In[152]:= `ClearAll["Global`*"]`

Исследование интегральных кривых обыкновенного дифференциального уравнения

Математическая модель

1. Задано дифференциальное уравнение первого порядка
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\,x^c + b\,y}{x}$$

1.1. Найти аналитически общее решение (общий интеграл) этого уравнения

1.2. С помощью функции Manipulate и Plot исследовать поведение решения дифференциального уравнения в зависимости от произвольной постоянной c

1.3. С помощью функции Table построить семейство решений (не менее 10 функций)

1.4. С помощью функции Plot построить все функции этого семейства

1.5. Определить особенности построенного семейства кривых, определить причины этих особенностей

1.6. Построить частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию y(x0) = y0. При каких значениях x0 возможно однозначное решение исходного дифференциального уравнения?

1.7. Проверить полученное решение с помощью функции DSolve

1.8. С помощью динамического модуля и Локатора (смотри подробности в примере решения) построить интерактивно интегральные кривые для произвольного начального условия

2. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\,y + x}{a\,x - y}$$

2.1. Найти аналитически общее решение дифференциального уравнения

2.2. Упростить полученное общее решение с помощью введения параметрического представления x = r(t) Cos(t), y = r(t) Sin(t)

2.3. С помощью функции Manipulate, ParametricPlot и PolarPlot исследовать зависимость решения дифференциального уравнения от произвольной постоянной C

2.4. Построить семейство решений (не менее 4 функций) и с C помощью функции PolarPlot построить все функции этого семейства

2.5. Построить частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию y(x0) = y0. При каких значениях x0 возможно однозначное решение исходного дифференциального уравнения?

Варианты заданий

Задача 1. Исследовать дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{a\,x^c + b\,y}{x}$.
Значения параметров a, b, c задать произвольно, где 5 <= a <=10, 1.5 <= c <= 3.5, 2 <= b <= 4. Начальное условие, значения x0 и y0 выбрать целочисленными, 1 <= x0 <= 5, 2 <= y0 <= 10.

Задача 2. Исследовать дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{a\,y + x}{a\,x - y}$. Значение параметра a задать

произвольно, 0.12 < a < 0.35. Начальное условие, значения x0 и y0 выбрать целочисленными, 1 <= x0 <= 5, 2 <= y0 <= 10.

Пример решения задачи

- **Задача 1**

Положим a = 1, b = 1, c = 1. Получим уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$. Общее решение этого дифференциального уравнения имеет следующий вид

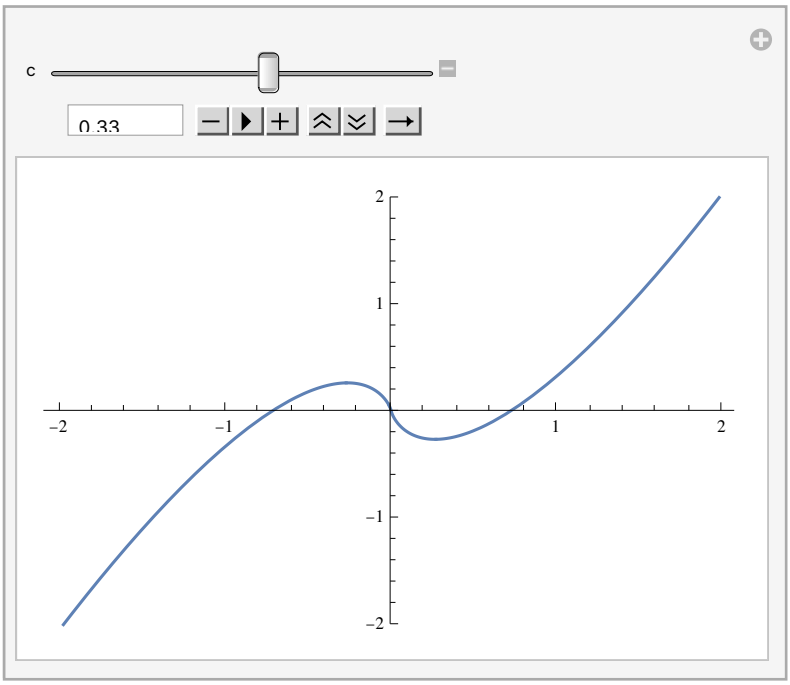
In[153]:=
```
yAll[x_, c_] = x (Log[Abs[x]] + c)
```

Out[153]= $x\left(c + \text{Log}\left[\text{Abs}[x]\right]\right)$

Исследование поведения решения уравнения в зависимости от произвольной постоянной c

