Оглавление

Предисловие 5
Введение 6
Глава 1. Управление и информатика 8
1.1. Свойства и классификация видов управления 8
1.2 Информатика. Задачи, решаемые в управлении 11
1.3 Сложность управления и роль вычислительных машин в управлении 13
1.4. Структуры управления и их совершенствование 15
1.5. Устойчивость управления 22
Глава 2. Цель управления 24
2.1 Определение и классификация целей 24
2.2. Алгебра целей 27
2.3. Задачи управления АСЦД 29
Глава 3. Моделирование управляемых объектов 30
3.1 Модель. Определение и классификация моделей 30
3.2 Аналитические модели 32
3.3 Модели систем массового обслуживания 41
3.4 Сетевые модели 50
3.5 Имитационное моделирование 59
Глава 4. Оценивание 64
4.1 Постановка задачи оценивания. Основные определения 64
4.2. Виды функции потерь. Критерии 66
4.3. Оптимальная фильтрация 69
4.4. Решение уравнения Колмогорова-Винера 72
4.5. Фильтр Калмана-Бьюси-Стратоновича 72
Глава 5. Принятие решения. Основные положения 74
5.1. Постановка задачи 74
5.2 Информационное обеспечение принятия решений 76
5.3. Формирование цели на этапе информационного обеспечения 80
5.4. Формирование множества альтернатив 82
5.5 Критерии эффективности 84
Глава 6. Принятие решений 88
6.1. Принятие решений в условиях полной априорной определенности 88
6.1.1 Линейное программирование 88
6.1.2 Нелинейное программирование 93
6.1.3 Динамическое программирование 101
6.2. Статистические задачи принятия решений 104
6.2.1 Стохастическое программирование 105
6.2.2 Конечные задачи стохастических решений 106
6.2.3. Критерии оптимальности принятия стохастических решений 109
6.3 Принятие решений в конфликтной ситуации 111
6.3.1 Основные определения 111

6.3.2 Классификация игр 112
6.3.3 Матричные игры. Цена игры. Игры с седловой точкой 113
6.3.4. Игры без седловой точки. Игры со смешанными стратегиями 115
6.3.5 Решение основной задачи теории игр в смешанных стратегиях 117
6.3.6. Статистические игры 120
6.4 Эвристические процедуры принятия решений 123
6.4.1. Основные понятия и определения 123
6.4.2 Экспертиза. Принципы. Этапы 124
6.4.3. Подготовка экспертизы 125
6.4.4. Проведение экспертизы 128
6.4.5 Принципы обработки результатов экспертизы 130
Глава 7. Реализация управления 135
7.1. Концептуальная модель реализации управления 135
7.2 Планирование работ по реализации управления 137
7.3. Реализация управления 138

Предисловие

Предлагаемый читателю учебник «Основы теории управления» предназначен для слушателей и курсантов Военного университета связи инженерных факультетов. Он написан авторами Кириком Д.И. и Колесниковым А.А. в соответствии с ГОСТ МО РФ Регистрационный номер 224 тех/дс и рассчитан для обеспечения курса объемом в 120 часов (68 аудиторных и 52 самостоятельной работы). Авторы старались придерживаться четких принятых определений и не перегружать материал математическими доказательствами, сохраняя необходимые количественные соотношения и фундаментальные понятия теории управления. Авторы считают, что учебник будет полезен и для адъюнктов университета, а также для студентов других ВУЗов.

Авторы совместно работали над всеми разделами учебника, поэтому некоторые из них являются оригинальными и не загружены формальными нагромождениями. Учебник содержит общие подходы к проблеме управления, а не узковедомственные, характерные для управления конкретными объектами. Авторы с благодарностью примут любые замечания по содержанию учебника.

Введение

Управление есть весьма привычное понятие для человека, и кажется даже самым обыденным. В тоже время управление это самое загадочное и таинственное явление окружающего нас бесконечно сложного мира. Некоторые авторы понимают под управлением борьбу с хаосом естественной природы и установление некоторого порядка, но тогда необходимо определить (признать): что такое хаос и что такое управление.

Если под хаосом понимать множество невзаимодействующих друг с другом объектов произвольной природы, то такой хаос вряд ли способен породить порядок.

Окружающий нас мир является бесконечным множеством взаимодействующих между собою частиц и объектов, способных изменять свое состояние. Причем часть из них сгруппировано в пространстве настолько плотно, что время изменения состояния на несколько порядков больше, чем время распространения возмущения по связям между частицами. А это уже система. В такой системе возможно появление памяти и разума.

Под управлением в самом широком смысле принято понимать воздействие субъекта на объект в надежде получить определенный результат [10].

Под объектом [лат. objectum - предмет] понимается то, что существует независимо от нашего сознания и является предметом познания, практического воздействия [10].

Более сложным является понятие субъекта. Здесь важно заметить, что субъект есть представитель из множества подобных способный надеяться, а, следовательно, мыслить и действовать.

Самое общее определение управления мы несколько сузим и конкретизируем. Для этого определим сначала такое понятие как СИСТЕМА.

Под системой принято понимать объективное единство закономерно связанных друг с другом предметов и явлений (элементов) в природе и обществе.

Из определений следует, что система может быть объектом и субъектом управления, но объект не всегда является системой.

В дальнейшем под управлением будем понимать воздействие управляющей системы на управляемую систему в надежде получить определенный результат.

Управляемая система может обладать разумом. Например, союзное государство, управляемое федеративным органом, крупное производство, управляемое специальным органом, воинское соединение управляемое командиром и штабом и т.д. и т.п. Но может и не обладать разумом, например, управление природными ресурсами, управление техникой (самолетом, танком и т.д.).

Если управляемая система представляет собою совокупность людей (ансамбль, партия и т.д. и т.п.), то говорят не об управлении, а о руководстве и руководящей системе.

Управляющая система, как и руководящая, обязательно обладает разумом, т.е. способностью запоминать, логически мыслить, делать выводы, принимать

решение. Разум присущ человеку, по-видимому, даже большинству живых организмов. Большая часть человечества в настоящее время считает, что существует сверхразум, присущий божествам (Всевышний, Аллах, Будда и т.д. и т.п.), который и руководит всем (все в руках божьих), который ВСЕ создал (создатель) и который все знает. Нет смысла здесь обсуждать утверждения ветхого завета, где говорится, как Всевышний строил мир, в какой день, что это наивная модель мира, принадлежащая видимо шумерам, жившим около 15000 лет назад. Но один момент нуждается в научном исследовании. А именно, раз вселенная есть громадная система, содержащая множество большой мощности различных элементов, связанных между собою гравитационными и электромагнитными полями, то возможен и сверх разум, основанный на таких элементах как галактики. Первый ответ цивилизации сделала. Невозможен!!! Так как время распространения света между галактиками значительно превышает время перехода галактики из одного состояния (стационарный покой) к другому (возбужденное состояние). Последнее, однако, не означает, что в этой проблеме поставлена окончательно точка. Дело в том, что в настоящее время появляются работы, утверждающие, что существуют процессы, которые распространяются со скоростями в десятки тысяч раз превышающими скорость света (торсионные поля). Если это будет доказано, то придется признать возможность иного сверх разума. А поскольку управление является основной функцией проявления разума, то предположение управляемости наблюдаемого нами мира не является абсолютным абсурдом.

Управление принимает чрезвычайно разнообразные формы, в зависимости от вида управляющей и управляемой систем: одно дело управление государством, другое дело управление армией в наступлении, одно дело управление диктаторское и совершенно другое управление демократическое и т.д. Несмотря на многообразие форм управления, существует и много общего, присущего всякому управлению. Теория управления есть наука, изучающая общие принципы оптимального управления.

Наука (с греческого – поиск истины) достигает своих результатов:

1. На основе наблюдений и обобщений.
2. Проведением эксперимента.
3. Путем дедуктивных рассуждений (от общего к частному).
4. На основе индукции (математической или общей) – от частого к общему.
5. По эвристике (догадка, озарение, интуиция).

В управлении все эти приемы получают широкое применение, и даже не всегда обосновано, например, широко распространено до сих пор управление по интуиции, на основе предыдущего опыта, хотя уже доказано, что такое управление не является оптимальным. Примером может служить перестройка и ускорение, проведенные в СССР с такой решимостью и блеском.

Глава 1. Управление и информатика

1.1. Свойства и классификация видов управления

Объект управления в самом общем случае представляется как большая динамическая система, то есть система, имеющая настолько много элементов, что переборными методами решение задачи невозможно. Большая система является открытой. То есть она находится под воздействием окружающей среды и сама действует на эту среду. Как правило, большая система является стохастической, т.е. некоторые ее параметры случайны. Наконец считается, что большая система обладает свойством имирджентности, т.е. система в целом обладает некоторыми свойствами, которые не являются простой суммой свойств ее элементов.

Система задана, если заданы:

1. Множество допустимых воздействий на систему $X = \{x_i\}$ $i = \overline{1,m}$
2. Множество возможных реакций $Y = \{y_l\}$ $l = \overline{1,k}$
3. Множество внутренних состояний системы $S = \{s_j\}$ $j = \overline{1,n}$
4. Оператор F, связывающий реакцию с состоянием и внешним воздействием.

Под состоянием динамической системы $\vec{S}(t)$ принято понимать совокупность характеристик, знание которых на момент времени t_0 достаточно, чтобы по известному воздействию $\vec{x}(t)$ определить реакцию $\vec{y}(t)$ для любого момента времени $t \geq t_0$. (Для $t < t_0$ решение задачи не гарантируется). В векторной форме уравнение динамической системы принимает вид:

$$\vec{y}(t) = F(\vec{x}(t), \vec{s}(t), t), \tag{1.1}$$

где $\vec{x}(t)$, $\vec{s}(t)$, $\vec{y}(t)$ есть вектор–столбцы размерностью m, n и k соответственно.

Система в состоянии $\vec{s}_0$ является <u>управляемой</u>, если для любого состояния $\vec{s} \in S$, существует воздействие $\vec{x} \in X$, переводящее систему из состояния $\vec{s}_0$ в состояние $\vec{s}$.Система является абсолютно управляемой, если она управляема в любом из допустимых состояний $\vec{s} \in S$. Управление имеет смысл только для систем управляемых.

Важной характеристикой системы является чувствительность к управлению. Под чувствительностью системы к управлению понимается минимальный уровень управляющего воздействия, обеспечивающего перевод системы из любого состояния в любое допустимое.

Чувствительность управления может измеряться в децибелах

$$\Theta_{дб} = 10 log \frac{P_x}{P_0},$$

где P_x — минимальная мощность управляющего воздействия, гарантирующее обеспечения управления, P_0 – мощность нулевого уровня, которая особо оговаривается.

Таким образом, управление системой представляется, как воздействие на нее с надеждой перевести в нужное состояние. Возникает принципиальный вопрос: что необходимо обеспечить, чтобы система оставалась в фиксированном состоянии, когда имеют место некоторые случайные воздействия на систему? Ответ на этот вопрос зависит от свойств системы, в частности, от ее устойчивости в этом состоянии.

Система называется устойчивой в состоянии $\vec{s}_0$, если при любом воздействии на вход системы $\vec{x}(t)$

$$\vec{x}(t) = \begin{cases} \vec{x}(t), & t \in [t_1; t_2] \\ 0, & t \notin [t_1; t_2] \end{cases}$$

за некоторый конечный промежуток времени, система, в конечном итоге, при $t \to \infty$ возвращается в начальное состояние:

$$\lim_{t \to \infty} s(x(t), t) = s_0 .$$

Систему называют экспоненциально устойчивой, если:

$$s(x(t), t) = Cl^{-\alpha t} \text{ при } t > t_2 ,$$

где C и α — положительные постоянные величины, I — некоторая постоянная величина.

Экспоненциально устойчивая система является абсолютно устойчивой. Обратное не всегда верно. Абсолютная устойчивость весьма жесткое требование и поэтому на практике чаще пользуются определением устойчивости в смысле А.М. Ляпунова.

Система в состоянии $\vec{s}_0$ является устойчивой в смысле А.М. Ляпунова, если по любому воздействию $\vec{x}$ из замкнутого подмножество возможных воздействий $\Delta X : \vec{x} \in \Delta X$ найдется такое подпространство в области состояний $\Delta S : \vec{s}_0 \in \Delta S$, что если $\vec{x}$ не выходит из ΔX, то состояние не выйдет за пределы ΔS .

Будем в дальнейшем под управляемым комплексом понимать совокупность управляемой и управляющей систем. На рис.1.1 изображена самая общая функциональная схема управляющего комплекса. Как следует из рисунка, управляющая система (в общем случае) контролирует реакцию управляемой систем, на основе анализа реакции, как будет показано ниже, делается суждение о том, в каком состоянии находится система и вырабатывается воздействие на систему $x(t)$, переводящее систему в нужное состояние.

Поскольку в общем случае управляемый комплекс представляет собою систему с обратной связью, то очень важно, чтобы управляемая система обладала не только свойством устойчивости, но и наблюдаемостью.

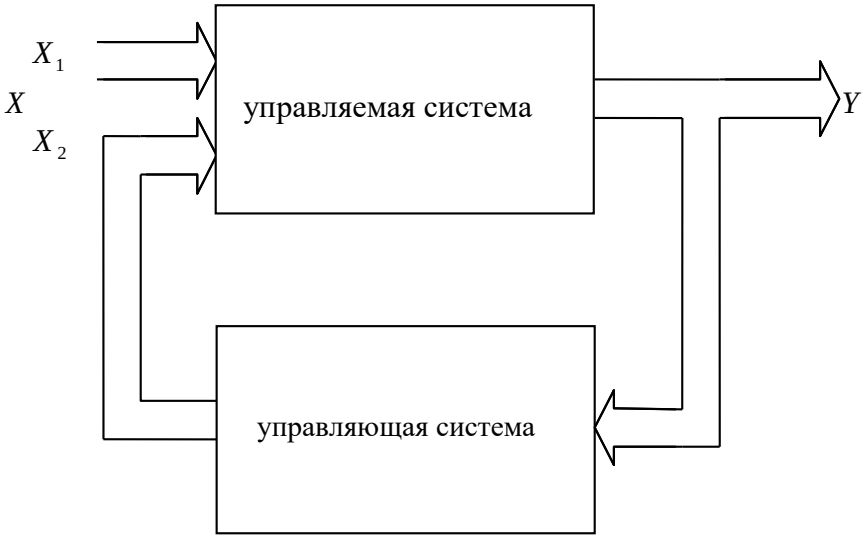

Рис.1.1

Система называется наблюдаемой, если по известной реакции $\vec{y}(t)$ $t \in [t_1, t_2]$ можно определить состояние $\vec{s}(t)$ для $t \in [t_1, t_2]$, иначе говоря, в наблюдаемой системе векторное уравнение (1.1) разрешимо относительно $\vec{s}(t)$.

В управляющей системе решается целый ряд серьезных задач. Если для решения этих задач используются ЭВМ различных типов, то говорят, что управляемая система имеет автоматизированное управление (АСУ). Ярким примером АСУ является управление крупным предприятием, где информационное обеспечение возложено на ЭВМ. Даже управление автомобилем является автоматизированным. Действительно, множество приборов (скорость, заправка горючим, давление масла, температура охлаждающей жидкости и др.), представляющих информационное обеспечение водителю, являются автоматизированным.

Управляемые комплексы с полностью автоматизированными управляющими системами называют комплексами с автоматическим регулированием. Например, таковым является радиоприемник с автоматизированной настройкой и автоматической регулировкой усиления по промежуточной частоте.

Комплексы без обратной связи с автоматическим управлением называют комплексами с программным управлением. Таковым является, например, современная стиральная машина.

Наконец управление, в котором системным результатом (целью) является сохранение определенного состояния управляемой системы, называют стабилизацией. Так сохранение курса движения парусной яхты есть стабилизация. По-

нятно, что стабилизация может быть автоматизированной и даже автоматической. Например, полет самолета на автопилоте есть автоматическое регулирование. На рис.1.2 представлена схема классификации видов управления. Во всех видах управления различными методами и приемами обязательно решается определенный класс задач, и управление невозможно или только представляется управлением, если хотя бы одна из этих задач не разрешена. Решение этих задач относится к области знаний называемой информатикой.

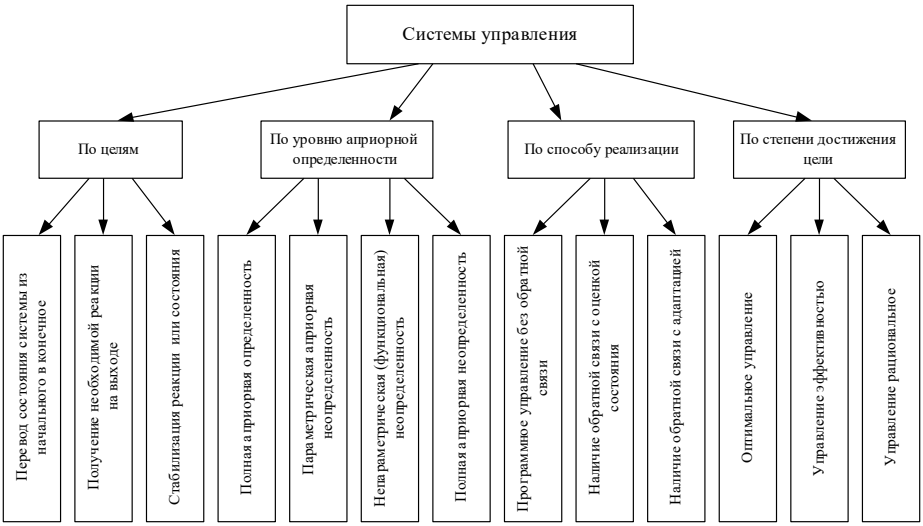

Рис. 1.2

1.2 Информатика. Задачи, решаемые в управлении

Научная дисциплина, изучающая закономерности получения, сбора, хранения, передачи, преобразования и применения информации в производственной, научной общественно-политической и культурной деятельности называется информатикой (лат. information – разъяснение изложение. informate – изображать, составлять понятие о чем-либо) [10].

Информатика не разрабатывает методов логической переработки информации, но при исследовании частных задач использует методы математики и математической логики. Вскрытие задач, решение которых обязательно при управлении относится к информатике. Если задачи поставлены, установлена очередность их решения, то дальнейшее есть дело техники.

Естественно предположить, что управление может существовать, только если объект управления существует и его состояние, а иногда и его структура, может быть изменены.

Первой задачей управления является проблема формирования ожидаемого результата управления, т.е. формирование цели управления. Следует заметить, что цель управления может появиться у субъекта управления раньше, чем появится объект управления. Ведь цель может появиться, как результат управления системой находящейся на более высоком уровне иерархии. Тогда объект управления может синтезироваться уже с намерением достижения этой цели. Так цель человечества посетить поверхность Луны появилась раньше, чем космический корабль, на котором люди отправились на Луну и достигли ее путем автоматизированного управления кораблем. Для теории управления важен сам факт существования управляемой системы и цели управляющей системы.

Второй задачей, решение которой должно быть обеспечено в управляющей системе, является построение модели управляемой системы. Модель управляемого объекта – достоверная информация необходимая для эффективного решения задачи управления. Решение этой задачи является прерогативой информатики, как и решение следующей третьей задачи. Человечество в своей истории страдало от некомпетентности руководителей значительно больше, чем от стихийных бедствий.

Третьей задачей, решение которой необходимо, является оценивание состояния в котором находится управляемая система в начальный момент времени. Если это состояние соответствует целевому, то управление вырождается в стабилизацию. Важность этой задачи подтверждается известным изречением Конфуция: «Если неправильно начал, то мало надежды на правильность завершения». К сожалению, об этом часто забывают, и современность дает этому массу примеров, достаточно проследить результаты реформ проводимых в России.

Четвертой задачей управления является отыскание множества возможных воздействий на управляемую систему, которые позволяют достичь цели. Если это множество пусто, то цель недостижима. Если оно состоит из одного элемента, то остается его реализовать. В случае, когда возможных управляющих воздействий, ведущих к достижению цели, более одного $\{\vec{x}_{bi}\}$ $i=\overline{1,p}$ $p>1$, то решается следующая задача.

Пятая задача – задача оценки эффективности управления. Понятие эффективности впервые было введено академиком Колмогоровым в его статье об эффективности стрельбы. Он определил эффективность, как степень достижения цели. В настоящее время эту эффективность принято называть эффективностью первого рода. Под эффективностью второго рода понимают эффективность управления, т.е. качество выбранного метода достижения цели $J(x_{bi})$.

Шестая задача – это задача принятия решения, т.е. задача выбора управления из множества управлений $x_{b0}(t)\in\{x_{bi}(t)\},\quad i=\overline{1,p}$, обеспечивающих достижение цели такого, для которого эффективность максимальна. $x_{b0}(t): J(x_{b0}(t))=max$. Здесь информатика широко использует математические методы.

Седьмая задача целиком относится к области информатики. В ней оценивается сложность управления, а, следовательно, и ресурс необходимый для реализации оптимального, с точки зрения эффективности, управления. Если управление несложное, то оно реализуется, как правило, по интуиции. Это обыденное дело. Например, управление машиной при езде по городу. Если такое управление окажется не оптимальным, то это нестрашно. И совсем другая обстановка имеет место при сложном управлении, когда отклонение от оптимальности грозит существенным потерями и управление по интуиции становится недопустимым. Оценка сложности управления позволяет оценить объем ресурсов, необходимых для реализации управления.

Восьмая задача – задача реализации. Очень часто эта задача недооценивается, что ведет к серьезным потерям. Реализация управления должна быть обеспечена организационно-техническими средствами. Решение этой задачи определяет структуру управляющей системы, распределение ответственности и многое другое.

Перечисленные задачи далеко не все исчерпывающе решены в теории управления, во многих случаях приходится ограничиваться лишь рекомендациями. Теория управления не является завершенным разделом науки, и каждый желающий может найти себе, в этой области науки, проблему по силам и по увлечению! Отметим, что приведенные выше задачи не обязательно решаются в приведенной последовательности. Например, сложность управления системой может быть оценена сразу же, как только будет получена удовлетворительная модель управляемой системы. Некоторые задачи могут решаться параллельно, например, задача реализации и задача принятия решений и др.

1.3 Сложность управления и роль вычислительных машин в управлении

Человеческое общество в процессе своего развития ставит перед собой все более и более грандиозные проблемы, решение которых возможно лишь при объединении усилий и средств миллионов людей. Последнее предъявляет все более и более строгие требования к качеству управления, так как ошибки управления дорого обходятся обществу.

Следы прошлых цивилизаций поражают воображение современного человека и не только своим величием, но еще более последствиями несовершенства управления. Технический процесс ставит перед человечеством все более и более грандиозные задачи, решение которых предъявляет все более и более жесткие требования к управлению. Усложнение управляемых систем требует усложнения и управляющих. Все больший процент человеческого общества включается в аппарат управляющих систем. С усложнением управляющих систем растет количество информации, обработка которой необходима для управления ими.

В результате научно-технического прогресса появляются все новые и новые объекты управления, растет количество связей между элементами управляемых систем. Следуя В.М.Глушкову, обозначим через «n» число людей, занятых в производстве, а через «m» число единиц оборудования, тогда суммарная информационная сложность управления G таким производством пропорциональна квадрату суммы $(m+n)$

$$G = C(m+n)^2 ,$$

где C — коэффициент пропорциональности, определяемый спецификой производства.

Пропускную способность человека при решении задач управления определим как A — арифметических и логических операций, выполняемых в единицу времени [13]. Тогда суммарная возможность переработки информации коллективом из «n» человек составит $n\,A$. Если положить, что население на Земле составляет N человек, то можно указать, следуя В.М.Глушкову, три критических точки (первый и второй и третий информационные барьеры), которые проходит в своем развитии экономическая система.

