок A может записать одну из цифр: 2, 3 или 6; игрок B может записать 1, 4 или 5. Если обе цифры окажутся разной четности, то игрок A получает столько очков, каково произведение записанных цифр; если одной четности — то очки достаются игроку B. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

9. Участники парной игры независимо друг от друга могут записать одну из цифр: 9, 5 или 3. Если разность между цифрами, записанными игроками A и B, окажется отрицательной, то игрок A проигрывает столько очков, какова получившаяся разность; если разность будет положительной, то соответствующее количество очков проигрывает игрок B; если же разность окажется равной нулю, то и выигрыш игроков будет равен нулю. Составить платежную матрицу, найти максимин и минимакс.

10. Игра «Камень, ножницы, бумага». Два игрока показывают одновременно один из трех предметов: камень, ножницы или бумагу. Камень побеждает ножницы, ножницы побеждают бумагу, бумага побеждает камень. Победившему игроку присуждается очко. Составить модель игровой ситуации и провести эксперимент.

Листинг 5.1

Пример реализации кубика в Octave

```
% ГЕНЕРАТОР Бросания КУБИКА равномерный( закон распределения)
% k = k(1) k(2) - выпадающие значения пары кубиков

k=randi([1 6],1,2)
```

5.4. Порядок выполнения задания

1. Изучить теоретический материал по теме работы (практикум, лекции, учебники).

2. Выписать согласно своему номеру варианта исходные данные для выполнения практической работы.

3. Выполнить постановку задачи и представить аналитическое решение своего варианта заданий 1 и 2.

4. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

5. Оформить отчет в печатном виде согласно рекомендациям преподавателя. В отчете должны быть подробно расписаны исходные данные задачи согласно номеру варианта, ход решения и полученные результаты по каждому

пункту задания. В титульном листе отчета обязательно должны быть указаны номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося.

6. Защитить по отчету выполненную работу.

Примечание. Работа выполняется побригадно. При проведении расчетов допускается использовать систему Octave.

5.5. Контрольные вопросы

1. Что называется теорией игр?
2. Что понимается под стратегией игры?
3. Какие игры называются играми с нулевой суммой; с ненулевой суммой?
4. Раскройте понятия конечной и бесконечной игры.
5. Что такое платежная матрица?
6. Раскройте понятие седловой точки.
7. Что называется нижней ценой игры, верхней ценой игры? Как они определяются?
8. Укажите суть игры со смешанными стратегиями.

Список использованных источников

1. Таха, Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха. — М. : Вильямс, 2005. — 912 с.
2. Есипов, Б. А. Методы исследования операций / Б. А. Есипов. — СПб. : Лань, 2013. — 304 с.
3. Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи и принципы методологии / Е. С. Вентцель. — М. : Наука, 1988. — 208 с.

Практическая работа 6
Определение параметров систем массового обслуживания

6.1. Цели работы

Изучение работы, постановка задачи и приобретение навыков определения параметров и функциональных характеристик систем массового обслуживания.

6.2. Теоретические сведения

Определение. Случайный процесс, протекающий в системе S, называется *марковским*, если для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (т.е. как процесс развивался в прошлом). Случайный процесс называется процессом с дискретными состояниями, если возможные состояния системы $S_1, S_2, S_3, \dots$ можно перечислить, т. е. множество S счетное. Случайная последовательность называется *простой марковской цепью*, если для каждого шага вероятность перехода $P_i(k)$ из любого состояния S_i в любое S_j не зависит от того, когда и как система пришла в состояние S_i.

Марковские процессы в системах массового обслуживания используются для анализа и моделирования переходов системы как результат воздействия на систему каких-то потоков событий (заявок).

6.2.1. Одноканальные модели систем массового обслуживания

Системы массового обслуживания (СМО) — это такие системы, в которые от клиентов (заказчиков, абонентов) в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

Одноканальная СМО с отказами

Представим данную систему массового обслуживания в виде графа (рис. 6.1), у которого имеются два состояния:

S_0 — канал свободен (ожидание),

S_1 — канал занят (идет обслуживание заявки).

Обозначим вероятности состояний:

$P_0(t)$ — вероятность состояния «канал свободен»,

$P_1(t)$ — вероятность состояния «канал занят».

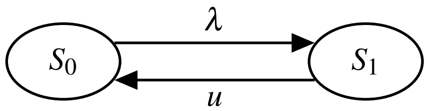


Рис. 6.1. Граф состояний одноканальной СМО с отказами

По размеченному графу состояний (рис. 6.1) составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t), \\[2ex] \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\mu \cdot P_1(t) + \lambda \cdot P_0(t), \end{cases} \tag{6.1}$$

где λ — интенсивность поступления заявок в систему, μ — интенсивность обслуживания.

Решение данной системы называется неустановившимся, поскольку оно непосредственно зависит от t и выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} &P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \\ &P_1(t) = 1 - P_0(t). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Характеристики одноканальной СМО с отказами

Относительная пропускная способность:

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}. \tag{6.3}$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot q. \tag{6.4}$$

Вероятность отказа:

$$P_{OTK} = P_1 = 1 - P_0 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}. \tag{6.5}$$

Величина P_{OTK} может быть интерпретирована как средняя доля необслуженных заявок среди поданных.

Пример. Пусть одноканальная СМО с отказами представляет собой один пункт приема ежедневного обслуживания мойки автомобилей. Заявка —

автомобиль, прибывший в момент, когда пункт занят, получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей $\lambda = 1$ (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания — 1,8 часа. Найти основные характеристики системы.

Решение.

Определим интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555.$$

Вычислим относительную пропускную способность пункта, используя формулу (6.3):

$$q = \frac{0{,}555}{1 + 0{,}555} = 0{,}356.$$

Величина q означает, что в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 36% прибывших на пункт автомобилей.

Абсолютную пропускную способность определим по формуле (6.4):

$$A = 1 \cdot 0{,}356 = 0{,}356.$$

Это означает, что система способна выполнить в среднем 0,356 заявок или обслужить 0,356 автомобилей в час.

Вероятность отказа (6.5):

$$P_{\text{отк}} = 1 - q = 1 - 0{,}356 = 0{,}644.$$

Это означает, что при заданной интенсивности автомобилей (заявок), около 64% прибывших на пункт автомобилей получат отказ в обслуживании.

Одноканальное СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди

Граф состояний СМО в этом случае имеет вид, показанный на рис. 6.2.

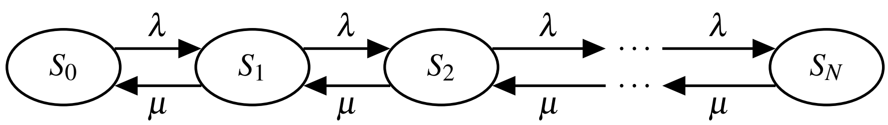


Рис. 6.2. Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Состояния СМО имеют следующую интерпретацию:

S_0 — «канал свободен»,

S_1 — «канал занят» (очереди нет),

S_2 — «канал занят» (одна заявка стоит в очереди),

...

S_N — «канал занят» (N-1 заявок стоит в очереди).

Стационарный процесс в данной системе будет описываться следующей системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\rho \cdot P_0 + P_1 = 0, \;\; n = 0, \\ \ldots \qquad \ldots \\ -(1-\rho) \cdot P_n + P_{n+1} + \rho \cdot P_{n-1} = 0, \;\; 0 < n < N, \\ \ldots \qquad \ldots \\ -P_N + \rho \cdot P_{N-1} = 0, \;\; n = N, \end{cases} \tag{6.6}$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Решение системы уравнений (6.7) имеет вид:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \cdot \rho^n, \; \rho \neq 1, \; n = \overline{1;\, N}, \\ \\ \dfrac{1}{N+1}, \; \rho = 1, \end{cases} \qquad . \tag{6.7}$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}.$$

Характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной (N-1)

Вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$P_{\text{отк}} = \begin{cases} P_0 \cdot \rho^N, \; \rho \neq 1, \\ \\ \dfrac{1}{N+1}, \; \rho = 1. \end{cases} \tag{6.8}$$

Относительная пропускная способность системы:

$$q = 1 - P_{OTK}. \tag{6.9}$$

Абсолютная пропускная способность — формула (6.4).

Среднее число находящихся в системе заявок:

$$L_S = \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n = \begin{cases} \dfrac{\rho \cdot (1-(N+1) \cdot \rho^N + N \cdot \rho^{N+1})}{(1-\rho) \cdot (1-\rho^{N+1})}, \; \rho \neq 1, \\ \dfrac{N}{2}, \; \rho = 1. \end{cases} \tag{6.10}$$

Среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda \cdot (1 - P_N)}. \tag{6.11}$$

Средняя продолжительность пребывания заявки в очереди:

$$W_q = W_S - \frac{1}{\mu}. \tag{6.12}$$

Среднее число заявок в очереди (длина очереди):

$$L_q = \lambda \cdot (1 - P_N) W_q. \tag{6.13}$$

Пример. Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно $3 (N-1=3)$. Если все стоянки заняты, т.е. в очереди уже находится три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на стоянку, в очередь на обслуживание не становится. Поток автомобилей, прибывший на диагностику, имеет интенсивность $\lambda = 0{,}85$ (автомобиля в час). Время диагностики автомобиля в среднем равно 1,05 часа.

Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме.

Решение.

Параметр потока обслуживания автомобилей:

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = \frac{1}{1{,}05} = 0{,}952.$$

Приведенная интенсивность потока автомобилей определяется как отношение интенсивности λ и μ:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}85}{0{,}952} = 0{,}893.$$

Определим и вычислим финальные вероятности системы:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{1-0{,}893}{1-0{,}893^5} \approx 0{,}248,$$

$$P_1 = \rho \cdot P_0 = 0{,}893 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}221,$$

$$P_2 = \rho^2 \cdot P_0 = 0{,}893^2 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}198,$$

$$P_3 = \rho^3 \cdot P_0 = 0{,}893^3 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}177,$$

$$P_4 = \rho^4 \cdot P_0 = 0{,}893^4 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}158.$$

Вероятность отказа в обслуживании автомобиля:

$$P_{OTK} = P_4 \approx 0{,}158.$$

Относительная пропускная способность поста диагностики:

$$q = 1 - P_{OTK} = 1 - 0{,}158 = 0{,}842.$$

Абсолютная пропускная способность поста диагностики:

$$A = \lambda \cdot q = 0{,}85 \cdot 0{,}842 = 0{,}716 \text{ автомобиля в час.}$$

Среднее число автомобилей, находящихся на обслуживании и ожидающих в очереди, рассчитываем по формуле (6.10):

$$L_S = \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n \begin{array}{l} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 = \\ = 1 \cdot 0{,}221 + 2 \cdot 0{,}198 + 3 \cdot 0{,}177 + 4 \cdot 0{,}158 = 1{,}77. \end{array}$$

Среднее время пребывания автомобиля в системе рассчитываем по формуле (6.11):

$$W_S = \frac{1{,}77}{0{,}85 \cdot 0{,}842} \approx 2{,}473 \quad \text{часа.}$$

Среднюю продолжительность пребывания автомобиля в очереди на обслуживание рассчитываем по формуле (6.12):

$$W_q = 2{,}473 - 1{,}05 = 1{,}423 \quad \text{часа.}$$

Среднее число автомобилей в очереди:

$$L_q = 0{,}85 \cdot 0{,}842 \cdot 1{,}423 = 1{,}02.$$

Работу рассмотренного поста диагностики можно считать удовлетворительной, т.к. пост диагностики не обслуживает автомобили в среднем в 16% случаев ($P_{OTK} = 0{,}158$).

Одноканальное СМО с ожиданием, без ограничения на длину очереди

Система алгебраических уравнений, описывающих работу СМО при $t \to \infty$ для любого $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, имеет вид:

$$\begin{cases} -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1 = 0,\ n = 0, \\ \lambda \cdot P_{n-1} + \mu \cdot P_{n+1} - (\lambda + \mu) \cdot P_n = 0,\ n > 0. \end{cases} \qquad (6.14)$$

Решение данной системы уравнений имеет вид:

$$P_n = (1-\rho)\rho^n, \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \tag{6.15}$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$.

Характеристики одноканальной СМО с ожиданием, без ограничения на длину очереди:

Среднее число находящихся в системе заявок на обслуживание:

$$L_S = \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n = \frac{\rho}{1-\rho}. \tag{6.16}$$

Средняя продолжительность пребывания заявки в системе:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda}. \tag{6.17}$$

Среднее число заявок в очереди на обслуживании:

$$L_q = L_S - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{6.18}$$

Средняя продолжительность пребывания заявки в очереди:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}. \tag{6.19}$$

Пример. Рассмотрим предыдущий пример, где речь шла о функционировании поста автомобильной диагностики. Пусть для этой задачи рассматриваемый пост диагностики располагает неограниченным количеством площадок для стоянки автомобилей прибывших на обслуживание, а значит, длина очереди не ограничена.

Требуется определить значения вероятностных характеристик.

Решение.

Параметр потока обслуживания μ и приведенная интенсивность потока автомобилей ρ определены в предыдущем примере:

$\mu = 0{,}952$; $\rho = 0{,}893$.

Вычисляем по формуле (6.15) предельные вероятности системы:

$$P_0 = 1 - 0{,}893 = 0{,}107,$$

$$P_1 = (1-0{,}893)\cdot 0{,}893 = 0{,}096,$$
$$P_2 = (1-0{,}893)\cdot 0{,}893^2 = 0{,}085,$$
$$P_3 = (1-0{,}893)\cdot 0{,}893^3 = 0{,}076,$$
$$P_4 = (1-0{,}893)\cdot 0{,}893^4 = 0{,}068,$$
$$P_5 = (1-0{,}893)\cdot 0{,}893^5 = 0{,}061$$

и так далее.

Следует отметить, что P_0 определяет долю времени, в течение которого пост диагностики вынужденно бездействует (простаивает). В нашем примере эта доля составляет 10,7%, так как значение $P_0 = 0{,}107$.

Среднее число автомобилей, находящихся в системе:

$$L_S = \frac{0{,}893}{1-0{,}893} = 8{,}346 \quad \text{единиц.}$$

Средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_S = \frac{8{,}346}{0{,}85} = 9{,}817 \quad \text{часов.}$$

Среднее число автомобилей в очереди на обслуживании:

$$L_q = L_S - \rho = 8{,}346 - 0{,}893 = 7{,}453.$$

Средняя продолжительность пребывания автомобиля в очереди:

$$W_q = \frac{7{,}453}{0{,}85} = 8{,}766 \quad \text{часов.}$$

6.2.2. Многоканальные модели систем массового обслуживания

Многоканальная СМО с отказами

Граф состояний СМО в этом случае имеет вид, показанный на рис. 6.3.

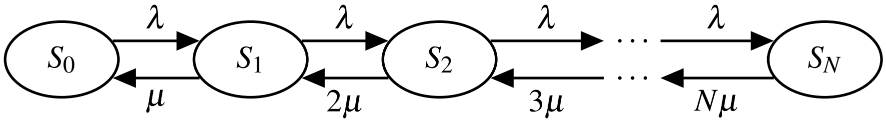


Рис. 6.3. Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Состояния данной СМО имеет следующую интерпретацию:

S_0 — все каналы свободны,

S_1 — один канал занят, остальные свободны,

S_2 — два канала заняты, остальные свободны,

…

S_N — заняты все n каналов, заявка получает отказ в обслуживании.

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1, \\ \ldots \qquad \ldots \\ \dfrac{dP_k}{dt} = \lambda \cdot P_{k-1} - (\lambda + k \cdot \mu)P_k + \mu \cdot (k+1)P_{k+1},\ 1 \le k \le (n-1), \\ \ldots \qquad \ldots \\ \dfrac{dP_n}{dt} = \lambda \cdot P_{n-1} - \mu \cdot n \cdot P_n. \end{cases} \tag{6.20}$$

Стационарное решение системы (6.20) имеет вид:

$$\begin{cases} P_k = \dfrac{\dfrac{\rho^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}} = \dfrac{\rho^k}{k!} \cdot P_0,\ k = \overline{0;\ n}, \\ \\ P_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}},\ k = \overline{0;\ n}, \end{cases} \tag{6.21}$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Формулы для вычисления вероятностей P_k называются **формулами Эрланга**.

Вероятностные характеристики функционирования многоканальной СМО с отказами в стационарном режиме

Вероятность отказа:

$$P_{OTK} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0. \tag{6.22}$$

Относительная пропускная способность системы — формула (6.3).

Абсолютная пропускная способность — формула (6.4).

Среднее число каналов, занятых обслуживанием:

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P_k = \rho \cdot (1 - P_{OTK}) \ , \tag{6.23}$$

где величина $\bar{k}$ характеризует степень загрузки СМО.

Пример. Пусть n — канальная СМО представляет собой вычислительный центр (ВЦ) с тремя $(n = 3)$ взаимозаменяемыми ПЭВМ для решения поступающих задач. Поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность $\lambda = 1$ задача в час. Средняя продолжительность обслуживания 1,8 час.

Требуется вычислить вероятностные характеристики системы. Определите, сколько дополнительно надо приобрести ПЭВМ, чтобы увеличить пропускную способность ВЦ в 2 раза.

Решение.

Определим интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555.$$

Приведенная интенсивность потока заявок:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{0{,}555} = 1{,}8.$$

Предельные вероятности состояний вычисляем по формулам Эрланга (6.21):

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{3} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{1 + 1{,}8 + 1{,}62 + 0{,}97} \approx 0{,}186,$$

$$P_1 = 1{,}8 \cdot 0{,}186 \approx 0{,}334,$$

$$P_2 = 1{,}62 \cdot 0{,}186 \approx 0{,}301,$$

$$P_3 = 0{,}97 \cdot 0{,}186 \approx 0{,}18.$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$P_{OTK} = P_3 = 0{,}18.$$

Относительная пропускная способность ВЦ:

$$q = 1 - 0{,}18 = 0{,}82.$$

Абсолютная пропускная способность ВЦ:

$$A = 1 \cdot 0{,}82 = 0{,}82.$$

Среднее число занятых каналов — ПЭВМ:

$$\bar{k} = 1{,}8 \cdot 0{,}82 = 1{,}476.$$

Таким образом, при установившемся режиме работы СМО в среднем будет занято 1,5 компьютера из трех — остальные полтора будут простаивать. Работу рассмотренного ВЦ вряд ли можно считать удовлетворительной, так как центр не обслуживает заявки в среднем в 18% случаев ($P_3 = 0{,}18$). Очевидно, что пропускную способность ВЦ при данных λ и μ можно увеличить только за счет увеличения числа ПЭВМ. Определим, сколько нужно использовать ПЭВМ, чтобы сократить число необслуженных заявок, поступающих на ВЦ, в 10 раз, т. е. чтобы вероятность отказа в решении задач не превосходила 0,018. Для этого используем формулу (6.22).

