Выбор частоты дискретизации для полосовых сигналов. Как уже обсуждалось, спектр сигнала АИМ содержит спектр исходного сигнала в полосе от нижней частоты ($f_н$) до верхней ($f_в$) и боковые полосы около всех гармоник частоты дискретизации. При этом частота дискретизации $f_д$ должна быть выбрана так, чтобы боковые полосы частот не пересекались со спектром исходного сигнала. Выполнение этого условия позволит обеспечить отсутствие помех дискретизации при восстановлении исходного непрерывного сигнала с помощью фильтра. Если учитывать только верхнюю частоту $f_в$ в спектре сигнала, то правило выбора $f_д$ задается неравенством $f_д \geq 2f_в$, которое следует из теоремы Котельникова. В данном случае спектр дискретного сигнала будет иметь вид как на рис. 1. Следует обратить внимание на то, что все боковые полосы частот расположены справа от спектра исходного сигнала, а поэтому восстановление может быть выполнено с помощью ФНЧ. Кроме того, как видно из рисунка, условие отсутствия помех дискретизации, которое задается неравенством $f_д - f_в \geq f_в$, совпадает с правилом выбора $f_д$ по Котельникову ($f_д \geq 2f_в$).

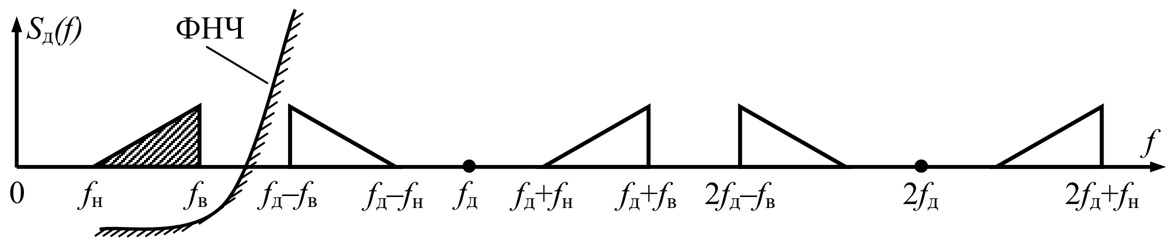

Рис. 1. Спектр дискретного сигнала

В случае, когда спектр исходного сигнала таков, что $f_Н/(f_В - f_Н) \geq 1$, частота дискретизации может быть выбрана меньше, чем по Котельникову. Это объясняется тем, что при выполнении условия $f_Н/(f_В - f_Н) \geq 1$ часть боковых, каждая из которых занимает полосу шириной $(f_В - f_Н)$, может быть размещена в полосе от 0 до $f_н$, т.е. слева от спектра исходного сигнала, а остальные боковые – справа (рис. 2).

Данное обстоятельство как раз и позволяет уменьшить значение $f_Д$. При этом, восстановление исходного непрерывного сигнала осуществляется с помощью полосового фильтра (ПФ), а условие отсутствия помех дискретизации, естественно, остается прежним, т.е. боковые полосы частот не должны пересекаться со спектром исходного сигнала.