Первая критическая точка соответствует сложности управляемой системы, когда управление не может быть реализовано одним человеком, т.е.

$$C(m+n)^2 \geq A .$$

Вторая критическая точка наступит тогда, когда все человечество, незадействованное в производстве, занимается управлением

$$C(m+n)^2 = A(N-n) .$$

Дальнейшее усложнение экономической системы (увеличение m) приведет к тому, что число людей, занятых в управлении будет увеличиваться за счет уменьшения людей, занятых в производстве. Наконец, можно отметить и третий барьер в росте сложности народного хозяйства. Этот барьер соответствует такой сложности, когда все человечество планеты не сможет управлять экономической системой, при этом

$$Cm^2 = AN$$

Первый информационный барьер был преодолен в глубокой древности. В настоящее время мы наблюдаем все признаки приближения ко второму барьеру. Действительно, распад Советского Союза и появление на его территории пятнадцати независимых государств, проведение всевозможных реформ на порядок увеличило число людей, занятых в управлении. Причем, процесс этот продолжается. Растет количество ВУЗов, направленных на подготовку специалистов управления и сокращается число технических ВУЗов. Общество стремительно движется к третьему барьеру. Какие же пути можно наметить для замедления этого процесса. Их можно указать несколько.

Во-первых, это автоматизация процессов управления на основе методов, разрабатываемых в информатике. Внедрение ЭВМ в управление уже в настоящее

время столь значительно, что без них не обходятся даже в малых предприятиях и управление без автоматизации уже не мыслимо.

Во-вторых, введение товарно-денежных отношений, когда имеет место свободное колебание уровня цен, и каждый акт купли-продажи на рынке влияет на этот уровень, а через него на уровень производства.

В-третьих, совершенствование структуры управляемой системы. Под структурой системы понимается совокупность характеристик, независимых от состояния элементов.

В-четвертых, при управлении большими организационно-техническими системами, где элементами управляемой системы являются управляемые комплексы (управляемые и управляющие подсистемы, имеющие свои цели), широко используются различного рода силовые и идеологические воздействия. Использование ненаучных областей знаний (религия, история, искусство, способы принуждения и т.д.) является наукой повышения эффективности управления. Так, к примеру, были построены египетские пирамиды – абсолютно ненужные человечеству объекты, благодаря чему, передовое, во всех отношениях общество, превратилось на тысячелетия в отсталое.

1.4. Структуры управления и их совершенствование

Структура (лат. structure – строение, связь) есть прочная (относительно устойчивая) связь (отношение) и взаимодействие элементов, сторон, частей предмета, явления, процесса как целого[10].

В зависимости от изучаемого объекта определение структуры уточняется. Всегда понятие структуры связано с упорядоченностью отношений [14]. Под структурой системы понимают ее организацию из отдельных элементов с их взаимосвязями, которые определяются поставленными перед системой и ее элементами целями и распределением функций между ними [13]. Важно подчеркнуть, для динамических систем, структура есть характеристика инвариантная от состояния. Состояние в динамической системе зависит от времени, а структура может сохраняться постоянной. В дальнейшем будем под структурой системы понимать СХЕМУ взаимодействия ее элементов, заданную направленным графом. Под элементом системы будем понимать ее часть, заданную внешними характеристиками настолько полно, что для решения поставленной задачи нет необходимости вникать в ее внутреннюю структуру. Отсюда следует, что все зависит от решаемой задачи. При решении одной задачи, из множества возможных, под элементом понимаются одни части, при решении другой – другие, а, следовательно, и структура будет иной. Но тогда возникает вопрос: управление это изменение состояний системы (ее элементов) или и изменение структуры. В настоящее время мы обязаны признать, что управление, в самом общем смысле, это не только изменение состояния системы, но и изменение ее структуры. Однако изменение состояния происходит непрерывно, а изменение структуры дискретно. Структура изменяется только в том случае, когда изменяется

цель управления. Но тогда справедливо и обратное утверждение. Если меняется структура управления системы, то это значит, что изменилась и цель управления.

Сказанному имеется масса примеров в окружающем нас мире. Вот грузовой автомобиль, возивший сыпучий материал (например, колхозное зерно на элеватор) теперь должен возить лес в соседнее государство. Изменилась цель, но меняется и его структура. Теперь появился прицеп, изменился кузов и т.д. Или вот предприятие, которое ранее выпускало ракетные двигатели, а теперь готовится выпускать детские игрушки. Естественно, исчезают одни цеха, появляются другие, меняется инженерный состав, меняется структура предприятия в соответствии с измененной целью. Наконец, вот было великое государство Советский Союз. На его месте появляется Союз независимых государств. Резко изменяется структура управления. Читатель прекрасно понимает, чем это вызвано – изменилась цель управления. Мы живем в период реформ во всех отраслях народного хозяйства, меняются структура управляемых систем, происходит концентрация капитальных вложений, их централизация. На первое место, наряду с необходимостью применения научных методов поиска наилучших решений, встает проблема совершенствования организационной структуры управляющих систем. Точное определение прав и обязанностей каждого человека, задействованного в управлении, устранение патологических структур в системе управления, вот основные проблемы управления большими системами. В совершенствовании структур управляющих систем четко вырисовываются две тенденции. Это централизация и децентрализация управления. И та и другая тенденции имеют свои достоинства и свои недостатки. Централизованная структура гарантирует единство цели управления, что особенно важно при управлении в условиях неопределенности. Децентрализованная система управления имеет органы управления максимально приближенные к объектам управления. При этом облегчается контроль за результатами принятых решений, повышается мобильность управления. Ускоряется реакция на изменение ситуации. Однако при этом снижается надежность управления. В настоящее время, на основе накопленного опыта исследования административно-организационных систем управления, структуры управляющих систем можно классифицировать на линейные структуры, линейно-штатные, матричные и системы с изменяющимися структурами управления.

Линейная структура управления.

Линейная структура системы управления представляет собой иерархическую структуру, в которой функции управления разделяются между органами или подразделениями различного уровня (ранга). Управляющий орган некоторого уровня иерархии управляет несколькими органами более низкого уровня, находящимися в его подчинении, и сам управляется органами более высокого уровня (рис.1.3).

Одной из важнейших ценностей линейной иерархической системы управления является возможность распределения функций управления по уровням системы. Это позволяет сосредоточить решение стратегических задач на высших уровнях управления, где их решение может быть реализовано более эффективно. Тактические задачи решаются на более низких уровнях. Это обеспечивает оперативность принятия решений и, как правило, более высокую точность. Последнее и определило применение линейной структуры в управлении армий всего мира. Однако при линейной структуре управления каждый руководитель должен обладать разносторонними знаниями, необходимыми для эффективного управления подчиненными подразделениями.

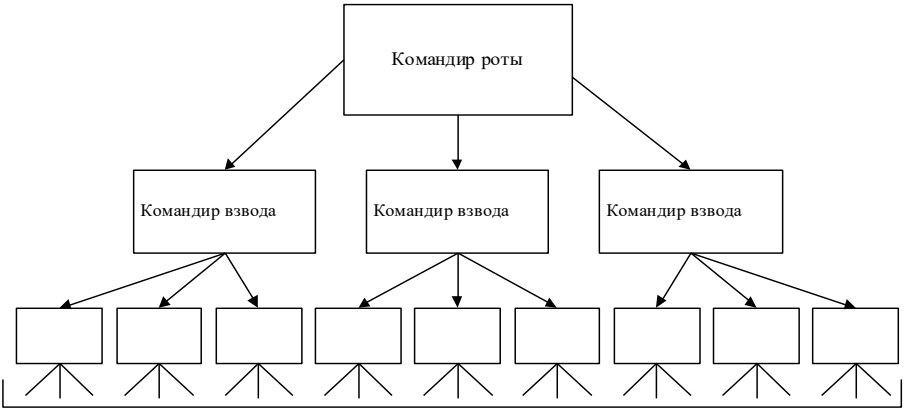

Рис. 1.3

Трудность решения этой задачи возрастает по мере усложнения управляемой системы. При этом возрастает число уровней и специфичность каждого из них. Принцип единоначалия, присущий линейной иерархической системе, делается нереализуемым. В такой ситуации используется функциональная структура управления.

Функциональная структура системы управления.

При функциональной структуре системы управления, для выполнения определенных функций управления, создаются специальные службы – плановая, финансовая, технологическая, сбыта, диспетчерская и др. В Вооруженных Силах таковыми являются: управление авиацией, управление артиллерией, управление связью, тылом и др. В управлении крупными компаниями (рис.1.4) президент компании имеет совокупность вице-президентов по различным направлениям деятельности.

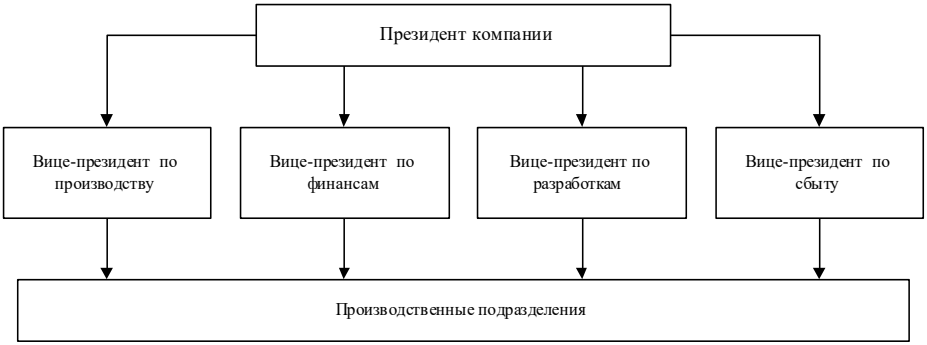

Рис. 1.4

Функциональная система не исключает линейной структуры. Функциональность реализуется на каждом уровне иерархической структуры. При этом руководитель выполняет роль координационного центра различных органов.

В системе управления с функциональной структурой существует опасность гипертрофированного повышения значения функциональных органов управления в ущерб организации как единого целого. Функциональная структура по своей природе способствует развитию местнических интересов, замыканию отдельных подразделений в рамках собственных задач. От этого свободна линейно-штабная система управления.

Линейно-штабная структура управления.

Линейно-штабная структура системы управления по существу есть органическое сочетание рассмотренных выше линейной и функциональной структур. В этом случае при руководителе организации, несущем ответственность за руководство, создается несколько ячеек соответствующих определенной функции управления (рис.1.5).

Каждая ячейка представляет собою штаб и состоит из компетентных специалистов в области определенной функции управления.

Получили распространение три вида штабов: персональные, для оказания помощи руководителю; корпорационные, информирующие руководство о деятельности управляющих более низкого уровня и филиалами; информационно-консультативные штабы при руководителях филиалов.

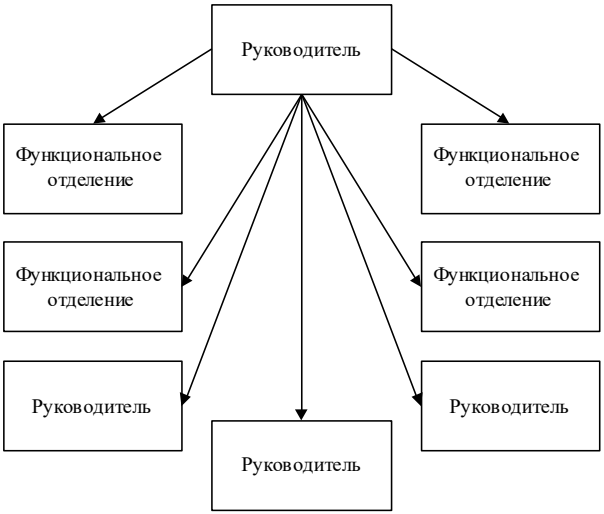

Рис. 1.5

Стремление совместить управление сложными научно-производственными организациями по выполнению различных специальных программ с линейно-функциональной структурой управления, привело к созданию матричной структуры управления.

Матричная структура управления.

Характерной особенностью этой структуры управления является дополнение линейно-штабной структуры (рис.1.6).

Отличительной особенностью матричной структуры является наличие управляющих связей не только по вертикали иерархической схемы, но и еще по горизонтали на одном уровне иерархии. Последнее, существенно при управлении многоплановым производством, в котором реализуются сразу несколько самостоятельных сложных проектов.

Отдельные задачи проекта распределяются между ниже стоящими по иерархии подразделениями. Но назначаются руководители проектов, которые отслеживают ход работ каждый за своим проектом по подразделениям на всех уровнях иерархии. Матричная структура обеспечивает большую гибкость управления. Однако она является столь сложной и громоздкой, что в ней могут появляться патологические явления, нарушающие устойчивость управления. Последнее заставляет время от времени менять структуру с целью повышения эффективности управления.

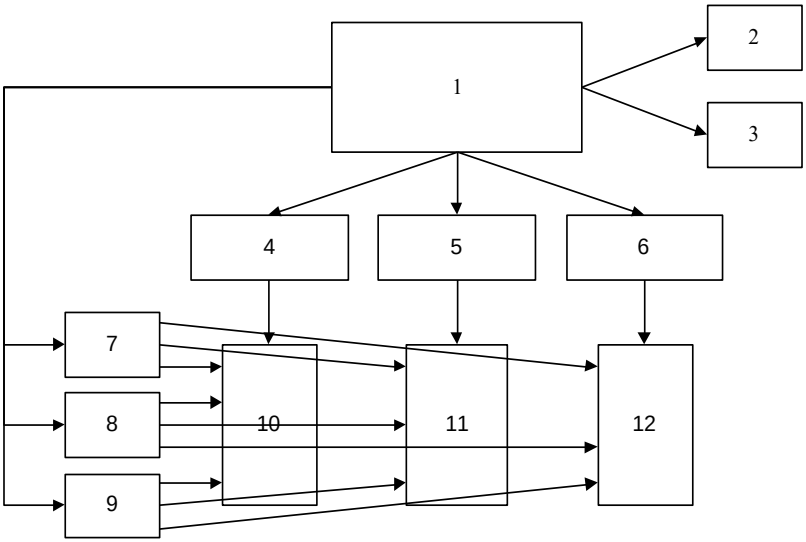

Рис. 1.6

1 – руководитель предприятия, 2, 3 – функциональные отделы (штабы), 4, 5, 6 – руководители подразделений, 7, 8, 9 – руководители проектов, 10, 11, 12 - подразделения.

Системы с изменяющейся структурой.

Жестко зафиксированная структура имеет массу преимуществ. С течением времени устанавливаются, фиксируются и делаются привычными связи между людьми, участвующими в управлении. Люди прирабатываются друг к другу. Отрабатывается распределение ответственностей. В организации устанавливается здоровая атмосфера. Однако, меняется внешняя обстановка, меняются цели управления, а, следовательно, в соответствии с этим должна меняться и структура управления. Кроме того, одним из диалектических противоречий в развитии человечества является стремление отдельного человека к стабильности, сохранению достигнутого им положения, которое он считает для себя удовлетворительным, а всего человечества - к непрерывному развитию и совершенствованию [13]. Таким образом, структура управления, как это не болезненно для участников, задействованных в этой структуре, изменяется в зависимости от обстановки и коррекции целей. Отметим, что изменение структуры управления иногда определяется и психологическими аспектами. Сменить участников управления оказывается психологически настолько трудно, что лучше, оказывается, провести перестройку, изменить структуру и тогда может оказаться, что бывший руководитель, стоящий на более высоком уровне иерархии, оказывается в подчинении у своего бывшего подчиненного. Отметим, что в теории управления далеко не все проблемы решены. Последнее в первую очередь относится

к проблеме выбора оптимальной структуры управления для конкретно сложившейся ситуации. Более определенно можно ответить на вопрос, чего нельзя допустить в структуре управления, т.е. какие элементы структуры являются патологическими.

Патологические элементы структуры.

Патологические элементы в структуре не только снижают эффективность управления, но и делают менее устойчивым само управление. Наиболее часто встречающиеся патологии в структуре следующие:

а) Изоляция (рис.1.7а). Это ситуация, когда некоторый объект по разным причинам оказался неохватен центральным управлением. Это может привести к чрезвычайным ситуациям. Примеров, особенно в наше время, множество. Но самым ярким, конечно, является Чеченская Республика РФ во время правления генералом ВС СССР Дудаевым. Плачевные последствия очевидны.

б) Кольцевая структура (или замкнутая) (рис.1.7б). В этом случае непонятно кто же подчиняется и кто руководит. Наконец, чьи цели являются доминирующими в процессе управления. Примером этой структуры управления является криминальное государство, где по линии формального управления криминальное предприятие (организация) подчиняется официальному государственному органу, но фактически, криминальная организация руководит государственными органами, и кольцо замкнулось.

в) Дублирование подчиненности (рис.1.7в). Это ситуация, когда управление в иерархической структуре от некоторых руководящих центров распространяются через последующие уровни иерархии и некоторые объекты оказываются под влиянием двойного, а то и многократного, управления. Понятно, что при этом нужно чрезвычайно аккуратно анализировать управляющее воздействие, чтобы не допустить нарушения устойчивости управления, когда управляющие воздействия на объект оказываются противоречивыми.

г) Структуры с дублированным управлением, когда у одной управляемой системы существует не одна управляющая система, а несколько. Причем, все они имеют различные цели (рис.1.7г). Для управления в таких структурах требуется тонкое согласование управляющих систем. Иначе, такое управление приводит к конфликтной ситуации, т.е. нарушению устойчивости управления. Как не парадоксально, но человечество очень часто встречается с такими структурами и, как правило, это оканчивается конфликтом. Российское государство в своей истории пережило период, когда дублированное управление (государство и религия) имело место. Цари и императоры приложили много усилий, чтобы ослабить влияние церкви на управление государством и обеспечить устойчивость управления.

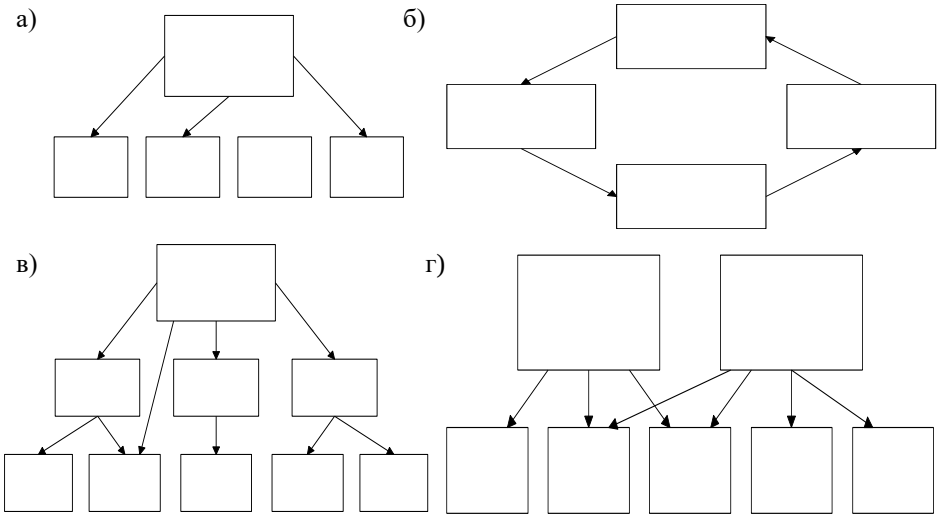

Рис.1.7

1.5. Устойчивость управления

Устойчивость управления – широко распространенное в обиходе понятие, но весьма сложное в определении. Действительно, предположим, что управляемая система устойчива в своих состояниях, отличается наблюдаемостью и допускает внешнее воздействие, переводящее ее из одного состояния в другое (т.е. система с открытым входом). Пусть имеется некоторая управляющая система, способная решать все выше перечисленные задачи управления. Означает ли это, что система будет переведена из начального состояния в некоторое конечное оптимальным образом? Практика показывает, что это не всегда удается. Особенно при управлении большими системами, элементами которых являются управляемые комплексы со своими индивидуальными целями. Многое зависит от того, как оценивается качество управления. Примеров неустойчивого управления в истории человечества предостаточно. Действительно, каким образом развивалась бы история народов Земли, если бы Александр Македонский, завоевав территорию, населенную более чем половиной всего человечества, смог создать эффективное и устойчивое управление завоеванными народами? Результат великих усилий плачевен. Сам демиург мертв, завоевания разделены между его ближайшими соратниками.

Великая Римская Империя еще один пример гибели большой системы из-за несовершенства управления. Читатель легко найдет серию примеров в современной истории. Достаточно отметить, что после распавшегося Великого Мо-

гучего Советского Союза образовалось 15 стран СНГ, большинство из которых возглавляют бывшие члены политбюро КПСС, а некоторые уже стремятся превратиться в монархов (для повышения устойчивости управления своим государством). Здесь важно отметить одну из причин таких явлений. Она кроется в самой природе человека «разумного». Последний подвержен двойственности в оптимизации своего поведения. С одной стороны общественные интересы и каждый человек им служит по мере сил своих. С другой – личные интересы, о которых могут забывать только некоторые из множества. Роль воспитания, привития идеологии любого содержания, направлены на то, чтобы человек забыл о своем «я» и служил общественным интересам. Но остается в определенной степени личное при любом воспитании, когда человек резко меняет целенаправленность своей деятельности и, вместо служения обществу или всевышнему (в любой форме), он начинает действовать в своих личных интересах (слава, богатство, свобода). Современнику предоставляется возможность наблюдать, как воинствующие атеисты в недалеком прошлом жмут руки служителям церкви и принимают от них благословления. Это факты. Из них мы можем сделать ряд выводов.

1. Синтезировать большую организационно-техническую систему трудно, но возможно благодаря усилиям большого количества людей.
2. Устойчивость управления почти невозможно осуществить на основе коллективного руководства. Даже монархия, когда одному лицу отдается право на все, не гарантирует устойчивость управления.
3. Необходимы глубокие научные исследования по проблеме устойчивого управления, для реализации управления большими системами.

Существует предположение, что большая организационно-техническая система не может функционировать без четкого (жесткого) управления. Это управление может быть организовано с определенной целью. Если этого не происходит, то жесткое управление появляется стихийно или система распродается на составляющие.

Так, в государствах с высоким уровнем демократии, где госаппарат решает в основном две задачи, а именно сбор налогов и защиту себя от своих граждан, неизбежно возникает криминальная (жесткая) структура управления со своей целью управления.

Однако обратимся к формальной постановке задачи оценивания степени устойчивости управления большими системами. Будем, как прежде, обозначать через $\vec{x}(t)$ $\vec{s}(t)$ управляющее воздействие и состояние системы соответственно. Пусть $G(\vec{x}(t),\vec{s}(t),t)$ некоторая функция качества управления (прибыль, потери, количество произведенной продукции, прожиточный уровень населения т.д. и т.п.). Тогда целевой функционал

$$I = \int_{t_H}^{t_K} G(\vec{x}(t),\vec{s}(t),t)dt$$

характеризует результат деятельности управляемой системы за промежуток времени $T = (t_K - t_H)$.

Пусть $\vec{x}_0(t)$ - оптимальное управление обеспечивает максимум (или минимум) функционала. Оптимальное его значение обозначим через J_0. Теперь можно определить устойчивость управления в смысле А.М.Ляпунова. Если в метрическом функциональном пространстве управляющих воздействий по <u>любой</u> области $\Omega(x)$, такой, что $\vec{x}_0 \in \Omega(x)$ найдется такая область в метрическом пространстве значений функционала качеств $\Omega(J)$, что если управляющее воздействие не выходит из области $\Omega(x)$, то значение функционала не выйдет за пределы области $\Omega(J)$. Тогда управление следует считать устойчивым.

Для решения задачи оценки устойчивости управления необходимо по любому

$$\Delta\vec{x}(t) = \left|\vec{x}_0 - \vec{x}(t)\right|$$

найти изменение значения функционала качества $\Delta J = J_0 - J$.

Поскольку отклонения управляющего воздействия могут быть случайными, то и ΔJ будет случайной. Тогда степень устойчивости управления можно оценивать дисперсией функционала J.

Для решения поставленной задачи необходимо знать $G(\vec{x}, \vec{s}(t), t)$. Но для этого необходимо иметь модель системы. Для того чтобы получить выражение для J необходимо определиться с понятием цели и т.д. Короче говоря, предварительно должны быть решены все задачи управления, которые были перечислены ранее (см. п.1.2).