Составим таблицу (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Предельные вероятности состояний

n	1	2	3	4	5	6
P_0	0,357	0,226	0,186	0,172	0,167	0,166
P_{OTK}	0,643	0,367	0,18	0,075	0,026	0,0078

Анализируя вычисленные данные таблицы, можно отметить, что расширение числа каналов ВЦ при данных значениях λ и μ до 6 единиц ПЭВМ позволит обеспечить удовлетворение заявок на решение задач на 99,22%, так как при $n = 6$ вероятность отказа ВЦ в обслуживании составляет 0,0078.

Многоканальные СМО с ожиданием

Пусть система имеет C каналов обслуживания.

При нормальной работе в установившемся режиме функционирование многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью может быть описано с помощью системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + n \cdot \mu) \cdot P_n + (n+1) \cdot \mu \cdot P_{n+1} = 0, \quad 1 \le n < C, \\ \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + C \cdot \mu) \cdot P_n + C \cdot \mu \cdot P_{n+1} = 0, \quad n \ge C. \end{cases} \tag{6.24}$$

Решение системы (6.24) имеет вид:

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot P_0, \quad 0 \le n < C, \\ \\ P_n = \dfrac{\rho^n}{C! C^{n-c}} \cdot P_0, \quad n \ge C, \end{cases} \tag{6.25}$$

где

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!(1 - \frac{\rho}{C})} \right\}^{-1}. \tag{6.26}$$

Решение будет действительным, если выполняется следующее условие:

$$\frac{\lambda}{\mu \cdot C} < 1.$$

Вероятностные характеристики функционирования многоканальной СМО в стационарном режиме с ожиданием и неограниченной очередью

Вероятность того, что в системе на обслуживании находится n клиентов, определяется по формулам (6.25) и (6.26).

Среднее число клиентов в очереди на обслуживание:

$$L_q = \left(\frac{C \cdot \rho}{(C - \rho)^2} \right) \cdot P_C. \tag{6.27}$$

Среднее число клиентов, находящихся в системе:

$$L_S = L_q + \rho. \tag{6.28}$$

Средняя продолжительность пребывания клиента в очереди:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}. \tag{6.29}$$

Средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu}. \tag{6.30}$$

Пример. Механическая мастерская завода с тремя стационарными ремонтными постами выполняет ремонт малой механизации. Поток неисправных механизмов, прибывающих в мастерскую, имеет интенсивность $\lambda = 2{,}5$

механизма в сутки, среднее время ремонта одного механизма равно 0,5 суток. Предположим, что другой мастерской на заводе нет, и, значит, очередь механизмов на ремонт перед мастерской может расти практически неограниченно.

Требуется определить значения вероятностных характеристик системы.

Решение.

Определим параметр потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = \frac{1}{0,5} = 2.$$

Приведенная интенсивность потока заявок:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2,5}{2} = 1,25.$$

Если при этом $\dfrac{\lambda}{\mu \cdot C} = \dfrac{2,5}{2 \cdot 3} = 0,41 < 1$, то очередь не растет безгранично, в системе наступает предельный стационарный режим работы.

Вычислим вероятности состояний системы, используя формулы (6.25) и (6.26):

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!(1-\frac{\rho}{3})}} = \frac{1}{1 + 1,25 + \frac{1,25^2}{2} + \frac{1,25^3}{6 \cdot (1 - \frac{1,25}{3})}} = 0,279\ ,$$

$$P_1 = \frac{\rho}{1!} \cdot P_0 = 1,25 \cdot 0,279 = 0,349\ ,$$

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot P_0 = \frac{1,25^2}{2!} \cdot 0,279 = 0,218\ ,$$

$$P_3 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot P_0 = \frac{1,25^3}{3!} \cdot 0,279 = 0,091\ ,$$

$$P_4 = \frac{\rho^4}{4!} \cdot P_0 = \frac{1,25^4}{4!} \cdot 0,279 = 0,028\ .$$

Вероятность отсутствия очереди у мастерской:

$$P_{\text{отс.очер}} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 0,279 + 0,349 + 0,218 + 0,091 = 0,937\ .$$

Среднее число заявок в очереди на обслуживание вычисляется по формуле (6.27):

$$L_q = \frac{3 \cdot 1,25}{(3 - 1,25)^2} \cdot 0,091 \approx 0,111.$$

Среднее число находящихся в системе заявок (6.28):

$$L_S = 0{,}111 + 1{,}25 = 1{,}361.$$

Средняя продолжительность пребывания механизма в очереди на обслуживании (6.29):

$$W_q = \frac{0{,}111}{2{,}5} = 0{,}044 \quad \text{суток.}$$

Средняя продолжительность пребывания механизма в мастерской вычисляется по формуле (6.30):

$$W_S = 0{,}044 + \frac{1}{2} \approx 0{,}544 \quad \text{суток.}$$

6.3. Варианты для выполнения задания

Вариант задания выбирается по номеру бригады в журнале группы.

Вариант 1

Одноканальная СМО с отказами — телефонный ручной коммутатор — представляет собой одну телефонную линию. Заявка на обслуживание (новый вызов), пришедшая в момент, когда линия занята, получает отказ. Все потоки событий простейшие. Интенсивность потока $\lambda = 0{,}95$ вызова в минуту. Средняя продолжительность разговора составляет $t = 1$ минута. Определите вероятностные функциональные характеристики СМО в установившемся режиме работы коммутатора.

Вариант 2

В одноканальную СМО с отказами, например, справочная служба в супермаркете, поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0{,}5$ заявки в минуту. Время обслуживания заявки имеет показательное распределение с $\bar{t} = 1{,}5$ минуты. Определите вероятностные функциональные характеристики СМО в установившемся режиме работы.

Вариант 3

В вычислительном центре (ВЦ) работает 5 персональных компьютеров. Простейший поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность $\lambda = 10$ задач в час. Среднее время решения задачи равно 12 минут. Поступающая вновь заявка получает отказ, если все персональные компьютеры заняты. Найдите вероятностные функциональные характеристики системы обслуживания (ВЦ).

Вариант 4

В аудиторскую фирму поступает простейший поток заявок на обслуживание с интенсивностью $\lambda = 1{,}5$ заявки в день. Время обслуживания распределено по показательному закону и равно в среднем трем дням. Аудиторская фирма располагает пятью независимыми бухгалтерами, выполняющими аудиторские проверки (обслуживающие заявки). Очередь заявок не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Определите вероятностные характеристики аудиторской фирмы как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Вариант 5

На пункт технического осмотра поступает простейший поток заявок (автомобилей) интенсивностью $\lambda = 4$ автомашины в час. Время осмотра распределено по показательному закону и равно в среднем 17 минут. В очереди одновременно могут находиться не более 5 автомобилей. Определите вероятностные функциональные характеристики пункта техосмотра с позиции СМО в установившемся режиме.

Вариант 6

На промышленном предприятии решается вопрос о количестве работающих механиков в ремонтном цехе. Предприятие имеет 10 машин, с учетом числа ремонтирующихся. Отказы машин происходят с частотой $\lambda = 10$ отказов в час. Для устранения неисправности механику требуется в среднем $t = 3$ минуты. Возможно организовать 4 или 6 рабочих мест в цехе для механиков предприятия. Необходимо выбрать наиболее эффективный вариант обеспечения ремонтного цеха рабочими местами для механиков.

Вариант 7

В бухгалтерии предприятия имеются два кассира, каждый из которых может обслужить в среднем 30 сотрудников в час. Поток сотрудников, получающих заработную плату, простейший, с интенсивностью, равной 40 сотрудников в час. Очередь в кассе не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Время обслуживания подчинено экспоненциальному закону распределения. Вычислите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме и определите целесообразность приема третьего кассира на предприятие, работающего с такой же производительностью, как и первые два.

Вариант 8

Билетная касса работает без перерыва. Билеты продает один кассир. Среднее время обслуживания 2 минуты на каждого человека. Среднее число пассажиров, желающих приобрести билеты в кассе в течении одного часа, равно $\lambda = 20$ пассажиров в час. Все потоки в системе простейшие. Определите среднюю длину очереди, вероятность простоя кассира, среднее время нахождения пассажира в билетной кассе (в очереди и на обслуживании), среднее время ожидания в очереди в условиях стационарного режима работы кассы.