In[154]:=
```
Manipulate[Plot[yAll[x, c], {x, -2, 2}, PlotRange → {-2, 2}], {c, -2, 2}]
```

Out[154]=



Составляем таблицу решений при разных значениях произвольной постоянной c, например, в диапазоне от -2 до 2 с шагом 0.1

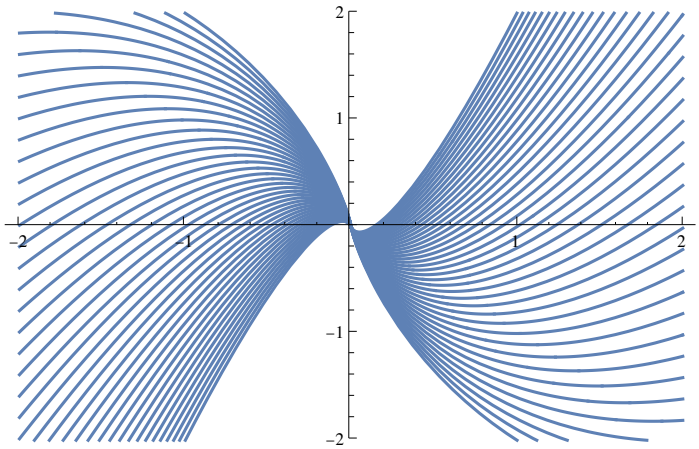
In[155]:=
```
t[x_] = Table[yAll[x, c], {c, -2, 2, 0.1}]
```

Out[155]=
```
{x (-2. + Log[Abs[x]]), x (-1.9 + Log[Abs[x]]), x (-1.8 + Log[Abs[x]]),
 x (-1.7 + Log[Abs[x]]), x (-1.6 + Log[Abs[x]]), x (-1.5 + Log[Abs[x]]),
 x (-1.4 + Log[Abs[x]]), x (-1.3 + Log[Abs[x]]), x (-1.2 + Log[Abs[x]]),
 x (-1.1 + Log[Abs[x]]), x (-1. + Log[Abs[x]]), x (-0.9 + Log[Abs[x]]),
 x (-0.8 + Log[Abs[x]]), x (-0.7 + Log[Abs[x]]), x (-0.6 + Log[Abs[x]]),
 x (-0.5 + Log[Abs[x]]), x (-0.4 + Log[Abs[x]]), x (-0.3 + Log[Abs[x]]),
 x (-0.2 + Log[Abs[x]]), x (-0.1 + Log[Abs[x]]), x (0. + Log[Abs[x]]),
 x (0.1 + Log[Abs[x]]), x (0.2 + Log[Abs[x]]), x (0.3 + Log[Abs[x]]), x (0.4 + Log[Abs[x]]),
 x (0.5 + Log[Abs[x]]), x (0.6 + Log[Abs[x]]), x (0.7 + Log[Abs[x]]), x (0.8 + Log[Abs[x]]),
 x (0.9 + Log[Abs[x]]), x (1. + Log[Abs[x]]), x (1.1 + Log[Abs[x]]), x (1.2 + Log[Abs[x]]),
 x (1.3 + Log[Abs[x]]), x (1.4 + Log[Abs[x]]), x (1.5 + Log[Abs[x]]), x (1.6 + Log[Abs[x]]),
 x (1.7 + Log[Abs[x]]), x (1.8 + Log[Abs[x]]), x (1.9 + Log[Abs[x]]), x (2. + Log[Abs[x]])}
```

Рисуем все полученные кривые на одном графике

In[156]:=
```
Plot[t[x], {x, -2, 2}, PlotRange → {-2, 2}]
```

Out[156]=



Решение начальной задачи Коши, зададим x0 и y0, например,

In[157]:=
```
x0 = 1.5
y0 = 1
```

Out[157]= 1.5

Out[158]= 1

In[159]:=
```
res0 = Solve[yAll[x0, c] == y0, c]
```

Out[159]= {{c → 0.261202}}

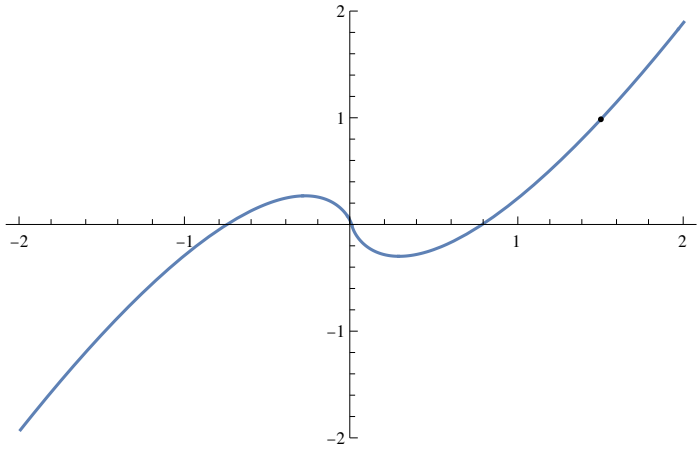
Получили решение задачи Коши

In[160]:=
```
yPart[x_] = yAll[x, c] /. First[res0]
```

Out[160]= x (0.261202 + Log[Abs[x]])