Глава 2. Цель управления

2.1 Определение и классификация целей

Понятие цели следует из определения управления. Цель — это ожидаемый результат действия управляющей системы. Но ожидаемые результаты представляют столь обширное разнообразие, что хотелось бы конкретизировать понятие цели как философской категории. Первая проблема, связанная с целевым управлением является проблемой происхождения цели. В большинстве случаев цель управления диктуется вышестоящей организацией. Так цель управления ротой будет сформулирована уставом строевой службы, указаниями командира батальона и действующими указаниями и решениями более высоких начальников. Несколько иначе обстоит дело при синтезе новой системы. Ее предназначение должно быть научно обосновано вплоть до тактико-технических характеристик, которыми они должны обладать. Так обстоит дело при производстве нового вооружения. Выработка цели является первым этапом синтеза системы. Формально цель управления системой можно сформулировать строго. Пусть

система задана, т.е. три множества $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{S}$. (Множество возможных воздействий $\mathbf{X}$, множество возможных реакций $\mathbf{Y}$ и множество состояний системы $\mathbf{S}$).

Тогда под целью управления можно понимать подмножество состояний $\Delta\mathbf{S} \subset \mathbf{S}$, в которое следует перевести систему из начального состояния $\vec{S}(t_H)$.

Такое определение удобно и находит широкое применение. Например, командиру корабля ставится цель провести судно из Санкт-Петербурга в порт Владивосток. Здесь цель определена конкретно, и исполнитель организует ее достижение наилучшим образом.

Однако существуют системы, в которых трудно, а то и невозможно, ввести понятие состояния. К примеру, рассмотрим некоторого предпринимателя, у которого единственная цель больше получать денег в любой момент времени. Спросим его: какова Ваша конечная цель? Ну, купите остров в теплом море, постройте виллу, окружите себя роскошью. Это конечная цель? Нет, он будет продолжать свое дело бесконечно. Человек будет ставить себе новые задачи.

Таким образом, в управлении сложными системами может не существовать конечной цели. Управление сводится к постоянному улучшению некоторого функционала $J(\vec{x}(t), \vec{s}(t), t)$ выбирая управляющее воздействие $\vec{x}(t)$ таким, чтобы максимизировать или минимизировать функционал J с перспективой на будущее. Задача чрезвычайно сложная.

Поскольку понятие цели тесно связано с ожидаемым результатом управления, то время достижения цели является принципиальным фактором. Все цели можно разбить на две группы. Первая группа это достижимые цели, а вторая цели недостижимые.

Недостижимые цели это, как правило, идеальные цели, т.е. цели к которым желательно, должно, необходимо стремиться, но их невозможно достичь.

Ярким примером идеальных недостижимых целей является познание окружающего нас мира (легко показать, что этот мир непознаваем в принципе, но стремиться к этому нужно) или построение коммунистического общества. Пока никто не доказал, что такое общество невозможно. Более того, известный политический деятель обещал, что «наше поколение будет жить при коммунизме». Другой «вождь» заменил эту недостижимую цель другой: «Строительство социализма с человеческим лицом». Теперь мы видим, что построен капитализм со звериной харей.

Из всего сказанного можно заключить, что даже достижимые цели могут быть разбиты на окончательные и промежуточные. Окончательные цели могут отодвигаться на неопределенное время, а вот промежуточные решаются. Так капитализм в России, можно считать промежуточной целью руководства. В результате быстро появился класс олигархов и элитарное подразделение руководителей. Все они живут в условиях коммунизма. Цель достигнута. Но тогда нужно согласится с утверждением, что любое руководство имеет явные (открытые) и скрытые (засекреченные для масс) цели. Жизнь дает примеры, подтверждающие эти мысли. Сейчас великая сверхдержава кровавым зверским путем

освобождает иракский народ от диктатуры, навязывая демократию. Естественно возникает вопрос, является ли это истинной целью кровавой бойни. А может быть природные ресурсы Ирака являются доминирующей целью? Ведь на человечество надвигается энергетический кризис. Запасы нефти и газа иссякнут через 30-40 лет (Л.11). Сейчас решается проблема выживания человечества. Целые народности исчезнут с лица земли. Другие будут обречены на жалкое существование. Новый Ковчег, в отличие от старого Ноева ковчега, не сможет вместить всех.

Рассмотрим более общую постановку проблемы управления характерную для больших организационно-технических систем, например, таких как Российское государство. Характерной особенностью таких управляемых систем является иерархическое построение структуры управления. Центральное управление делит всю систему на округа, в которых функционирует аппарат политических представителей президента. Округа включают в себя области. В областях имеются города. В города районы и предприятия, все эти объекты управляемые и имеют свои специфические цели как конечные, так и промежуточные. Так в г. Санкт-Петербурге множество своих целей: постройка объездной дороги, совершенствование железнодорожных вокзалов, реставрация памятников старины и т.д. Разные цели, разные решения и разные системы управления.

Возникает проблема взаимодействия общей цели и частных целей, и каким образом добиваться их согласования. История знает три наиболее распространенных приема согласования целей.

Первый из них силовой, в соответствии с которым организуется плановое хозяйство и за невыполнение плана виновный несет ответственность вплоть до смертной казни. Элементы этого приема находят распространение в армиях всех стран. Ответственное лицо виновное в невыполнении приказа высшего командира (по расхлябанности или по корыстному умыслу) наказывается по законам военного времени.

Наиболее распространенным приемом согласования целей исторически является религия. Независимо от содержания религиозного учения (христианство, ислам, буддизм, коммунизм) все они направлены на воспитание единого духовного настроя у граждан общества, что способствует устранению целевых несогласованностей у членов общества. В Советском Союзе коммунистическая мораль была обязательным ритуалом воспитания с детского сада до старости. Воинствующий атеизм исключал другие религии. Но вот Советского Союза не стало. Мгновенно запылали золотом колокольни и храмы. Нашлись средства для строительства Храма на месте спортивного комплекса в столице. И те воинствующие атеисты уже целуют кресты и руки служителям церкви, награждая их самыми значимыми наградами. Мгновенно вышли из моды люди чистой науки. Нужна другая религия, обеспечивающая единство жизненных целей народа.

Третий способ согласования целей характерен для рыночных отношений. Выгода и прибыль становится объединяющей идее всех элементов большой организационно технической системы.

2.2. Алгебра целей

В математике бытует термин абстрактная система, под которым принято понимать систему с заданной структурой (соотношения между входящими в нее элементами) и элементами любой математической природы (т.е. природа элементов игнорируется). Динамические абстрактные системы связанные с сознательной деятельностью, называют целенаправленными и будем обозначать их АСЦД (абстрактная система с целенаправленной деятельностью)

Понятно, что АСЦД всегда связана с сознательной деятельностью, присущей только живым организмам (в первую очередь человеку).

Системы с искусственным интеллектом (автоматы), функционирующие по заданному алгоритму, разработанному естественным интеллектом, возможно, не входящему в рассматриваемою систему, не будут относиться к АСЦД.

Важно подчеркнуть, что в АСЦД входят два типа подмножества элементов. Первое из них состоит из элементов, имеющих свои цели необязательно согласованные с целями АСЦД. И второе подмножество - элементов, не имеющих своих целей. Отметим так же, что одна и та же абстрактная система целенаправленной деятельности (АСЦД), может иметь одновременно множество конечных и промежуточных целей. При этом некоторые из них могут быть взаимоисключающими и взаимосовместимыми.

Пусть задано множество конечных результатов управления (целей) $\Omega = \{\omega_i\} \quad i = 1,n$. Будем считать, что цель определена, если на множество ожидаемых результатов заданы условные вероятности:

$$q_i = (\omega_i / \omega_1; \omega_2; ... \omega_{i-1}; \omega_{i+1} ... \omega_n) \tag{2.1}$$

Если считать, что цель Ω (2.1) достигается, если получен хотя бы один из намеченных результатов $\{\omega_i\} \quad i = 1,n$, тогда вероятность достижения цели Ω равна:

$$q_0 = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - q_i] \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что если хотя бы один из результатов достигается с вероятностью $q_i = 1$, то цель в целом достигается с вероятностью $q_0 = 1$.

Цель Ω_1 считается поглощающей цель Ω_2, если из достижения Ω_1 автоматически оказывается достигнутой и Ω_2. Символически этот факт записывается в форме:

$$\Omega_1 > \Omega_2$$

Если одновременно имеет место:

$$\Omega_1 > \Omega_2 \text{ и } \Omega_2 > \Omega_1,$$

То цели Ω_1 и Ω_2 - эквивалентны. Понятно, что можно ввести условие вероятности достижения цели. Так, например, если:

$q(\Omega_i / \Omega_j) = 1$, то цель Ω_j является поглощающей относительно Ω_i ;

если $q(\Omega_i / \Omega_j) = 0$, то цель Ω_j является исключающей для Ω_i;
если $q(\Omega_i) > q(\Omega_i / \Omega_j)$, то Ω_j является несогласованной целью относительно Ω_i и, наконец, если $q(\Omega_i) < q(\Omega_i / \Omega_j)$, то цель Ω_j согласована относительно Ω_i.

Рассмотрим теперь множество АСЦД $L = \{l_i\}$, $i = \overline{1,m}$, вообще говоря, не обязательно однородных. Пусть $\{\Omega_i; q_i\}$ множество их конечных целей, достигаемых с вероятностями q_i. Тогда можно представить систему $\mathbf{L} = \bigcup l_i$ объединяющую все множество $\mathbf{L}$ и имеющую цель Ω_0, вероятность достижения которой равна:

$$q_0 = 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - q_i) \tag{2.3}$$

Тогда такое объединение систем есть некоторая операция $\oplus$ на множестве систем и их целей.

Именно такой операцией является объединение различных систем связи для обеспечения бесперебойного и надежного управления войсками. Физически эта операция сводится к параллельному использованию всех систем. Введенная операция имеет нейтральный элемент, это система, имеющая цель с вероятностью достижения равной нулю. Интересно, что для такой операции можно ввести и обратный элемент l_i^{-1}. Это система, которая, будучи объединенной с l_i, дает нулевую (нейтральную) систему. Такой системой для системы связи может служить система подавления. Легко видеть, что множество систем с операцией $\oplus$ обладает свойствами:

- замкнутости
- ассоциативности
- наличие нейтрального элемента
- наличие обратного элемента
- коммутативности,

и, следовательно, образует Абелеву группу.

Предположим теперь, что конечная цель Ω_0, некоторой АСЦД может быть представлена как некоторое множество промежуточных целей $\Omega_0 = \{\Omega_j\}$, $j = \overline{1,k}$, которые могут быть достигнуты некоторыми АСЦД $R = \{r_j\}$, $j = \overline{1,k}$ с вероятностью достижения q_j, $j = \overline{1,k}$. Теперь все множество систем R можно представить как единую систему с целью Ω_0, вероятность достижения которой $q_0 = \prod_i q_i$, $i = \overline{1,k}$. Но тогда на множестве АСЦД возможно ввести вторую операцию $\otimes$, аналогичную операции пересечения. Такая операция имеет нейтральный элемент, когда система обеспечивает достижение промежуточной цели с вероятностью единица.

Теперь для любых двух систем r_1 и r_2 с целями Ω_1 и Ω_2 можно привести другую третью систему r_3, для которой Ω_1 и Ω_2 являются промежуточными целями $r_3 = r_1 \otimes r_2$. При этом цель Ω_3 будет достигнута с вероятностью

$$q_3 = q_1 \cdot q_2 \tag{2.4}$$

Множество систем с операцией последовательного использования для достижения цели образует ассоциативную полугруппу (отсутствует обратный элемент). Нейтральным элементом является система с вероятностью достижения цели, равной единице. Введенная полугруппа оказывается некоммутативной.

Таким образом, множество АСЦД с операциями $\oplus$ и $\otimes$ представляет четкую алгебраическую структуру типа тела, кольца и даже может быть поля, если ввести в рассмотрение искусственные системы, которые имеют цели противодействующие заданным.

Алгебра абстрактных систем целенаправленного действия позволяет поставить и решать ряд фундаментальных задач имеющих практическое значение, которые в настоящее время еще не получили должного внимания в научном мире.

2.3. Задачи управления АСЦД

Рассмотрим постановку некоторых системных задач имеющих практическое значение.

<u>Задача №1</u>. Пусть сформирована цель $\Omega_0 = \{\omega_{0i}\}$ $i = \overline{1,n}$, которая с вероятностью q_0 должна быть достигнута. Имеется множество АСЦД $\mathbf{L} = \{ l_i \}$, $i = \overline{1,m}$ со своими целями Ω_i и вероятностями их достижения q_i. Необходимо выработать процедуру организации единой системы из множества $\mathbf{L}$, которая позволяет достичь цели Ω_0 с максимально возможной вероятностью.

<u>Задача №2</u>. В условиях задачи №1 предположим, что кроме множества $\mathbf{L} = \{ l_i \}$ существует множество АСЦД $\mathbf{K} = \{ k_j \}$ $j = \overline{1,m}$ со своими вероятностями достижения целей p_j, которые могут произвольным (или наперед заданным) способом подключаться к системе $\mathbf{L}$ и обладающими свойствами снижать вероятности q_i (система противодействия). В задаче требуется найти оптимальное решение для организации системы $\mathbf{L}$. Очевидно, что задача является игровой в условиях заданной степени неопределенности.

<u>Задача № 3</u>. Это классическая задача синтеза систем. Необходимо иметь АСЦД $\mathbf{L}_{0i}$ с целью Ω_0, которая должна достигаться с вероятностью не менее q_0 причем, заданы ее структура и элементы. Требуется убедиться, что система построена оптимально в определенном смысле и если это не так, то как опти-

мально реконструировать ее структуру. Здесь уже появляется необходимость в формировании функционала эффективности.

Задача № 4. Это задача интеграции систем. Пусть существует система A, состоящая из элементов и матрицы взаимодействия

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Здесь $a_{ij} \in [0,1]$ и характеризует степень зависимости (степень связанности) элементов.

Предположим, что задана система со структурой, заданной матрицей $\mathbf{B}$. Задача заключается в создании новой системы $\mathbf{C}$ со структурой c_{ij}, представляющую собой композицию структур систем $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Это классическая задача, не имеющая общего решения. Для ее решения возможны, например, следующие два подхода:

а) разъединить элементы систем $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, и синтезировать новую систему, организуя оптимальную структуру. Недостатком такого подхода является дороговизна, обусловленная нарушением связей a_{ij} и b_{kl}, и построением новых $c_{\mu\nu}$;

б) механически объединить две системы в систему со структурой $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Здесь символом «$\mathbf{0}$» обозначены нулевые матрицы. Такое решение является наиболее простым, однако, не гарантирует оптимальности синтеза новой системы.

Задача № 5. Задача управления системой в динамике. Это классическая задача и в этом направлении получены ощутимые результаты (методы динамического программирования). Сложность решения этого класса задач определяется уровнем априорной неопределенности.

Перечень типовых задач можно продолжить, однако, уже из приведенных задач ясно, насколько сложными являются проблемы анализа и синтеза больших абстрактных систем целенаправленного действия.

Глава 3. Моделирование управляемых объектов

3.1 Модель. Определение и классификация моделей

Управление, особенно большими системами, является сложным и ответственным процессом. Всякая ошибка в управлении (при решении любой из перечисленных выше проблем) может привести к печальным последствиям и не

только для управляющей системы. Ярким примером служат революции и контрреволюции.

По этой причине все идеи и решения по управлению желательно много раз проверить на более простых системах (моделях).

Под моделью некоторой системы (объекта) понимают другую систему, отличающуюся следующими свойствами:

1. Модель должна быть более простой, чем моделируемый объект, а, следовательно, и более дешевой;
2. Модель должна быть доступной и удобной для работы с ней. Например, атом некоторого вещества можно рассматривать, как модель солнечной системы. Центральное ядро, аналогично солнцу, электроны, вращающиеся вокруг ядра на разных орбитах (аналоги планет) и т.д. и т.п. но работать с этой моделью, увы, неудобно в силу малой доступности.
3. Модель должна позволять решение поставленной задачи с заданной степенью точности. Отсюда следует, что один и тот же объект может иметь различные модели, в зависимости от решаемой задачи.

Все множество моделей можно классифицировать на три основные группы по их сущности.

Первая группа моделей это концептуальные модели. Концепция — это основное положение, поэтому в концептуальной модели формулируются основные положения и свойства объекта, которые следует принимать во внимание и учитывать при управлении. Естественно, что необходимо стремиться формулировать полное множество концепций. При этом дополнение множества концепций не изменит основных свойств моделей. Особое значение имеют концептуальные модели при синтезе управляемой системы. В этом случае концептуальная модель может быть представлена в виде требований к будущей системе. Так планируя разработку системы спутниковой связи необходимо описать заранее тип спутника, параметры его орбиты, состав аппаратуры на борту, типы антенн, схему и принцип функционирования аппаратуры на борту и т.д. и т.п.

Здесь ничего нельзя упустить. Иначе запуск будет бесполезен. Так что концептуальная модель такой системы должна быть полной.

Примеров концептуальных моделей, не отличающихся полнотой, в окружающем нас мире предостаточно: это и коммунистическое общество, это и социализм с человеческим лицом, это и демократическое государство. Читатель легко убедиться в неполноте этих моделей и к чему привело их применение на практике.

Вторая группа моделей – физические модели. Это материальная система обладающая свойствами модели. Важно отметить, что к физической модели не предъявляется требования в однородности ее состава с моделируемым объектом. Так модель черепахи может состоять из источника питания, приводного механизма процессора и памяти, чего в настоящей черепахи нет.

Третья группа моделей – это аналитические модели, представляемые в виде аналитических соотношений между множеством параметров моделируемой си-

стемы. В научных исследованиях аналитические модели играют главенствующую роль. Их значение трудно переоценить. Большая часть фундаментальных результатов в науке об окружающем нас мире были получены на основе аналитического моделирования.

Наконец четвертая группа моделей – это имитационные модели. Имитационные модели получили широкое распространение в последние 50 лет, когда вычислительная техника претерпела революционный скачек в своем развитии. Имитационные модели базируются на аналитических моделях. При этом программно моделируются все процессы, действующие в управляемой системе, а также операции с этими процессами. Наличие имитационной модели позволяет проводить машинный эксперимент по определению наилучшего метода управления и оценки неизвестных параметров. Последнее бывает значительно проще, чем решать задачу аналитически или экспериментировать с реальным объектом.

Остановимся более подробно на последних двух группах моделей.

3.2 Аналитические модели

Исходной предпосылкой в разработке аналитической системы управляемого объекта является системный подход, т.е. стремление описать наиболее общие свойства объекта как системы. Иначе говоря, моделирование сводится к аналитическому описанию множества возможных внешних воздействий $\mathbf{X}$, множества возможных внутренних состояний объекта $\mathbf{S}$, множества возможных реакций $\mathbf{Y}$, а также оператора F, позволяющего определить реакцию, при заданных внешних воздействиях и внутреннем состоянии объекта. Элементами перечисленных выше множеств являются, как правило, векторы, что усложняет процесс их задания. Способы задания множеств существенно зависит от их свойств. Конечное множество может быть задано перечислением его элементов множества с бесконечной мощностью задают системой уравнений, которым должны удовлетворять элементы описываемого множества. Модель объекта называют непрерывной, если все три множества $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{S}$ – модели являются непрерывными. В противном случае говорят, что модель дискретна. Множество внешних воздействий состоит из двух подмножеств:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X_1} \cup \mathbf{X_2} \qquad \mathbf{X_1} \cap \mathbf{X_2} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{X}_1$ — это подмножество управляющих воздействий, а $\mathbf{X}_2$ — множество воздействий среды, которые в общем случае присутствуют и не зависят от управляющих воздействий. В литературе часто за управляющим воздействием $\mathbf{X}_1$ сохраняют обозначение $\mathbf{X}$, а множество воздействий среды обозначают через $\mathbf{N}$.

Элементы перечисленных множеств имеют различную размерность. В дальнейшем будем считать:

$$\forall \vec{x} = (x_1, x_2 \ldots x_m) \in \mathbf{X}; \vec{x} = \{x_i\} \quad i = \overline{1, m}$$

$$\forall \vec{y} = (y_1, y_2 ... y_k) \in \mathbf{Y}; \vec{y} = \{y_i\} \quad i = \overline{1,k}$$
$$\forall \vec{s} = (s_1, s_2 ... s_n) \in \mathbf{S}; \vec{s} = \{s_i\} \quad i = \overline{1,n}$$

Что касается множества $\mathbf{N}$, то размерность его элементов логично принять такой же, как размерность элементов $\mathbf{X}$, т.е.

$$\forall \vec{n} = (n_1, n_2 ... n_m) \in \mathbf{N}$$

На рис.3.1а представлена схема взаимодействия описанных множеств. В дальнейшем, для простоты, эта схема будет изображаться, как показано на рис 3.1б

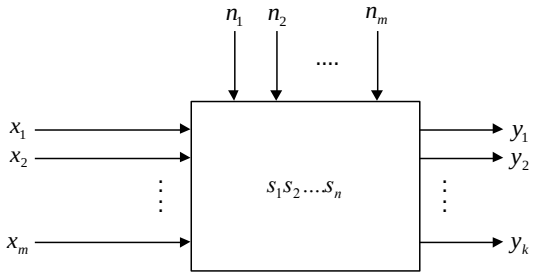

Рис.3.1.а

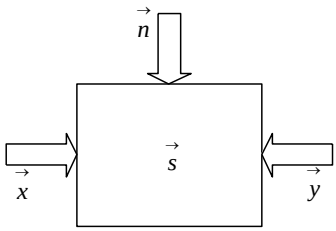

Рис.3.1.б

Если элементы перечисленных множеств не зависят от времени, то систему (модель) называют статической, в противном случае система динамическая.

В общем случае в динамической системе элементы всех множеств есть функции времени.

Не менее разнообразны способы задания оператора F в модели системы. В самом общем случае он представляется системой интегро-дифференциальных уравнений общего типа.

Получение этих уравнений связано с решением фундаментальных проблем системного подхода.

1. Выделение и описание свойств элементов входящих в систему (их состояния).
2. Определение структуры системы (схемы соединения элементов)
3. Выделение определяющих (имеющих существенное значение) связей между элементами и количественное описание свойств этих связей

Если удается разрешить эти уравнения относительно реакции $\vec{y}$, то уравнение $\vec{y} = F(\vec{x}, \vec{s})$ называют уравнением вход-выход. Важным свойством оператора F является линейность относительно своих переменных. Напомним, что оператор F относительно переменной $\vec{x}$ является линейным, если выполняется условие суперпозиции:

$$F(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha F(\vec{x}_1) + \beta F(\vec{x}_2),$$

где α и β некоторые постоянные величины.

Оператор может быть линейным относительно одной переменной и нелинейным относительно другой. Операторы линейные относительно всех переменных играют особо важную роль в моделировании реальных объектов. Причиной этого являются ряд факторов.

Во-первых, все реальные объекты оказываются линейными при малых воздействиях на них.

Во-вторых, в математике известен четкий алгоритм решения линейных дифференциальных уравнений любого порядка, что не имеет место для нелинейных дифференциальных уравнений.

Наконец, в-третьих, линейная модель нелинейной системы является первым приближением в моделировании.

В математике широко развивается направление известное как оптимальная линериализация оператора. Сущность его заключается в отыскании такой линейной модели принципиально не линейного объекта, при которой решение поставленной задачи имеет минимальную погрешность.

