In[117]:=
```
ClearAll["Global`*"]
```

Исследование системы линейных дифференциальных уравнений

Математическая модель

Задана система из двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} y_1'(t) = & a_{11}\, y_1(t) + a_{12}\, y_2(t) \\ y_2'(t) = & a_{21}\, y_1(t) + a_{22}\, y_2(t) \end{cases}$$

Изучить решение этой системы в зависимости от начальных условий. Определить характерное поведение траекторий решения на фазовой плоскости. Связать полученные результаты с корнями характеристического уравнения для этой системы. Сделать выводы об устойчивости поведения решений системы в зависимости от корней характеристического уравнения.

Задание

Рассмотреть характеристики устойчивости решений следующих ПЯТИ дифференциальных уравнений (параметры q задавать самостоятельно с учетом ограничений :

a. Уравнение

$$\begin{cases} y_1'(t) = & \mathrm{q1}\, y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = & 4\, y_1(t) + y_2(t) \end{cases}, \text{ параметр } \mathrm{q1}, 0.5 < \mathrm{q1} < 1.5$$

b. Уравнение

$$\begin{cases} y_1'(t) = & -3\, y_1(t) + \sqrt{2}\, y_2(t) \\ y_2'(t) = & \sqrt{2}\, y_1(t) - \mathrm{q2}\, y_2(t) \end{cases}, \text{ параметр } \mathrm{q2}, 1.5 < \mathrm{q2} < 2.5$$

c. Уравнение

$$\begin{cases} y_1'(t) = & -y_1(t) + \mathrm{q3}\, y_2(t) \\ y_2'(t) = & -2\, y_1(t) - y_2(t) \end{cases}, \text{ параметр } \mathrm{q3}, 1.5 < \mathrm{q3} < 2.5$$

d. Уравнение

$$\begin{cases} y_1'(t) = & \mathrm{q4}\, y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = & y_1(t) + 3\, y_2(t) \end{cases}, \text{ параметр } \mathrm{q4}, 0.5 < \mathrm{q4} < 1$$

e. Уравнение

$$\begin{cases} y_1'(t) = & -\mathrm{q5}\, y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = & y_1(t) + 4\, y_2(t) \end{cases}, \text{ параметр } \mathrm{q5}, 0.5 < \mathrm{q5} < 1.5$$

1. Для каждого из уравнений составить и решить характеристическое уравнение, найти собственные числа и собственные векторы.

2. Написать формулу для общего решения дифференциального уравнения в вещественной форме.

3. Для каждого из уравнений построить с помощью функции EquationTrekker фазовые портреты решений системы (выбрать от 5 до 10 характерных начальных точки). Сделать вывод о характере фазового портрета, связать его поведение с полученными ранее корнями характеристического уравнения (вещественные или комплексные, вещественная часть положительна или отрицательна).

Пример решения задания

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y_1'(t) = & y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = & y_1(t) \end{cases}$$

Перепишем систему в матричной форме

$$\overline{y(t)} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\,\overline{y(t)}}{d\,t} = A\,\overline{y(t)}$$

Матрица коэффициентов системы

In[118]:=
```
a = ( 1.5  -1 )
    ( 1    0  )
```

Out[118]= {{1.5, -1}, {1, 0}}

- **Характеристическое уравнение**

Составим характеристический многочлен

In[119]:=
```
Det[a - λ IdentityMatrix[2]]
```

Out[119]= $1 - 1.5\,\lambda + \lambda^2$

Можно напрямую искать корни характеристического многочлена, а можно воспользоваться стандартной функцией определения собственных чисел и собственных векторов матрицы

Напрямую

In[120]:=
```
rs = Solve[Det[a - λ IdentityMatrix[2]] == 0, λ]
```

Out[120]= {{λ → 0.75 - 0.661438 i}, {λ → 0.75 + 0.661438 i}}

In[121]:=
```
λ1 = λ /. First[rs]
λ2 = λ /. Last[rs]
```

Out[121]= 0.75 - 0.661438 i

Out[122]= 0.75 + 0.661438 i

In[123]:=
```
{Re[λ1], Im[λ1]}
```

Out[123]= {0.75, -0.661438}

In[124]:=
```
{Re[λ2], Im[λ2]}
```

Out[124]= {0.75, 0.661438}

Определение собственных чисел и собственных векторов

In[125]:=
```
Eigensystem[a]
```

Out[125]= {{0.75 + 0.661438 i, 0.75 - 0.661438 i},
{{0.53033 + 0.467707 i, 0.707107 + 0. i}, {0.53033 - 0.467707 i, 0.707107 + 0. i}}}