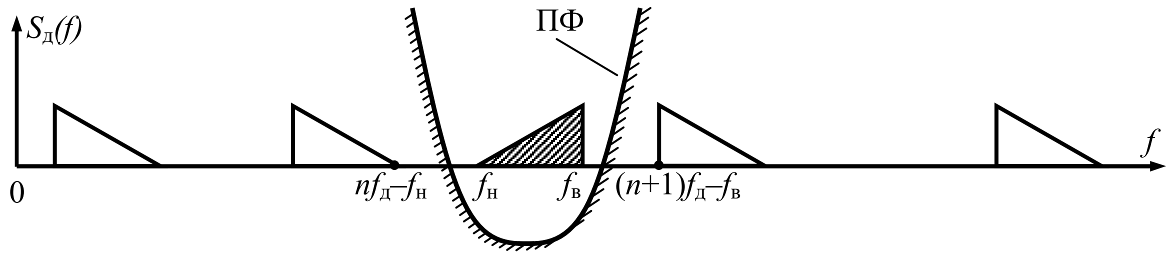

Рис. 2 Спектр дискретного сигнала

Формализуем условие выбора частоты дискретизации. Итак, пусть ближайшая боковая полоса частот слева от спектра исходного сигнала получена как нижняя боковая около n-й гармоники частоты дискретизации (рис. 2), тогда ближайшая боковая справа будет нижней боковой около (n+1)-й гармоники $f_Д$ (верхние боковые на рис.2 отсутствуют, поскольку все они, как будет показано далее, располагаются выше частоты $f_В$ и на выбор частоты дискретизации не влияют). В этом случае условия отсутствия искажений дискретизации можно записать в виде неравенств

$$nf_Д - f_Н \le f_Н\,, \qquad (n+1)f_Д - f_В \ge f_В\,.$$

Преобразуя эти неравенства, получим

$$f_Д \le \frac{2f_Н}{n}\,, \qquad f_Д \ge \frac{2f_В}{n+1}\,,$$

или

$$\frac{2f_В}{n+1} \le f_Д \le \frac{2f_Н}{n}\,. \qquad (1)$$

Если выполняется неравенство (1), то

$$\frac{2f_В}{n+1} \le \frac{2f_Н}{n}\,,$$

откуда
$$n \le \frac{f_{\text{н}}}{f_{\text{в}} - f_{\text{н}}}. \qquad (2)$$

Так как *n* – номер гармоники, то *n* – неотрицательное, целое число, т.е. $n \ge 0$, $n \in \mathrm{Z}$.

Переписывая совместно неравенства (1) и (2), получаем условие выбора частоты дискретизации
$$\begin{gathered} \frac{2f_{\text{в}}}{n+1} \le f_{\text{д}} \le \frac{2f_{\text{н}}}{n}, \\ n \le \frac{f_{\text{н}}}{f_{\text{в}} - f_{\text{н}}},\quad n \ge 0, n \in \mathrm{Z}. \end{gathered} \qquad (3)$$

Нетрудно видеть, что значение частоты дискретизации, получаемое из (3), в (*n*+1) раз меньше, чем по Котельникову, а условие $f_{\text{д}} \ge 2f_{\text{в}}$ является частным случаем (3) при $n = 0$.

Рассмотрим примеры. Пусть дискретизации подвергается речевой сигнал с полосой 0,3 – 3,4 кГц. Тогда $n \le \frac{f_{\text{н}}}{f_{\text{в}} - f_{\text{н}}} = \frac{0{,}3}{3{,}4 - 0{,}3} = \frac{0{,}3}{3{,}1}$. Поскольку $n < 1$, то единственное значение *n*, удовлетворяющее данному неравенству,– это $n = 0$. Подставляя $n = 0$ в (3), приходим к результату $\frac{2f_{\text{в}}}{0+1} \le f_{\text{д}} \le \frac{2f_{\text{н}}}{0}$, или $2f_{\text{в}} \le f_{\text{д}} \le \infty$. Тогда окончательно неравенство принимает вид $f_{\text{д}} \ge 2f_{\text{в}}$ и полностью совпадает с условием выбора частоты дискретизации по Котельникову.

Определим теперь частоту дискретизации сигнала стандартной первичной группы с полосой 60 – 108 кГц. В соответствии с (3) $n \le \frac{f_{\text{н}}}{f_{\text{в}} - f_{\text{н}}} = \frac{60}{108 - 60} = \frac{60}{48} = 1{,}25$. Неравенству $n < 1{,}25$ удовлетворяют два значения *n*: $n = 0$; $n = 1$. При $n = 0$ $f_{\text{д}} \ge 2f_{\text{в}} = 2 \cdot 108\ \text{кГц} = 216\ \text{кГц}$, а при $n = 1$ $f_{\text{в}} \le f_{\text{д}} \le 2f_{\text{н}}$, или $108\ \text{кГц} \le f_{\text{д}} \le 120\ \text{кГц}$. Таким образом, в данном случае, существуют два диапазона допустимых значений частоты дискретизации: первый – от 108 до 120 кГц; второй – от 216 кГц и выше.