В теории систем принята единая форма задания оператора, удобная для имитационного моделирования с использованием вычислительной техники. Эта форма используется для моделирования динамических систем, в которых составляющие вектора состояния зависят от времени (хотя бы некоторые, не обязательно все).

$$\vec{s}(t) = \{s_1(t), s_2(t) \ldots s_n(t)\} = \{s_i(t)\} \qquad i = \overline{1,n}$$

Составляющие вектора состояния принято называть <u>переменными состояния</u>. Таким образом, форма оператора модели системы включает в себя систему из n дифференциальных уравнений первого порядка для переменных состояния (уравнения переменных состояния) и k алгебраических уравнений связывающие k составляющих реакции модели с переменными состояния и составляющими вектора внешнего воздействия (уравнения наблюдения).

$$\frac{ds_1(t)}{dt} = f_1\{\vec{s}(t), \vec{x}(t), \vec{n}(t)\}$$

$$\frac{ds_2(t)}{dt} = f_2\{\vec{s}(t), \vec{x}(t), \vec{n}(t)\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{ds_n(t)}{dt} = f_n\{\vec{s}(t), \vec{x}(t), \vec{n}(t)\}$$

$$y_1(t) = \varphi_1\{\vec{s}(t), \vec{x}(t), \vec{n}(t)\}$$

$$y_2(t) = \varphi_2\{\vec{s}(t), \vec{x}(t), \vec{n}(t)\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_k(t) = \varphi_k\{\vec{s}(t), \vec{x}(t), \vec{n}(t)\}$$

Более компактной является запись уравнений переменных состояния и уравнений наблюдения в векторной форме:

$$\frac{d\vec{s}(t)}{dt} = \Phi_1\{\vec{s}(t),\vec{x}(t),\vec{n}(t),t\},$$

$$\vec{y}(t) = \Phi_1\{\vec{s}(t),\vec{x}(t),\vec{n}(t),t\}, \qquad (3.2.1)$$

где Φ_1 и Φ_2 векторные операторы. Для линейной модели эти уравнения принимают более конкретный вид:

$$\frac{d\vec{s}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{s}(t) + \mathbf{B}(t)\{\vec{x}(t) + \vec{n}(t)\},$$

$$\vec{y}(t) = \mathbf{C}(t)\vec{s}(t) + \mathbf{D}(t)\{\vec{x}(t) + \vec{n}(t)\}, \qquad (3.2.2)$$

где $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)$ матрицы, размерность которых легко установить. Размерность векторов равна:

$$\left[\frac{d\vec{s}(t)}{dt}\right] = [s(t)] = n \times 1, \qquad [\vec{x}(t)] = [\vec{n}(t)] = m \times 1$$

$$[\vec{y}(t)] = k \times 1,$$

и, принимая во внимание, правило размерностей при умножении матриц:

$$L_{\alpha_1\beta} \cdot M_{\beta d} = K_{\alpha d}$$

получаем: $[A] = n \times n$, $[B] = n \times m$, $[C] = k \times n$ и $[D] = k \times m$.

При отсутствии внешних воздействий уравнение переменных состояний принимает вид:

$$\frac{d\vec{s}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{s}(t).$$

Это уравнение описывает собственные колебания системы, поэтому матрица $\mathbf{A}(t)$ получила название собственной матрицы. Матрица $\mathbf{B}(t)$ определяет влияние внешних воздействий на состояние системы, поэтому ее называют входной матрицей. Матрица $\mathbf{C}(t)$ может быть названа выходной матрицей, поскольку она определяет влияние состояния системы на ее реакцию, а матрицу $\mathbf{D}(t)$ логично считать проходной матрицей, поскольку она определяет влияние внешнего воздействия на реакцию системы.

В общем случае элементы перечисленных матриц являются функциями времени. Если матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ не зависят от времени, такая модель, а, следовательно, и моделируемая система, являются статическими. Статические и динамические модели являются стохастическими, если хотя бы один элемент в операторах Φ_1 и Φ_2 выражения 3.2.1 является случайным, в противном случае модель является детерминированной.

Исследование статистических (случайных) моделей связано с использованием аппарата теории вероятностей, теории случайных процессов и математической статистики.

Получение аналитической модели сложного объекта является, как правило, трудной задачей. И ее сложность во многом зависит от степени доступности моделируемого объекта. Если объект абсолютно доступен для исследования (допускает вскрытие и изучение внутренней структуры), то он представляется в виде системы, т.е. выделяются элементы и связи между ними. После этого на основе применения различных законов сохранения составляется дифференциальное уравнение, описывающее процессы в системе. Так, если это электрический объект, то ее элементами являются резисторы, конденсаторы, индуктивности и источники электрической энергии. В качестве законов сохранения выступают первый и второй законы Кирхгофа. Если удастся восстановить схему соединения элементов, то, используя законы Кирхгофа, удается получить дифференциальное уравнение, описывающее процессы в системе.

Предположим, что система линейна и описывается в общем случае неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка:

$$\sum_{l=0}^{n} a_l \frac{d^{(l)}y(t)}{dt^l} = \sum_{l=0}^{m} b_l \frac{d^{(l)}x(t)}{dt^l}. \qquad (3.2.2)$$

Будем считать, что $n \geq m$. Коэффициент a_n, как правило, считается равным единице. Если это не так, то достаточно все уравнение разделить на a_n. Уравнение 3.2.2 не содержит постоянной составляющей независящей ни от, $y(t)$ ни от $x(t)$. Если это не так, то достаточно осуществить замену переменной $y(t)$ или $x(t)$.

Получим из общего дифференциального уравнения 3.2.2 аналитическую модель в форме уравнений переменных состояния и уравнений наблюдения. Для этого положим:

$$y(t) = s_1(t) \qquad (3.2.3)$$

Выражение (3.2.3) примем как уравнение наблюдения. А это означает, что $y(t)$ - есть реакция системы, а $s_1(t)$ первое составляющее состояния. Перенесем теперь в выражении (3.2.2) в одну сторону все составляющие, содержащие производную, а в другую остальное и получим:

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{l=1}^{n} a_l \frac{d^{(l-1)}s_1(t)}{dt^{(l-1)}} - \sum_{l=1}^{m} b_l \frac{d^{(l-1)}x(t)}{dt^{(l-1)}}\right\} = -a_0 s_1(t) + b_0 x(t)$$

Обозначим выражение в фигурных скобках через $s_n(t)$, приняв его как n-ую составляющую состояния системы. В результате получаем дифференциальное уравнение первого порядка для $s_n(t)$:

$$\frac{ds_n(t)}{dt} = -a_0 s_1(t) + 0 s_2(t) + \ldots + 0 s_n(t) + b_0 x(t). \qquad (3.2.4)$$

Но

$$s_n(t)=\sum_{l=1}^{n}a_l\frac{d^{(l-1)}s_1(t)}{dt^{(l-1)}}-\sum_{l=1}^{m}b_l\frac{d^{(l-1)}x(t)}{dt^{(l-1)}}$$

Проделаем с этим уравнением туже операцию, что ранее выполнили с 3.2.2, получим:

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{l=2}^{n}a_l\frac{d^{(l-2)}s_1(t)}{dt^{(l-1)}}-\sum_{l=2}^{m}b_l\frac{d^{(l-2)}x(t)}{dt^{(l-1)}}\right\}=-a_1s_1(t)+\ldots+s_n(t)+b_1x(t).$$

Обозначая выражение в фигурных скобках через $s_{n-1}(t)$ получаем:

$$\frac{ds_{n-1}(t)}{dt}=-a_1s_1(t)+0s_2(t)+\ldots+1s_n(t)+b_1x(t). \qquad (3.2.5)$$

Процедура продолжается до получения уравнения $\frac{ds_1(t)}{dt}$. В результате имеем уравнения переменных состояния:

$$\begin{gathered}
\frac{ds_1(t)}{dt}=-a_{n-1}s_1(t)+s_2(t)+\ldots+0x(t),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{ds_{n-m}(t)}{dt}=-a_ms_1(t)+0s_2(t)+\ldots+1s_m(t)+\ldots+b_mx(t),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{ds_{n-1}(t)}{dt}=-a_1s_1(t)+0s_2(t)+\ldots+0s_n(t)+b_1x(t),\\
\frac{ds_n(t)}{dt}=-a_0s_1(t)+\ldots+0s_n(t)+b_0x(t),
\end{gathered} \qquad (3.2.6)$$

и уравнение наблюдения:

$$y(t)=s_1(t).$$

Отсюда видно, что собственная матрица линейной модели равна:

$$A=\begin{bmatrix}-a_{n-1} & 1 & 0 & 0\ldots0\\ -a_{n-2} & 0 & 1 & 0\ldots0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -a_1 & 0 & 0 & 0\ldots1\\ -a_0 & 0 & 0 & 0\ldots0\end{bmatrix}$$

Выходная матрица представляет собою вектор столбец:

$$B=(0,0\ldots b_m,b_{m-1}\ldots b_1,b_0)^T.$$

Матрица входная **C** представляется вектор-строкой размерностью $(1\times m)$. При этом только первый член равен единице, а остальные равны нулю:

$$C=(1,0,0\ldots0).$$

Наконец, проходная матрица **D** является нулевой матрицей–строкой размерностью ($1\times m$).

Если моделируемый объект представляется лишь в виде черного ящика, имеющего вход и выход (рис.3.2.1), и внутреннее строение объекта недоступно, в этом случае источником информации для моделирования является эксперимент.

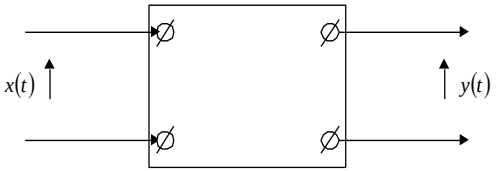

Рис. 3.2.1

Предположим, например, что экспериментально удалось установить, что моделируемый объект для множества допустимых воздействий ведет себя линейно. Тогда снимается комплексная передаточная функция объекта $T(j\omega)$. Известно, что для линейной системы комплексная передаточная функция представима в виде дробно рациональной функции:

$$T(j\omega)=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_1(j\omega)+b_0}{a_n(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_1\cdot j\omega+a_0}=\frac{G_y(j\omega)}{G_x(j\omega)}, \qquad (3.2.7)$$

где $G_y(j\omega)$ и $G_x(j\omega)$ комплексные спектры выходного и входного процессов соответственно, а показатели степени $m \le n$. Если результаты эксперимента удалось аппроксимировать дробно-рациональной функцией, то приводя выражение (3.2.7) к общему знаменателю, получаем:

$$G_y(j\omega)\sum_{l=0}^{n}(j\omega)^l a_n = G_x(j\omega)\sum_{l=0}^{m}(j\omega)^l b_l\ . \qquad (3.2.8)$$

Выполняя преобразование Фурье над (3.2.8), получаем выражение (3.2.2) и задача сводится к предыдущей.

В случае, когда моделируемый объект не может быть подтвержден внешнему воздействию и допустимо лишь наблюдение за его реакцией (рис. 3.2.2), недостаток информации дополняется интуицией и предположениями.

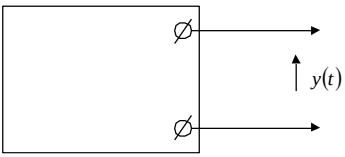

Рис. 3.2.2

Длительное наблюдение за реакцией позволяет ощенить автокорреляционную функцию реакции. В предположении об эргодичности и стационарности реакции автокорреляционная функция равна:

$$K_y(\tau) = \lim_{|t_2 - t_1| \to \infty} \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot y(t - \tau) dt .$$

Преобразование Фурье от автокорреляционной функции дает энергетический спектр наблюдаемого процесса $G_y^2(\omega)$

$$G_y^2(\omega) = G_y(j\omega) \cdot G_y(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Предположим, что моделируемый объект имеет виртуальный вход, на который действует процесс в виде функции Дирака:

$$x(t) = \delta(t) = \begin{cases} 1, если & t = 0 \\ 0, если & t \neq 0 \end{cases} \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1,$$

тогда спектр воздействий на этом входе равен: $G_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$,

а энергетический спектр также равен единице: $G_x^2(\omega) = G_x(j\omega) \cdot G_x(-j\omega) = 1$.

Но отношение энергетического спектра на выходе объекта к энергетическому спектру на его входе есть квадрат амплитудно-частотной характеристики объекта:

$$T^2(\omega) = T(j\omega) \cdot T(-j\omega) = G^2(\omega) = G_y(j\omega) \cdot G_y(-j\omega). \qquad (3.2.9)$$

Полученное соотношение позволяет определить комплексную передаточную функцию моделируемого объекта, как:

$$T(j\omega) = G_y(j\omega).$$

Тогда задача получения уравнений переменных состояния и уравнений наблюдения сводится к предыдущей задаче. В частности, автокорреляционная функция стационарного процесса хорошо аппроксимируется степенной функцией:

$$K_y(t) = Ze^{-\alpha|\tau|}. \qquad (3.2.10)$$

Здесь два коэффициента Z и α определяются экспериментально.

При $\tau = 0$ $K_y(0) = P_{ср}$ есть средняя мощность процесса на выходе. Несложно измерить автокорреляционную функцию для некоторого фиксированного $\tau = \tau_1 > 0$. На рис. 3.2.3 приведена функциональная схема устройства измерения $K_y(\tau_1)$ и $K_y(0)$.

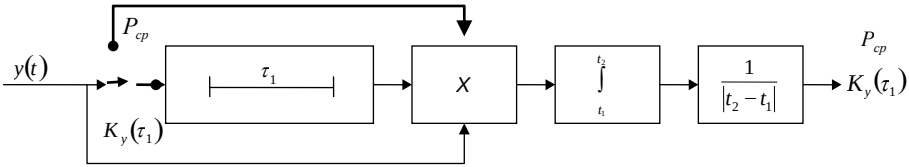

Рис. 3.2.3

Зная $K_y(\tau_1)$ и P_{cp} из (3.2.10) имеем для α следующее выражение:

$$\alpha = \frac{ln P_{cp} - ln K_y(\tau_1)}{\tau_1}.$$

Считая Z и α известными, можно вычислить энергетический спектр реакции:

$$G_y^2(\omega) = Z\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|\tau|}\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau = Z\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-j\omega)\tau} + \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+j\omega)\tau}d\tau\right\} =$$

$$= Z\left\{\left.\frac{e^{(\alpha-j\omega)\tau}}{(\alpha-j\omega)}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-(\alpha+j\omega)\tau}}{(\alpha+j\omega)}\right|_{0}^{+\infty}\right\} = Z\left\{\frac{1}{(\alpha-j\omega)} - \frac{1}{(\alpha+j\omega)}\right\} = \frac{2\alpha Z}{(\alpha-j\omega)(\alpha+j\omega)}.$$

Отсюда получаем для комплексной передаточной функции:

$$T(\omega) = \frac{\sqrt{2\alpha Z}}{\alpha + j\omega} = \frac{G_y(j\omega)}{G_x(j\omega)}.$$

Это выражение можно переписать в следующем виде:

$$\sqrt{2\alpha Z}\cdot G_x(j\omega) = \alpha G_y(jw) + j\omega G_y(jw)$$

Выполняя обратное преобразование Фурье имеем:

$$\sqrt{2\alpha Z}\cdot x(t) = \alpha\cdot y(t) + \frac{dy(t)}{dt}$$

Отсюда, обозначая $y(t) = s(t)$, получаем окончательно уравнение переменной состояния и уравнение наблюдения в форме:

$$\begin{cases} \dfrac{ds(t)}{dt} = -\alpha s(t) + \sqrt{2\alpha Z}\cdot x(t) \\ y(t) = s(t) \end{cases} \qquad (3.2.11)$$

Характерной особенностью полученного результата является скалярная форма внешнего воздействия, состояния и реакции, что существенно упрощает работу с моделью. Процедура аналогичная подобному рассуждению может быть реализована и для случая, когда множества системы являются множествами векторов. Естественно математические выкладки в этом случае оказываются значительно более громоздкими.

Рассмотренные динамические модели являются аналитическими моделями для систем, в которых процессы $\vec{x}(t)$, $\vec{s}(t)$, $\vec{y}(t)$ с непрерывным временем. Важную роль в настоящее время играют модели с дискретным временем, в которых $t = k\Delta t$, где $k = 1,2,3\ldots$ В этом случае процессы являются функцией k, принимающего значение из счетного множества. Преобразуем уравнение 3.2.2 для случая с дискретным временем. При этом производную $\frac{d\vec{s}(t)}{dt}$ представим через приращение и получим:

$$\frac{\vec{S}(k+1)-\vec{s}(k)}{\Delta t} = A(k)\vec{s}(k) + B(k)\left\{\vec{x}(k)+\vec{n}(k)\right\},$$

$$\vec{y}(k) = C(k)\vec{s}(k) + D(k)\left\{\vec{x}(k)+\vec{n}(k)\right\}.$$

Приведем подобные члены в первом уравнении и получим:

$$\vec{s}(k+1) = \left(A(k)\Delta t + I\right)\vec{s}(k) + B(k)\Delta t\left\{\vec{x}(k)+\vec{n}(k)\right\}.$$

Здесь одна единичная матрица. Обозначим:

$$\left(A(k)\Delta t + I\right) = A^*(k), \quad B(k)\cdot\Delta t = B^*(k). \tag{3.2.12}$$

Получаем уравнения переменных состояния и уравнение наблюдения для модели с дискретным временем:

$$\vec{s}(k+1) = A^*(k)\cdot\vec{s} + B^*(k)\cdot\left\{\vec{x}(k)+\vec{n}(k)\right\}$$

$$\vec{y} = C(k)\cdot\vec{s} + D(k)\left\{\vec{x}(k)+\vec{n}(k)\right\} \tag{3.2.13}$$

В дальнейшем, для простоты, мы сохраним обозначения матриц A, B, C и D, помня, что для моделей с дискретным множеством имеют место соотношения (3.2.12).

Аналитически модели в форме 3.2.1 и 3.2.2 наиболее распространены для динамических объектов, однако не является единственным. Традиционно иное представление имеют модели систем массового обслуживания и сетей. В силу их особой важности традиционно сложился свой специфический аппарат описания этих объектов.

3.3 Модели систем массового обслуживания

Система массового обслуживания (СМО) как и любая другая система задается тремя множествами (множество возможных воздействий X, множеством возможных состояний S и множеством возможных реакций Y) и оператором F, связывающих реакцию с состоянием и внешним воздействием. Особенно-

стью СМО является целочисленность внешних воздействий (заявок) и однотипность реакций (обслужена заявка или нет). Обслуживание реализуется приборами (каналами), производительность которых ограничена. На рис.3.3.1 изображена структура СМО. Состояние системы может быть определенно как число свободных обслуживающих приборов. Легко представить себе детерминированную СМО, например, распределитель зажигания в автомобиле, который обслуживает цилиндры, подавая на их свечи напряжение зажигания в моменты, когда коленчатый вал принимает определённое положение. Но это механизмы и они не являются предметом рассмотрения.

Под системой массового обслуживания понимается принципиально стохастические системы, в которых внешнее воздействие и реакция являются случайными потоками однотипных заявок. Потоком называется дискретный по времени и по состоянию процесс. Основными характеристиками случайного потока являются:

- среднее число заявок в единицу времени (интенсивность) λ;
- интервал времени τ двумя заявками.

Характеристики полностью определяются законом распределения $p_k(\tau)$. Это вероятность события заключающегося в том, что за время τ появится k заявок.

Пусть интенсивность входного потока есть λ, а интенсивность выходного потока λ_0. Естественно, что если все заявки, поступающие на вход системы, обслуживаются, то $\lambda = \lambda_0$. Если $\lambda < \lambda_0$, то, следовательно, можно рассматривать поток необслуживаемых заявок с интенсивностью $\lambda_н$, причем $\lambda = \lambda_н + \lambda_0$ (рис.3.3.1).

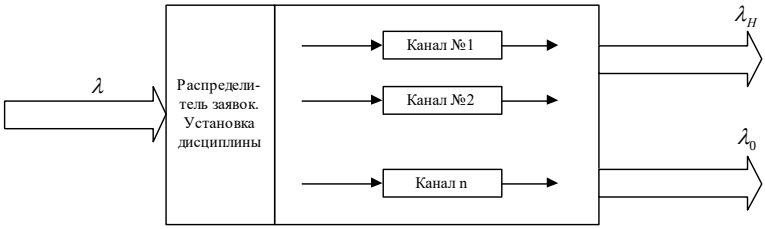

Рис.3.3.1

Поток называют **стационарным,** если вероятность поступления «k» заявок в интервал времени от t_1 до t_2 определяется только длительностью интервала $\delta = t_1 - t_2$ и не зависит от моментов времени t_1 и t_2, так что:

$$p(t_2 - t_1) = p(\tau) \quad \text{invar } (t_1, t_2)$$

Поток называется **ординарным,** если вероятность поступления в интервал времени τ двух и более заявок пренебрежимо мало по сравнению с вероятностью поступления одной заявки.

Поток называют **потоком без последствия**, если для любых неперекрывающихся интервалов число заявок, попадающих в один из них, не зависит от того, сколько заявок попало в другие интервалы.

Поток называется **простейшим**, если является стационарным, ординарным и без последствия.

Поток, порожденный несколькими источниками, генерирующими случайные, независимые друг от друга потоки, которые затем суммируются, является простейшим.

Для простейшего потока вероятность появления K заявок за промежуток времени τ подчиняется закону Пуассона:

$$p_K(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^K}{K!} e^{-K\tau} \qquad (3.3.1)$$

Математическое ожидание числа заявок, поступающих за время τ в простейшем потоке, равно:

$$M[K(\tau)] = \sum_{K=1}^{\infty} K_K p_K(\tau) \cong \lambda\tau \qquad (3.3.2)$$

Важной характеристикой потока заявок является интервал времени между заявками, который является случайной величиной T. Интегральная функция распределения этой величины равна:

$$F_T(t) = B_{cp}\{T < t\} = 1 - p_0(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad t \geq 0 \ . \qquad (3.3.3)$$

Тогда плотность распределения случайной величины T:

$$W_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \ . \qquad (3.3.4)$$

На рис.3.3.2 приведен график функции $W_T(t)$.

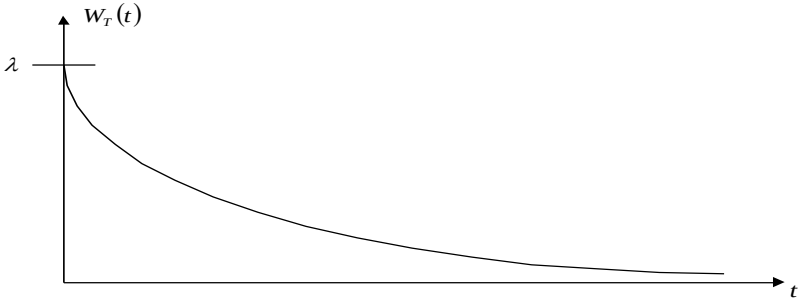

Рис. 3.3.2

Определим параметры распределения величины T. Математическое ожидание:

$$m_t = \int_0^{\infty} t W_T(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt \ .$$

Обозначая $t = U$; $e^{-\lambda t}dt = dv$; $v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$ и применяя правило интегрирования по частям

$$\int_a^b U dv = Uv\Big|_a^b - \int_a^b v dU ,$$

имеем:

$$m_t = -\frac{1}{\lambda}te^{-\lambda t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda} .$$

Аналогично для дисперсии:

$$D_t = \int_0^\infty t^2 W_T(t)dt - m_t^2 = \lambda\int_0^\infty t^2 e^{-\lambda t}dt - \frac{1}{\lambda^2}$$

Обозначая $U = t^2$; $dU = 2t$; $v = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \int_0^\infty dv = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty$,

имеем:

$$D = \lambda\int_0^\infty t^2 e^{-\lambda t}dt - \frac{1}{\lambda^2} = -\frac{t^2}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty te^{-\lambda t}dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} .$$

Если в простейшем потоке интервалы времени между заявками независимы, то такой поток называют потоком Пальма.

Оператор модели системы массового обслуживания задается правилом обслуживания заявок. Время обслуживания заявки T_0 обычно также является случайным. Закон распределения этой случайной величины обычно принимают экспоненциальным, так что

$$F_{T_0}(t) = B_{ер}\{T_0 < t\} = 1 - e^{-\mu t} ,$$

а плотность распределения вероятностей:

$$W_{T_0}(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad (3.3.5)$$

здесь μ – есть интенсивность обслуживания заявок, т.е. число обслуженных заявок в единицу времени.

Понятно, что, математическое ожидание и дисперсия T_0, равны соответственно:

$$m_{T_0} = \frac{1}{\mu}, \qquad D_{T_0} = \frac{1}{\mu^2} .$$

Ясно, что если $\mu \geq \lambda$, то все заявки обслуживаются и $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda_H = 0$. Сложности начинаются когда $\mu < \lambda$. В этом случае многое зависит от дисциплины обслуживания, которая устанавливается в системе. В простейшем случае, заявке поступившей в момент, когда все каналы обслуживания заявок заняты, дается отказ. При этом поток обслуженных заявок будет являться потоком Эрланга. Потоком k-го порядка называется поток, получаемый из простейшего

потока сохранением каждой $(k+1)$-ой заявки и исключения остальных. Для потока Эрланга k-го порядка плотность распределения интервала времени между соседними заявками имеет вид:

$$W_T(t) = \frac{\lambda(\lambda e)^K}{K!} e^{-\lambda t}, \qquad (3.3.6)$$

где λ — интенсивность исходного простейшего потока.

