In[236]:=
```
ClearAll["Global`*"]
```

Работа с комплексными числами

Математическая модель

1. Вычислить выражения, содержащие комплексные числа
   - **1.1.** Задана функция комплексной переменной f(z), вычислить ее значения в точках $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -3 + 4i$, и в точках $z_3 = \overline{z_1}$, $z_4 = \overline{z_2}$, для результирующих значений вычислить вещественную и мнимую части, модуль и аргумент комплексного числа
2. Для заданной функции f1(z) = $a z^2 + b z + c$, где a, b, c - комплексные коэффициенты, нарисовать на комплексной плоскости множество точек
   - **2.1.** удовлетворяющих условию Re(f1(z)) = 0
   - **2.2.** удовлетворяющих условию Im(f1(z)) = 0
3. Нарисовать на комплексной плоскости результат преобразования с помощью функции w = f1(z) следующего множества точек
   - **3.1.** Исходное множество задается соотношением |z| = 3
   - **3.2.** Исходное множество задается соотношением Arg(z) = $\frac{\pi}{3}$
4. Вычисление корня n-той степени из комплексного числа
   - **4.1.** Получить все значения корня n-той степени из комплексного числа. Вычислить для каждого из них вещественную и мнимую часть, модуль и аргумент
   - **4.2.** Нарисовать на комплексной плоскости все полученные значения корня

Использование средств пакета Mathematica

- Определение функции и переменных в виде отложенного выражения
- Функция вычисления вещественной Re[] и мнимой части Im[] комплексного числа
- Функция вычисления модуля Abs[] и аргумента Arg[] комплексноо числа
- Функция вычисления комплексного сопряжения Conjugate[] или операция $\square^*$
- Функция задания условий, при которых вычисляется значение выражения Assuming[]
- Функция построения линий уровня ContourPlot[]
- Функция упрощения комплексного выражения ComplexExpand[]
- Функция построения параметрически заданной графика функции ParametricPlot[], атрибуты Epilog
- Функция интерактивного вывода на экран Manipulate[]
- Функция построения точки на графике Point[]

Варианты заданий

Задача 1. Исходная функция, комплексные параметры w1, w2, w3, w4, w5 задать самостоятельно

$$f[z\_] = \frac{w1\ (z + w2)}{\left(z^2 + w3 * z + w4\right)}\ e^{w5*z}$$

Задача 2 и 3. Исходная функция f1(z) = $a z^2 + b z + c$, **комплексные** параметры a, b, c задать самостоятельно. Множества точек для задачи 3: $|z| = 3$, $\mathrm{Arg}[z] = \pi/3$

Задача 4. Исходное комплексное число W задается в виде

$W = \frac{w1*w2+w3}{w3*w4+w5}$, значения w1, w2, w3, w4, w5 взять из Задания 1.

Пример решения задачи

Вычисление выражения

Исходная функция

In[238]:=
```
f[z_] = ((1 - i) (z + 2 i))/(z^2 - i z + 4 i) e^((1+i) z)
```

Out[238]= $\frac{(1 - i)\ e^{(1+i)\ z}\ (2\ i + z)}{4\ i - i\ z + z^2}$

Исходный список значений независимой переменной

In[239]:=
```
sp = {
  z1 = 1 - i,
  z2 = -3 + 4 i,
  z3 = Conjugate[z1],
  z4 = z2*}
```

Out[239]= $\{1 - i, -3 + 4\ i, 1 + i, -3 - 4\ i\}$

Вычисление всех характеристик в точке z1

In[240]:=
```
{f[z1],
 Re[f[z1]],
 Im[f[z1]],
 Abs[f[z1]],
 Arg[f[z1]]}
```

Out[240]= $\left\{(-1 - i)\ e^2, -e^2, -e^2, \sqrt{2}\ e^2, -\frac{3\ \pi}{4}\right\}$

Вычисление всех характеристик в всех точках списка

Значение функции

In[241]:= `f[sp] // ComplexExpand`

Out[241]= $$\left\{(-1-i)\,e^2,\ -\frac{81\,\mathrm{Cos}[1]}{149\,e^7}-\frac{12\,\mathrm{Sin}[1]}{149\,e^7}+i\left(\frac{12\,\mathrm{Cos}[1]}{149\,e^7}-\frac{81\,\mathrm{Sin}[1]}{149\,e^7}\right),\ \frac{7\,\mathrm{Cos}[2]}{13}+i\left(-\frac{9\,\mathrm{Cos}[2]}{13}+\frac{7\,\mathrm{Sin}[2]}{13}\right)+\frac{9\,\mathrm{Sin}[2]}{13},\ \frac{43}{541}\,e\,\mathrm{Cos}[7]+\frac{72}{541}\,e\,\mathrm{Sin}[7]+i\left(\frac{72}{541}\,e\,\mathrm{Cos}[7]-\frac{43}{541}\,e\,\mathrm{Sin}[7]\right)\right\}$$

или

In[242]:= `f[sp] // ComplexExpand // N`

Out[242]= {-7.38906 - 7.38906 i, -0.000329637 - 0.000377455 i, 0.405435 + 0.777723 i, 0.400561 + 0.130792 i}