Используя условие (3), определим теоретический минимум частоты дискретизации $f_{Д\min}$ сигнала с полосой частот $f_Н \div f_В$. Исходя из первого неравенства в (3), можно утверждать, что $f_Д = f_{Д\min}$ при $n = n_{\max}$. В свою очередь, n будет принимать максимальное значение, только если $\frac{f_Н}{f_В - f_Н}$ – целое число. Тогда $n_{\max} = \frac{f_Н}{f_В - f_Н}$, и $\frac{2f_В}{n_{\max}+1} \le f_{Д\min} \le \frac{2f_Н}{n_{\max}}$. Подставим в последнее неравенство значение $n_{\max}$, и после несложных преобразований получим $2(f_В - f_Н) \le f_{Д\min} \le 2(f_В - f_Н)$, откуда $f_{Д\min} = 2(f_В - f_Н) = 2\Delta f$. Таким образом, значение частоты дискретизации не может быть меньше удвоенной полосы частот, занимаемой сигналом.

Теперь покажем, что все верхние боковые располагаются выше частоты $f_В$, и при выборе частоты дискретизации их можно не учитывать. Условие того, что верхняя боковая полоса около произвольной n-й гармоники частоты дискретизации находится выше частоты $f_В$ и не пересекается со спектром исходного сигнала, можно записать в виде $nf_Д + f_Н \ge f_В$. Тогда $f_Д \ge \frac{f_В - f_Н}{n} = \frac{\Delta f}{n}$, и поскольку $f_Д \ge 2\Delta f$, то полученное неравенство справедливо при любом $n \ne 0$, а следовательно, все верхние боковые полосы частот будут располагаться выше частоты $f_В$.

Неравенства (3) были получены без учета полосы расфильтровки между спектром исходного сигнала и ближайшими к нему боковыми полосами частот. Если потребовать, чтобы полоса расфильтровки была бы не меньше некоторой величины $\Delta f_Ф$ (рис. 3), то условие выбора частоты дискретизации принимает вид

$$\frac{2f_{\text{В}} + \Delta f_{\Phi}}{n+1} \le f_{\text{Д}} \le \frac{|2f_{\text{Н}} - \Delta f_{\Phi}|}{n}\ ,$$
$$n \le \frac{|2f_{\text{Н}} - \Delta f_{\Phi}|}{2\left(f_{\text{В}} - f_{\text{Н}} + \Delta f_{\Phi}\right)},\quad n \ge 0\,, n \in \mathrm{Z}\ . \tag{4}$$

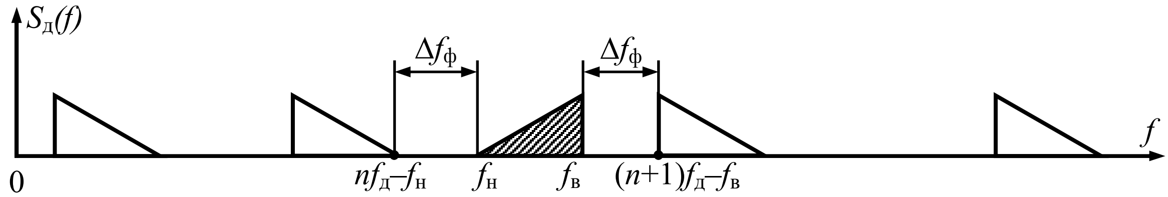

Рис. 3. Спектр дискретного сигнала

Можно показать, что если $2f_{\text{Н}} - \Delta f_{\Phi} \le 0$, то $n = 0$, и первое неравенство в (4) совпадет с правилом выбора $f_{\text{Д}}$ по Котельникову, но уже с учетом полосы расфильтровки: $f_{\text{Д}} \ge 2f_{\text{В}} + \Delta f_{\Phi}$.