В системе массового обслуживания с отказами важной характеристикой является вероятность события, заключающегося в том, что поступившая на вход заявка будет обслужена.

Пусть система содержит n независимых одинаковых каналов обслуживания. Будем считать, что поток заявок на входе простейший с интенсивностью λ, а вероятность обслуживания заявки одним прибором подчиняется экспоненциальному закону:

$$W_{T_0}(t) = \mu e^{-\mu t}$$

Определим вероятность события, заключающегося в том, что поступившая заявка будет обслужена. Для этого введем понятие <u>состояния</u> системы. Будем считать, что в момент времени t система находится в состоянии S_K, если в ней в этот момент обслуживается K заявок (K каналов обслуживания заняты). Так, что s_0 соответствует ситуации, когда все каналы свободны, а s_n — ситуации, когда все каналы заняты. Если событие заключается в том, что в момент времени t занято K каналов, обозначим вероятность этого события как $p_K(t)$, то имеет место равенство:

$$\sum_{K=0}^{n} p_K = 1.$$

Для произвольного K вероятность $p_K(t+\Delta t)$ того, что в момент времени $t+\Delta t$ система окажется в состоянии s_K равна сумме вероятностей трех событий A, B и C:

$$p_K(t+\Delta t) = p(A) + p(B) + p(C),$$

где A — событие заключающееся в том, что система в момент времени t находилась в “K”-ом состоянии и за промежуток времени “Δt” не поступило ни одной заявки и ни одна из заявок не была обслужена. Вероятность этого события равна:

$$p(A) = e^{-\lambda\Delta t} \cdot \left[e^{-\mu\Delta t}\right]^K = e^{-(\lambda+K\mu)\Delta t}$$

Принимая во внимание малость Δt после разложения в ряд и, пренебрегая членами содержащими Δt^l $l \geq 2$, получаем

$$p(A) \cong p_K(t)\left[1-(\lambda+K\mu)\Delta t\right]$$

Событие B заключается в том, что в момент времени t система находилась в состоянии S_{K-1} (заняты $K-1$ каналов), а за время Δt поступила одна заявка

$$\mathrm{p}(\mathrm{B}) \approx p_{K-1}(t)\lambda\Delta t0$$

Наконец событие C означает, что в момент t система находилась в состоянии S_{K+1} ($K+1$ каналов занято), один канал освободился и заявок не поступало, так что

$$p(C) \approx (K+1)p_{K+1}(t)\Delta t$$

Таким образом, для вероятности $p_K(t+\Delta t)$ имеем:

$$p_K(t+\Delta t) = \lambda\Delta t p_{K-1} + [1-(\lambda+K\mu)\Delta t]p_K(t) + (K-1)\mu\Delta t p_{K+1}(t) \qquad (3.3.7)$$

для $0 < K < n$

Из полученного соотношения имеем для производной:

$$\frac{dp_K(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_K(t+\Delta t) - p_K(t)}{\Delta t} = \lambda p_{K-1}(t) - (\lambda + K\mu)p_K(t) + (K+1)\mu\Delta t p_{K+1}(t).$$

В крайних случаях выражение 3.3.7 несколько видоизменяется. Так для случая $K=0$ следует положить что $p_{K-1} = p_{-1}(t) = 0$. При $K = n$, вероятность события A несколько изменяется и равно вероятности того, что за время Δt не освободится ни один канал, т.е.

$$p(A) = \left(y^{-\mu\Delta t}\right)^n \approx 1 - \mu n\Delta t\ .$$

Кроме того, следует иметь в виду, что $p_{n+1}(t) = 0$. В конечном итоге получаем систему дифференциальных уравнений для стационарного режима, известных как уравнения Эрланга.

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) = 0 \text{ для } K = 0$$

$$\frac{dp_K(t)}{dt} = \lambda p_{K-1}(t) - (\lambda + K\mu)p_K(t) + (1+K)\mu p_{K+1}(t) = 0 \text{ для } 0 < K < n$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t) = 0 \text{ для } K = n \qquad (3.3.8)$$

Уравнение 3.3.8 позволяют выразить все вероятности через p_0. Из первого уравнения имеем:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho\, p_0, \text{ где } p = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Из уравнения для $K=1$ $\frac{dp_K(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu)p_1(t) + 2\mu p_2(t) = 0$ имеем:

$$p_2 = \frac{1}{2\mu}\left[-\lambda\, p_0 + (\lambda+\mu)\, p_1\right] = \frac{1}{2\mu}\left[-\lambda\, p_0 + (\lambda+\mu)\rho\, p_0\right].$$

Продолжая далее, получим:

$$p_K = \frac{\lambda^K}{K!\,\mu^K}\, p_0 = \frac{\rho^K}{K!}\, p_0 .$$

Вероятность p_0 можно определить из выражения:

$$\sum_{K=0}^{n} p_K(t) = \sum_{K=0}^{n} \frac{\rho^K}{K!}\, p_0(t) = p_0(t) \sum_{K=0}^{n} \frac{\rho^K}{K!} = 1 .$$

Отсюда,

$$p_0(t) = \frac{1}{\sum\limits_{K=0}^{n} \frac{\rho^K}{K!}} .$$

Теперь окончательно для $p_K(t)$ имеем:

$$p_K(t) = \frac{\frac{\rho^K}{K!}}{\sum\limits_{K=0}^{n} \frac{\rho^K}{K!}} .$$

Вероятность отказа есть вероятность события заключающегося в том, что в момент времени t будут заняты все n каналов обработки:

$$p_{от} = p_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum\limits_{K=0}^{n} \frac{\rho^K}{K!}} .$$

Тогда вероятность обслуживания определяется как:

$$p_{об} = 1 - p_{от} = 1 - \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum\limits_{K=0}^{n} \frac{\rho^K}{K!}} \qquad (3.3.9)$$

В частности, из 3.3.9 для одноканальной системы $n = 1$ получим:

$$p_{об} = 1 - \frac{\rho}{1+\rho} = \frac{1}{1+\rho} = \frac{\mu}{\mu+\lambda} \qquad (3.3.10)$$

Из 3.3.10 следует, что если $\mu = \lambda$ в одноканальной системе вероятность обслуживания для простейшего входного потока составляет величину $p_{об} = 0{,}5$.

Может показаться странным полученный результат. Ведь интенсивность поступления заявок λ равна интенсивности их обслуживания и система должна справиться с потоком заявок. И это так и есть, только все зависит от дисциплины обслуживания. Если при занятых каналах обработки поступающей заявке не

давать отказ, а поставить ее в режим ожидания и обслужить, когда появится возможность, то картина изменится.

Рассмотрим режим функционирования системы при организации очереди. В этом случае заявка, поступившая на вход, ставится в очередь, если все каналы заняты. Освобождены канал занимается для обработки пришедшей раньше остальных заявки.

Интенсивность обслуживания при этом пропорциональна числу занятых каналов. Уравнения принимают вид:

$$\frac{dp_K(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p \text{ для } K = 0$$

$$\frac{dp_K(t)}{dt} = \lambda p_{K-1}(t) - (\lambda + K\mu) p_K(t) + (K-1)\mu\, p_{K+1}(t) \text{ для } 1 \le K < n$$

$$\frac{dp_K(t)}{dt} = \lambda p_{K-1}(t) - (\lambda + n\mu) p_K(t) + n\mu p_{K+1}(t) \text{ для } K \ge n \qquad (3.3.11)$$

Для стационарного режима уравнения 3.3.11 приравниваются нулю. Система массового обслуживания справляется с нагрузкой (длина очереди оказывается конечной, если $\lambda \le n\mu$, т.е. $\frac{\rho}{n} < 1$. В противном случае очередь будет расти до бесконечности. Решая 3.3.11, получаем для $p_K(t)$:

$$p_K(t) = \begin{cases} p_0(t) \cdot \frac{1}{K!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K & \text{для} \quad 0 \le K \le n \\ p_0(t) \cdot \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n^{K-n}} & \text{для} \quad K \ge n \end{cases} \qquad (3.3.12)$$

Для определения p_0, как и ранее, используем равенство:

$$\sum_{K=0}^{\infty} p_K = 1.$$

Подставляя p_K из 3.3.12, получаем:

$$p_0 \left[\sum_{K=0}^{n-1} \frac{p^K}{K!} + \frac{p^n}{n!} \sum_{K=n}^{\infty} \left(\frac{p}{n}\right)^{K-n} \right] = 1 \qquad (3.3.13)$$

Отсюда для p_0 получаем:

$$p_0(t) = \frac{1}{\frac{p^n}{n!} \frac{n}{n-p} + \sum_{K=0}^{n-1} \frac{p^K}{K!}} \qquad (3.3.14)$$

Подставляя 3.3.14 в 3.3.13, получаем окончательно для вероятности $p_K(t)$:

$$p_K(t)=\begin{cases} \dfrac{\dfrac{p^K}{K!}}{\dfrac{n\cdot p^n}{(n-p)n!}+\sum\limits_{K=0}^{n-1}\dfrac{p^K}{K!}} & для \quad 0\le K\le n \\ \dfrac{\dfrac{p^K}{n!\cdot n^{K-n}}}{\dfrac{n\cdot p^n}{(n-p)n!}+\sum\limits_{K=0}^{n-1}\dfrac{p^K}{K!}} & для \quad K>n \end{cases} \tag{3.3.15}$$

Полученное выражение позволяет получить среднюю длину очереди $m_{оч}$:

$$m_{оч}=M(K-n)=M(m)=\sum_{m-1}^{\infty}mp_{n+m}$$

После преобразований с использованием 3.3.15 получаем:

$$m_{оч}=\frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-p)^2}p_0 \tag{3.3.16}$$

Длина очереди $m_{оч}$ есть величина случайная. Средняя длина очереди есть математическое ожидание $\overline{m_{оч}}$:

$$\overline{m_{оч}}=\sum_{K=n+1}^{\infty}(K-n)p_K\ ,$$

а среднее время ожидания $\overline{t_{ож}}$:

$$\overline{t_{ож}}=\frac{\overline{m_{оч}}}{\lambda}. \tag{3.3.17}$$

Среди заявок поступивших на вход системы массового обслуживания могут быть заявки с приоритетом в обслуживании. Такие заявки обслуживаются внеочереди. Их наличие просто снижает интенсивность обслуживания системы. Пусть интенсивность заявок с приоритетом равна α. Тогда все полученные соотношения для обслуживания с очередью остаются справедливыми, если интенсивность обслуживания каждым каналом μ заменить на μ^*:

$$\mu^*=\mu-\frac{\alpha}{n}.$$

Здесь имеется в виду, что $\frac{\alpha}{n}<\mu$. В противном случае появляется очередь для заявок с приоритетом, а все остальные заявки получают отказ, и система вырождается в систему с очередью для приоритетных заявок.

Аналогично может быть учтено возможность выхода из строя отдельных каналов обслуживания. Если вероятность выхода канала из строя — $p_{вых}$, то эквивалентная интенсивность обслуживания канала μ^* равна:

$$\mu^* = \mu(1 - p_{вых}).$$

Здесь под вероятностью выхода из строя канала $p_{вых}$ понимается:

$$p_{вых} = \lim_{T \to \infty} \frac{t_П}{T},$$

где T — время функционирования канала, $t_П$ — время простоя. Время функционирования включает в себя время работы t_P и время простоя $t_П$, так что:

$$\mu^* = \lim_{T \to \infty} \frac{t_П}{t_p + t_П}.$$

Таким образом могут быть получены модели систем массового обслуживания с каналами обслуживания имеющими заданную надежность, а также оценки характеристик системы.

В заключении отметим, что в системах массового обслуживания принимается определенная структура системы (рис.3.3.1), определяются характеристики связей между элементами структуры, принимается тип внешнего воздействия (простейший поток), вводится понятие состояния системы. Получается математическая модель (3.3.8) и определяется реакция системы для стационарного режима. Реальные системы могут быть значительно более сложными, чем рассмотренные СМО. При рассмотрении систем с более сложной структурой подходы при решении задач сохраняются прежними.

3.4 Сетевые модели

Сеть это один из способов представления системы, как совокупности элементов и связей между ними. В самом общем случае, под сетью понимают множество элементов (узлов, вершин, точек и т.д.) $U = \{U_i\}$, $i \in I$, $i = 1,2...$ с заданным на этом множестве бинарном отношении $\{v_{i,j}\}$; $v_{i,j} = I$ (определяющем наличие связей между отдельными вершинами), а также изоморфное отображение множества $\{v_{i,j}\}$ на функциональное множество $F = \{f_{i,j}(t)\}$, описывающего процессы в каждой из ветвей.

Устойчивое единство элементов U и заданного на нем бинарного отношения задают структуру системы, а функциональное множество F определяют внешнее воздействие, состояние и реакцию системы. К сетевому моделированию систем прибегают всякий раз, когда элементы системы четко выделяются. Однако на практике и в теории сетей широкое распространение нашли специфические сети. Для них характерны следующие особенности.

1. В качестве функционального множества F выступает числовая ось R. Обычно это либо пропускная способность, либо дальность, либо стоимость, либо вид работы, либо алгоритм и т.д. Иначе говоря, это величина, имеющая определённый физический смысл.

2. Все элементы однотипны в некотором смысле. Все они являются источниками и получателями, а иногда только источниками или получателями некоторого потока, функционирующего в сети. Это может быть поток сообщений в сети связи, поток заявок, поток груза и т.д.

3. Управление системой сеть сводится к оптимальному распределению потока по связи в соответствии с их характеристиками.

Таким образом, сети представляются как более сложные системы массового обслуживания. Для полного задания сети необходимо задать её структуру, а так же параметры узлов и связей. Сеть удобно изображать на рисунке в виде графа. Поэтому в теории сетей используется терминология теории графов. Элементы называют вершинами или узлами.

Ненаправленная связь, когда $v_{ij} = v_{ji}$, называется ребром, направленная связь - дугой. Граф, состоящий из вершин и рёбер, называют ненаправленным, граф, состоящий из вершин и дуг, называют орграфом. Граф, содержащий рёбра и дуги, называют смешанным.

В принципе, граф может иметь ребра и дуги, замыкающиеся на одну и ту же вершину (начальные и конечные вершины совпадают) $v_{ij} \neq 0$. Такие рёбра и дуги называются петлями. Между двумя вершинами могут иметь место несколько связей (ребер и дуг). Такие рёбра и дуги называются параллельными (начальные и конечные вершины совпадают). Граф называется простым, если он не содержит петель и параллельных рёбер или дуг (ветвей).

Два ребра называют смежными, если они имеют общий узел. Две вершины называют смежными, если они соединены ребром. Ребро называются инцидентным вершинам, с которыми оно соединено.

Два узла называются смежными, если они связаны одним ребром (дугой). Число ветвей инцидентных вершине называется степенью вершины. Граф называется полным, если в нём каждая пара вершин смежная. Полный граф содержит $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ ветвей. Граф называется однородным (регулярным), если все его вершины имеют одинаковую степень.

Сеть задаётся матрицей, элементами которой являются параметры связей между узлами. Предварительно узлы нумеруются $U = \{U_i\}$ $i = \overline{1,n}$, матрица связей размерностью $n \times n$. В зависимости от смысла параметра связи L_{ij} отличаются для ветвей v_{ii} и $v_{ij} \neq 0$. Например, если параметр L_{ij} есть пропускная способность линии связи между узлами U_i и U_j, то

$$L_{ij} = \begin{cases} \infty & \text{для } v_{ij}. \\ 0 & \text{для случая } v_{ij} = 0. \\ L_{ij} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если в качестве параметров связей берётся протяжённость линии связи, то выражение для L_{ij} изменяется следующим образом:

$$L_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{для } v_{ij}. \\ \infty & \text{для случая } v_{ij} = 0. \\ L_{ij} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для наглядности сеть изображается в виде графа.

Пример. Пропускные способности линий связи между узлами задаются матрицей:

	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
U_1	∞	10	7	11	6	0
U_2	10	∞	8	0	12	0
U_3	0	0	∞	0	0	8
U_4	11	0	0	∞	0	0
U_5	0	12	9	5	∞	4
U_6	0	0	0	0	4	∞

Из матрицы видно, что граф такой сети смешанный. Здесь есть линии связи направленные и ненаправленные. На рис. 3.41. он изображён.

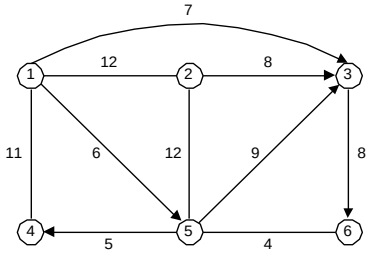

Рис. 3.4.1

Иногда требуется задавать только структуру сети. Это осуществляется с помощью матрицы смежности, которая определяет лишь наличие связи между узлами. Матрица смежности имеет размеры $n \times n$. Её элементами являются $\{r_{ij}\}$ $i = \overline{1,n}$ $j = \overline{1,n}$. Строки и столбцы соответствуют узлам, как и в матрице

пропускных способностей с элементами L_{ij}. Значения элементов матрицы смежности определяют по следующему правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } U_i \text{ соединён с } U_j \text{ дугой } v_{ij} \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Так для сети, изображённой на рис. 3.41., имеем матрицу смежности:

	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
U_1	0	1	1	1	1	0
U_2	1	0	1	0	1	0
U_3	0	0	0	0	0	1
U_4	1	0	0	0	0	0
U_5	0	1	1	1	0	1
U_6	0	0	0	0	1	0

Реже структуру сети задают матрицей инциденций $\mathbf{R}$, отображающей связь между узлами с учетом направлений. Элементы матрицы определяются по правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ветвь } v_{ij} \text{ исходит из узла } U_i \\ -1, & \text{если ветвь } v_{ij} \text{ входит в узел } U_i \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Матрица $\mathbf{R}$ имеет размерность $n \times m$, где n — число узлов, а m — число дуг. Строки, как и в матрице смежностей, обозначаются узлами, а столбцы дугами. Отметим, что в этом случае ребро, если оно имеется, представляется как наличие двух дуг направленных противоположно. Так для приведённого примера имеем:

	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{21}	v_{25}	v_{23}	v_{41}	v_{52}	v_{53}	v_{54}	v_{56}	v_{65}
U_1	1	1	1	1	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0
U_2	-1	0	0	0	1	1	1	0	-1	0	0	0	0
U_3	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0
U_4	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0
U_5	0	0	0	-1	0	-1	0	0	1	1	1	1	-1
U_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1

Пусть G неориентированный граф. Количество рёбер $p(u)$, инцидентных вершине $u \in U$ называется степенью вершины.

Конечная или бесконечная чередующаяся последовательность вершин и рёбер называется маршрутом.

Маршрут называется цепью, если каждое ребро встречается в нём не более одного раза. Цепь называется простой цепью, если любая вершина инцидентна не более двум её рёбрам. Цепь, у которой все вершины различны, есть путь. Замкнутый путь называется циклом. Совокупность всех путей ведущих из узла U_i в U_j называется направлением.

Связанный ациклический подграф $T(G)$ графа $G(U,V)$ называют деревом графа. Дерево, содержащее все вершины графа, называется оставным деревом.

Пусть множество узлов U разбито на два непересекающихся подмножества U_1 и $U_2 = \overline{U_1}$; $U = U_1 \cup U_2$ и $U_1 \cap U_2 = 0$. Множество дуг, каждая из которых начинается в U_1 и заканчивается в U_2, называется разрезом $R(U_1, U_2)$. Нарушение разреза приводит к изоляции подмножеств U_1 и U_2 друг от друга и граф $G(U,V)$ теряет связанность.

При управлении системой типа «сеть», решается ряд оптимизационных задач. Например, оптимальное построение сети, при ограниченных ресурсах, по критерию максимальной надёжности. Наиболее распространенной является задача выбора оптимального маршрута на сети. Такая задача решается при управлении любой транспортной системой, модель которой представлена неориентированным графом $G(U,V)$, а параметры ветвей заданы протяжённостью (или временем распространения) L_{ij}. Пусть выделены две вершины: $U_н$ — начальная и $U_к$ - конечная. Требуется найти маршрут, обеспечивающий минимум

$$L_{нк} = \sum_{i=i_н}^{i_к - 1} L_{i,i+1} ,$$

где $L_{i,i+1}$ — протяжённость смежных узлов на выбранном маршруте.

Решение задачи может быть получено методом динамического программирования (см. гл. VI), если задача не может быть решена переборным методом, когда выделяются все возможные маршруты между $U_н$ и $U_к$, и оцениваются их протяжённость. Сущность метода динамического программирования заключается в решении задачи последовательно от конца к началу (например, от $U_к$).

На первом этапе выделяются все вершины $\{U_{к-1}\}$ смежные с $U_к$ и в них записываются $L_{k-1,k}$ протяжённости до конечной вершины. Затем выделяют множество вершин смежных с $\{U_{к-1}\}$ и из каждой из них ищется наиболее короткий маршрут до $U_к$. Это не очень сложно, поскольку все маршруты проходят через

вершины $\{U_{к-1}\}$ для каждой, из которой известен наиболее короткий маршрут до конечной вершины $U_к$. Затем выделяются подмножества вершин $\{U_{к-2}\}$ смежных с $\{U_{к-1}\}$ и процедура продолжается до тех пор, пока среди следующего множества вершин окажется $U_н$. Тогда определяется протяжённость оптимального маршрута, имеющего минимальную протяжённость, и сам оптимальный маршрут, двигаясь с $U_н$ к $U_к$ по выделенным вершинам. На рис.3.4.2 приведём пример сети. Над дугами указаны протяжённости. Жирными линиями из каждой вершины указаны оптимальные, а в кружке их протяжённость. Пунктиром отмечен оптимальный маршрут.

В зависимости от смысла, который присваивается узлам и дугам сети, рассматриваются не абстрактные, а конкретизированные сети. Они изучаются, исследуются и применяются на практике уже как самостоятельные объекты. Ярким примером такого подхода являются сети алгоритмов и, как частный случай этих сетей, сетевые планы (сетевое планирование).

В алгоритмических сетях под узлами принято понимать некоторые операции (алгоритмы), а дуги представляют собою переменные, над которыми производятся операции.

Понятие алгоритма относится к функциональным понятиям математики (аксиомам) и не нуждается в определении (как, например, множество или число). Тем не менее, это понятие требует пояснения.

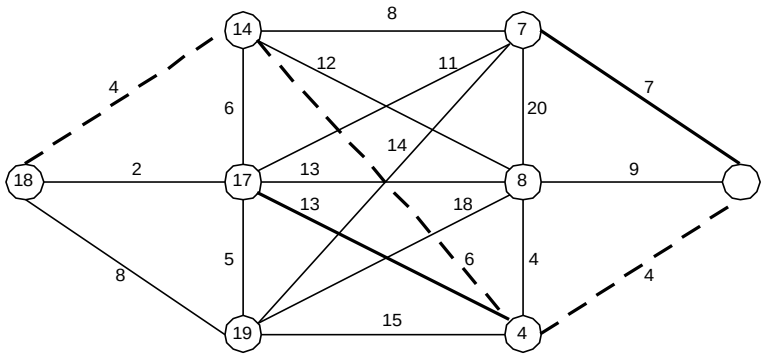

Рис 3.4.2

Алгоритм — это точное предписание, которое задаёт вычислительный процесс, начинающейся с произвольного (но выбранного из фиксированной для данного алгоритма совокупности) исходного данного и направляемой на получение полностью определяемого этим исходным данным результата (Марков 1957г.).

Следуя академику Колмогорову отметим особенности алгоритма:

1. Алгоритм, как детерминированная процедура, применяется ко всякому начальному состоянию из некоторого заданного множества.
2. Алгоритм, как процесс, расчленяется на отдельные шаги заранее ограниченной сложности. Каждый шаг состоит из “непосредственной переработке” возникшему к этому шагу состояния.
3. Процесс переработки продолжается до тех пор, пока либо появится сигнал о получении решения, либо произойдёт остановка в следствии выхода состояния за пределы определённости оператора процесса.

Из перечисленных особенностей следует, что любой алгоритм представляет собою детерминированный итеративный процесс, в котором многократно применяется одна и та же операция, отличающаяся сравнительной простотой.