Построение графика решения задачи Коши

In[161]:=
```
Plot[yPart[x], {x, -2, 2}, PlotRange → {-2, 2}, Epilog → {Point[{x0, y0}]}]
```

Out[161]=


Для решения дифференциального уравнения можно воспользоваться стандартной функцией пакета Mathematica

Использование стандартной функции для решения дифференциальных уравнений (общее решение)

In[162]:=
```
res = DSolve[y'[x] == (x + y[x])/x, y[x], x]
```

Out[162]=
```
{{y[x] → x C[1] + x Log[x]}}
```

Отличие от полученного ранее - отсутствие модуля под знаком логарифма

Использование стандартной функции для решения начальной задачи Коши

In[163]:=
```
res1 = DSolve[{y'[x] == (x + y[x])/x, y[x0] == y0}, y[x], x]
```

Out[163]=
```
{{y[x] → 0.261202 x + x Log[x]}}
```

In[164]:=
```
g[x_, c_] = y[x] /. First[res] /. {C[1] → c}
```

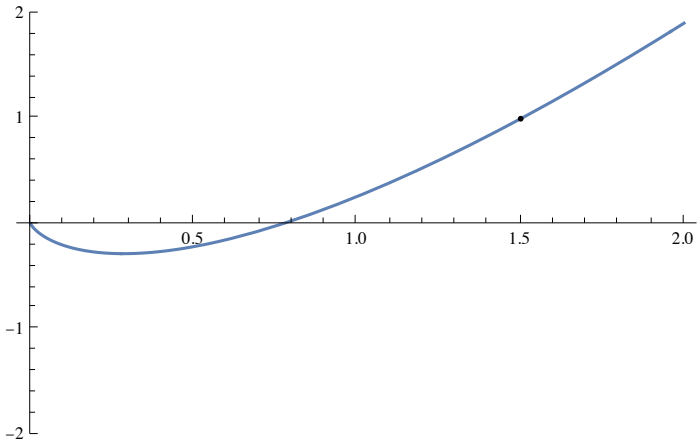
Out[164]=
```
c x + x Log[x]
```

In[165]:=
```
g1[x_] = y[x] /. First[res1]
```

Out[165]=
```
0.261202 x + x Log[x]
```

График содержит только значения при $x > 0$ (нет модуля под знаком логарифма)

In[166]:=
```
Plot[g1[x], {x, -2, 2}, PlotRange → {-2, 2}, Epilog → {Point[{x0, y0}]}]
```

Out[166]=


Решим задачу Коши в общем виде при произвольных начальных условиях

In[167]:=
```
resAll = DSolve[{y'[x] == (x + y[x])/x, y[xx0] == yy0}, y[x], x]
```

Out[167]= $\left\{\left\{y[x] \to \frac{x\, yy0 + x\, xx0\, \mathrm{Log}[x] - x\, xx0\, \mathrm{Log}[xx0]}{xx0}\right\}\right\}$

Общее решение

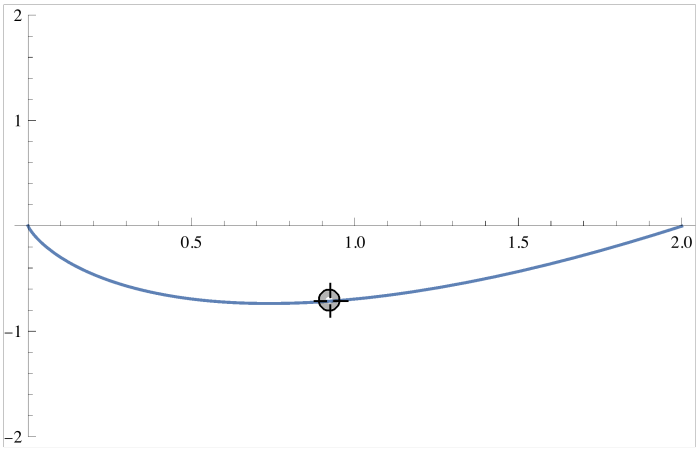
In[168]:=
```
gg[x_, xx0_, yy0_] = y[x] /. First[resAll]
```