Вещественная часть значения функции

In[243]:= `Re[f[sp]] // ComplexExpand`

Out[243]= $$\left\{-e^2,\ -\frac{81\,\mathrm{Cos}[1]}{149\,e^7}-\frac{12\,\mathrm{Sin}[1]}{149\,e^7},\ \frac{7\,\mathrm{Cos}[2]}{13}+\frac{9\,\mathrm{Sin}[2]}{13},\ \frac{43}{541}\,e\,\mathrm{Cos}[7]+\frac{72}{541}\,e\,\mathrm{Sin}[7]\right\}$$

In[244]:= `Re[f[sp]] // N`

Out[244]= {-7.38906, -0.000329637, 0.405435, 0.400561}

Мнимая часть значения функции

In[245]:= `Im[f[sp]] // ComplexExpand`

Out[245]= $$\left\{-e^2,\ \frac{12\,\mathrm{Cos}[1]}{149\,e^7}-\frac{81\,\mathrm{Sin}[1]}{149\,e^7},\ -\frac{9\,\mathrm{Cos}[2]}{13}+\frac{7\,\mathrm{Sin}[2]}{13},\ \frac{72}{541}\,e\,\mathrm{Cos}[7]-\frac{43}{541}\,e\,\mathrm{Sin}[7]\right\}$$

In[246]:= `Im[f[sp]] // N`

Out[246]= {-7.38906, -0.000377455, 0.777723, 0.130792}

Модуль значения функции

In[247]:= `Abs[f[sp]] // ComplexExpand`

Out[247]= $$\left\{\sqrt{2}\,e^2,\ \frac{3\sqrt{\frac{5}{149}}}{e^7},\ \sqrt{\frac{10}{13}},\ \sqrt{\frac{13}{541}}\,e\right\}$$

In[248]:= `Abs[f[sp]] // N`

Out[248]= {10.4497, 0.000501132, 0.877058, 0.421374}

Аргумент значения функции

In[249]:=
```
Arg[f[sp]] // ComplexExpand
```

Out[249]=
$$\left\{-\frac{3\pi}{4},\ -\pi+\frac{1}{2}\text{ArcTan}\left[\frac{\frac{4\,\text{Cos}[1]}{e^7}-\frac{27\,\text{Sin}[1]}{e^7}}{-\frac{27\,\text{Cos}[1]}{e^7}-\frac{4\,\text{Sin}[1]}{e^7}}\right]-\frac{1}{2}\text{ArcTan}\left[\frac{-\frac{4\,\text{Cos}[1]}{e^7}+\frac{27\,\text{Sin}[1]}{e^7}}{-\frac{27\,\text{Cos}[1]}{e^7}-\frac{4\,\text{Sin}[1]}{e^7}}\right]+\right.$$
$$i\left(-\frac{1}{4}\text{Log}\left[1+\frac{\left(\frac{4\,\text{Cos}[1]}{e^7}-\frac{27\,\text{Sin}[1]}{e^7}\right)^2}{\left(-\frac{27\,\text{Cos}[1]}{e^7}-\frac{4\,\text{Sin}[1]}{e^7}\right)^2}\right]+\frac{1}{4}\text{Log}\left[1+\frac{\left(-\frac{4\,\text{Cos}[1]}{e^7}+\frac{27\,\text{Sin}[1]}{e^7}\right)^2}{\left(-\frac{27\,\text{Cos}[1]}{e^7}-\frac{4\,\text{Sin}[1]}{e^7}\right)^2}\right]\right),$$
$$-\frac{1}{2}\text{ArcTan}\left[\frac{9\,\text{Cos}[2]-7\,\text{Sin}[2]}{7\,\text{Cos}[2]+9\,\text{Sin}[2]}\right]+\frac{1}{2}\text{ArcTan}\left[\frac{-9\,\text{Cos}[2]+7\,\text{Sin}[2]}{7\,\text{Cos}[2]+9\,\text{Sin}[2]}\right]+$$
$$i\left(\frac{1}{4}\text{Log}\left[1+\frac{(9\,\text{Cos}[2]-7\,\text{Sin}[2])^2}{(7\,\text{Cos}[2]+9\,\text{Sin}[2])^2}\right]-\frac{1}{4}\text{Log}\left[1+\frac{(-9\,\text{Cos}[2]+7\,\text{Sin}[2])^2}{(7\,\text{Cos}[2]+9\,\text{Sin}[2])^2}\right]\right),$$
$$\frac{1}{2}\text{ArcTan}\left[\frac{72\,e\,\text{Cos}[7]-43\,e\,\text{Sin}[7]}{43\,e\,\text{Cos}[7]+72\,e\,\text{Sin}[7]}\right]-\frac{1}{2}\text{ArcTan}\left[\frac{-72\,e\,\text{Cos}[7]+43\,e\,\text{Sin}[7]}{43\,e\,\text{Cos}[7]+72\,e\,\text{Sin}[7]}\right]+$$
$$i\left(-\frac{1}{4}\text{Log}\left[1+\frac{(72\,e\,\text{Cos}[7]-43\,e\,\text{Sin}[7])^2}{(43\,e\,\text{Cos}[7]+72\,e\,\text{Sin}[7])^2}\right]+\right.$$
$$\left.\left.\frac{1}{4}\text{Log}\left[1+\frac{(-72\,e\,\text{Cos}[7]+43\,e\,\text{Sin}[7])^2}{(43\,e\,\text{Cos}[7]+72\,e\,\text{Sin}[7])^2}\right]\right)\right\}$$