Алгоритмическая сеть есть структура вычислительного алгоритма, и представляет собой конечный ориентированный нагруженный граф, вершинам которого сопоставлены операторы, а дугам – переменные, связываемые оператором.

В качестве элементарных операторов приняты сложение «+», вычитание «–», умножение «$\bullet$», задержка по времени «Δt», выведение строки переменных $stan(x_3 . x_n)$ (вывод от x_3 до x_n) и др.

На рис. 3.4.3 приведён пример алгоритмической сети.

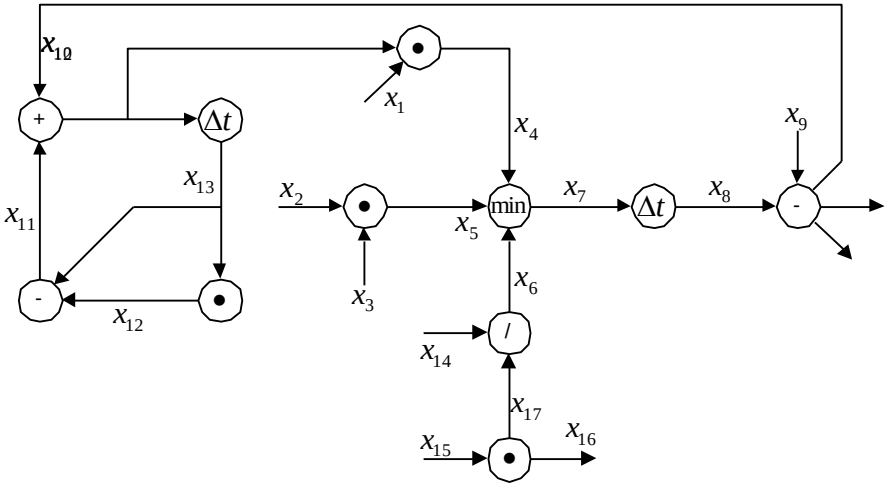

Рис. 3.4.3

Разработка алгоритмической сети существенно упрощает процесс программирования сложных задач. В теории алгоритмических сетей рассматриваются приёмы упрощения алгоритмической сети. Для этого рассматривается множество элементарных операторов и вводятся операции объединения нескольких операторов в один эквивалентный целому блоку сети.

Широкое распространение при управлении большими организационно–техническими системами получило сетевое планирование. Последнее представляет собою календарное планирование совокупности взаимосвязанных операций (работ), для выполнения которых требует затрат времени и ресурсов. Сетевой план представляется в виде ориентированного графа, дугами которого отмечаются работы. Работы (дуги) разделены вершинами, которые принято называть состояниями (или событиями). Вершины могут иметь исходящие работы (которые следуют после свершившегося события) и входящие (которые предшествуют данному событию).

Событие, которое не имеет предшествующих работ (входящих дуг), называется исходным. Событие, не имеющее исходящих работ, является завершающим.

Каждая операция в сети представляется только одной дугой. Ни одна из операций не появляется дважды. Если работа разбивается на различные этапы (части), то работа каждого этапа изображается своей дугой. Ни одна пара операций не должна иметь одинаковые начальное и конечное событие. Если имеются параллельно выполняемые работы, то их изображают с фиктивно вводимым узлом и фиктивной работой, которая имеет нулевое время выполнения и изображается пунктиром рис. 3.4.4.

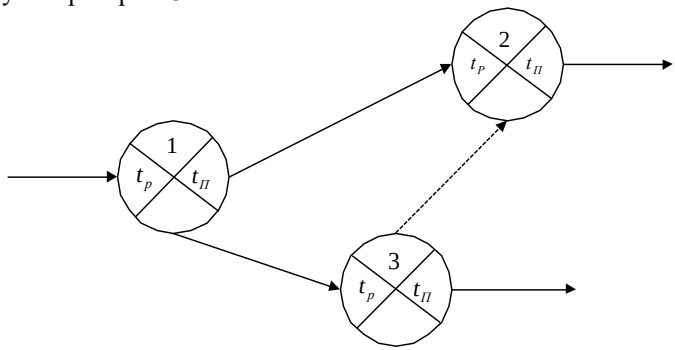

Рис. 3.4.4

Вершины сетевого плана изображаются кружком разделённого на четыре сектора. В верхнем секторе помещается номер события. В левом секторе (рис 3.4.4) раннее время наступления события t_p, в правом секторе располагают позднее время наступления события $t_П$. В нижнем секторе помещают резерв времени $P_T = t_П - t_p$.

Снизу, под дугой, изображающей работу, отмечают время необходимое для её выполнение t_{ij}, а иногда и необходимый ресурс (число людей необходимых для выполнения работы, материалы и т.д.). Сверху обозначение работ.

Раннее время наступления события вычисляется, начиная с исходного события, которому приписывают время наступления из аппаратных сведений. Для каждого последующего события время наступления вычисляется по формуле:

$$t_{pj} = max\left(t_{pi} + t_{ij}\right),$$

где t_{pi} — раннее время наступления предшествующего события, t_{pj} — раннее время наступления рассматриваемого события, t_{ij} — продолжительность операции между i –м и j –м событиями.

Позднее время наступления события вычисляется с завершающего события, которому априори устанавливается значение самого позднего времени, когда будут завершены все работы. Вычисление для каждого события позднего время завершения вычисляется из соотношения:

$$t_{ni} = min\left(t_{nj} - t_{ij}\right).$$

После этого определяют критический путь между исходным и завершающим событием. Критический путь образуется дугами, для которых между началом и окончанием операции запас времени отсутствует, так что: $t_{pi} = t_{ni}$, $t_{pj} = t_{nj}$, $t_{pj} - t_{pi} = t_{ij}$.

На рис. 3.4.5 изображён сетевой план. Критический путь показан двойными линиями. Пунктиром изображены фиктивные работы.

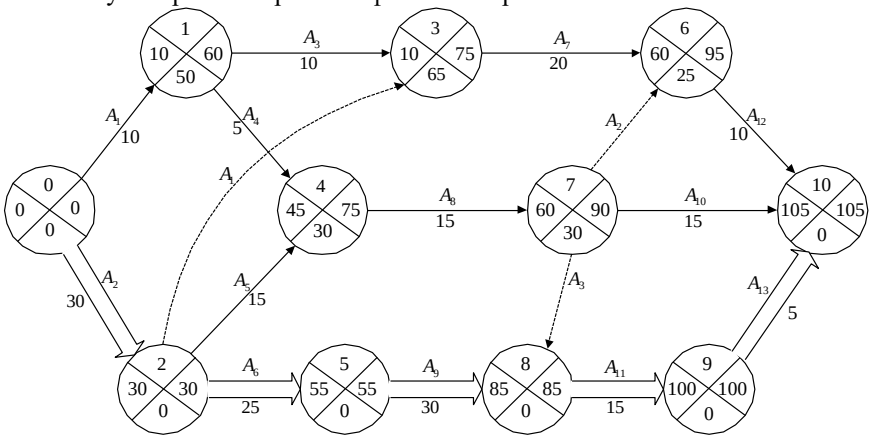

Рис. 3.4.5.

Событие с заданным номером наступает тогда, когда все входящие в него работы выполнены (в том числе и фиктивные).

Сетевой план составляется обязательно при управлении большими организационными и организационно–техническими системами. Он разрабатывается при принятии решения на управление. Корректируется и изменяется в процессе решения всех, выше перечисленных задач.

3.5 Имитационное моделирование

Имитация (лат.imitatio) – подражание, подделка, воспроизведение. Из определения следует, что моделирование всегда является некоторой формой имитации. В русской научной литературе под имитационным моделированием принято понимать статистическое исследование аналитических моделей систем на электронно-вычислительных машинах с целью изучения поведения моделируемой системы в реальных ситуациях и получения количественных характеристик, которые аналитически получить не удается. Имитационное моделирование включает в себя следующие этапы.

1. На основе аналитической модели исследуемой системы строится функциональная схема алгоритма статистических исследований. Так для модели заданной в форме уравнений переменных состояния и уравнений наблюдения схема алгоритма принимает следующий вид:

$$\frac{d\,\vec{s}(t)}{dt} = A(t)\cdot\vec{s}(t) + B(t)\cdot\vec{x}(t),$$

$$\vec{y}(t) = C(t)\cdot\vec{s}(t) + D(t)\cdot\vec{x}(t).$$

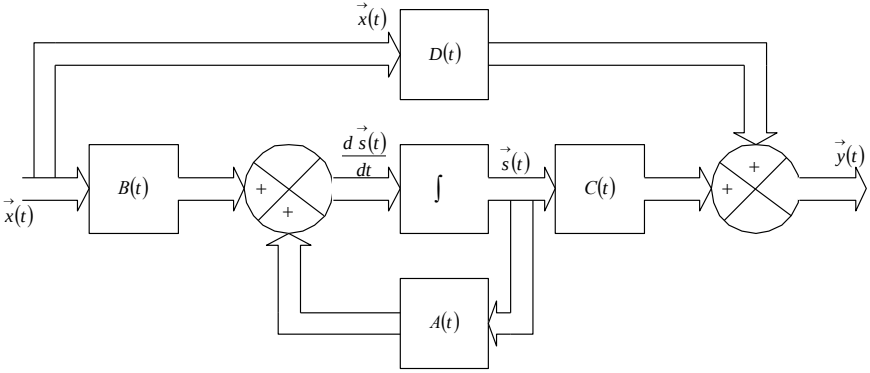

Рис. 3.5.1

Для модели динамической системы с дискретным временем функциональная схема алгоритма строится аналогично.

$$\vec{s}(k+1) = A^*\cdot\vec{s}(k) + B^*\cdot\vec{x}(k),$$

$$\vec{y}(k) = C^*\cdot\vec{s}(k) + D^*\cdot\vec{x}(k),$$

Схемы отличаются тем, что вместо интегратора в первой схеме во второй стоит линия задержки на время дискретизации. Кроме того, векторы переменных $\vec{s}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ и матрицы A^*, B^*, C^*, D^* задаются в дискретном времени.

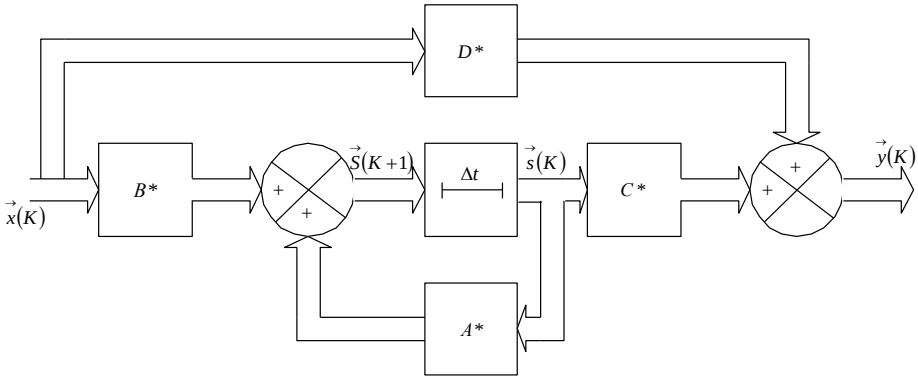

Рис. 3.5.2

Несколько иначе выглядят схемы алгоритмов, если аналитические модели принимаются в виде дифференциального уравнения:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^{(i)}y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{n} b_j \frac{d^{(j)}x(t)}{dt^j}.$$

Здесь для простоты, приняты одинаковые порядки производных. Перепишем дифференциальное уравнение в несколько иной форме:

$$a_0 \cdot y(t) = b_0 x(t) + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{d^{(k)}x(t)}{dt^k} \cdot b_k - \frac{d^{(k)}y(t)}{dt^k} \cdot a_k \right\} = b_0 x(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^{(k)}}{dt^k} \{ b_k \cdot x(t) - a_k \cdot y(t) \},$$

и после переименования коэффициентов окончательно получаем:

$$y(t) = c_0 x(t) + \sum_{k=1}^{n} \left\{ r_k \cdot \frac{d^{(k)}y(t)}{dt^k} + c_k \cdot \frac{d^{(k)}x(t)}{dt^k} \right\}.$$

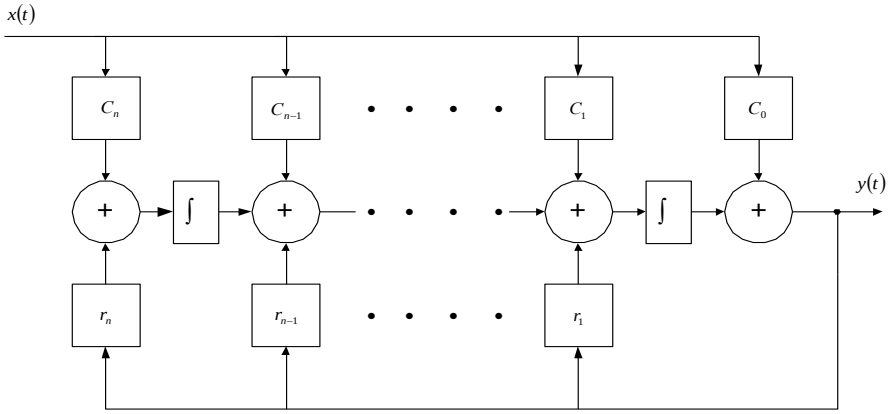

Рис. 3.5.3

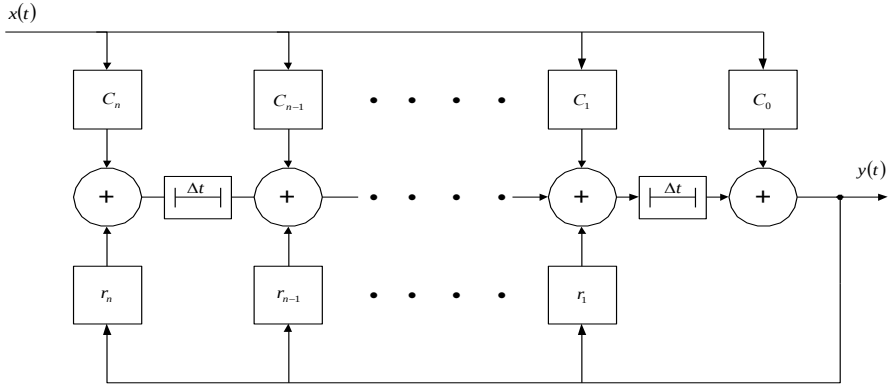

Рис. 3.5.4

Приведенные схемы отличаются не только тем, что вместо интегратора появилась линия задержки, но отличаются матрицы и переменные $\vec{s}(K)$; $\vec{x}(K)$; $\vec{y}(K)$ являются функциями дискретного времени.

Функциональные схемы алгоритма будут выглядеть иначе, если модель будет принята иной.

2. На втором этапе имитационного моделирования реализуется машинная имитация всех процессов действующих на управляемую систему. В общем случае эти процессы являются случайными с заданными (известными) законами распределения вероятностей. Поэтому машинная имитация процессов сводится к разработке машинной программы на некотором языке. Центральной задаче в решении этой проблемы является моделирование независимых случайных чисел равномерно распределенных в интервале [0,1]. В принципе существуют таблицы случайных величин с широким классом распределений. Однако их использование требует значительного объема памяти. Проще решается задача м использованием рекуррентных формул воспроизводящих последовательность псевдослучайных чисел. Такую последовательность полностью определяет задание начального числа λ_0, из которого последовательно получают новые числа лежащие в интервале [0,1]. Пусть имеется число λ_K в десяти чисел исчислении, $\lambda_K = [0,1]$, тогда следующее число λ_{K+1} получают, например,

$$\lambda_{K+1} = C\lambda_K - |C\lambda_K|$$

Здесь $\lambda C = 8t + 3$, t – целое $|\cdot|$ - операция выделения целой части чисел. Для получения последовательности чисел с хорошими вероятностями характеристиками начальное число $\lambda \in [0,1]$ выбирают с максимально возможной разрядностью.

Проверка равномерности распределения случайных чисел осуществляется методами математической статистики. Это задача испытания гипотез.

Пусть эта задача решена и имеется случайная величина λ с равномерным законом распределения в интервале $[0,1]$, так что для него плотность распределения вероятностей принимает вид

$$W_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [0,1] \\ 1 & x \in [0,1] \end{cases}$$

Предположим, что требуется получить модель случайного дискретного события принимающего значения $s_1, s_2 ... s_n$ с вероятностями $p_1, p_2 ... p_n$, так что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, т.е. события $s_1, s_2 ... s_n$ взаимно исключающиеся. Тогда интервал $[0,1]$ следует разбить на n участков шириной $p_1, p_2 ... p_n$. Генерируя теперь случайные числа с равномерным законом распределения λ считаем, что произошло событие s_i, если число попало в интервал с номером i. Вероятность этого события равна:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_\lambda(x) dx = p_i$$

Несколько сложнее моделировать непрерывные случайные величины с заданной плотностью вероятностей $W_\eta(x)$ и интегральным законом распределения вероятностей $F_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\eta} W_\eta(x) dx$.

Доказано, что решение уравнения $F_\eta(x) = \lambda$ относительно η дает функцию преобразующую случайную величину λ с распределением $W_\lambda(x)$ в случайную величину η с распределением $W_\eta(x)$.

Предположим, что нужно получить последовательность значений случайной величины η, распределенной по показательному закону:

$$W_\eta(x) = \alpha e^{-\beta x}, \quad x \geq 0 .$$

Тогда интегральная функция распределения случайной величины η будет равна

$$F_\eta(y) = \int_0^y W_\eta(x) dx = \alpha \int_0^y e^{-\beta x} dx = -\frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta x} \Big|_0^y = -\frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta y} + 1$$

Тогда решаем уравнение $1 - \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta\eta} = \lambda$ относительно η, получаем выражение для случайной величины, распределенной по закону $W_\eta(x)$:

$$\eta = -\frac{1}{\alpha} ln(1 - \lambda)$$

Теперь генерируя величину λ с равномерным законом распределения вычисляем значение случайной величины η распределенную по показательному закону.

Еще более серьезные трудности имеют место при имитации случайных процессов. Это может быть реализовано лишь в некоторых частных случаях. Действительно. В самом общем случае, случайный процесс есть случайная величина закон распределения вероятностей которого зависит от некоторого параметра (обычно от времени). Случайный процесс считается заданным, если для любых моментов времени $t_1, t_2 ... t_n$ из промежутка существования процесса T известна совместная плотность распределения вероятностей $W(\lambda_1, t_1; \lambda_2, t_2 ... \lambda_n, t_n)$.

Понятно, что для непрерывного промежутка времени число комбинаций моментов несчетно и имитировать такой процесс невозможно без определенных допущений.

Рассматривают, например, случайный процесс с дискретным временем на $N = \frac{1}{2\Delta F}$ моментов времени через промежутки $\Delta t = \frac{1}{2\Delta F}$. Здесь ΔF полоса частот, занимаемая процессом. Показано, что случайные величины в этих точках являются независимыми. Теперь реализация случайного процесса имитируется имитированием n случайных величин для $t_1, t_2 ... t_n$. Решение задачи упрощается, если процесс стационарен и закон распределения не зависит от времени. При этом имитацией случайной величины для n точек по одному и тому же правилу.

3. На третьем этапе имитационного моделирования исследуется реакция системы при различных внешних воздействиях. По существу это машинный эксперимент над системой, для которой задана аналитическая модель. Целью этого эксперимента может быть:

1. Определенные закона распределения вероятностей реакции $\vec{y}(t)$ на основе полученной выборки при имитации воздействия $\vec{x}(t)$. Это задача математической статистики.

2. Выбор оптимального воздействия гарантирующего нужную реакцию (задача оптимального уровня).

3. Синтез аналитической модели системы, если воздействия $\vec{x}(t)$ и реакция $\vec{y}(t)$ заданы. Это задача специального направления в науке известное как планирование эксперимента, которая является составной частью оптимального синтеза систем.

4. Оценка устойчивости управления.

И многие другие задачи.

Глава 4. Оценивание

4.1 Постановка задачи оценивания. Основные определения

Оценивание, как было отмечено, есть процесс определения состояния системы $s \in \mathbf{S}$ на основе анализа результатов наблюдения за реакцией системы.

В общем случае состояние системы $\mathbf{S}$ является вектором $\vec{\mathbf{S}} = \{S_1, S_2, ...S_n\}^t$, составляющие вектора состояний $S_i \quad i = \overline{1,n}$ называются переменными состояния. Переменные состояния являются непрерывными по состоянию величинами в любой момент времени. В общем виде, уравнение наблюдения можно записать в форме:

$$y(t) = F\left(\vec{S}(t), \vec{x}(t), \vec{n}(t)\right) \quad t > t_0, \tag{4.1}$$

где $\vec{x}(t)$— вектор внешних воздействий, $\vec{n}(t)$— вектор случайных воздействий.

Для линейной системы уравнение наблюдения принимает более простой вид

$$\vec{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{S}(t) + \mathbf{D}(t)\left[x(t) + n(t)\right], \tag{4.2}$$

где $\mathbf{C}(t)$ и $\mathbf{D}(t)$— матрицы функций, для стационарной системы это матрицы чисел. (Соответственно $\mathbf{C}$ выходная и $\mathbf{D}$ проходная матрицы).

Поскольку уравнения (4.1.1 и 4.1.2) является стохастическими, то и относительно оценки $\tilde{S}(t)$ можно заключить, что это случайный процесс. Случайным процессом является и результат наблюдения реакции $\vec{\mathbf{y}}(t)$. Характеристики случайного процесса $n(t)$ относятся к априорным данным. Определение закона распределения результатов наблюдения $\vec{\mathbf{y}}(t)$ является статистической задачей известной как задача испытания гипотез. Напомним, что случайный процесс $\vec{\mathbf{y}}(t)$ задан, если для любых моментов времени $t_1, t_2, ..., t_n$ может быть указана совместная плотность распределения вероятностей $W_Y(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$. Для стационарного в широком смысле случайного процесса одномерная плотность распределения вероятностей не зависит от времени, и поэтому достаточно задать одномерную плотность распределения вероятностей $W_Y(\lambda)$. В дальнейшем, как принято, для упрощения записи плотность распределения вероятностей некоторой случайной величины ε будем обозначать $W(\varepsilon)$, вместо $W_\varepsilon(\lambda)$, памятуя, что в аргументе функции плотности стоит фиксированное значение случайной величины, а не сама случайная величина.

Таким образом, в результате обработки результатов наблюдения и используя априорные сведения необходимо получить $W(S/x)$ и на ее основании выработать оценку состояния $\tilde{S}$. Кроме того, априори вырабатывается функция потерь, характеризующая последствия неточности оценок состояния $L\left(S - \tilde{S}\right)$.

Областью задания функции потерь является ошибка оценки $\left(S-\tilde{S}\right)$. Как правило, существенным является лишь модуль погрешности $\left|S-\tilde{S}\right|$. Областью существования $L\left(S-\tilde{S}\right)$ является множество положительных чисел. Из сказанного следует, что функция потерь должна обладать свойствами:

1. Положительность $L\left(S-\tilde{S}\right)\geq 0$
2. Четность $L\left(S-\tilde{S}\right)=L\left(\tilde{S}-S\right)$
3. Если $S=\tilde{S}$, то $L\left(S-\tilde{S}\right)=0$.
4. $L\left(S-\tilde{S}\right)$ — есть монотонно неубывающая функция $\left(S-\tilde{S}\right)$

Следовательно, функция потерь является одномодальной (имеющей один абсолютный минимум).

Оценка $\tilde{S}$, может быть представлена как в виде точечной оценки, когда выделяется конкретное значение оценки $\tilde{S}^0$ (обычно как выборочный первый момент) и при этом приводится второй центральный выборочный момент, который характеризует точность оценки, так и в виде интервальной оценки, когда задается интервал $\left[S_1,S_2\right]$ и вероятность события заключающегося в том, что истинное значение $S\in\left[S_1,S_2\right]$, при этом предполагается, что интервал выбирается симметрично относительно математического ожидания случайной величины S, так что $\int\limits_{S_1}^{S_0}W(S)dS=\int\limits_{S_0}^{S_2}W(S)dS$, где $S_0=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}SW(S)dS$ — математическое ожидание.