Out[168]= $\frac{x\, yy0 + x\, xx0\, \mathrm{Log}[x] - x\, xx0\, \mathrm{Log}[xx0]}{xx0}$

Используем понятие динамического модуля и Локатора, который позволяет интерактивно менять положение точки на плоскости, в данном случае - начальной точки в условии Коши.
Изображение Локатора на графике Graphics[Locator[Dynamic[{x1,y1}]]]
Перетаскивая мышкой положение Локатора получаем различные интегральные кривые, отвечающие различным начальным условиям

In[169]:=
```
DynamicModule[{x1 = x0, y1 = y0},
 Dynamic[Show[Plot[gg[x, x1, y1], {x, -2, 2}, PlotRange → {-2, 2}],
   Graphics[Locator[Dynamic[{x1, y1}]]]]]]
```

Out[169]=



Задача 2

In[170]:=
```
Clear[y]
```

Положим параметр a = 1/10. Тогда общее решение дифференциального уравнения
$\frac{dy}{dx} = \frac{1/10\, y + x}{1/10\, x - y}$ задается выражением вида

In[171]:= $\left(-\mathrm{ArcTan}\left[\frac{y[x]}{x}\right] + 5\, \mathrm{Log}\left[1 + \frac{y[x]^2}{x^2}\right] == c - 10\, \mathrm{Log}[x]\right)$

Out[171]= $-\mathrm{ArcTan}\left[\frac{y[x]}{x}\right] + 5\, \mathrm{Log}\left[1 + \frac{y[x]^2}{x^2}\right] == c - 10\, \mathrm{Log}[x]$

Положим в этом соотношении y = r[t] Sin[t], x = r[t] Cos[t] После упрощений получим
10 log[r] = t + c или r = $c\, e^{t/10}$

Таким образом, решение уравнения в параметрической форме имеет следующий вид

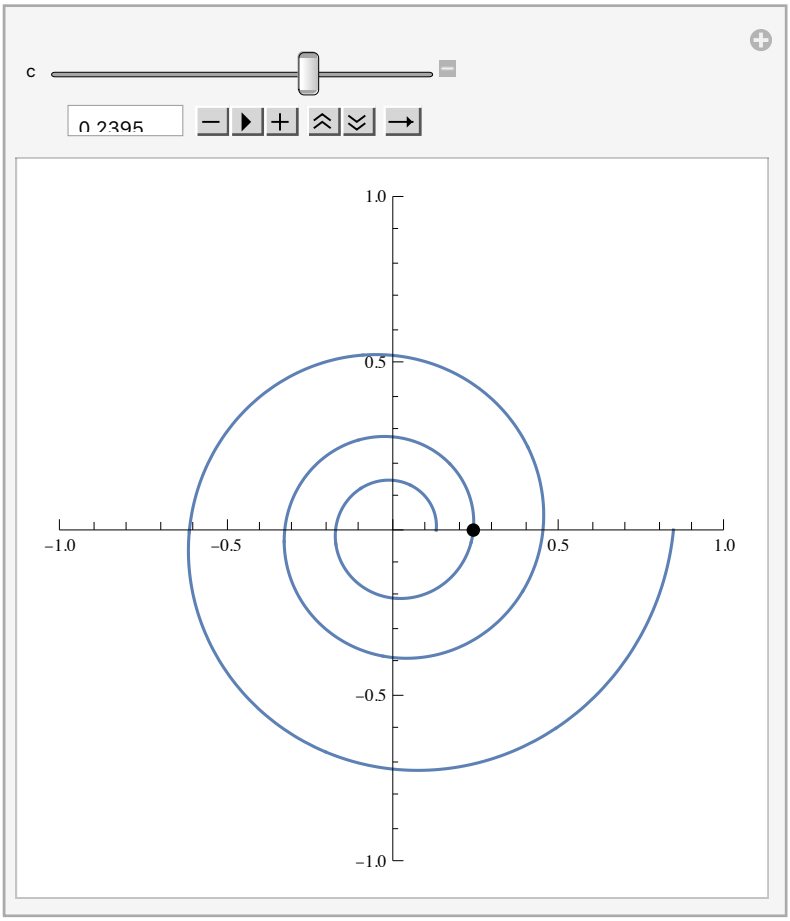
In[172]:= $r[t\_, c\_] = c\, e^{\frac{t}{10}}$