Вариант 9

Пост диагностики автомобилей представляет собой одноканальную СМО с отказами. Заявка на диагностику, поступившая в момент, когда пост занят, получает отказ. Интенсивность потока заявок на диагностику $\lambda = 0{,}5$ автомобиля в час. Средняя продолжительность диагностики $t = 1{,}2$ часа. Все потоки событий в системе простейшие. Определите в установившемся режиме вероятностные характеристики системы.

Вариант 10

Автозаправочная станция представляет собой СМО с одним каналом обслуживания и одной колонкой. Площадка при АЗС допускает пребывание в очереди на заправку не более трех автомобилей одновременно. Если в очереди уже находится три автомобиля, очередной автомобиль, прибывший к станции, в очередь не становится, а проезжает мимо. Поток автомобилей, прибывающих для заправки, имеет интенсивность $\lambda = 0{,}7$ автомобиля в минуту. Процесс заправки продолжается в среднем 1,25 минуты. Все потоки простейшие. Определите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме.

Вариант 11

На станцию технического обслуживания СТО автомобилей каждые два часа подъезжает в среднем одна машина. Станция имеет шесть постов обслуживания. Очередь автомобилей, ожидающих обслуживания, не ограничена. Среднее время обслуживания одной машины два часа. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики СТО автомобилей

Вариант 12

Рассматривается работа АЗС, на которой имеется три заправочные колонки. Заправка одной машины длится в среднем 3 минуты. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает машина, нуждающаяся в заправке бензином. Число мест в очереди не ограничено. Все машины, вставшие в очередь на заправку, дожидаются своей очереди. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики работы АЗС в стационарном режиме.

Вариант 13

На вход телефонной станции, имеющей 9 каналов обслуживания, поступает в среднем 120 заявок в час. Заявка получает отказ, если все каналы заняты. Среднее время обслуживания в одном канале равно 4 минуты. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики телефонной станции, выступающей в качестве СМО.

Вариант 14

В магазине работает один продавец, который может обслужить в среднем 30 покупателей в час. Поток покупателей простейший, с интенсивностью, равной 60 покупателей в час. Все покупатели нетерпеливые и уходят, если в очереди стоит 5 человек (помимо обслуживаемых). Все потоки событий простейшие. Определите следующие вероятностные характеристики магазина для стационарного режима работы: вероятность обслуживания покупателя; абсолютную пропускную способность магазина; среднюю длину очереди; среднее время ожидания в очереди; среднее время всего обслуживания; вероятность простоя продавца.

Вариант 15

Рассматривается работа АЗС, на которой имеется 5 заправочных колонок. Заправка одной машины длится в среднем 4 минуты. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает машина, нуждающаяся в заправке бензином. Число мест в очереди не ограничено. Все машины, вставшие в очередь на заправку, дожидаются своей очереди. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики работы АЗС в стационарном режиме.

6.4. Порядок выполнения задания

1. Изучить теоретический материал по теме работы (практикум, лекции, учебники).
2. Выписать согласно своему номеру варианта исходные данные для выполнения практической работы.
3. Выполнить постановку задачи и представить аналитическое решение своего варианта задания.
4. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.
5. Оформить отчет в печатном виде согласно рекомендациям преподавателя. В отчете должны быть подробно расписаны исходные данные задачи согласно номеру варианта, ход решения и полученные результаты по каждому пункту задания. В титульном листе отчета обязательно должны быть указаны номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося.
6. Защитить по отчету выполненную работу.

Примечание. Работа выполняется побригадно. При проведении расчетов допускается использовать систему Octave.

6.5. Контрольные вопросы

1. Что понимается под системой массового обслуживания? Приведите примеры СМО.
2. Что является основными компонентами СМО?
3. Что является предметом теории массового обслуживания?
4. Какие виды СМО вы знаете?
5. Перечислите основные функциональные характеристики одноканальной СМО с отказами.

6. Перечислите основные функциональные характеристики одноканальной СМО с ожиданием.

7. Перечислите основные функциональные характеристики многоканальной СМО с отказами.

8. Перечислите основные функциональные характеристики многоканальной СМО с ожиданием.

Список использованных источников

1. Таха, Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха. — М. : Вильямс, 2005. — 912 с.

2. Есипов, Б. А. Методы исследования операций / Б. А. Есипов. — СПб. : Лань, 2013. — 304 с.

3. Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи и принципы методологии / Е. С. Вентцель. — М. : Наука, 1988. — 208 с.

Практическая работа 7
Методы экспертных оценок в задачах принятия решений

7.1. Цели работы

Изучение работы, постановка задачи, выработка критериев, определение весов критериев и приобретение навыков решения задач методом экспертных оценок.

7.2. Теоретические сведения

В практических задачах принятия оптимального решения альтернативы не являются «математическими объектами», а чаще представляют собой конкретные физические системы: продукты, технологии, организацию технического мероприятия, системы и т. д. Для описания альтернатив и оценки последствий их принятия необходимо решить следующие задачи:

- построить множество возможных и допустимых альтернатив;
- сформировать набор аспектов, существенных для оценки альтернатив;
- определить критериальное пространство и вес каждого критерия;
- упорядочить альтернативы по аспектам;
- получить оценку альтернатив по критериям, т. е. найти отображение свойства или параметра альтернативы в критериальном пространстве;
- выработать оптимальное решение.

Элементы множества называются альтернативами или вариантами. Принцип оптимальности задает понятие лучших альтернатив: лучшими считают альтернативы, принадлежащие функции выбора. Математическим выражением принципа оптимальности служит **функция выбора**. В практических задачах альтернативы обладают многими свойствами, оказывающими влияние на решение.

Пусть некоторое свойство альтернатив из множества выражается числом, т. е. существует отображение альтернативы на функцию выбора. Тогда такое свойство называется **критерием**, а это число — оценкой альтернативы по критерию. Одновременный учет отдельных свойств может быть затруднительным. При этом можно выделить группы свойств, которые агрегируют в виде аспектов. **Аспект** — сложное свойство альтернатив, которое одновременно учитывает все свойства входящих в группу. В частном случае аспект может являться критерием.

Методы решения задачи оптимизации, основанные на использовании экспертных процедур, называются **методами экспертных оценок**.

7.2.1. Общая схема экспертизы

В общем случае из-за сложности оценивания систем привлекаются специалисты в данной предметной области — эксперты. Решение задач оценивания называют **экспертизой**. В процессе решения участвуют: лицо, принимающее решение (ЛПР), эксперты, консультанты. Вопросы, связанные с экспертизой, рассматриваются и решаются консультантом.

ЛПР — человек, имеющий цель, служит мотивом постановки задачи. ЛПР имеет полномочия и несет ответственность. Основная функция ЛПР — выделять лучшие альтернативы и решающие критерии. ЛПР дает информацию о принципе оптимальности решения. В простейшем случае задачу выбора решает непосредственно ЛПР.

Эксперт не несет ответственности, вносит предложения по альтернативам и критериям, дает альтернативам оценки, необходимые для формирования исходного множества альтернатив, и производит нужные оценки критериев для решения задачи выбора.

Консультант — специалист по теории выбора и принятию решения. Он разрабатывает модель, процедуру принятия решений, организует работу ЛПР и экспертов, определяет альтернативы, а иногда, и вспомогательное множество для экспертизы альтернатив и организует всю процедуру экспертизы.

Для работы методом экспертных оценок, в зависимости от решаемой задачи, можно воспользоваться одной из следующих схем:

«цель — альтернативы — критерии — оценка — принятие решения»

или

«цель — критерии — альтернативы — оценка — принятие решения».

7.2.2. Методы определения весовых коэффициентов

Веса критериев — самое тонкое место в проблеме многокритериального анализа. Весовые коэффициенты w_i должны качественно отражать важность соответствующих частных критериев. Их значения выбираются исходя из анализа мирового уровня развития данной отрасли, из требований к проектируемому объекту и из существующих возможностей реализации этих требований. Открытие новых физических принципов и разработка новых методов проектирования могут существенно влиять на значения весовых коэффициентов.

Чаще всего веса назначают, исходя из интуитивного представления о сравнительной важности критериев. Однако исследования показывают, что человек (эксперт) не способен непосредственно назначать критериям корректные численные веса. Необходимы специальные процедуры получения весов. Наиболее популярны на практике *методы экспертных оценок*.

Основная идея методов экспертных оценок: использовать интеллект людей, их способность искать и находить решение слабо формализованных задач. Наиболее эффективными методами проведения экспертизы в настоящее время считаются методы *ранжирования* и *приписывания баллов*.

Метод ранжирования

Пусть экспертиза проводится группой из L экспертов, которые являются квалифицированными специалистами в той области, где принимается решение. Метод основан на расстановке частных критериев в порядке их важности. Цифрой 1 обозначают наиболее важный частный критерий, цифрой 2 — следующий по важности и т. д. Далее ранг 1 получает оценку m (количество частных критериев), ранг 2 — оценку $m-1$ и т. д. до ранга m, которому присваивается оценка 1.

Обозначим полученные оценки r_{ik}, где i — номер эксперта, k — номер критерия, и сведем результаты опроса экспертов в таблицу 7.1.