In[250]:=
```
Arg[f[sp]] // N
```

Out[250]= {-2.35619, -2.28867, 1.09025, 0.315607}

Определение комплексного числа как пары чисел

In[251]:=
```
pair[z_] := {Re[z], Im[z]}
```

Получение пар для всех исходных чисел

In[252]:=
```
reimsp = pair /@ sp
```

Out[252]= {{1, -1}, {-3, 4}, {1, 1}, {-3, -4}}

Получение пар для всех знаечний функции f

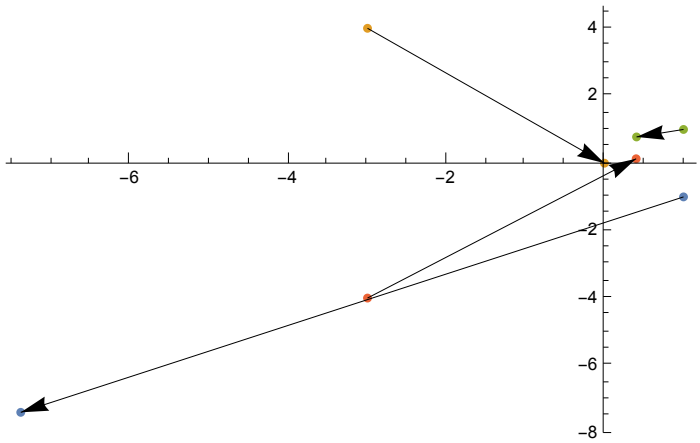
In[253]:=
```
reimspf = pair[f[#]] & /@ sp // N
```

Out[253]= {{-7.38906, -7.38906}, {-0.000329637, -0.000377455},
{0.405435, 0.777723}, {0.400561, 0.130792}}

Визуализация исходных чисел и значений функции f в них (начало вектора - исходное число, конец вектора - результат вычисления функции f)

In[254]:=
```
ListPlot[Transpose@{reimsp, reimspf},
 PlotRange → All, Epilog → Arrow[Transpose@{reimsp, reimspf}]]
```

Out[254]=



Множества на комплексной плоскости

Зададим функцию комплексной переменной

In[255]:= $f1[z\_] = (i + 1)\, z^2 + 2\, z + 2 - 3\, i$

Out[255]= $(2 - 3\, i) + 2\, z + (1 + i)\, z^2$

Выделим вещественную и мнимую части функции f1

In[256]:= $f1[x + i\, y]$

Out[256]= $(2 - 3\, i) + 2\, (x + i\, y) + (1 + i)\, (x + i\, y)^2$

Вычисление вещественной и мнимой частей в предположении, что x и y - вещественные числа.
Результат упрощается с помощью ComplexExpand

In[257]:=
```
f1Re[x_, y_] = Re[f1[x + i y]] // ComplexExpand
```

Out[257]= $2 + 2\, x + x^2 - 2\, x\, y - y^2$

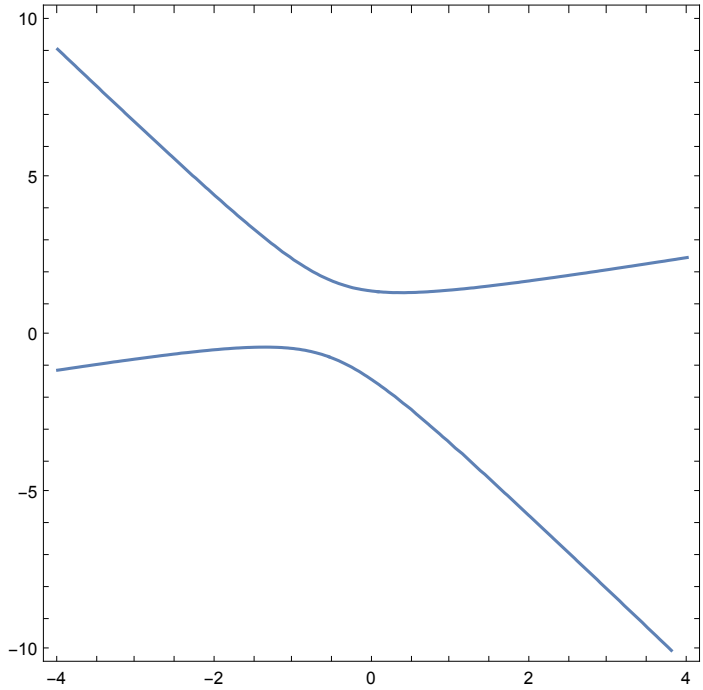
In[258]:=
```
f1Im[x_, y_] = Im[f1[x + i y]] // ComplexExpand
```

Out[258]= $-3 + x^2 + 2\, y + 2\, x\, y - y^2$

Построение множества точек, удовлетворяющих условию Re(f1(z)) = 0 или Im(f1(z)) = 0