Out[172]= $c\, e^{t/10}$

Построим это семейство параметрически заданных интегальных кривых

In[173]:=
```
Manipulate[ParametricPlot[{r[t, c] Cos[t], r[t, c] Sin[t]},
  {t, -2 Pi, 4 Pi}, PlotRange → {{-1, 1}, {-1, 1}},
  Epilog → {PointSize[Large], Point[{r[0, c], 0}]}], {c, 0.1, 0.3}]
```

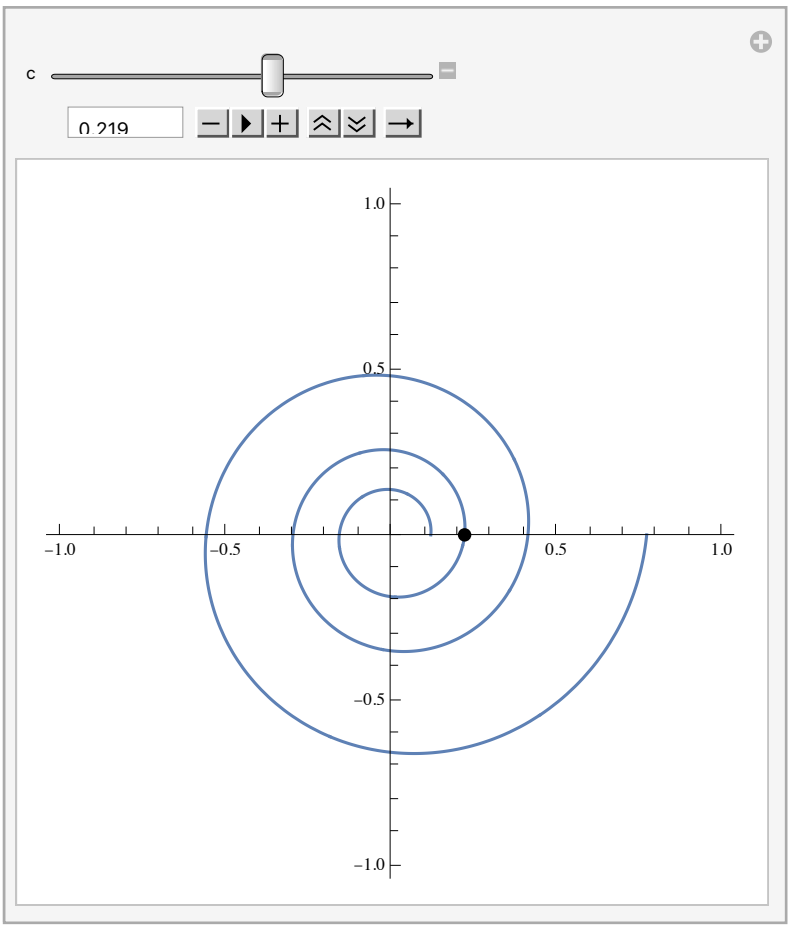
Out[173]=



Можно воспользоваться функцией построения графиков в полярной системе координат

In[174]:=
```
Manipulate[PolarPlot[r[t, c], {t, -2 Pi, 4 Pi}, PlotRange → {{-1, 1}, {-1, 1}},
  Epilog → {PointSize[Large], Point[{r[0, c], 0}]}], {c, 0.1, 0.3}]
```

Out[174]=



Построим несколько интегральных кривых

In[175]:=
```
tt1[t_] = r[t, 0.05]
tt2[t_] = r[t, 0.15]
tt3[t_] = r[t, 0.25]
tt4[t_] = r[t, 0.35]
```