Собственные числа

In[126]:=
```
Eigensystem[a][[1]]
```

Out[126]= {0.75 + 0.661438 i, 0.75 - 0.661438 i}

Корни комплексные, вещественая часть корней больше 0

- **Решение системы уравнений**

Вектор-функция

In[127]:=
```
y[t_] = {y1[t], y2[t]}
```

Out[127]=
```
{y1[t], y2[t]}
```

Её производная

In[128]:=
```
y'[t]
```

Out[128]=
```
{y1′[t], y2′[t]}
```

Произведение матрицы системы на вектор-функцию

In[129]:=
```
a.y[t]
```

Out[129]=
```
{1.5 y1[t] - y2[t], y1[t]}
```

Система дифференциальных уравнений

In[130]:=
```
eqvs = Thread[y'[t] == a.y[t]]
```

Out[130]=
```
{y1′[t] == 1.5 y1[t] - y2[t], y2′[t] == y1[t]}
```

Общее решение системы дифференциальных уравнений

In[131]:=
```
ds = DSolve[eqvs, y[t], t]
```

Out[131]=

$$\{\{y1[t] \to C[2]\,((-5.55112\times10^{-17} - 1.11022\times10^{-16}\,i)\,e^{0.75\,t}\,\mathrm{Cos}[0.661438\,t] - (1.51186 - 1.66533\times10^{-16}\,i)\,e^{0.75\,t}\,\mathrm{Sin}[0.661438\,t]) + (1. + 1.11022\times10^{-16}\,i)\,C[1]\,((1. + 0.\,i)\,e^{0.75\,t}\,\mathrm{Cos}[0.661438\,t] + (1.13389 - 3.47932\times10^{-16}\,i)\,e^{0.75\,t}\,\mathrm{Sin}[0.661438\,t]),$$
$$y2[t] \to (1. - 2.22045\times10^{-16}\,i)\,C[2]\,((1. + 0.\,i)\,e^{0.75\,t}\,\mathrm{Cos}[0.661438\,t] - (1.13389 + 8.52415\times10^{-17}\,i)\,e^{0.75\,t}\,\mathrm{Sin}[0.661438\,t]) + C[1]\,((-9.71445\times10^{-17} + 1.11022\times10^{-16}\,i)\,e^{0.75\,t}\,\mathrm{Cos}[0.661438\,t] + (1.51186 - 9.71445\times10^{-17}\,i)\,e^{0.75\,t}\,\mathrm{Sin}[0.661438\,t])\}\}$$

В данном случае численное решение уравнения привело к появлению значений близких к машинному нулю (ошибки округления), чтобы учесть это обстоятельство можно использовать функцию Chop[]

In[132]:=
```
ds // Chop // Simplify
```

Out[132]=

$$\{\{y1[t] \to e^{0.75\,t}\,(1.\,C[1]\,\mathrm{Cos}[0.661438\,t] + (1.13389\,C[1] - 1.51186\,C[2])\,\mathrm{Sin}[0.661438\,t]),$$
$$y2[t] \to e^{0.75\,t}\,(1.\,C[2]\,\mathrm{Cos}[0.661438\,t] + (1.51186\,C[1] - 1.13389\,C[2])\,\mathrm{Sin}[0.661438\,t])\}\}$$

Решение системы в виде вектор-функции

In[133]:=
```
yres[t_] = y[t] /. First[ds] // Chop // Simplify
```

Out[133]=

$$\{e^{0.75\,t}\,(1.\,C[1]\,\mathrm{Cos}[0.661438\,t] + (1.13389\,C[1] - 1.51186\,C[2])\,\mathrm{Sin}[0.661438\,t]),$$
$$e^{0.75\,t}\,(1.\,C[2]\,\mathrm{Cos}[0.661438\,t] + (1.51186\,C[1] - 1.13389\,C[2])\,\mathrm{Sin}[0.661438\,t])\}$$

