Лабораторная работа на тему: **«Решение двухточечных краевых задач методом стрельбы»**.

Цель работы: научиться решать краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений методом стрельбы с применением пакетов прикладных программ Mathematica и Maple.

Теоретическое введение.

На практике часто возникает необходимость решения двухточечных краевых задач (когда дополнительные условия на решение налагаются в точках на концах отрезка). Такие задачи, например, возникают при рассмотрении стационарных уравнений типа «реакция-диффузия» или стационарных уравнений теплопроводности.

Наиболее развитые системы имеют опции для решения двухточечных краевых задач, но их возможности часто ограничены. Например, система Mathematica решает не все типы линейных задач и не решает задачи нелинейные.

Рассмотрим один из распространенных способов решения двухточечных краевых задач, в том числе нелинейных, называемый методом стрельбы.

Будем рассматривать данный метод на примере решения уравнения второго порядка, предварительно представив его в виде системы уравнений первого порядка. Это рассмотрение является достаточно общим, поскольку уравнение любого порядка можно свести к системе уравнений первого порядка. Итак, пусть дана краевая задача

$$y'' + x^2 y + 2 = 0; \qquad (1)$$
$$y(-1) = 0; \; y(1) = 0. \qquad (1')$$

Представим данную задачу в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = f, \\ f' = -2 - x^2 y, \\ y(-1) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

Далее сведем данную задачу к задаче Коши, введя параметр α, равный неизвестному значению f (-1). Для того, чтобы найти α, при котором выполнено граничное условие в точке x = 1, добавим еще два уравнения, продифференцировав исходную систему по параметру α. Для этого введем еще две переменные $p = \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$. В итоге получим систему ОДУ:

$$
\begin{cases}
y' = f, \\
f' = -2 - x^2 y, \\
p' = q, \\
q' = -x^2 p, \\
y(1) = 0, \quad f(1) = \alpha, \\
p(1) = 1, \quad v(1) = 0.
\end{cases}
\qquad (3)
$$

Решив данную систему с фиксированным параметром α, мы получим значение $y(2)$, вообще говоря, отличающееся от истинного. Для корректировки параметра α рассчитываем его новое значение по формуле

$$
\alpha_{new} = \alpha_{old} - \frac{y(1)_{calc} - y(1)}{f(1)} \ .
$$

Здесь $y(1)_{calc}$ - полученное в результате расчета значение $y(1)$. Затем снова решаем систему (3) и т.д. Процесс расчета продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие $|\alpha_{new} - \alpha_{old}| \le \varepsilon$, где ε - заранее заданная точность расчета.

В файле **Example_1** показано решение задачи (1)-(1’) в системе Mathematica.

При решении задачи методом стрельбы краевая задача сводится к решению задачи Коши, причем недостающие начальные значения задаются вектором параметров, значения которых и находятся «пристрелкой».

<u>Задание.</u>

Используя пакеты прикладных программ Mathematica и Maple, решить краевые задачи на заданном отрезке. Вывести график полученного решения.

1. $x^2y'' - xy' = 3x^3$; $y(1) = 2$, $y(2) = 9$, [1, 2] .
2. $x^2y'' + xy' - y = x^2$; $y(1) = 1.333$, $y'(3) = 3$, [1, 3] .
3. $y'' + xy' + y = 2x$; $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, [0, 1] .
4. $y'' + y\,\mathrm{ch}x = 0$; $y(0) = 0$, $y(2.2) = 1$, [0, 2.2] .
5. $y'' + (x - 1)y' + 3.125y = 4x$; $y(0) = 1$, $y(1) = 1.368$, [0, 1] .
6. $x^2y'' - 2y = 0$; $y(1)-2y'(1) = 0$, $y(2) = 4.5$, [1, 2] .
7. $y'' + x^2y = -2$; $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$, [-1, 1] .
8. $-y'' + x^2y = (\pi^2/4 + x^2)\cos(\pi x/2)$; $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, [0, 1] .