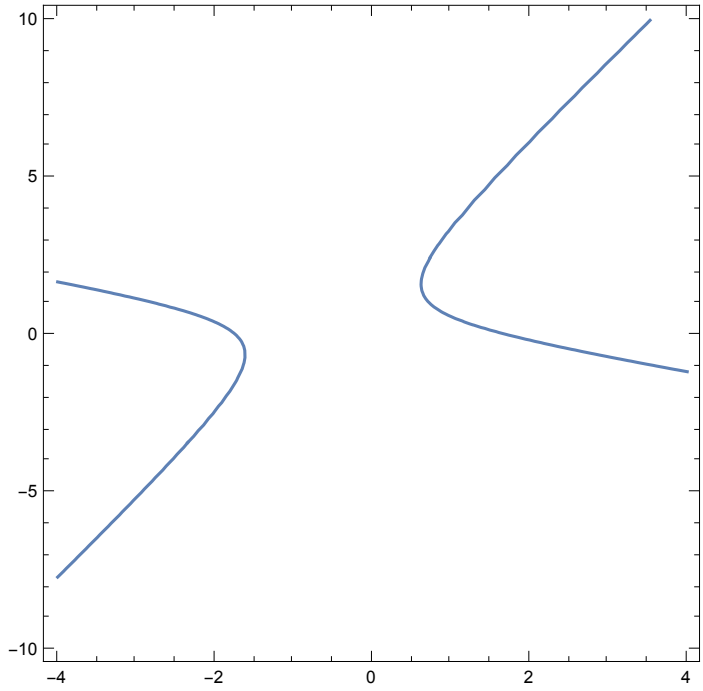
In[259]:=
```
ContourPlot[f1Re[x, y] == 0, {x, -4, 4}, {y, -10, 10}]
```

Out[259]=



In[260]:=
```
ContourPlot[f1Im[x, y] == 0, {x, -4, 4}, {y, -10, 10}]
```

Out[260]=



Нарисовать на комплексной плоскости результат преобразования с помощью функции w = f1(z)

Исходная функция и ее вещественная и мнимая части

In[261]:=
```
f1[z]
```

Out[261]= $(2 - 3\,i) + 2\,z + (1 + i)\,z^2$

In[262]:=
```
wRe[x_, y_] = Re[f1[x + ⅈ y]] // ComplexExpand
```
Out[262]= $2 + 2\,x + x^2 - 2\,x\,y - y^2$

In[263]:=
```
wIm[x_, y_] = Im[f1[x + ⅈ y]] // ComplexExpand
```
Out[263]= $-3 + x^2 + 2\,y + 2\,x\,y - y^2$

Параметрическое задание первого множества : |z| = 2, где z=x + *i* y, или в параметрической форме x = 2 Cos(t), y = 2 Sin(t)

In[264]:=
```
xt[t_] = 2 Cos[t]
yt[t_] = 2 Sin[t]
```
Out[264]= 2 Cos[t]

Out[265]= 2 Sin[t]

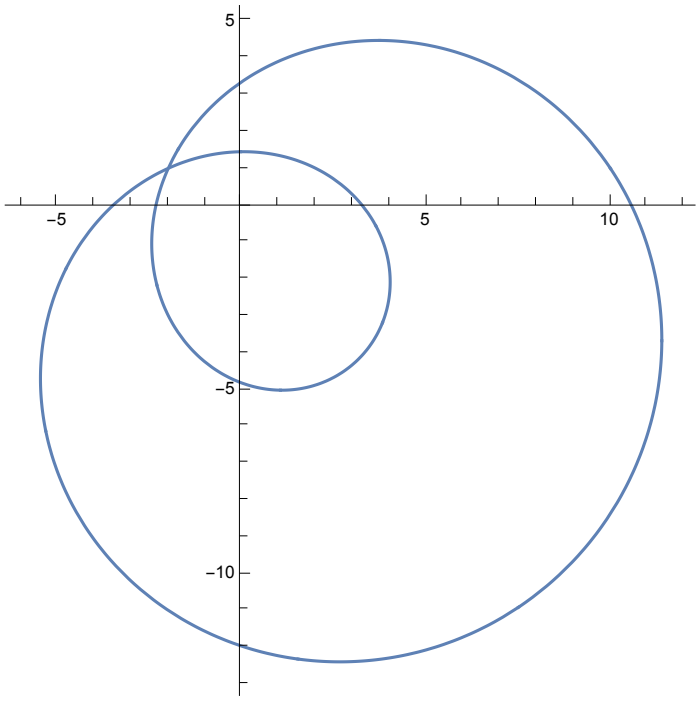
Параметрическое представление исходного множества

In[266]:=
```
zz[t_] = {xt[t], yt[t]}
```
Out[266]= {2 Cos[t], 2 Sin[t]}

Подставляем в аргументы вещественной и мнимой частей исходной функции параметрическое представление исходного множества

In[267]:=
```
ww[t_] = {wRe[xt[t], yt[t]], wIm[xt[t], yt[t]]}
```
Out[267]= $\{2 + 4\,\mathrm{Cos}[t] + 4\,\mathrm{Cos}[t]^2 - 8\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t] - 4\,\mathrm{Sin}[t]^2,$
$-3 + 4\,\mathrm{Cos}[t]^2 + 4\,\mathrm{Sin}[t] + 8\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t] - 4\,\mathrm{Sin}[t]^2\}$