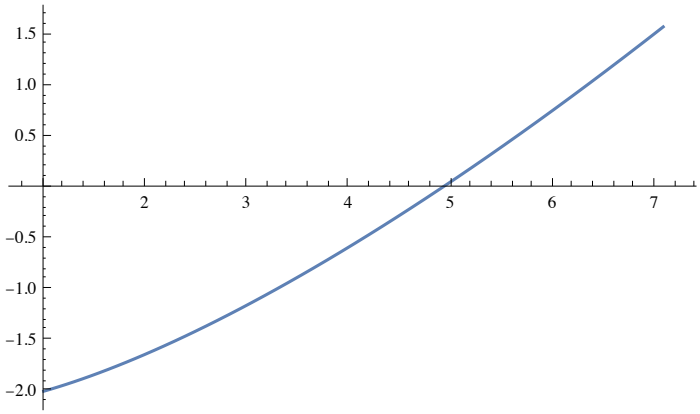
Произвольные постоянные C[1] и C[2] - значения вектор функции в начальной точке t = 0

In[134]:=
```
yres[0] // Chop // Simplify
```

Out[134]=
```
{1. C[1], 1. C[2]}
```

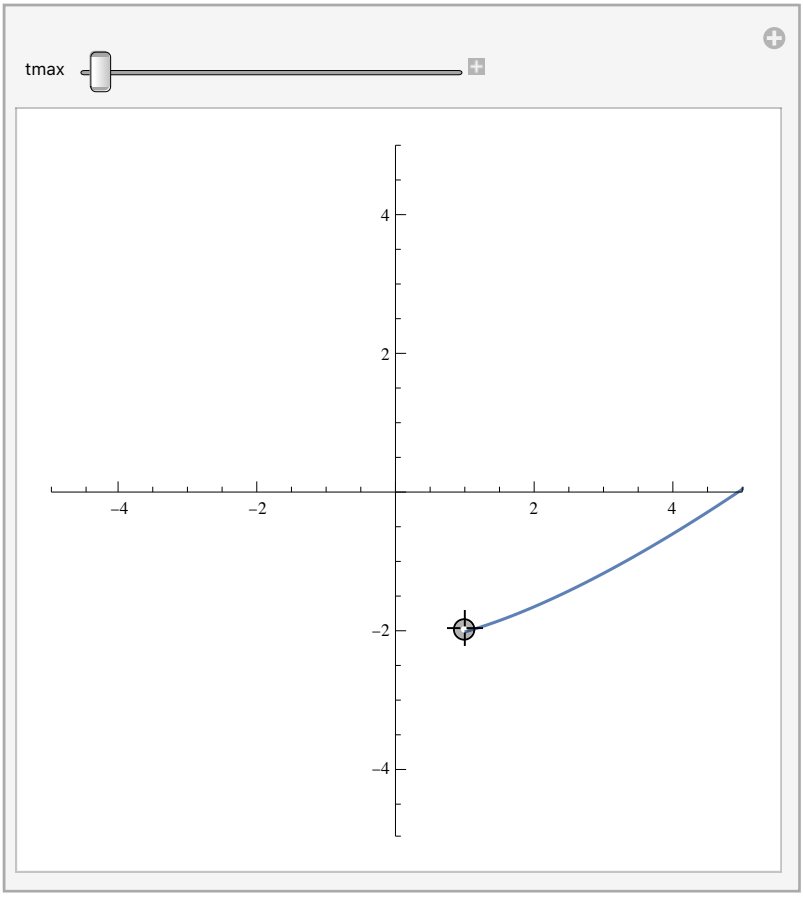
In[135]:=
```
ParametricPlot[yres[t] /. {C[1] → 1, C[2] → -2}, {t, 0, 1}]
```

Out[135]=



In[136]:=
```
Manipulate[ds = DSolve[eqvs ~ Join ~ {y[0] == p}, y[t], t];
 yres[t_] = y[t] /. First[ds] // Chop;
 ParametricPlot[yres[t], {t, 0, tmax}, PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 5}}],
 {{p, {1, -2}}, Locator}, {tmax, 1, 3}]
```

Out[136]=



- **Построение фазового портрета**

Подключение дополнительного пакета, осуществляющего визуализацию фазовых портретов

In[137]:=
```
<< EquationTrekker`
```

Вызов функции, осуществляющей построение фазового портрета (в качестве аргумента задается дифференциальное уравнение или система двух дифференциальные уравнений, указываются функции, задающие координаты на фазовой плоскости и диапазон изменения независимой переменной.