Таблица 7.1

Определение весов критериев методом ранжирования

Эксперты	Критерии			
	F_1	F_2	...	F_m
1	r_{11}	r_{12}	$\dots$	r_{1m}
2	r_{21}	r_{22}	$\dots$	r_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
L	r_{L1}	r_{L2}	$\dots$	r_{Lm}
$\sum$ оценок	r_1	r_2	$\dots$	r_m
Веса критериев	w_1	w_2	$\dots$	w_m

Значения элементов строки «$\sum$ оценок» $r_i = \sum\limits_{j=1}^{L} r_{ji}\,, i = 1, 2, ..., m.$

Весовые коэффициенты для каждого из критериев F_i вычисляются по формуле

$$w_i = \frac{r_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} r_i}\,, i = 1, 2, ..., m.$$

Пример. Группа из трёх экспертов $(L = 3)$ привлечена для ранжирования четырех критериев ($m = 4$). Эксперты определили ранги критериев в порядке, указанном в табл. 7.2. Первому месту поставили четыре балла, второму — три и т. д. по алгоритму:

Таблица 7.2

Определение весов критериев методом ранжирования

Эксперты	Критерии			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	4	1	3	2
2	3	2	4	1
3	4	2	1	3
$\sum$ оценок	$r_1 = 11$	$r_2 = 5$	$r_3 = 8$	$r_4 = 6$
Веса критериев	$w_1 =$ 0,3667	$w_2 =$ 0,1667	$w_3 =$ 0,2666	$w_4 = 0{,}2$

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = 11 + 5 + 8 + 6 = 30.$$

Метод приписывания баллов

Эксперты оценивают важность частного критерия по шкале [0–10]. При этом разрешается оценивать важность дробными величинами или приписывать одну и ту же величину из выбранной шкалы нескольким критериям. Обозначим через h_{ji} балл j-го эксперта для i-го критерия, тогда вес i-го критерия, установленный j-м экспертом $r_{ji} = \dfrac{h_{ji}}{\sum\limits_{i=1}^{m} h_{ji}}$, а значения весовых коэффициентов определяются аналогично методу ранжирования.

Пример. Пусть три эксперта поставили четырем критериям баллы, заданные в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Баллы критериев по методу приписывания баллов

Эксперты	Критерии				
	F_1	F_2	F_3	F_4	Сумма
1	$h_{11} = 10$	4	8	$h_{14} = 6$	28
2	7	5	10	3	25
3	$h_{31} = 10$	6	5	$h_{34} = 7$	28

Определяем весовые коэффициенты критериев

Таблица 7.4

Определение весов критериев по методу приписывания баллов

Эксперты	Критерии			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	10/28	4/28	8/28	6/28
2	7/25	5/25	10/25	3/25
3	10/28	6/28	5/28	7/28
$\sum$ оценок	$r_1 =$ 0,9943	$r_2 =$ 0,5571	$r_3 =$ 0,8643	$r_4 =$ 0,5843
Веса критериев	$w_1 =$ 0,3314	$w_2 =$ 0,1857	$w_3 =$ 0,2881	$w_4 =$ 0,1948

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = 0{,}9943 + 0{,}5571 + 0{,}8643 + 0{,}5843 = 3.$$

Замечания.

1. Применение подобного подхода к решению многокритериальных задач может привести к получению оптимального решения с точки зрения выбранной группы экспертов. В ответственных случаях, как правило, привлекают несколько независимых групп экспертов.

2. В случаях, когда компетентность экспертов различна, ее можно оценить методом ранжирования или приписывания баллов и получить значения весов экспертов α_j , $j = 1, ..., L$. Тогда $r_i = \sum\limits_{j=1}^{m} r_{ji} \cdot \alpha_j$.

7.3. Варианты для выполнения задания

Для ЛПР по схеме «цель — критерии — альтернативы — оценка — принятие решения» выполнить поиск лучшей альтернативы согласно выбранного задания. Вариант задания выбирается по желанию организованной экспертной группы из списка:

- выработать оптимальный вариант решения «Автомобиль для студента»;
- определить оптимальный вариант решения «Ноутбук учащегося»;
- произвести оптимальный поиск решения «Куда поехать в отпуск».

7.4. Порядок выполнения задания

Работа выполняется в течении 2-х практических занятий организованной группой экспертов в составе более чем 8 человек (допускается всей группой). При проведении расчетов допускается использовать систему Octave, пакет LibreOffice.

1. Изучить теоретический материал по теме работы (практикум, лекции, учебники).

2. Организовать экспертную группу в соответствии с рекомендациями.

3. Выбрать в составе группы консультанта-эксперта, руководящего проведением экспертизы. В ходе выполнения работы замена консультанта допускается.

4. Выбрать прямым голосованием экспертной группы вариант для выполнения практической работы.

5. Консультанту группы выполнить постановку задачи и организовать силами экспертов (записывают на бумаге и передают консультанту) выработку критериев (более 16-ти) для решения задачи. Методом ранжирования выбрать из представленных критериев 10–12 значимых. Пронумеровать критерии по значимости.

6. Применяя методы экспертных оценок определить весовые коэффициенты критериев методами ранжирования и приписывания баллов.

7. Каждому эксперту, включая консультанта, предложить не менее одной альтернативы (с ФИО эксперта, записать ФИО рядом с альтернативой через запятую) для проведения экспертной оценки. *Например, в задаче об автомобилях, ноутбуках — конкретную модель автомобиля или ноутбука. В задаче про отпуск — конкретное место с точностью до города.*

8. Для всех альтернатив выполнить запись величины свойства или параметра для оценки, исходя из реальной характеристики. Если реальная характеристика отсутствует, выполнить оценивание свойства альтернативы по критерию методом вычисления среднего балла (от каждого эксперта одна оценка в виде баллов), на основании всех баллов, выставленных всей группой экспертов (эксперт, предложивший альтернативу, выполняет объяснение и описание свойства для того, чтобы каждый эксперт смог назначить свою оценку).
Пример. Критерий — форма крышки бензобака авто: самая удобная — 8, самая неудобная — 1. Каждый эксперт выставляет оценку, и, в качестве свойства, консультант записывает среднее арифметическое всех оценок.

9. Пользуясь указаниями метода аддитивной оптимизации свертывания критериев (Лабораторная работа 7), выполнить выбор оптимального решения из предложенных альтернатив с использованием полученных весовых коэффициентов по двум методам. Сравнить полученные результаты.

10. При подготовке решений использовать программный пакет Octave и LibreOffice.

11. Оформить отчет в печатном виде согласно рекомендациям преподавателя. В отчете должны быть подробно расписаны исходные данные задачи согласно номеру варианта, ход решения и полученные результаты по каждому пункту задания. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

В титульном листе отчета обязательно должны быть указаны номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося.

12. Защитить по отчету выполненную работу.

7.5. Контрольные вопросы

1. Что понимается под методами экспертных оценок? Приведите примеры.
2. Что такое функция выбора?
3. Что является критерием, аспектом?
4. Какие методы определения весовых коэффициентов вы знаете?
5. Перечислите основные функциональные обязанности консультанта.

Список использованных источников

1. Таха, Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха. — М. : Вильямс, 2005. — 912 с.
2. Есипов, Б. А. Методы исследования операций / Б. А. Есипов. — СПб. : Лань, 2013. — 304 с.
3. Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи и принципы методологии / Е. С. Вентцель. — М. : Наука, 1988. — 208 с.

Практическая работа 8
Решение технологической задачи

8.1. Цели работы

Выполнить постановку и найти оптимальное решение детерминированной технологической задачи для контрольной проверки знаний и навыков решения задач методом линейного программирования.

8.2. Теоретические сведения

В производственных практических задачах принятия оптимального решения большое количество задач сформулировано как полностью детерминированная задача, имеющая ресурсные ограничения.

Четко формулируется целевая функция задачи: $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j \cdot x_j \to min(max)$.

Определены ресурсные ограничения:

$$\sum_{j=1}^{N} a_j\, x_j \begin{bmatrix} \leqslant \\ = \\ \geqslant \end{bmatrix} b_i, \quad \text{где } (i = 1, M).$$

Требуется нахождение оптимального решения.

8.3. Варианты для выполнения задания

Для рытья котлована под фундамент зернохранилища объёмом a м^3 строители получили 3 экскаватора. Мощный — с производительностью 22,5 м^3/час, с расходом топлива 10 л/час; средний — с характеристиками 10 м^3/час и b л/час; малый — с характеристиками 5 м^3/час и 2 л/час. Экскаваторы могут работать вместе, не мешая друг другу. Запас топлива c, л.

Задание 1

Каким образом следует задействовать экскаваторы, чтобы выполнить работу как можно скорее?

Задание 2

Как при максимальной экономии топлива решить задачу рытья котлована?

Вариант задания выбирается из табл. 8.1 по номеру бригады.