Алгоритмы оценивания строят на основе априорных данных и вырабатываемых на их основе критериях и функциях качества оценивания. Если все необходимые априорные данные известны, то оценивание происходит в условиях полной априорной определенности. Если в априорных данных не хватает информации о некоторых параметрах, то говорят что оценивание осуществляется в условиях параметрической неопределенности. Наконец, если в априорных сведениях нет необходимых для решения задачи оценивания законов распределения вероятностей случайных величин, то оценивание осуществляется в условиях непараметрической априорной неопределенности.

Основными свойствами точечных оценок являются: несмещенность, состоятельность, эффективность и достаточность.

Оценка называется **<u>несмещённой</u>**, если её математическое ожидание равно математическому ожиданию оцениваемой величины:

$$\tilde{S}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{S}W(\tilde{S})d\tilde{S}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}SW(S)dS=M(S).$$

Оценка называется **<u>состоятельной</u>**, если она сходится по вероятности к математическому ожиданию оцениваемой величины:

$$\text{для } \forall\varepsilon \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\widetilde{\mathrm{S}}_{\mathrm{n}}\right| - M(S) \geq \varepsilon\right\} = 0,$$

где $\widetilde{S}_n$ — оценка по выборке объёма n.

Оценку называют **эффективной**, если дисперсия ошибки оценивания минимальна:

$$M\left[\left(\widetilde{S}_{Эф} - \widetilde{S}\right)^2\right] \leq M\left[\left(\widetilde{S} - \widetilde{S}\right)^2\right] \text{ для } \forall\ \widetilde{S} \in S \tag{4.3}$$

Для несмещённой оценки эффективная оценка имеет минимальную дисперсию $D\left[\widetilde{S}_{Эф}\right] < D\left[\widetilde{S}\right]$

Нижняя граница дисперсии оценок определяется неравенством Рао-Крамера

$$D[\widetilde{S}] \geq \frac{\left[t\dfrac{\partial B(S)}{\partial S}\right]^2}{M\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial S} lnW(y/S)\right)^2\right]}, \tag{4.4}$$

где $B(S) = M(\widetilde{S}) - S$ – смещение оценки.

Для несмещённой оценки $B(S) = 0$ неравенство РАО-Крамера примет вид:

$$D(\widetilde{S}) \geq \frac{1}{M\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial S} lnW\left(y/S\right)\right)^2\right]} \tag{4.5}$$

Неравенство РАО-Крамера даёт нижнюю границу дисперсии, при условии, что задана (известна) условная плотность распределения вероятностей W(y/S) реакции при фиксированном состоянии “S”(функция правдоподобия).

Оценка называется **достаточной**, если функция правдоподобия представлена в виде:

$$W(y/S) = f(y,S) \cdot h(y),$$

где $f(y,S)$ зависит от S_1 и y, $h(y)$ — функция, зависящая только от наблюдаемой величины.

4.2. Виды функции потерь. Критерии

Функция потерь (функция штрафа) $L(S,\widetilde{S})$, как было отмечено, должна обладать свойством четности, быть неотрицательной и неубывающей. Широко используются на практике три функции потерь:

а) Прямоугольная функция потерь (рис. 4.2) (простая функция потерь).

$$L_n = \begin{cases} 0, \text{ для } \left|\bar{S}\right| < \varepsilon \\ 1, \text{ для } \left|\bar{S}\right| \geq \varepsilon \end{cases} \tag{4.6}$$

б) Модульная функция потерь $L_m(\bar{S})$

$$L_m = \left|\bar{S}\right| \tag{4.7}$$

в) Квадратичная функция потерь L_k

$$L_k = \begin{cases} \mathbf{K} \cdot \bar{S}^2, \text{ при скалярной } \bar{S} \\ \bar{S} \cdot \mathbf{K} \cdot \bar{S}, \text{ при векторной } \bar{S} \end{cases} \tag{4.8}$$

Здесь $\mathbf{K}$ — симметричная отрицательно определенная матрица.

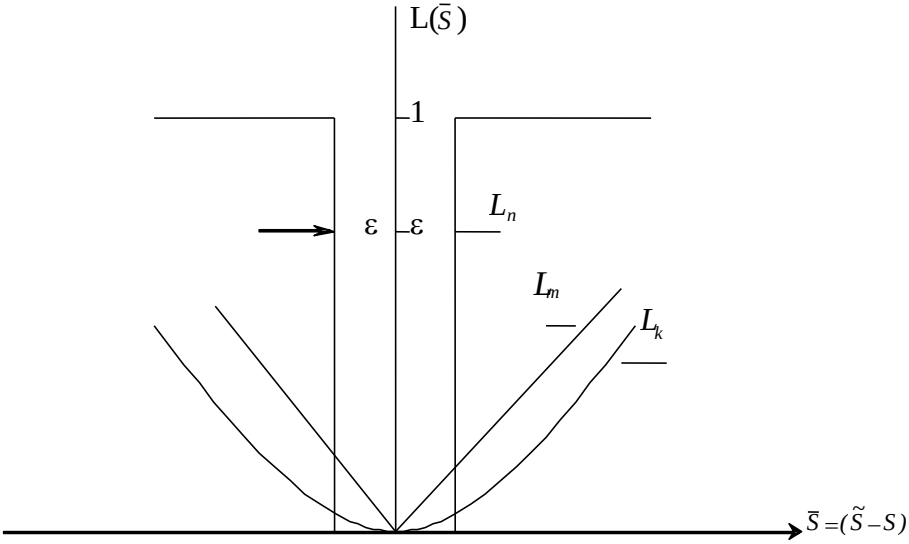

Рис. 4.2

Так как оценки $\tilde{S}$ и результаты наблюдения y являются величинами случайными, то потери (штрафы) являются также случайными. Поэтому мерой качества алгоритмов оценивания может служить среднее значение потерь — средний риск r, получаемый усреднением функции потерь (матрицы штрафов).

$$r = M\left[L(\bar{S})\right] = \iint_{SY} L(S - \tilde{S}) W(S / y) dy dS = \int_{y} W(y) \left[\int_{S} L(S - \tilde{S}) W(S / y) dS \right] dy \tag{4.9}$$

Здесь выражение в скобках есть условный апостериорный средний риск $r(\widetilde{S}/y)$:

$$r(\widetilde{S}/y)=\int_S L(S-\widetilde{S})\cdot W(S/y)dS \tag{4.10}$$

Поскольку $W(y)$ — плотность распределения вероятностей по определению неотрицательна, а оценка $\widetilde{S}$ в выражении (4.10) является переменной интегрирования, то минимизация среднего риска $r(\widetilde{S})$, может быть обеспечена минимизацией апостериорного риска $r(\widetilde{S}/y)$, для каждой выборки y, соответствующим алгоритмом оценивания $g(y)$.

Алгоритм, минимизирующий средний риск (4.9), называют оптимальным по Байесу (Байесовский алгоритм) или по байесовскому критерию.

Рассмотрим алгоритм байесовского оценивания при использовании простой функции потерь (4.6).

Как было отмечено, оптимальная оценка может быть найдена из условия минимизации условного апостериорного риска $r(\widetilde{S}/y)$. При простой функции потерь и скалярной величине $\widetilde{S}$, имеем:

$$r(\widetilde{S}/y)=\lim_{\varepsilon\to\infty}\left[1-\int_{\widetilde{S}-\varepsilon}^{\widetilde{S}+\varepsilon}W(S/y)dS\right] \tag{4.11}$$

Очевидно, что минимизация этого риска по $\widetilde{S}$,обеспечивается выбором такой оценки $\widetilde{S}$, при которой апостериорная плотность распределения вероятностей принимает максимальное значение

$$\widetilde{S}_{опт}:W(S_{опт}/y)=\max_{s\in S}W(S/y) \tag{4.12}$$

Таким образом, байесовский критерий при простой функции потерь эквивалентен критерию максимума апостериорной вероятности.

Важную роль в теории оценивания играет эффективная оценка, оценка с минимальной дисперсией ошибки или байесовская оценка с квадратичной функцией потерь. При скалярной величине S и $K=1$ (см. 4.8) имеем условного апостериорного риска

$$r(\widetilde{S}/y)=\int_s(S-\widetilde{S})^2W(S/y)dS \tag{4.13}$$

Эффективную оценку следует искать из уравнения

$$\left.\frac{dr(\widetilde{S}/y)}{d\widetilde{S}}\right|_{\widetilde{S}=\widetilde{S}_{хор}}=0$$

Принимая во внимание (4.13) и меняя порядок дифференцирования по $\widetilde{S}$ и интегрирования по S имеем:

$$2\int(S-\widetilde{S}_{хор})W(S/y)dS=0 \qquad (4.14)$$

откуда,

$$\widetilde{S}_{хор}\int_S W(S/y)dS=\int_S SW(S/y)dS=M(S/y) \qquad (4.15)$$

Принимая во внимание, что $\int_S W(S/y)dS=1$, получаем:

$$\widetilde{S}_{хор}=M(S/y).$$

Таким образом, оценка с минимальной дисперсией ошибки равна апостериорной средней оцениваемой величины S.

Аналогичные результаты могут быть получены и для оценок векторных величин $\vec{S}$.

Можно показать, также, что апостериорная средняя оценка является оптимальной при любой функции потерь удовлетворяющей свойствам (4.6), (4.7), (4.8), если интегральная функция распределения вероятностей $F(S/y)$ выпукла для всех $S<M(S/y)$ (теорема Шермана (Л.6)). Важным следствием этой теоремы является оптимальность оценки в виде апостериорного среднего при условии, что оцениваемый процесс и «шум», связанный с измерениями, являются гауссовскими процессами.

Кроме того, Калманом показано, что апостериорное среднее является оптимальной оценкой при любой допустимой функции потерь, а также и в случае, если известны только первые и вторые моменты оцениваемой случайной величины.

В случаях, когда оцениваемое множество S является функциональным множеством, то нахождение оптимального алгоритма в соответствии с (4.13) представляет собою вариационную задачу, и она может быть решена методами вариационного исчисления. К таким задачам, например, относится задача об оптимальной фильтрации.

4.3. Оптимальная фильтрация

Критерий минимума среднеквадратической погрешности является весьма распространенным в задачах фильтрации. Под фильтрацией принято понимать задачу получения оценки $\widetilde{S}(t)$ (на основе анализа системы) непрерывного по состояниям и по времени процесса $S(t)$ содержащегося в шумах, когда наблюдению доступен процесс, связанный с оцениваемым априори известным соотношением:

$$y(t)=C[S(t),n(t),t];\ t>t_0 \qquad (4.16)$$

В частном случае, при линейном уравнении наблюдения и аддитивном шуме $n(t)$ выражение (4.16) принимает вид:

$$y(t) = C(t)S(t) + n(t)D(t); \qquad t > t_0 \tag{4.17}$$

В общем случае $y(t)$, $S(t)$ и $n(t)$ векторные процессы, а $\mathbf{C}(t)$ и $\mathbf{D}(t)$ матрицы функций. В дальнейшем будем считать процесс $y(t)$ стационарным и $y(t)$, $S(t)$ и $n(t)$ скалярными функциями.

Так что уравнение наблюдения, не сужая общности, представим в форме:

$$y(t) = S(t) + n(t) \tag{4.18}$$

Будем искать алгоритм обработки результатов наблюдения $y(t)$ с целью получения оценки $\widetilde{S}(t)$ из класса линейных алгоритмов, так что:

$$\widetilde{S}(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,\tau)\, y(\tau) d\tau, \tag{4.19}$$

где $h(t,\tau)$ — импульсная характеристика линейного фильтра.

Примем в качестве критерия оценки $\widetilde{S}(t)$ минимум среднего значения квадрата ошибки:

$$B_{\widetilde{s}}(t) = M\left\{\left[S(t) - \widetilde{S}(t)\right]^2\right\} \Rightarrow \min_{h(t,\tau)}. \tag{4.20}$$

Здесь M означает математическое ожидание.

Подставляя (4.19) в (4.20) имеем:

$$B_{\widetilde{s}}(t) = M\left\{S^2(t) - 2\int_{t_0}^{t} h(t,\tau)S(t)y(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} h(t,\tau)h(t,\mu)y(\tau)y(\mu)d\tau d\mu\right\}$$

Здесь квадрат интеграла представлен в виде двойного интеграла с независимыми переменными интегрирования.

После операции усреднения получаем:

$$B_{\widetilde{s}}(t) = P_s - 2\int_{t_0}^{t} h(t,\tau)K_{s,y}(t,\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} h(t,\tau)h(t,\mu)K_{y,y}(\tau,\mu)d\tau d\mu \tag{4.21}$$

Здесь $K_{s,y}(t,\tau)$ и $K_{y,y}(t,\mu)$ взаимокорреляционная и автокорреляционная функции соответственно.

Представим теперь импульсную характеристику линейного фильтра в виде:

$$h(t,\tau) = h_0(t,\tau) + \varepsilon \cdot Z(t,\tau), \tag{4.22}$$

где $h_0(t,\tau)$ — оптимальная (искомая) импульсная характеристика фильтра, обеспечивающая минимальное значение среднего квадрата ошибки, $Z(t,\tau)$ — произвольная функция, ε — малая величина.

Устремляя ε к нулю, мы приближаем импульсную характеристику $h(t,\tau)$ к оптимальной $h_0(t,\tau)$.

В выражении (4.22) есть вариация искомого алгоритма. Подставим (4.22) в (4.21) и обозначим через P члены независящие от ε, а через $Q(\varepsilon^2)$ члены за-

висящие от ε^2 и, естественно, при стремлении $\varepsilon \to \infty$ ими можно будет пренебречь, получим:

$$B_{\tilde{s}}(t,\varepsilon) = 2\varepsilon \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} h_0(t,\tau)K_{y,y}(\tau,\mu)Z(t,\mu)d\tau d\mu - 2\varepsilon \int_{t_0}^{t} K_{s.y}(t,\tau)Z(t,\tau)d\tau + P + O(\varepsilon)^2 \ . \tag{4.23}$$

Необходимым условием минимума $B_{\tilde{s}}(t,\varepsilon)$ как функции ε является:

$$\frac{\partial B(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0 \ .$$

Беря производную по ε от(4.23) и пренебрегая членами порядка ε^2 получаем:

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} h_0(t,\tau)K_{y,y}(\tau,\mu)Z(t,\mu)d\tau d\mu - \int_{t_0}^{t} K_{s,y}(\tau,t)Z(t,\tau)d\tau = 0 \ . \tag{4.24}$$

Перепишем (4.24) в иной форме, обозначив переменную интегрирования во втором интервале через μ :

$$\int_{t_0}^{t} Z(t,\mu)\left\{\int_{t_0}^{t} h_0(t,\tau)K_{y,y}(\tau,\mu)d\tau - K_{s,y}(\mu,t)\right\}d\mu = 0 \tag{4.25}$$

В силу того, что Z(t,μ) произвольная функция, равенство (4.25) может быть выполнено только если выражение в фигурных скобках равно нулю.

Таким образом мы получим:

$$\int_{t_0}^{t} h_0(t,\tau)K_{y,y}(\tau,\mu)d\tau = K_{s,y}(\mu,t) \tag{4.26}$$

Полученное линейное интегральное уравнение для оптимальной импульсной характеристики, ядром которого является автокорреляционная функция наблюдаемого процесса, принято называть уравнением Колмогорова-Винера.

Представляя (4.26) в (4.21) полагая при этом $h(t,\tau) = h_0(t,\tau)$ и заменяя $K_{s,y}$ интегралом, получаем для минимальной среднеквадратической ошибки:

$$B_{\tilde{s}}(t)_{\min} = P_s - \int_{0}^{T} h_0(\tau,t)K_{s,y}(\tau,t)d\tau \ , \tag{4.27}$$

где $T = t - t_0$ время наблюдения.

В случае стационарности и стационарной связанности процессов $S(t)$ и $y(t)$, оптимальный фильтр является стационарным и выражение (4.26) упрощается:

$$\int_{0}^{T} K_{y,y}(t-\tau)h_0(\tau)d\tau = K_{s,y}(t) \tag{4.28}$$

и

$$B_{\tilde{s}} = P_s - \int_0^T h_0(\tau) K_{s,y}(\tau) d\tau \ . \qquad (4.29)$$

4.4. Решение уравнения Колмогорова-Винера

Даже для стационарного случая решение интегрального уравнения (4.28) не всегда является простой задачей. Упростим ее, полагая, что аддитивный шум $n(t)$ в (4.18) является некоррелируемым с оцениваемым процессом, так что:

$$K_{s,y}(t) = M\left[s(t) * s(t-\tau) + n(t-\tau)\right] = M\left[s(t) * s(t-\tau)\right] = K_s(\tau) \ ,$$

и уравнение (4.28) принимает вид:

$$\int_0^T K_{y,y}(t-\tau) h_0(\tau) d\tau = K_s(\tau) \qquad (4.29а)$$

Пренебрегая физической реализуемостью фильтра, устремляя $T \to \infty$, и беря преобразование Фурье от левой и правой частей равенства (4.29а) получаем:

$$\Phi_y(j\omega) T_0(j\omega) = \Phi_S(j\omega) \ .$$

Отсюда: $T_0(j\omega) = \dfrac{\Phi_S(j\omega)}{\Phi_y(j\omega)} = \dfrac{\Phi_S(j\omega)}{(\Phi_S(j\omega) + \Phi_n(j\omega))}$.

В силу (4.18) комплексный спектр наблюдаемого процесса равен сумме спектров оцениваемого процесса и спектра шума.

Полученное выражение для комплексной передаточной функции оптимального фильтра позволяет перейти к задаче синтеза такого фильтра на некоторой элементной базе.

Следует отметить, что эта задача не из легких и этому служат следующие причины:

1. Решение получено лишь для физически нереализуемого фильтра и, следовательно, его реализация связана с некоторыми приближениями.
2. Комплексные спектры для оцениваемого и наблюдаемого процессов не всегда удается получить.

Перечисленные причины серьезно затрудняют задачу синтеза, что послужило причиной изысканий в несколько ином направлении.

4.5. Фильтр Калмана-Бьюси-Стратоновича

Широкое применение находит метод Калмана-Бьюси-Стратоновича основанный на представлении наблюдаемого процесса, $y(t)$ выходным процессом некоторой линейной системы, состояние которой нужно оценить. Так что предполагается известными стохастические уравнения переменных состояния и наблюдения:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \mathbf{A}(t) s(t) + \mathbf{B}(t) x(t) \ , \qquad (4.30а)$$

$$y(t) = \mathbf{C}(t)s(t) + \mathbf{D}(t)x(t), \qquad (4.30б)$$

где $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)$ и $\mathbf{D}(t)$ — матрицы функций, $s(t), y(t)$ — оцениваемый и наблюдаемый процессы соответственно, $x(t)$ — порождающий процесс с нулевым математическим ожиданием.

В теории систем известны методы получения уравнений переменных состояния вида (4.30) в различных ситуациях. Так что можно считать матрицы $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)$ и $\mathbf{D}(t)$ — известными.

Представим искомый оптимальный фильтр в виде уравнения переменных состояния:

$$\frac{d\tilde{s}(t)}{dt} = L(t)\tilde{s}(t) + K(t)y(t) \qquad (4.31)$$

Будем требовать, чтобы оценка была несмещенной и эффективной, что минимизирует дисперсию ошибки. Из несмещенности имеем: $M[\tilde{s}(t)] = M[s(t)]$. Тогда (4.31), после взятия математического ожидания, принимает вид:

$$\frac{d\bar{s}(t)}{dt} = L(t)\bar{s}(t) + K(t)\bar{y}(t). \qquad (4.32)$$

Найдем $\bar{y}(t)$ из (4.30б): $\bar{y}(t) = C(t)\bar{s}(t)$ (математическое ожидание порождающего процесса $x(t)$ равно нулю). Окончательно получаем:

$$\frac{d\bar{s}(t)}{dt} = [\mathbf{L}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{C}(t)]\bar{s}(t) \qquad (4.32а)$$

Но выражение для производной в (4.32) можно получить, беря математическое ожидание в (4.30а):

$$\frac{d\bar{s}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\bar{s}(t) \qquad (4.33)$$

Подставляя (4.33) в (4.32) получаем для матрицы $\mathbf{L}(t)$:

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{A}(t) - \mathbf{K}(t) * \mathbf{C}(t), \qquad (4.34)$$

где $\mathbf{K}(t)$ — матрица усиления Калмана. Она может выбираться произвольно в соответствующей размерности. На рис.4.3 приведена функциональная схема оценивателя по выражению (4.32).

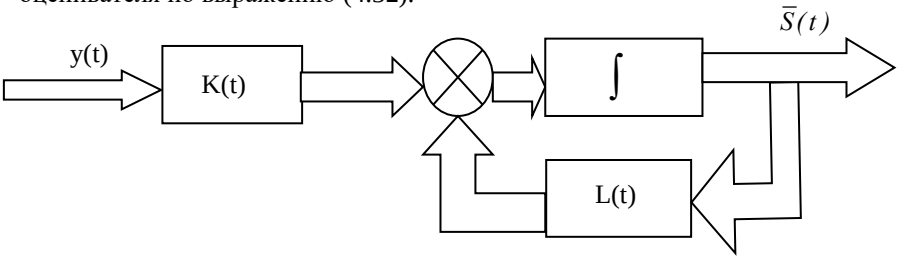

Рис.4.3

Ее преимуществом является возможность моделирования на персональном компьютере. Для этой цели уравнение (4.31) записывается для дискретного времени как рекуррентное:

$$\tilde{s}(k+1) = L^*(k)\tilde{s}(k) + K^*(k)y(k),$$

где $L^*(k) = [L(k) + I(k)]T$, $K^*(k) = K(k)T$, $I(k)$ — единичная матрица, T — интервал дискретизации по времени.

Соответственно функциональная схема алгоритма фильтрации изображена на рис. 4.4.

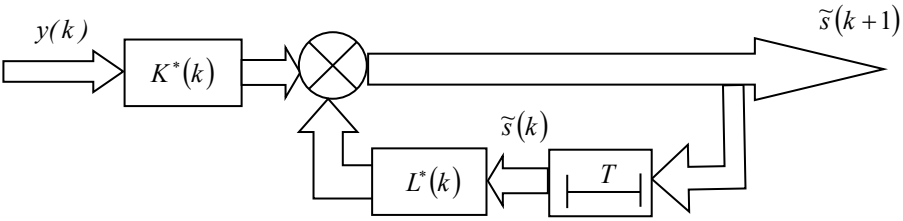

Рис. 4.4.

Алгоритм является рекуррентным и новое значение оценки $\tilde{S}(k+1)$ получается с использованием предыдущего значения $\tilde{S}(k)$.

Глава 5. Принятие решения. Основные положения

5.1. Постановка задачи

Теория принятия решения есть наука о выборе оптимального поведения лица, принимающим решение (ЛПР) в различных жизненных ситуациях.

Под ЛПР принято понимать субъекта, группу лиц или организационно-техническую систему имеющего цель, которая служит мотивом постановки задачи принятия решения и несущее ответственность за последствия решения.

Если ЛПР не несет ответственности за последствия принятого решения, то проблемы в принятии решения не существует, так как его устраивает любое решение. Проблемы этой не существует и тогда, когда для ЛПР имеется только одно решение и не существует выбора, а, следовательно, лицу принимающему решение нельзя ставить в вину за последствия принятого решения ровно также ему нельзя приписывать в заслугу за удачное последствия этого решения. Собственно ЛПР в данном случае и не принимало никакого решения. Имело место лишь исполнение. Таким образом, проблема принятия решения связана с проблемой выбора одного решения ω из множества возможных решений $\Omega(\omega \in \Omega)$. И здесь проявляется философский аспект «проблемы принятия ре-

шения связанный со свободой воли». Свобода воли человека (лица принимающего решение) связана с необусловленностью его решений (воли) извне, и его ответственностью за последствия принятого решения.

Не менее важны и другие аспекты проблемы принятия решения, например, социальный, когда проблему принятия решения увязывают с задачами разработки проблемно-целевых программ в масштабе всей страны или отдельных регионов, или моральный, когда необходимо разобраться в проблеме: всегда ли достижение цели оправдывает средства и т.д., и т.п. Интересны и физиологические, психологические, а также биологические аспекты принятия решений. Однако в дальнейшем, для обсуждения проблемы, важен математический аспект принятия решений, так как именно он является фундаментальным в постановке задачи теории принятия решений.