Откроется новое окно.

Построение фазовой траектории - с помощью инструмента Create a new line trek или с помощью щелчка

ПРАВОЙ кнопкой мыши по фазовой плоскости.
Изменение начальной точки - перемещение левой кнопкой мыши начальной точки.
Удаление траектории - отметка с помощью инструмента (Change Track Selection) и клавиша Delete.
Изменение начальных условий и диапазонов - в полях ввода и нажатие стрелки с упором.
Доступны инструменты Zoom и Pan.

После закрытия окна Equation Trekker результатом будет состояние и полученный графический рисунок

In[138]:=
```
ekt = EquationTrekker[eqvs, {y1, y2}, {t, 0, 2}]
```

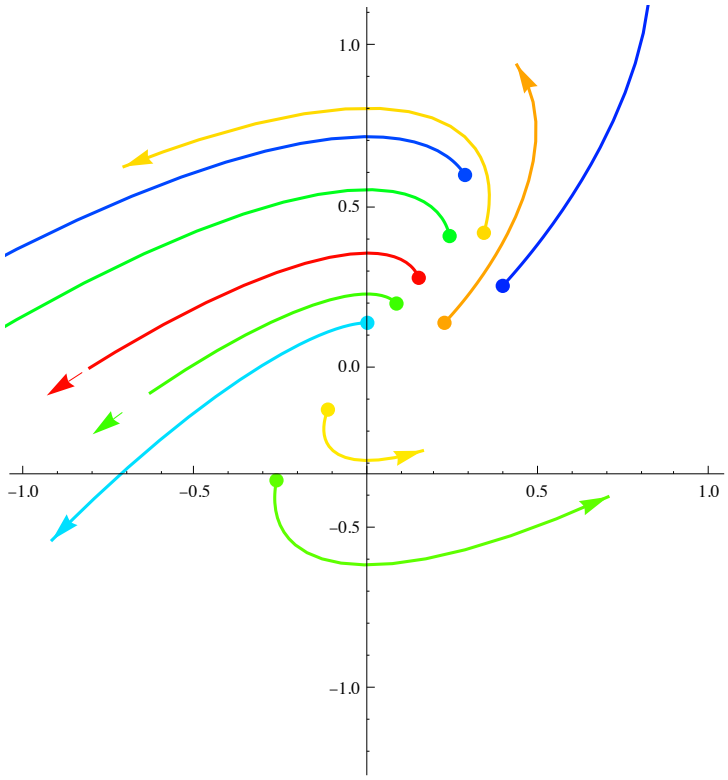
PropertyValue: canvas is not an object with properties.

PropertyValue: trekPane is not an object with properties.

PropertyValue: -- Message text not found -- (PropertyValue[{canvas, canvasPane, All}, Name → trekPane]) (1)

PropertyValue: -- Message text not found -- (PropertyValue[{trekPane, trekController, All}, Name → trekController]) (1)

Out[138]=
```
{EquationTrekkerState["{{y1′[t] == 1.5 y1[t] - y2[t], y2′[t] == y1[t]}, {y1, y2}, {t, 0, 2}}",
  "{}",
    TrekData["{y1[0.] == -0.265, y2[0.] == -0.35}", <>]
    TrekData["{y1[0.] == -0.115, y2[0.] == -0.13}", <>]
    TrekData["{y1[0.] == 0.34, y2[0.] == 0.42}", <>]
    TrekData["{y1[0.] == 0.285, y2[0.] == 0.6}", <>]
    TrekData["{y1[0.] == 0.24, y2[0.] == 0.41}", <>]
    TrekData["{y1[0.] == 0., y2[0.] == 0.14}", <>]
    TrekData["{y1[0.] == 0.15, y2[0.] == 0.28}", <>]
    TrekData["{y1[0.] == 0.225, y2[0.] == 0.14}", <>]
    TrekData["{y1[0.] == 0.085, y2[0.] == 0.2}", <>]
    TrekData["{y1[0.] == 0.395, y2[0.] == 0.255}", <>]
  , <>],
```