Out[175]= $0.05\, e^{t/10}$

Out[176]= $0.15\, e^{t/10}$

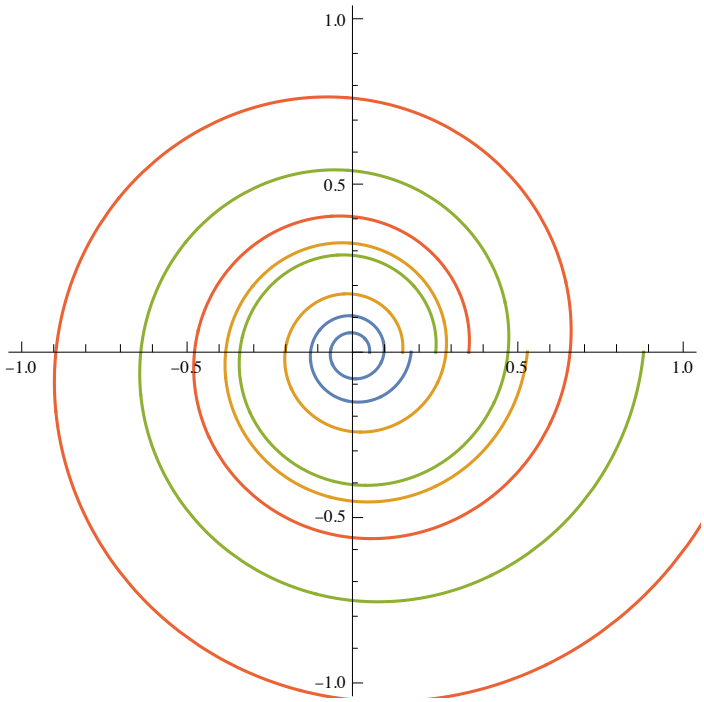
Out[177]= $0.25\, e^{t/10}$

Out[178]= $0.35\, e^{t/10}$

Синяя, красная, желтая, зеленая кривые

In[179]:=
```
PolarPlot[{tt1[t], tt2[t], tt3[t], tt4[t]}, {t, 0, 4 Pi}, PlotRange → {{-1, 1}, {-1, 1}}]
```

Out[179]=



Решение начальной задачи: y[x0] = 1 при x0 = 1

In[180]:=
```
x0 = 1
y0 = 1
```

Out[180]= 1

Out[181]= 1

In[182]:=
```
Reduce[{r[t, c] Cos[t] == x0, r[t, c] Sin[t] == y0}, {c, t}] // Simplify
```

Out[182]= $C[1] \in \mathbb{Z}\ \&\&\ c \neq 0\ \&\&\ \left(\left(c + \sqrt{2}\, e^{\frac{1}{5}\left(\text{ArcTan}\left[1+\sqrt{2}\right]-\pi C[1]\right)} == 0\ \&\&\ t + 2\,\text{ArcTan}\left[1+\sqrt{2}\right] == 2\pi C[1]\right) \mid\mid \left(c == \sqrt{2}\, e^{\frac{1}{5}\left(\text{ArcTan}\left[1-\sqrt{2}\right]-\pi C[1]\right)}\ \&\&\ t + 2\,\text{ArcTan}\left[1-\sqrt{2}\right] == 2\pi C[1]\right)\right)$

Так как должно быть c > 0, то берем вторую серию значений. Получается с виду несколько значений постоянной c, зависящей от целочисленного значения C[1], но при подстановке в параметрическое представление получаем одну и ту же функцию. Что показано на следующей картинке, вместо трех кривых мы видим только одну

Возьмем значения C[1] равными 1, 2 и 3, получим три функции r1, r2 и r3

In[183]:=
```
C1 = 1;
t1 = 2 π C1 - 2 ArcTan[1 - √2] // N
c1 = √2 e^(1/5 (ArcTan[1-√2]-π C1));
r1[t_] = r[t, c1]
```

Out[184]= 7.06858

Out[186]= $\sqrt{2}\, e^{\frac{t}{10}+\frac{1}{5}\left(-\pi+\text{ArcTan}\left[1-\sqrt{2}\right]\right)}$

In[187]:=
```
C1 = 2;
t1 = 2 π C1 - 2 ArcTan[1 - √2] // N
c1 = √2 e^(1/5 (ArcTan[1-√2]-π C1));
r2[t_] = r[t, c1]
```

Out[188]= 13.3518

Out[190]= $\sqrt{2}\, e^{\frac{t}{10}+\frac{1}{5}\left(-2\pi+\text{ArcTan}\left[1-\sqrt{2}\right]\right)}$

In[191]:=
```
C1 = 3;
t1 = 2 π C1 - 2 ArcTan[1 - √2] // N
c1 = √2 e^(1/5 (ArcTan[1-√2]-π C1));
r3[t_] = r[t, c1]
```