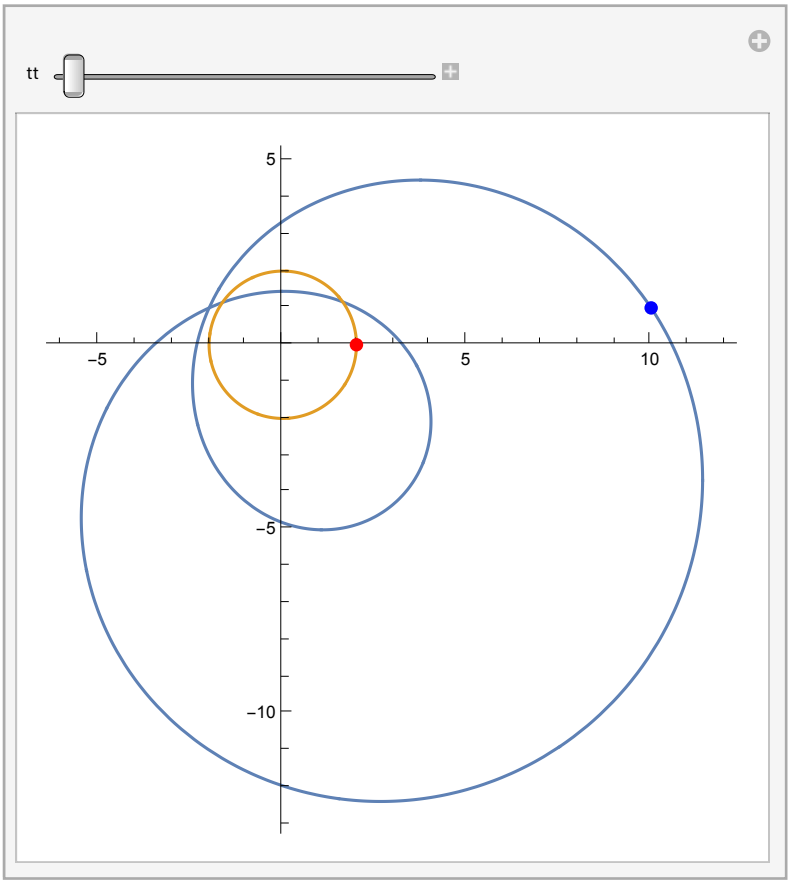
In[268]:=
```
ParametricPlot[ww[t], {t, 0, 2 π}]
```
Out[268]=



Визуализация преобразования, строим результирующий график и к этой картинке добавляем две управляемые точки, одна соответствует точке z(tt), а вторая w(tt)

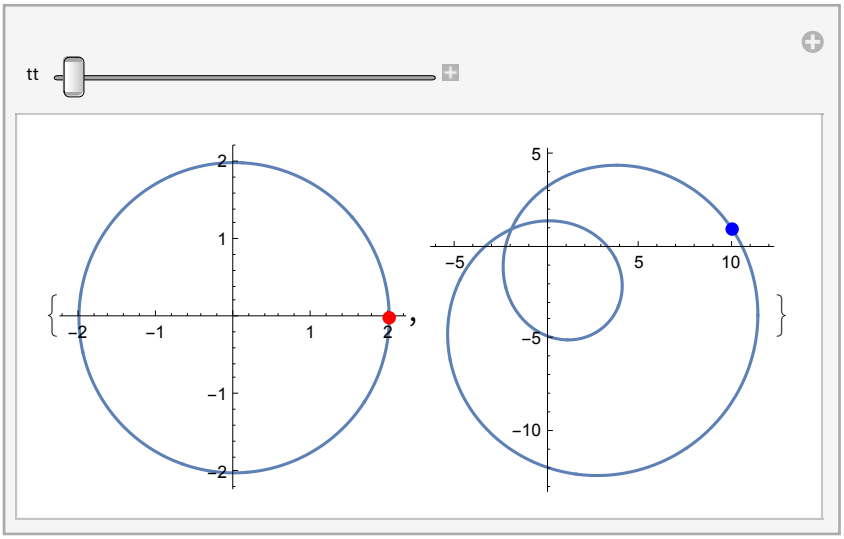
In[269]:=
```
Manipulate[ParametricPlot[{ww[t], zz[t]}, {t, 0, 2 π}, Epilog →
    {PointSize[Large], Red, Point[zz[tt]], Blue, Point[ww[tt]]}], {tt, 0, 2 π}]
```

Out[269]=



In[270]:=
```
Manipulate[{ParametricPlot[zz[t], {t, 0, 2 π},
    Epilog → {PointSize[Large], Red, Point[zz[tt]]}], ParametricPlot[ww[t],
    {t, 0, 2 π}, Epilog → {PointSize[Large], Blue, Point[ww[tt]]}]}, {tt, 0, 2 π}]
```

Out[270]=



Параметрическое задание второго множества Arg(z) = $\frac{\pi}{4}$, где z=x + i y, или в параметрической форме x = t Cos[$\frac{\pi}{4}$], y = t Sin[$\frac{\pi}{4}$]