Таблица 8.1

Варианты задания. Котлован под фундамент.
(Выбирается по номеру бригады)

№ варианта	**a**	**b**	**c**
1	1350	10/3	548
2	1080	4	460
3	1080	11/3	444
4	1440	10/3	580
5	1140	4	480
6	1350	11/3	552
7	1620	10/3	656
8	2160	11/3	888
9	1200	4	500
10	1320	4	550
11	1890	11/3	777
12	1200	4	510
13	1800	10/3	728
14	1380	4	580
15	1620	11/3	666

8.4. Порядок выполнения задания

1. Изучить теоретический материал по теме работы (практикум, лекции, учебники).
2. Выписать согласно своему номеру варианта исходные данные для выполнения практической работы.
3. Выполнить постановку задачи и представить аналитическое решение своего варианта (математические выражения целевой функции, математические выражения функций ограничения, числовые значения полученных оптимальных решений) задания 1 и 2. Объяснить полученные решения.
4. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.
5. Оформить отчет в печатном виде согласно рекомендациям преподавателя. В отчете должны быть подробно расписаны исходные данные задачи согласно номеру варианта, ход решения и полученные результаты по каждому пункту задания. В титульном листе отчета обязательно должны быть указаны номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося.
6. Защитить по отчету выполненную работу.

Примечание. Работа выполняется побригадно. При проведении расчетов допускается использовать систему Octave.

8.5. Контрольные вопросы

1. Дайте пояснения математическим выражениям целевых функций, использованным в задаче.

2. Какие величины были использованы в задаче в качестве переменных и почему?

3. Какие весовые коэффициенты используются для функций ограничения?

Список использованных источников

1. Таха, Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха. — М. : Вильямс, 2005. — 912 с.

2. Номоконов, М. К. Лекции и практические занятия по курсу «Математическое программирование» / М. К. Номоконов. — СПб. : СПВВИУС, 1992. — 172 с.

3. Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи и принципы методологии / Е. С. Вентцель. — М. : Наука, 1988. — 208 с.

Практическая работа 9
Нахождение оптимальных решений в задачах нелинейного программирования с применением метода множителей Лагранжа и теоремы Куна–Таккера

9.1. Цели работы

Выполнить постановку и нахождение оптимального решения в нелинейных задачах, записанных в виде аналитических функций, используя метод множителей Лагранжа и теорему Куна–Таккера.

9.2. Теоретические сведения

Рассматривая класс задач нелинейного программирования заметим, что он существенно шире класса линейных моделей. Например, затраты на производстве в большинстве случаев не пропорциональны объему выпуска, а зависят от него нелинейно, доход от реализации продукции оказывается нелинейной функцией цен и т. д. Критериями в задачах оптимального планирования часто служат параметры: максимум прибыли, минимум себестоимости, минимум капитальных затрат. В качестве переменных выступают объемы выпуска различных видов продукции. В число ограничений входят производственные функции, характеризующие связь между выпуском продукции и затратами трудовых и материальных ресурсов, объем которых лимитирован.

Очевидно, что метод множителей Лагранжа применим только в случае, когда частные производные функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно записать аналитически и определить их точные значения в любой точке. При практических задачах, связанных с поиском оптимальных значений параметров конструкций и режима функционирования технических объектов, найти значения производных функций аналитически, как правило, не удается, поэтому в современной инженерной практике метод множителей Лагранжа применяется не столь часто.

Задачей нелинейного программирования называется задача нахождения экстремума (максимума или минимума) нелинейной функции многих переменных, когда на переменные имеются (не имеются) ограничения типа равенств или неравенств.

Рассмотрим нелинейную задачу в общем виде:

$$
\begin{aligned}
&f(x) \to min, x \in X, \\
&X = \{x : g_i(x) \le 0,\, i = \overline{1,\, k};\ g_i = 0,\ i = \overline{k+1,\, m},\ x \in Q \subset R^n\},
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

где $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,\, k}$ — выпуклые функции, $g_i(x)$, $i = \overline{k+1,\, m}$ — линейные функции, Q — выпуклое множество.

Выпуклые и вогнутые функции

Определение. Функция многих переменных $f(\vec{X})$ называется ***выпуклой*** (строго выпуклой) в выпуклой области Q, если $\forall \vec{X}_1,\ \vec{X}_2 \in Q,\ \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$:

$$f[(1-\lambda)\vec{X}_1 + \lambda\vec{X}_2] \leqslant (<)(1-\lambda)f(\vec{X}_1) + \lambda f(\vec{X}_2).$$

В одномерном случае выпуклость проявляется в том, что функция всегда лежит *п о д х о р д о й*, соединяющей любые две точки на ее графике. Непосредственно из определения также следует, что линейная функция является выпуклой, хотя и не строго выпуклой.

Замечание. Если знак неравенства в определении выпуклой функции поменять на обратный, получится определение ***вогнутой*** функции. Специально рассматривать этот класс функций не имеет смысла, так как вогнутую функцию легко превратить в выпуклую, умножив ее на -1.

Выпуклые функции обладают рядом полезных для применения свойств. Рассмотрим их.

Свойство 1 *(неравенство Иенсена).* Заданная выпуклая комбинация, состоящая из выпуклых функций, так же выпукла. То есть, если $f(\vec{X})$ — выпуклая функция и $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0$, то

$$f(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{X}_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(\vec{X}_i).$$

Свойство 2 *(выпуклость множества, заданного выпуклой функцией).* Если $g(\vec{X})$ — выпуклая функция, то множество $Q = \{\vec{X} :\ g(\vec{X}) \leqslant 0\}$ выпуклое.

Свойство 3 *(выпуклость сечения).* Если задана выпуклая функция $f(\vec{X})$, то функция одной переменной $\psi(t) = f(\vec{X}_0 + t\vec{q})$, представляющая собой сечение функции $f(\vec{X})$ из точки $\vec{X}_0$ в направлении $\vec{q}$, является выпуклой.

Свойство 4 *(непрерывность).* Заданая выпуклая функция $f(\vec{X})$, определенная на выпуклом множестве Q, непрерывна в каждой внутренней точке этого множества и имеет производные по любому направлению $\vec{q}$:

$$\frac{df(\vec{X})}{d\vec{q}} = \frac{1}{\|\vec{q}\|} \lim_{t \to +0} \frac{f(\vec{X}_0 + t\vec{q}) - f(\vec{X})}{t}.$$

Свойство 5 *(свойство экстремума).* Любой локальный минимум заданной выпуклой функции $f(\vec{X})$ на выпуклом множестве Q является глобальным.

Замечания

• Приведенное свойство имеет высокую значимость для выпуклой оптимизации, поскольку позволяет заменить глобальные условия минимума локальными, основанными на дифференциальных свойствах функций в предположении, что все частные производные существуют и непрерывны.

• Для приведенного свойства имеем в виду задачу минимизации, поскольку максимизация достигается сменой знака у целевой функции.

Вектор частных производных функции многих переменных $f(\vec{X})$ в точке $\vec{X}$ называется *градиентом*, обозначается как

$$\vec{\nabla} f(\vec{X}) = \left(\frac{df(\vec{X})}{dx_1}, \ \ldots, \ \frac{df(\vec{X})}{dx_n} \right)^T$$

и указывает направление скорейшего увеличения функции $f(\vec{X})$ в точке $\vec{X}$. Противоположный ему по направлению вектор $-\vec{\nabla} f(\vec{X})$ называется *антиградиентом* и определяет направление скорейшего убывания. *Скорость изменения функции* $f(\vec{X})$ по направлению, задаваемому произвольным вектором $\vec{q}$, называется *производной по направлению* и может быть выражена как проекция градиента на выбранное направление:

$$\frac{df(\vec{X})}{d\vec{q}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{X}_0 + t\vec{q}) - f(\vec{X})}{\|t\vec{q}\|} = pr_{\vec{q}} \vec{\nabla} f(\vec{X}) = \frac{[\vec{\nabla} f(\vec{X}), \ \vec{q}]}{\|\vec{q}\|} = \frac{\vec{\nabla}^T f(\vec{X})\vec{q}}{\|\vec{q}\|}.$$

Свойство 6 *(дифференциальное свойство 1)*. Если заданная $f(\vec{X})$ выпукла и дифференцируема на выпуклом множестве, то для любых двух точек $\vec{X}$, $\vec{X}_0$ этого множества

$$f(\vec{X}) \geqslant f(\vec{X}_0) + \vec{\nabla}^T f(\vec{X}_0)(\vec{X} - \vec{X}_0).$$

Матрица вторых частных производных (при условии их существования), вычисленных в точке $\vec{X}$, называется *матрицей Гессе*. Запишем ее как

$$H(\vec{X}) = \nabla^2 f(\vec{X}) = \frac{d^2 f(\vec{X})}{d\vec{X} d\vec{X}} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2 f(\vec{X})}{dx_1 dx_1} & \cdots & \dfrac{d^2 f(\vec{X})}{dx_1 dx_n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \dfrac{d^2 f(\vec{X})}{dx_n dx_1} & \cdots & \dfrac{d^2 f(\vec{X})}{dx_n dx_n} \end{pmatrix}.$$

Свойство 7*(дифференциальное свойство 2)*. Дважды дифференцируемая заданная функция $f(\vec{X})$ выпукла (строго выпукла) в окрестности точки $\vec{X}$ только тогда, когда ее матрица Гессе $H(\vec{X})$ неотрицательно (положительно) определена в этой точке.

Критерий Сильвестра: матрица является положительно (неотрицательно) определенной, если все ее угловые миноры положительны (неотрицательны).