}

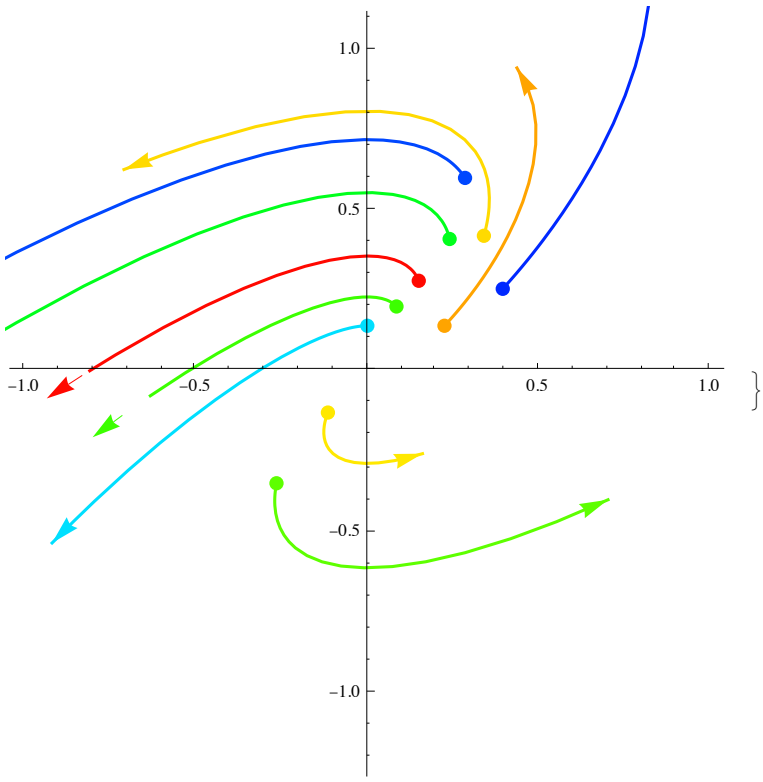
Если необходимо перезапустить EquationTrekker с сохраненным состоянием, то вы зовимеет следующий вид, необходимо указать первый элемент от сохраненного состояния ekt.

In[139]:=
```
EquationTrekker[ekt[[1]]]
```

PropertyValue: canvas is not an object with properties.

PropertyValue: trekPane is not an object with properties.

PropertyValue: -- Message text not found -- (PropertyValue[{canvas, canvasPane, All}, Name → trekPane]) (1)

PropertyValue: -- Message text not found -- (PropertyValue[{trekPane, trekController, All}, Name → trekController]) (1)

Out[139]=
```
{EquationTrekkerState["{{y1′[t] == 1.5 y1[t] - y2[t], y2′[t] == y1[t]}, {y1, y2}, {t, 0, 2}}",
  "{}",
   TrekData["{y1[0.] == 0.085, y2[0.] == 0.2}", <>]
   TrekData["{y1[0.] == 0.225, y2[0.] == 0.14}", <>]
   TrekData["{y1[0.] == 0.15, y2[0.] == 0.28}", <>]
   TrekData["{y1[0.] == 0., y2[0.] == 0.14}", <>]
   TrekData["{y1[0.] == 0.34, y2[0.] == 0.42}", <>]
   TrekData["{y1[0.] == 0.24, y2[0.] == 0.41}", <>]
   TrekData["{y1[0.] == -0.115, y2[0.] == -0.13}", <>]
   TrekData["{y1[0.] == 0.285, y2[0.] == 0.6}", <>]
   TrekData["{y1[0.] == -0.265, y2[0.] == -0.35}", <>]
   TrekData["{y1[0.] == 0.395, y2[0.] == 0.255}", <>]
  , <>],
```