In[271]:=
```
xt2[t_] = t Cos[π/4]
yt2[t_] = t Sin[π/4]
```

Out[271]= $\frac{t}{\sqrt{2}}$

Out[272]= $\frac{t}{\sqrt{2}}$

Параметрическое представление исходного множества

In[273]:=
```
zz2[t_] = {xt2[t], yt2[t]}
```

Out[273]= $\left\{\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right\}$

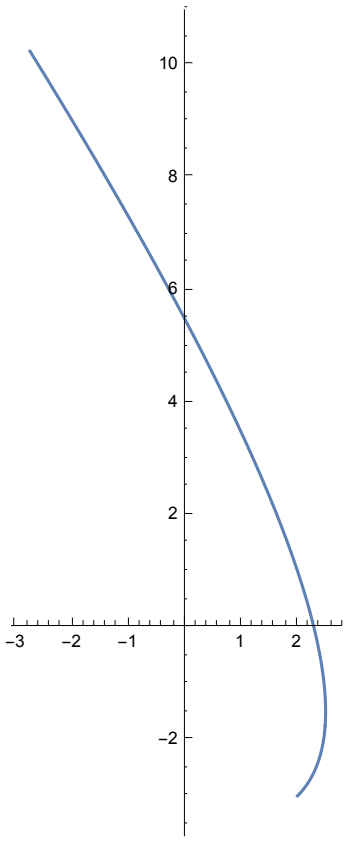
Подставляем в аргументы вещественной и мнимой частей исходной функции параметрическое представление исходного множества

In[274]:=
```
ww2[t_] = {wRe[xt2[t], yt2[t]], wIm[xt2[t], yt2[t]]}
```

Out[274]= $\left\{2 + \sqrt{2}\, t - t^2, -3 + \sqrt{2}\, t + t^2\right\}$

In[275]:=
```
ParametricPlot[ww2[t], {t, 0, 3}]
```

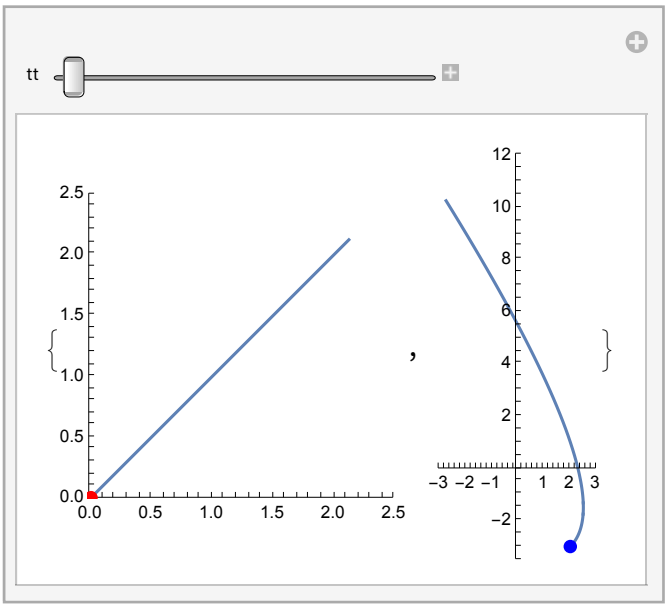
Out[275]=



Визуализация преобразования, строим результирующий график и к этой картинке добавляем две управляемые точки, одна соответствует точке z(tt), а вторая w(tt)

In[276]:=
```
Manipulate[{ParametricPlot[zz2[t], {t, 0, 3}, PlotRange → {{0, 2.5}, {0, 2.5}},
    Epilog → {PointSize[Large], Red, Point[zz2[tt]]}],
  ParametricPlot[ww2[t], {t, 0, 3}, PlotRange → {{-3, 3}, {-3.5, 12}},
    Epilog → {PointSize[Large], Blue, Point[ww2[tt]]}]}, {tt, 0, 3}]
```

Out[276]=



Вычисление корня n-той степени из комплексного числа

Вычислить все корни пятой степени
из комплексного числа z = (2-*i*)/2.5

In[277]:=
```
z0 = (2 - i) / 2.5
```

Out[277]= 0.8 - 0.4 i

Корни как решение уравнения

In[278]:=
```
resz0 = Solve[z^5 == z0, z]
```

Out[278]= {{z → -0.840991 - 0.499086 i},
{z → -0.734539 + 0.645604 i}, {z → 0.214778 - 0.954056 i},
{z → 0.387021 + 0.898091 i}, {z → 0.973731 - 0.0905533 i}}

Функция, по номеру - корень

In[279]:=
```
z[n_] := z /. resz0[[n]]
```

Список всех корней

In[280]:=
```
spz = {z[1], z[2], z[3], z[4], z[5]}
```

Out[280]= {-0.840991 - 0.499086 i, -0.734539 + 0.645604 i,
0.214778 - 0.954056 i, 0.387021 + 0.898091 i, 0.973731 - 0.0905533 i}

Характеристики всех корней

Вещественная часть каждого корня

In[281]:=
```
Re[spz] // ComplexExpand // N
```
Out[281]=
```
{-0.840991, -0.734539, 0.214778, 0.387021, 0.973731}
```

Мниимая часть каждого корня

In[282]:=
```
Im[spz] // ComplexExpand // N
```
Out[282]=
```
{-0.499086, 0.645604, -0.954056, 0.898091, -0.0905533}
```

Модуль каждого из корней

In[283]:=
```
Abs[spz] // N
```
Out[283]=
```
{0.977933, 0.977933, 0.977933, 0.977933, 0.977933}
```

Аргумент каждого из корней

In[284]:=
```
Arg[spz] // N
```
Out[284]=
```
{-2.606, 2.42054, -1.34937, 1.16391, -0.0927295}
```

Таблица всех корней (в виде координат точек на плоскости)