9.2.1. Оптимизация функций

Задача минимизации функции многих переменных в неограниченной области

$$f(\vec{X}) = f(x_1,\ \dots,x_n) \to min, \qquad 0 < x_j < \infty,\ \ j = 1,\ \dots,n.$$

Необходимым условием локального минимума является равенство нулю всех частных производных (**теорема Ферма**):

$$\frac{df(\vec{X})}{dx_j} = 0, \qquad j = 1,\ \dots,n.$$

Это условие первого порядка можно записать в компактной векторной форме

$$\vec{\nabla} f(\vec{X}) = 0.$$

Точки X^*, удовлетворяющие условию первого порядка, называются *стационарными*. В общем случае стационарность не обязательно связана с минимумом, стационарными являются точки как минимума, так и максимума, а также точки перегиба одномерных функций или седловые точки в многомерном случае. *Достаточным* условием локального минимума является положительная определенность матрицы Гессе $H(\vec{X})$ в стационарной точке.

Для выпуклых функций условие первого порядка является необходимым и достаточным условием локального минимума.

Метод множителей Лагранжа

Если ограничения задаются совокупностью уравнений, то условная экстремальная задача оптимизации приобретает вид

$$\begin{aligned}
&f(\vec{X}) = f(x_1,\ \dots,x_n) \to min,\\
&g_i(\vec{X}) = g_i(x_1,\ \dots,x_n) = 0,\\
&i = 1,\ \dots,m, \quad j = 1,\ \dots,n.
\end{aligned}$$

и подход к решению этой задачи (9.1) основан на использовании функции Лагранжа

$$F(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g_i(x),\ x \in R^n,\ \lambda \in R^m, \qquad (9.2)$$

зависящей не только от оптимизируемых переменных $\vec{X} = (x_1,\ \dots,x_n)^T$, но и от дополнительных переменных $\vec{\Lambda} = (\lambda_1,\ \dots,\lambda_m)^T$ — так называемых множителей Лагранжа, число которых равно количеству ограничений.

Необходимые (и достаточные в случае выпуклости всех участвующих функций) условия минимума имеют вид

$$\frac{dF(\vec{X},\vec{\Lambda})}{dx_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n;$$

$$\frac{dF(\vec{X},\vec{\Lambda})}{d\lambda_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Получаем систему, состоящую из $(n+m)$ уравнений с тем же количеством переменных $(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

Всякое ее решение определяет точку $X = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, в которой может быть экстремум функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, решая систему уравнений, получаем все точки, в которых функция цели (а более точно — линия пересечения двух поверхностей) может иметь экстремальное значение. Далее, применяя классические подходы математического анализа, исследуем эти точки на тип экстремума.

Подытожим, что определение экстремальных точек в задаче нелинейного программирования методом множителей Лагранжа включает следующие этапы:

- составляем функцию Лагранжа;
- находим частные производные от функции Лагранжа по переменным x_j и λ_i и приравниваем их нулю;
- решаем систему $(n+m)$ уравнений частных производных, находим точки, в которых целевая функция может иметь экстремум;
- среди точек, подозрительных на экстремум, находим такие, в которых достигается заданный экстремум, и вычисляем значение целевой функции в этих точках.

Теорема Куна–Таккера

Условие Слейтера: условие регулярности, которое заключается в том, что допустимая область функции имеет хотя бы одну внутреннюю точку, т. е.

$$\exists\vec{X} \quad g_i(\vec{X}) < 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Теорема *(Куна–Таккера)*: при соблюдении условия Слейтера для существования оптимального плана в общей задаче (9.1) с регулярным множеством планов:

$$\begin{aligned} &\forall x^* \in X, \quad x^* \in riQ, \\ &g_i(x^*) < 0, \quad i = \overline{1, k}, \end{aligned} \tag{9.3}$$

где riQ — относительная внутренность множества Q, необходимо и достаточно существование такого вектора

$$\lambda^0 \in R, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}; \quad \lambda_i^0 \text{ — произвольные, } i = \overline{k+1, m},$$

что значения $\{x^0, \lambda^0\}$ — седловая точка функции Лагранжа (9.2):

$$\begin{aligned} &F(x^0, \lambda) \leq F(x^0, \lambda^0) \leq F(x, \lambda^0), \\ &\forall x \in Q, \quad \forall \lambda \in R^m, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k} \end{aligned} \tag{9.4}$$

и выполняется условие дополняющей нежесткости: $\lambda^0 \cdot g_i(x^0) = 0, \quad i = \overline{1, k}$.

Замечание

Для ограничений, выраженных в виде линейных функций $g_i(x)$, $i = \overline{1, k}$, теорема Куна–Таккера верна без условия Слейтера (9.3).

Схема решения.

1. Убеждаемся в том, что данная задача является задачей выпуклого программирования, используя свойства и критерии выпуклых функций, выпуклых множеств.

2. Сформулируем и запишем задачу в виде (9.1). Множество Q строим по функциям ограничений исходной задачи так, чтобы легко можно было проверить принадлежность ему вектора $x \in R^n$. Обычно $Q = \{x : x_j \geq 0, \forall j \in I^* \subset I = \{i = \overline{1, n}\}\}$, I^* — является подмножеством I.

3. Определяем, является ли множество планов регулярным.

4. Находим стационарные точки функции Лагранжа. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dF(x, \lambda)}{dx_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}; \\ \lambda_i \cdot g_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \; x \in X; \\ g_i(x) = 0, \quad i = \overline{k+1, m}; \\ \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}. \end{cases} \tag{9.5}$$

5. Для каждой найденой стационарной точки проверяем условие (9.4).

6. Если среди полученных стационарных точек отыщется седловая точка функции Лагранжа $\{x^*, \lambda^*\}$, значит x^* — решение исходной задачи $x^0 = x^*$. Если седловой точки нет, то есть $x^0 \in intQ$, то переходим к следующему пункту.

7. Выполняем поиск решения задачи на границе множества Q. Если Q состоит из внутренних точек, то задача решения не имеет. Пусть L — граница множества Q, $L \in Q$ и множества L_i, $i = \overline{1, s}$ — элементы L (например, грани, ребра, угловые точки). Для продолжения поиска решения имеем совокупность следующих задач:

$$\begin{aligned} &f(x) \to min, \quad x \in X, \quad i = \overline{1, s}; \\ &где\; X_i = \{x : x \in L_i, \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad g_i(x) = 0, \quad i = \overline{k+1, m}\}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Если переменные X_i , $1 \le i \le s$ образуют выпуклое множество, то задача (9.6) решается по схеме пп. 1–6. Каждую полученную стационарную точку задачи (9.6) проверяем на седловую точку для исходной задачи. Если мы не обнаружим решения исходной задачи при исследовании всех промежуточных задач (9.6), то такая задача решения не имеет.

Замечания.

1. Если $f(x)$ — строго выпуклая функция, то у задачи (9.1) может быть лишь один оптимальный план.

2. Если при решении задачи (9.1) найдено несколько различных оптимальных планов x^{i0}, $i = \overline{1, l}$, то допустимым решением является также любая их выпуклая линейная комбинация:

$$X = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \cdot x^{i0}, \quad \lambda_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1.$$

Пример.

Найдем решение для следующей задачи:

$$\begin{aligned} & f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 7x_3 \to min, \\ & 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ & 2x_2 + x_3 \le 4, \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x \in R^3. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Решение.

1. Составим матрицу вторых производных целевой функции $f(x)$:

$$\left(f(x) \in C^{(2)}\right),$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ge 0.$$

Так как все главные миноры матрицы неотрицательные, то $f(x)$ — выпуклая функция. Ограничения задачи линейны. Следовательно, исходная задача является задачей выпуклого программирования.

2. Задачу (9.7) записываем в виде (9.1). Введем множество:
$Q = \{x : x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x \in R^3\}$,
$f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 7x_3 \to min$,
$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$,
$2x_2 + x_3 \le 4$,
$x \in Q$.

3. Так как ограничения задачи линейны, то условие Слейтера (9.3) проверять не нужно.

4. Составляем функцию Лагранжа:
$F(x,\lambda) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 7x_3 + \lambda_1(4x_1 + x_2 - 2x_3 - 5) + \lambda_2(2x_2 + x_3 - 4)$,
$x \in Q,\ \lambda \in R^2,\ \lambda_2 \geq 0.$

Для поиска стационарных точек составляем и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dx_1} = 6x_1 + x_2 + 4\lambda_1 = 0, \\ \\ \dfrac{df}{dx_2} = 2x_2 + x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ \\ \dfrac{df}{dx_3} = 7 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0, \\ \\ \lambda_2(2x_2 + x_3 - 4) = 0, \\ \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для $\lambda_2 = 0$ из третьего уравнения $\lambda_1 = -\dfrac{7}{2}$. Из 1, 2, 4 уравнений определяем $x_1 = \dfrac{49}{22}$, $x_2 = \dfrac{7}{11}$, $x_3 = \dfrac{25}{11}$. Найдена стационарная точка $\{x^1,\ \lambda^1\} = \{\dfrac{49}{22}, \dfrac{7}{11}, \dfrac{25}{11}, -\dfrac{7}{2}, 0\}$.

Для $2x_2 + x_3 - 4 = 0$ имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4\lambda_1 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 7, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0. \end{cases}$$

Эта система решения не имеет.