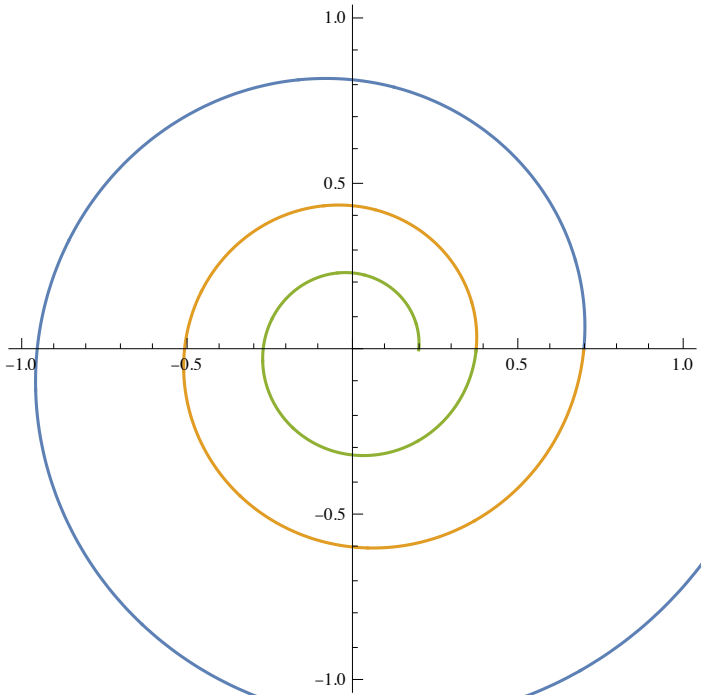
Out[192]= 19.635

Out[194]= $\sqrt{2}\, e^{\frac{t}{10}+\frac{1}{5}\left(-3\pi+\text{ArcTan}\left[1-\sqrt{2}\right]\right)}$

Построим их графики в полярной системе координат

In[195]:=
```
PolarPlot[{r1[t], r2[t], r3[t]}, {t, 0, 2 Pi}, PlotRange → {{-1, 1}, {-1, 1}}]
```

Out[195]=



Вывод: все эти значения C[1] порождают одну и ту же интегральную кривую, в дальнейшем можно взять произвольное значение C[1], например 0, при этом t1 < Pi/2. Получим интегральную кривую r0

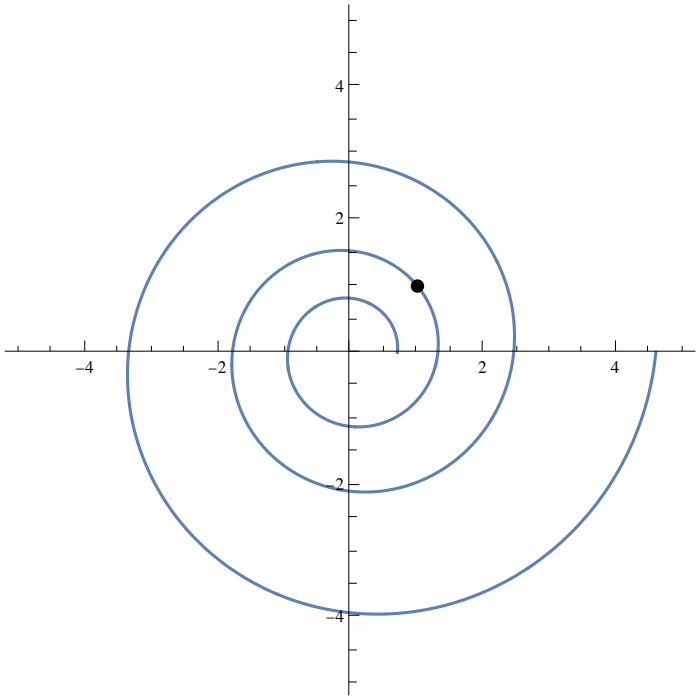
In[196]:=
```
C1 = 0;
t1 = 2 π C1 - 2 ArcTan[1 - √2] // N
c1 = √2 e^(1/5 (ArcTan[1-√2]-π C1));
r0[t_] = r[t, c1]
```

Out[197]= 0.785398

Out[199]= $\sqrt{2}\, e^{\frac{t}{10}+\frac{1}{5}\text{ArcTan}\left[1-\sqrt{2}\right]}$

In[200]:=
```
PolarPlot[r0[t], {t, -2 Pi, 4 Pi}, PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 5}},
 Epilog → {PointSize → Large, Point[{x0, 1}]}]
```

Out[200]=



Получение решения с помощью стандартной функции DSolve

In[201]:=
```
d = DSolve[D[y[x], x] == (x + y[x] / 10) / (x / 10 - y[x]), y[x], x]
```

Out[201]= $\text{Solve}\left[-\text{ArcTan}\left[\frac{y[x]}{x}\right] + 5\,\text{Log}\left[1 + \frac{y[x]^2}{x^2}\right] == C[1] - 10\,\text{Log}[x],\ y[x]\right]$

Получили неявное представление для функции y[x]. Можно упростить это выражение, сделав необходимую подстановку и наложив условия {0 < t < Pi/2, r > 0}