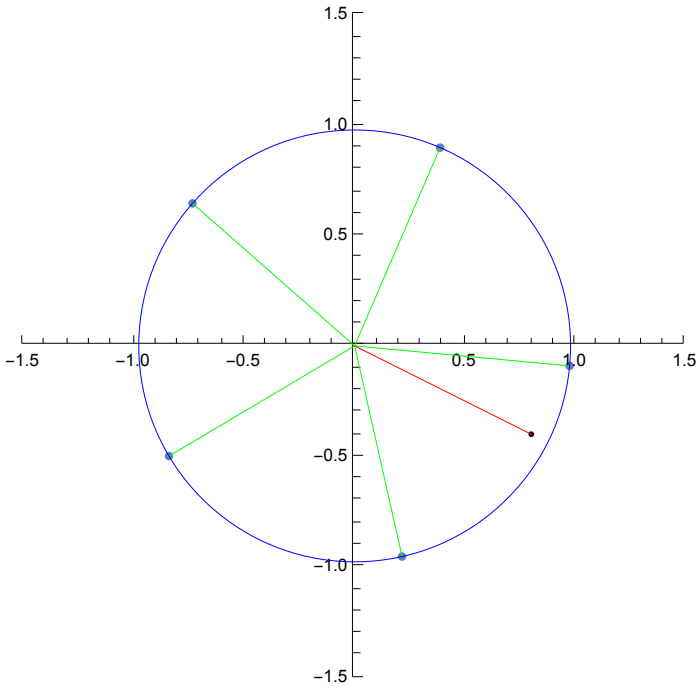
In[285]:=
```
tab = Table[{Re[z[n]], Im[z[n]]}, {n, 1, 5}] // N
```
Out[285]=
```
{{-0.840991, -0.499086}, {-0.734539, 0.645604},
 {0.214778, -0.954056}, {0.387021, 0.898091}, {0.973731, -0.0905533}}
```

Построение всех корней на комплексной плоскости, дополнительно строятся линии из начала координат в корни, исходное значение комплексного числа и окружность радиуса модуль полученных корней

In[286]:=
```
centr = {0, 0};
```

In[287]:=
```
ListPlot[tab, AspectRatio → 1, PlotRange → {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}},
 Epilog → {p = Point[{Re[z0], Im[z0]}], Green,
   Line[{centr, tab[[1]]}],
   Line[{centr, tab[[2]]}],
   Line[{centr, tab[[3]]}],
   Line[{centr, tab[[4]]}],
   Line[{centr, tab[[5]]}],
   Red, Line[{{0, 0}, {Re[z0], Im[z0]}}],
   Blue, Circle[{0, 0}, Abs[z[1]]]}]
```