5. Полученную точку $\{x^1, \lambda^1\}$ проверяем на условие (9.4):

$$\begin{cases} \dfrac{35}{44} \leq \dfrac{35}{44} \leq 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 14x_1\dfrac{7}{2}x_2 + \dfrac{35}{2} \\ \forall x_1 \geq 0, \quad \forall x_2 \geq 0, \quad \forall \lambda_2 \geq 0. \end{cases} \tag{9.8}$$

В крайнем справа выражении (9.8) находится выпуклая функция, достигающая минимального значения $\dfrac{35}{44}$ в своей стационарной точке: $x_1 = \dfrac{49}{22}$,

$x_2 = \dfrac{7}{11}$. Следовательно, для (9.8) верно неравенство и $\{x^1, \lambda^1\}$ — седловая точка функции Лагранжа (9.2), значит, $x^0 = x^1$ — оптимальный план задачи (9.7) и $f(x^0) = \dfrac{35}{44}$.

Ответ: $x^0 = (\dfrac{49}{22}, \dfrac{7}{11})$, $f(x^0) = \dfrac{35}{44}$.

Пример.

Найдем решение для следующей задачи:

$$\begin{aligned} & f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 \to min, \\ & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x \in R. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Решение.

1. Эта задача относится к задачам выпуклого программирования, исходя из условия

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0,$$

следовательно $f(x)$ — выпуклая функция. Ограничения задачи линейны, поэтому условие Слейтера (9.3) не проверяем.

2. Введем множество: $Q = \{x : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$.

3. Составляем для задачи функцию Лагранжа:
$F(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2)$,
$x \in Q,\ \ \lambda \geq 0$.

4. Для поиска стационарных точек составляем (9.5) и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = -2, \\ 2x_2 + \lambda = 2, \\ \lambda(x_1 + x_2 - 2) = 0, \\ x \in Q,\ \ \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Если $\lambda = 0$, то из 1 и 2 уравнения определяем $x_1 = -1, x_2 = 1$ и получаем точку, которая не принадлежит множеству Q.

Если $\lambda \neq 0$, то из нашей системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = -2, \\ \\ 2x_2 + \lambda = 2, \\ \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

получаем точку: $\{x_1 = 0, x_2 = 2, \lambda = -2\}$, которая также не является стационарной, так как не выполняется условие $\lambda \geq 0$. Итак, у функции Лагранжа стационарных точек нет.

5. Проверяем решение задачи на границе множества Q .

Запишем из условия элементы:

$$\begin{cases} L_1 = \{x : x_2 \geq 0,\, x_1 = 0\}, \\ L_2 = \{x : x_1 \geq 0,\, x_2 = 0\}, \\ L_3 = \{x : x_1 = x_2 = 0\}. \end{cases}$$

Рассматриваем задачу для границы L_1. Из условий (9.9) получаем:

$$\begin{aligned} & f(x) = x_2^2 - 2x_2 \to min, \\ & x_2 \leq 2, \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Запишем функцию Лагранжа для задачи на границе L_1 (9.10):

$$F(x,\lambda) = x_2^2 - 2x_2 + \lambda(x_2 - 2),$$

$$x_1 \geq 0, \quad \lambda \geq 0.$$

Составляем (9.5) и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_2 + \lambda = 2, \\ \lambda(x_2 - 2) = 0. \end{cases}$$

Находим стационарную точку: $\lambda = 0,\ x_2 = 1$.

6. Полученную точку $x_1 = 0,\ \lambda = 0,\ x_2 = 1$ проверяем на условие (9.4) для исходной задачи:

$$\begin{cases} -1 - \lambda \leq x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = (x_1+1)^2 + (x_2-1)^2 - 2, \\ \forall x_1 \geq 0, \quad \forall x_2 \geq 0, \quad \forall \lambda \geq 0. \end{cases} \tag{9.11}$$

В полученном выражении левое неравенство в (9.11) выполняется для $\forall \lambda \geq 0$. Кроме этого $(x_1+1)^2 \geq 1$ при $x_1 \geq 0$ и $(x_2-1)^2 \geq 0$, правое неравенство выполняется для $\forall x \in Q$. Значит, точка $\{0,1,0\}$ — седловая точка функции Лагранжа задачи (9.9).

Ответ: $x^0 = (0,1)$, $f(x^0) = -1$.

9.3. Варианты для выполнения задания

Вариант выбирается из табл. 9.1 по номеру студента в журнале группы.

Таблица 9.1

Варианты заданий для выполнения практической работы

№	Функция	№	Функция
1	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_2 - 6 \to min, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$	2	$\begin{cases} f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_1 + x_3 \to max, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$
3	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_1 + 5x_2 - 5 \to min, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$	4	$\begin{cases} f(x) = 3x_1^2 + 11x_1 - 3x_2 - x_3 - 27 \to min, \\ x_1 - 7x_2 + 3x_3 \leq -7, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$
5	$\begin{cases} f(x) = 3x_1^2 + x_3^2 - 6x_2 + x_1 - 1 \to min, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 1, \\ 2x_1 + x_3 = 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$	6	$\begin{cases} f(x) = x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 - 6x_2 \to min, \\ 4x_1 + x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_3 = 2, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$
7	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_1x_3 - 2x_2 + 4 \to min, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$	8	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_3 + 4 \to min, \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ 2x_1 + x_3 \geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$
9	$\begin{cases} f(x) = x_2^2 + x_3^2 - x_2 + 5 \to min, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1, \\ 2x_1 + x_3 = 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$	10	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_2 \to min, \\ x_1 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$
11	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_1x_2 - 4x_3 \to min, \\ x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$	12	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + 6 \to min, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$
13	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2x_3 - x_1 - 1 \to min, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1, \\ 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$	14	$\begin{cases} f(x) = -x_1^2 - x_3^2 - 6 \to max, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5, \\ x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$

Окончание табл. 9.1

Варианты заданий для выполнения практической работы

№	Функция	№	Функция
15	$\begin{cases} f(x) = -x_1^2 + x_2x_3 - x_2^2 \to max, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4, \\ x_1 + x_3 \le 1, \\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$	16	$\begin{cases} f(x) = x_2^2 + x_1 + x_3 - x_2 + 1 \to min, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$
17	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_3^2 + x_1 + x_2^2 - 1 \to min, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge -2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	18	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \to min, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_2 + x_3 \le 2, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$
19	$\begin{cases} f(x) = -x_1^2 + x_2x_3 \to max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \\ -2x_1 + x_3 = 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$	20	$\begin{cases} f(x) = -x_1x_3 + 4x_1 + x_2 \to max, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \le 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$
21	$\begin{cases} f(x) = -x_1^2 - x_3^2 - 2x_1 + x_2 \to max, \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_3 \le 2, \\ x_3 \ge 0. \end{cases}$	22	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to min, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \le 3, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$
23	$\begin{cases} f(x) = x_1 + x_3^2 + x_2x_3 - 4 \to min, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$	24	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_3^2 + x_1 + 2x_2 + 4 \to min, \\ x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
25	$\begin{cases} f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \to min, \\ x_1 - 3x_3 \le 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$	26	$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_3^2 + 6x_1 + x_2 - x_3 \to min, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

9.4. Порядок выполнения задания

1. Изучить теоретический материал по теме работы (практикум, лекции, учебники).

2. Выписать согласно своему номеру варианта исходные данные для выполнения практической работы.

3. Выполнить постановку задачи и представить аналитическое решение своего варианта. Объяснить полученные решения.

4. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

5. Оформить отчет в печатном виде согласно рекомендациям преподавателя. В отчете должны быть подробно расписаны исходные данные задачи согласно номеру варианта, ход решения и полученные результаты по каждому пункту задания. В титульном листе отчета обязательно должны быть указаны номер варианта задания, номер группы и ФИО учащегося.

6. Защитить по отчету выполненную работу.

Примечание. Работа выполняется индивидуально. При проведении расчетов допускается использовать систему Octave.

9.5. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение задачи нелинейного программирования.
2. В чем заключается метод множителей Лагранжа?
3. Сформулируйте теорему Куна–Таккера.
4. Дайте определение выпуклой и вогнутой функции.

Список использованных источников

1. Таха, Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха. — М. : Вильямс, 2005. — 912 с.

2. Есипов, Б. А. Методы исследования операций / Б. А. Есипов. — СПб. : Лань, 2013. — 304 с.

3. Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи и принципы методологии / Е. С. Вентцель. — М. : Наука, 1988. — 208 с.

4. Гладких, Б. А. Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики. Ч. II. Нелинейное и динамическое программирование: учебное пособие / Б. А. Гладких. — Томск : НТЛ, 2011. — 264 с.

Владимиров Сергей Александрович

ОПТИМИЗАЦИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Практикум

Редактор *И. И. Щенсняк*

Компьютерная верстка *С. А. Владимирова*

План изданий 2019 г., п. 44

Подписано к печати XX.07.2019
Объем 5,75 усл.-печ. л. Тираж 10 экз. Заказ XXX

Редакционно-издательский отдел СПбГУТ
193232 СПб., пр. Большевиков, 22
Отпечатано в СПбГУТ