In[202]:= $\text{FullSimplify}\left[\left(-\text{ArcTan}\left[\frac{y[x]}{x}\right] + 5\,\text{Log}\left[1 + \frac{y[x]^2}{x^2}\right] == C[1] - 10\,\text{Log}[x]\right) /.\ \{y[x] \to r\,\text{Sin}[t],\ x \to r\,\text{Cos}[t]\},\ \{0 < t < \text{Pi}/2,\ r > 0\}\right]$

Out[202]= $t + C[1] == 10\,\text{Log}[r]$

что дает полученное ранее представление

Аналогично можно решить и задачу Коши

In[203]:=
```
d1 = DSolve[{D[y[x], x] == (x + y[x] / 10) / (x / 10 - y[x]), y[x0] == y0}, y[x], x]
```

Out[203]= $\text{Solve}\left[-\text{ArcTan}\left[\frac{y[x]}{x}\right] + 5\,\text{Log}\left[1 + \frac{y[x]^2}{x^2}\right] == \frac{1}{4}\,(-\pi + 20\,\text{Log}[2]) - 10\,\text{Log}[x],\ y[x]\right]$

In[204]:= $\text{FullSimplify}\left[\left(-\text{ArcTan}\left[\frac{y[x]}{x}\right] + 5\,\text{Log}\left[1 + \frac{y[x]^2}{x^2}\right] == \frac{1}{4}\,(-\pi + 20\,\text{Log}[2]) - 10\,\text{Log}[x]\right) /.\ \{y[x] \to r\,\text{Sin}[t],\ x \to r\,\text{Cos}[t]\},\ \{-\text{Pi}/2 < t < \text{Pi}/2,\ r > 0\}\right]$

Out[204]= $\pi + 40\,\text{Log}[r] == 4\,(t + \text{Log}[32])$

Сравним это выражение с полученным ранее в функции r0[t], для этого выразим явно r через t

In[205]:=
```
Solve[π + 40 Log[r] == 4 (t + Log[32]), r]
```

Out[205]= $\left\{\left\{r \to \text{ConditionalExpression}\left[e^{\frac{1}{40}(-\pi + 4\,t + 4\,\text{Log}[32])},\ -10\,\pi < \text{Im}[t] \le 10\,\pi\right]\right\}\right\}$

In[206]:=
```
r0[t] == r /. Solve[π + 40 Log[r] == 4 (t + Log[32]), r] // FullSimplify
```

Out[206]=
```
{ConditionalExpression[True, -10 π < Im[t] ≤ 10 π]}
```

Замечание

Можно получить и численное решение дифференциального уравнения с помощью функции NDSolve, при этом нужно указать диапазон изменения независимой переменной при которой получаем однозначную функцию. В нашем случае это промежуток [-1, 1]. Функция задается в специальной форме в виде интерполяционной функции

In[207]:=
```
d2 = NDSolve[{D[y[x], x] == (x + y[x] / 10) / (x / 10 - y[x]), y[x0] == y0}, y[x], {x, -1, 1}]
```

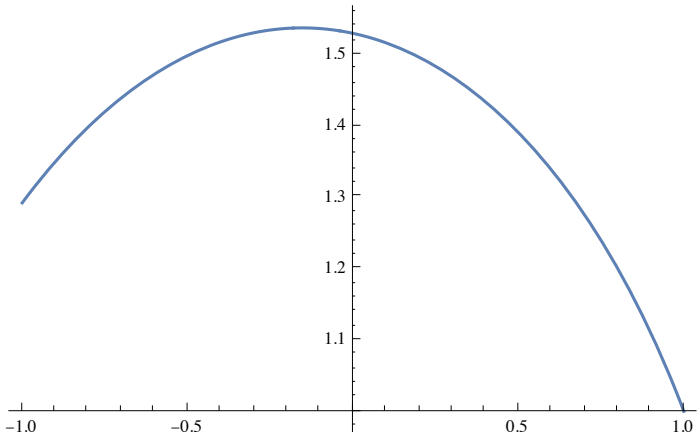
Out[207]=
```
{{y[x] → InterpolatingFunction[ Domain: {{-1., 1.}} Output: scalar ][x]}}
```

In[208]:=
```
inter[x_] = y[x] /. First[d2]
```

Out[208]=
```
InterpolatingFunction[ Domain: {{-1., 1.}} Output: scalar ][x]
```

In[209]:=
```
Plot[inter[x], {x, -1, 1}]
```

Out[209]=



Получаем только часть спирали, остальные части можно получить модифицировав исходное уравнение