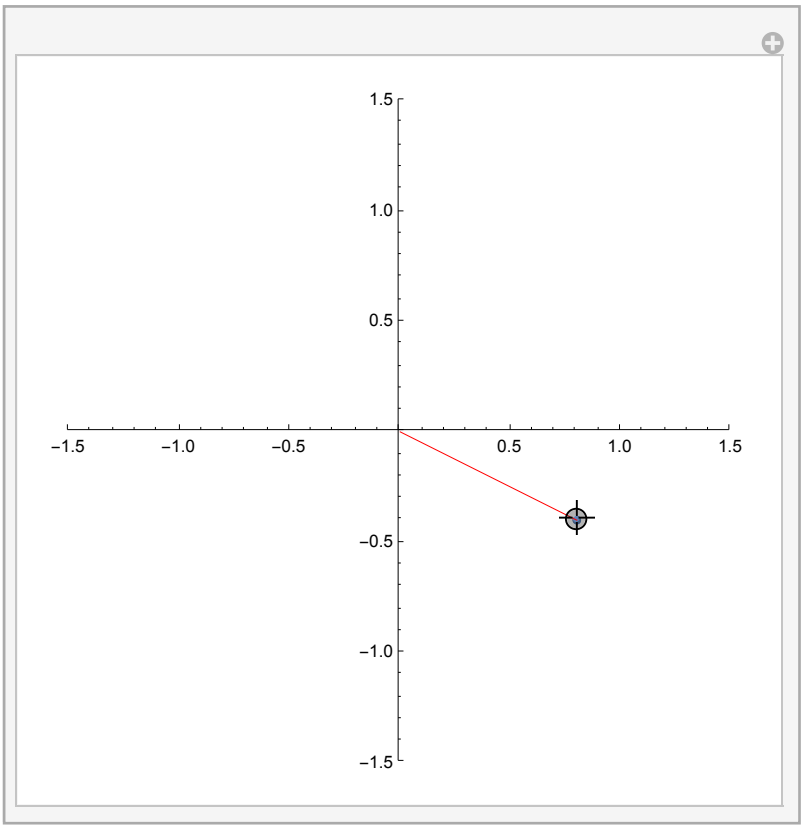
Out[287]=



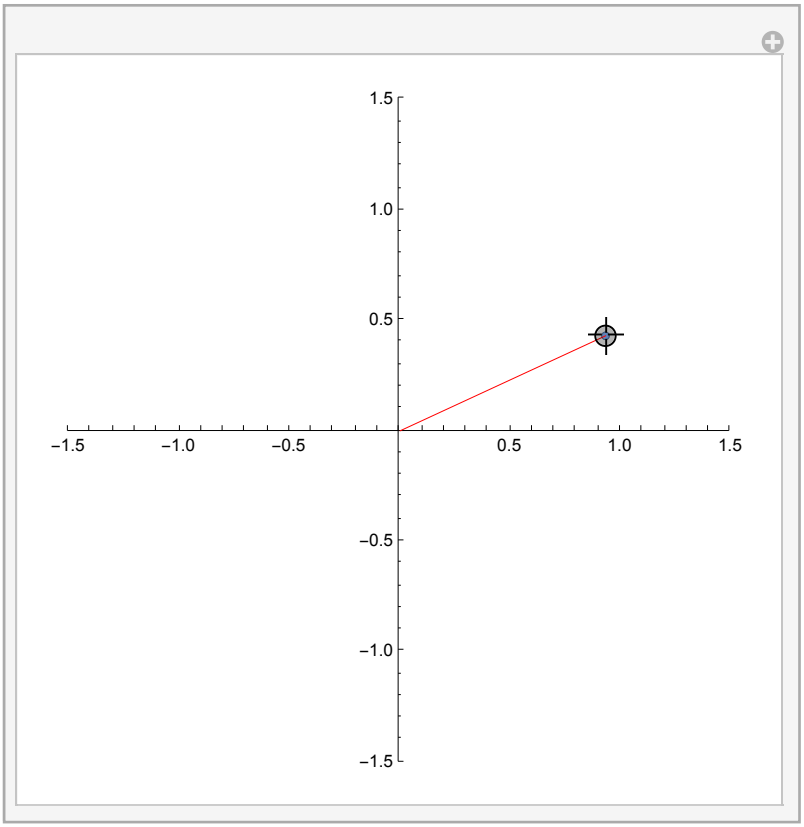
ПРИМЕР. Динамическое изменение начальной точки z0 с помощью объекта Locator. Задается параметр функции Manipulate вида
{{точка, нач_значение_точки}, Locator}

In[288]:=
```
Manipulate[
 ListPlot[
  {p},
  AspectRatio → 1, PlotRange → {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}},
  Epilog → {Red, Line[{{0, 0}, p}]}
 ],
 {{p, {Re[z0], Im[z0]}}, Locator}
]
```

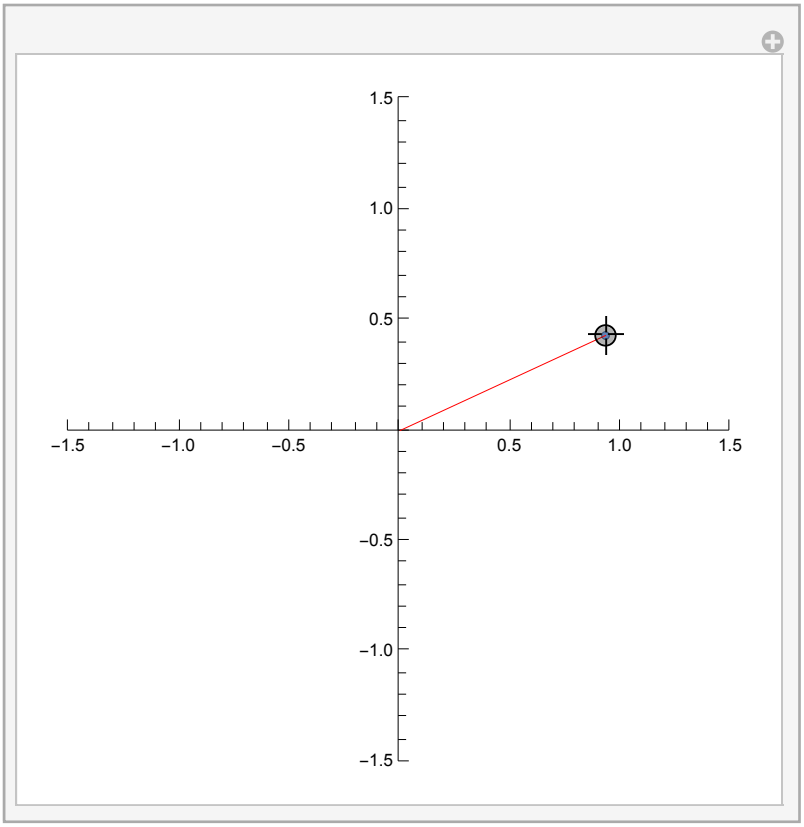
Out[288]=



In[289]:=



Out[289]=



Положение отмеченной точки можно менять, поставить мышку на крестик и при нажатой кнопке перемещать положение мышки

Объединение вместе изменяемого начального значения z0 и всех пяти комплексных корней

In[290]:=
```
Manipulate[
 z00 = p[[1]] + ⅈ p[[2]];
 resz0 = Solve[z^5 == z00, z];
 tab = Table[{Re[z[n]], Im[z[n]]}, {n, 1, 5}];
 ListPlot[tab, AspectRatio → 1,
  PlotRange → {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}}, Epilog → {Green,
    Line[{centr, tab[[1]]}],
    Line[{centr, tab[[2]]}],
    Line[{centr, tab[[3]]}],
    Line[{centr, tab[[4]]}],
    Line[{centr, tab[[5]]}],
    Red, Line[{{0, 0}, p}],
    Blue, Circle[{0, 0}, Abs[z[1]]]}],
 {{p, {Re[z0], Im[z0]}}, Locator}]
```

Out[290]=