Из сказанного ясно, что принятие решения связано с проблемой выбора из множества альтернативных решений Ω, мощность которого более чем единица, одного оптимального $\omega_0 \in \Omega$ в определенном смысле.

В постановке задачи принятия решений можно заметить сходство с задачей оценивания. В литературе встречается определение принятия решения как задача оценивания, когда оцениваемая величина имеет конечное или счетное множество значений. Против этого трудно найти возражение. В то же время теория принятия решений включает в себя весьма широкий класс разнообразных по исходным данным задач и большинство из них не включается в теорию оценивания, что, безусловно, может считаться самостоятельным разделом математики.

Как было сказано ранее, принятие решений является частью управления системой. Однако с принятием решений человечество имеет дело не только в управлении системами. Так молодой человек, окончивший среднюю школу должен принять решение и выбрать свою дальнейшую судьбу. Здесь в качестве альтернатив выступает ряд ВУЗов, в которые он может попытаться поступить, армия, в которой он может отслужить положенное время и затем искать работу и т.д. Такую ситуацию трудно перевести на язык управления. Еще труднее представить поведение игрока в кости в виде модели управления некой системой.

Несмотря на чрезвычайно широкий класс задач связанных с принятием решения, установим характерные этапы этого процесса.

Этап первый. На первом этапе ЛПР должно оценить обстановку. При этом изучается массив исходных данных. Исследуется оценка состояния системы, если решается задача управления. Вырабатывается понимание необходимости действовать, а, следовательно, принимать решение.

Этап второй включает в себя уяснение цели, которую необходимо достичь в результате деятельности ЛПР. Отметим, что цель деятельности ЛПР может быть выработана как самим ЛПР, так и навязана ему извне. В том и другом случае необходимы время и некоторые ресурсы для уяснения цели. Деятель-

ность без четкого понимания цели типа «иди туда, не знаю куда, принеси то, не знаю что», как правило, бесполезна, а иногда и вредна.

На третьем этапе выясняется множество возможных методов достижения поставленной цели. (Множество альтернатив в решении задачи принятия решения Ω). Ответственность третьего этапа очевидна. Каждый человек встречался с ситуацией, когда приходилось делать вывод типа: «ах если бы я знал, что можно поступить иначе…».

Четвертый этап включает в себя выработку критерия оптимальности, который устанавливает отношение порядка на множестве альтернатив.

Наконец пятый этап – это выбор оптимальной стратегии в смысле выбранного критерия оптимизации.

В данной работе мы не будем обсуждать этап реализации принятого решения, который представляет собою самостоятельную проблему.

Задача принятия решения считается поставленной, если указаны: множество альтернатив Ω и критерий оптимизации (л.7).

Перечисленные этапы процесса принятия решения имеют различные особенности, в зависимости от типа решаемой проблемы, условий в которых она решается, априорной информации и, наконец, от имеющегося в распоряжении ресурса.

Следует отметить, что не существует четко разработанной процедуры принятия решений на все случаи жизни, хотя наработан опыт и рекомендации поведения ЛПР на каждом из перечисленных этапов.

Остановимся более подробно на обсуждении каждого из перечисленных этапов процесса выработки решения.

5.2 Информационное обеспечение принятия решений

Информационное обеспечение является ответственным моментом на первом этапе принятия решения. Качество принимаемого решения во многом зависит от информационного обеспечения. Теорию принятия решения можно считать наукой изучающей алгоритмы выработки наилучшего, в определенном смысле, решения в условии недостаточного информационного обеспечения. Человечество принимало решения и до создания теории принятия решения и даже в условиях отсутствия какого-либо информационного обеспечения. Конечно, эти решения принимались в большей степени по интуиции и не всегда отличались высокой эффективностью. Как отметил великий греческий философ Сократ «человек знает что хорошо, а делает что плохо». Однако принижать значение интуиции лица принимающего решения было бы неверным. Интуиция есть проявление опыта закрепленного в памяти, а иногда и в условных рефлексах. «Intuitio» слово латинское и означает пристальное, внимательное всматривание, озарение. Это способность как бы «внезапно», не прибегая к логическому умозаключению, находить истину.

Французский философ Рене Декарт (1596-1650 г.) достоверным средством мышления на ряду с дедукцией, считал интуицию. Голландский мыслитель Б. Спинози (1632-1677 г.) считал интуицию высшим родом познания. Философское направление «интуицизм» отрицает вообще возможность познания с помощью органов чувств и логических категорий, и считает единственным источником познания интуицию. С последним можно не согласиться. Однако обратимся к примерам. Александр Васильевич Суворов провел шестьдесят сражений и одержал шестьдесят побед. Одно это уже удивительно. Но поражает другое. Только в трех сражениях он имел численное превосходство над противником. В сражении при Рымнике турецкая армия в четыре раза превосходила суворовскую. И победа. При этом турки потеряли 1/3 своей армии. А ведь А. В. Суворов не оканчивал академий, как современные полководцы имеющие зачастую по три высших образования (военное, политическое, экономическое).

Конечно, и в настоящее время существуют решительные люди, которые в ответственный момент берут ответственность на себя и принимают решения. Но интуиция интуицией, однако, при отсутствии информации, в условиях современной технической революции, интуиция может подвести. Вот пример. Разделим мысленно земной шар пополам, отбросим одну половину, оставшуюся половину снова разделим пополам и т.д. Вопрос – сколько раз следует повторить такую операцию, чтобы оставшаяся часть была по размерам с атом? Ответы от миллиона до миллиарда миллиардов. Правильный ответ около 170 раз. Интуиция подводит. Не хватает информации. Задача «непривычная».

Теория принятия решений дает множество рекомендаций и алгоритмов принятия решений в условиях, когда информации для оптимального решения недостаточно. Но в этой теории нет рекомендаций, которые помогли бы в условиях избытка информации. Представим себе члена государственной думы, от которого требуется принять решение утвердить или отклонить государственный бюджет на очередной год. Перед его светлые очи представлен том из 5000 страниц, содержащих таблицы, вычисления, обоснования и т.д. Задача чрезвычайно сложная даже для специалиста экономиста высокого класса.

Подводя итог, отметим. Поскольку информация, как физическая субстанция, может храниться, обрабатываться, передаваться и даже, в отличии от энергии, появляться и исчезать, то к ней должны быть предъявлены определенные требования, для этого, чтобы решение принятое на основании этой информации оказалось наиболее полезным. Главными из этих требований являются:

1. Достоверность. Поскольку информация при передаче, хранении и обработке предъявляется в форме сообщений. Сообщения передаются по каналам связи, где преобразуются в сигналы, т.е. в физические величины способные распространяться в пространстве и во времени. В каналах связи имеют место искажения и помехи как случайные, так и преднамеренные. Поэтому принятое сообщение может нести искаженную информацию. Существуют методы проверки достоверности полученной информации. Это и сравнение информации полученной по различным каналам связи. Это и «прикидочный расчет», когда

сверяют расчеты, основанные на принятой информации с расчетами, полученными на основе правдоподобных рассуждений. Это и аналогия и др.

2. Необходимость и достаточность. Лицо, принимающее решение должно получать только ту информацию, которая необходима для принятия решения. Вся информация, не имеющая ценности для принятия решения является лишней, затрудняющей процесс принятия решения и должна быть устранена. Естественно, что нужно стремиться к тому, чтобы информация была достаточной для принятия решения. К сожалению, это не всегда удается обеспечить.

3. Своевременность. Информация, которая имеет ценность для будущего, должна храниться и представляться ЛПР только в нужный момент, иначе она будет просто мешать. Информация, доставленная с опозданием бесполезна.

4. Доступность. Под доступностью информации понимается форма представления удобная для восприятия ЛПР.

5. Скрытность. Если в качестве ЛПР выступает группа лиц, то иногда, для сохранения тайны, требуется четко регламентировать, кому и какую информацию следует предоставлять и исключить несанкционированный доступ.

Информация обычно представляется в виде данных. Данные есть набор конкретных значений количественных или качественных параметров характеризующих сведения об объекте. Можно выделить три уровня информационного обеспечения принятия решений.

Первым уровнем является сбор первичных данных. На этом уровне выявляют и регистрируют сведения о процессах характеризующих функционирование интересующего объекта. Устанавливается факт необходимости действовать и принимать решения.

На втором уровне группируют и обобщают первичные данные с целью получения укрупненных показателей. При этом устраняется избыточность и результаты представляются в стандартной форме в виде сводок, отчетов, рапортов.

На третьем этапе обеспечивается выделение и представление информации для ЛПР.

Естественно, что информационное обеспечение требует существенных затрат и выделения ресурсов для автоматизации всего процесса. При наличии средств автоматизации, по мере передачи информации от узлов системы низшего уровня к узлам более высокого уровня реализуется агрегация информации, под которой понимается процесс обобщения и выделения данных из первичного множества параметров с целью формирования групповых обобщенных характеристик. При этом устраняется избыточность информации. Различают функционально-логическую, аналитическую и статистическую агрегации.

Первая основана на использовании функциональных и логических связей параметров между собою. В результате аналитической агрегации выявляются интегральные или экстремальные характеристики множества данных и связанные с ними зависимости. Статистическая агрегация связана с формированием и

представлением множества отдельных значений параметров, их статистических распределений и характеристик.

При принятии ответственных решений имеющих государственное, национальное или региональное значение создаются автоматизированные системы информационного обеспечения принятия решений (АСИОПР) в виде программного продукта. Последнее тем более оправдано, если решения необходимо принимать постоянно, как это, например, имеет место при управлении большими динамическими, организационно-техническими системами. К таким системам относится к примеру хозяйство большого города или района, система противоракетной обороны страны, энергетическая система страны и т.д. и т.п.

Система информационного обеспечения, независимо от назначения, всегда замкнута на человека. Автоматизированная система даже самая совершенная, не принимает решение, а готовит и представляет информацию для ЛПР.

Машина, даже самая совершенная, не может принимать решение. Человек может принимать решение даже без помощи автоматизированной системы информационного обеспечения.

Следует иметь в виду, что любая система информационного обеспечения должна удовлетворять ряду принципов:

1. Все создаваемые в ЭВМ документы, предназначенные для внутреннего и внешнего использования должны быть обоснованы с юридической и правовой точки зрения, особенно если они связаны с административной и материальной ответственностью
2. При подготовке документа человеческий фактор используется только при подготовке и вводе исходных данных.
3. Вывод документа из информационной системы предусматривается только на необходимый случай, во всех других случаях информация выводится на экран дисплея.
4. При запросе данных, они должны выдаваться настолько укрупненными, насколько это допустимо.
5. Автоматизированная система информационного обеспечения должна иметь механизм адаптации алгоритмов и легко приспосабливаться к непрерывно меняющимся требованиям ЛПР.
6. Все выдаваемые данные должны быть доступными в момент, когда они необходимы для принятия решения.

В памяти ЭВМ данные хранятся в виде записей относящихся к одному объекту, объединенных некоторым смысловым содержанием. Совокупность записей различного типа, относящихся ко всем описываемым в записях объектам, образуют массив. Совокупность взаимосвязанных массивов обеспечивающих хранение данных о некоторой системе с минимальной избыточностью, образуют базу данных. Совокупность структурно самостоятельных баз данных, объединенных принадлежностью к единой решаемой проблеме, образуют банк данных.

Для ускорения выдачи данных необходимо создавать высокоорганизованную систему поиска.

Различают информационные системы поиска, где поиск осуществляется по смысловому содержанию и поиск по определяющему признаку – идентификатору.

Для повышения эффективности поиска создают специальную таблицу индексов, в которой хранятся ключи записей с указанием адреса. Таблица индексов хранится в оперативной памяти.

5.3. Формирование цели на этапе информационного обеспечения

Под целью принято понимать состояние системы, которого необходимо достичь или результаты, которые желательно получить в результате реализации решений ЛПР. В частности целью может служить и сохранение состояния системы или уже полученных результатов.

Определение (формирование) цели является одним из наиболее важных и сложных проблем деятельности ЛПР. Действительно, нечетко поставленная цель может привести к ненужным затратам материальных средств и усилий коллективов высококвалифицированных специалистов, а иногда к жертвам и трагедиям народов. За примерами не нужно далеко ходить. Перестройка СССР с целью ускорения и построения социализма с человеческим лицом привело к глобальной катастрофе и развалу всего социалистического лагеря.

Чем выше уровень системы, тем сложнее обосновать и формировать цель её деятельности. На такую систему влияют очень большое множество различных факторов, которые трудно проанализировать. Для определения цели таких систем используется коллективный опыт, создаются совещательные органы – коллегии, семинары, штабы, привлекают специальных экспертов по отдельным вопросам.

В практике государственного руководства принято важнейшие вопросы, определяющие ее развитие, выносить на всенародное обсуждение. Отметим, однако, что даже результаты всенародного обсуждения, являются только совещательными и не обязательно определяют цель функционирования.

Сложность и трудность проблемы формирования цели определяется еще и тем, что она не поддается формализации. Для системы более низкого уровня цель может формироваться системой более высокого уровня. Таким образом, если для системы более высокого уровня цель сформулирована, то может быть построено дерево решений, в котором последовательно обосновываются цели систем более низкого уровня. Кроме того, цель системы жестко связана с продолжительностью времени, за который предполагается ее достичь. Таким образом, открывается возможность детализировать конечную цель на промежуточные, жестко связанные с конечной. В качестве промежуточной цели могут представляться некоторые четко поставленные задачи. Достижение системой одной крупной цели ведет к постановке следующей цели. Для того чтобы пред-

ставлять себе перспективу, определить общее направление постановок последующих целей, иногда определяют идеальную цель, достичь которую в принципе невозможно при современном уровне развития науки, но к чему можно неограниченно стремиться. Так, например, ставилась идеальная цель – строительство коммунизма в отдельно взятой стране или достижение скорости движения близкой к скорости света и др. То, что невозможно в настоящее время, может оказаться достижимым в будущем. Для систем достаточно высокого уровня не всегда удается определить цель в виде одной одномерной функции. Возникает необходимость одновременного достижения нескольких целей. При этом цели могут быть независимыми и одинаково важными. В таком случае речь идет о функционировании многоцелевой системы, что резко усложняет задачу выбора оптимального решения.

Если среди множества целей одна доминирует по своему значению над другими, ее называют основной, а остальные дополнительными. В противном случае (когда все цели независимы и одинаково важны), то основной целью считается достижение всех частных целей. Когда частные цели отмечаются однородностью, то каждой частной цели может быть присвоен весовой коэффициент, свидетельствующий о ее относительной важности. При этом усилия связанные с достижением цели, а именно распределение ресурсов, очередность достижения и т.п., реализуются с учетом коэффициента важности. Понятно, что коэффициенты важности, редко удается вычислить. Например, когда некоторое производство способно выпускать несколько видов продукции, и каждый вид имеет свою рыночную цену, на данный момент, тогда, естественно, коэффициенты важности можно определить в виде прибыли от выпуска данного вида продукции. Чаще всего коэффициенты важности устанавливаются на основе экспертных оценок.

Еще сложнее задача определения общей цели для случая разнородных независимых частных целей. В этом случае также на основе экспертных оценок каждой частной цели приписывается коэффициент предпочтения (коэффициент важности) в пределах от нуля до единицы. Поскольку коэффициенты предпочтения устанавливаются на основе экспертного опроса, то необходима процедура проверки правдоподобия порядка предпочтения. Эти процедуры также базируются на экспертные опросы и некоторые допущения.

Пусть V_i, $i=\overline{1,n}$ есть числа, приписанные i – ой цели как оценка ее важности. Естественно $V_i \geq 0$.

Допустим, что:

1. Для двух целей i – ой и j – ой оценки должны быть равными $V_i = V_j$, если они одинаково важны, и $V_i > V_j$, если i – ая цель более важна, чем j – ая.

2. Цели являются взаимонезависимыми и непротиворечивыми. Так что важность одновременного достижения двух целей с коэффициентами важности V_i и V_j, оценивается коэффициентом важности $V_i + V_j$.

3. Попарная экспертная оценка более правдоподобна, чем установление отношения порядка на всем множестве частных целей.

Проверку правдоподобия установленных коэффициентов важности V_i $i = \overline{1, n}$, осуществляют поэтапно.

На первом этапе выбирают цель, для которой коэффициент важности максимален и проводят опрос проверку что важнее, достижение этой цели или достижение всех других целей.

Если достижение этой цели важнее чем всех остальных, то проверяют является ли коэффициент важности этой цели больше суммы коэффициентов всех остальных. Если это так, то данную цель вычеркивают из списка и переходят к следующему этапу. Если окажется, что коэффициент важности этой цели меньше суммы коэффициентов важности всех оставшихся, то проверяют попарно важность выбранной цели и остальных целей. Экспертный опрос должен подтвердить, что данная цель важнее каждой из оставшихся. Если это не так, то выбранные коэффициенты необходимо пересмотреть. Если же все подтверждается, то эту цель устраняют из списка и переходят ко второму этапу, когда выбирается цель, имеющая максимальный коэффициент важности из оставшихся и процедура повторяется до тех пор, пока в списке не останется три цели. Такая проверка требует большого объема работы, особенно если число целей превышает десяток. Однако практика показывает, что затраты оправдывают себя.

В системах с иерархической структурой (например, в системах управления большими организационно-техническими системами), подсистемы разного уровня имеют свои различные цели. Совокупность целей подсистемы одного уровня должны обеспечивать выполнение одной цели подсистемы более высокого уровня, которой они подчинены. Совокупность последовательно дробящихся целей, в соответствии с положением уровня подсистем, образуют так называемое дерево целей. Представление дерева целей облегчает совершенствование организации достижения цели, а также оценку степени достижения цели в результате проведенных мероприятий.

5.4. Формирование множества альтернатив

Формирование множества альтернатив для достижения цели является также ответственным этапом в процессе выработки оптимального решения. Отметим сразу же, что этот этап в принятии решения иногда связан с решением серьезнейших научных проблем, все зависит от цели и степени готовности достижения ее, а иногда имеет этический, моральный или даже криминальный оттенок. Крылатая фраза: «Цель оправдывает средства», т.е. способ ее достижения, далеко не всеми воспринимается с восторгом. Конечно, здесь важно знать какая цель. Так если целью является благополучие всего человечества, то здесь может быть можно и не стесняться в средствах, а если речь идет об обогощении некоторой группы людей (клана), то о средствах уже нужно думать. Нам важно от-

метить, что проблема выбора множества способов достижения цели является философской проблемой и о ней написано множество толстых фолиантов. Здесь нас будет интересовать не столько философские проблемы, сколько процедура выбора множества допустимых альтернатив $\Omega = \left\{ \omega_i \right\} i = \overline{1,n}$, позволяющих достичь цель. Эта процедура не является обязательной во всех случаях жизни, но гарантирует результат особенно в сложной обстановке, когда принятие решения является ответственной задачей. Множество простых решений мы принимаем по интуиции, на основе опыта, по аналогии и даже не обращаем внимания на процедуру. Но вот перед лицом, принимающим решение возникает сложная проблема, которой еще не приходилось заниматься и опыт других не может быть использован. Вот тогда нужно поступить в соответствии с рекомендованной, продуманной и испытанной процедурой.

На первом этапе постараемся сформулировать все возможные способы (альтернативы) достижения целей. Назовем это множество универсальным множеством альтернатив $\Omega_y = \left\{ \omega_i \right\} \quad i = \overline{1,N}$). На этом этапе «аппарат критики», который заложен в нашем сознании и непроизвольно работает, должен быть надежно отключен. Здесь важно выяснить максимально широкий объем альтернатив не упустив ничего, памятуя о том, что незначительная, на первый взгляд, альтернатива в дальнейшем может оказаться основной.

Рекомендуется два приема формирования универсального множества Ω_y. Во-первых, разработка модели достижения цели. Если эта модель имеется и зависит от ряда параметров например $\left\{ x_1, x_2 \ldots x_k \right\}$ и каждый параметр может принимать множество возможных значений $X_1, X_2 \ldots X_k$, то сразу же получаем все множество возможных альтернатив, перемножая множества всех значений параметров:

$$\Omega_y = X_1 * X_2 * \ldots * X_k . \tag{5.1}$$

Здесь имеется ввиду Декартово произведение.

Второй прием связан с использованием экспертизы. В этом случае множество из N экспертов изолируются и каждому предлагается выдвинуть максимально возможное количество альтернатив. Пусть $X_i \;\; i = \overline{1,n}$ множества альтернатив выдвинутых i – м экспертом. Построим множество:

$$\widetilde{\Omega}_y = \bigcup_{i=1}^{N} X_i \qquad \widetilde{\Omega}_y = \{ \omega_j \} \quad j = \overline{1,n} \tag{5.2}$$

Теперь построим матрицу, $R = \left(r_{ij} \right), \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n}$. Здесь r_{ij} принимает значения:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j-\text{ая альтернатива } \in X_i \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$R(i,j)=\begin{bmatrix} 10011\ldots r_{1i}\ldots r_{1n} \\ 10\ \ldots\ldots\ r_{2j}\ldots r_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 011\ldots\ldots r_{ij}\ldots r_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 101\ldots\ldots r_{Nj}\ldots r_{Nn} \end{bmatrix}$$

После этого вычисляют вероятности: $P_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{r_{ij}}{N}$

Величина P_i рассматривается как вероятность того, что $i-$ая альтернатива принадлежит множеству Ω_y. Теперь задаваясь граничным $P_{гр}$ все альтернативы из Ω_y, для которых $P_j < P_{гр}$ устраняются. Оставшееся множество определяется как универсальное $\Omega_y \subset \tilde{\Omega}_y$.

После того, как универсальное множество сформировано, приступают к выделению множества возможных альтернатив $\Omega_b \subset \tilde{\Omega}_y$. При этом оцениваются ресурсы необходимые для достижения цели и ресурсы, имеющиеся в наличии. Сравнение их позволяет выяснить некоторые нереализуемые альтернативы, от которых следует отказаться. Кроме того, некоторые альтернативы из универсального множества окажутся нереализуемыми и их так же необходимо устранить. После того как получено множество возможных альтернатив, проводят дополнительные исследования, которые дадут дополнительную информацию. Сюда, как раз, могут входить соображения этического и морального плана, особенностей окружающей среды на момент реализации, например погоды и т.д. и т.п. Все это позволит устранить еще несколько альтернатив. Оставшееся множество и составит множество допустимых альтернатив Ω.

Приведенная процедура не является обязательной. На практике, как правило, не соблюдают эту процедуру, а решают все проблемы сразу. Система в принятии решения позволяет, как раз, избежать ошибок и глубоко «прочувствовать» проблему, что тоже немаловажно. Пусть теперь множество допустимых альтернатив Ω определено. Возникает главный вопрос: «Какую процедуру достижения целей $\omega_0 \in \Omega$ определить как лучшую». Для решения этой проблемы необходимо выработать критерий $I(\Omega)$, по которому ориентироваться в выборе.

5.5 Критерии эффективности

Под критерием (греч. Kriterion) принято понимать мерило для определения достоверности. А так же признак, на основании которого производится оценка или классификация чего-либо.

Таким образом критерий $I(\Omega)$ определяет на множестве допустимых альтернатив некоторое отношение порядка (строгое или нестрогое) или отношение предпочтения. В любом случае принятия решения к критерию $I(\Omega)$ следует предъявлять обязательные требования. Основные из них следующие:

1. $I(\Omega)$ должен иметь четкий физический смысл. Поэтому обычно критерий появляется из практических соображений. Например, это доход, надежность, время достижения цели и т.д. и т.п. Однако это не означает, что критерий не может быть разумно введен. Так широкое применение нашли такие критерии как среднеквадратическое отклонение, критерий «Хи квадрат», критерий Колмогорова и т.д.

2. Для любых двух альтернатив ω_1 и ω_2 из Ω обязательно или $I(\omega_1) = I(\omega_2)$ или $I(\omega_1) > I(\omega_2)$ или $I(\omega_2) > I(\omega_1)$.Тогда говорят, соответственно, либо две альтернативы одинаково предпочтительны, либо первая альтернатива предпочтительнее второй либо вторая предпочтительнее первой и пишут либо $\omega_1 \sim \omega_2$; или $\omega_1 > \omega_2$ или $\omega_1 < \omega_2$. Фактически второе условие есть отношение предпочтения. Именно по критерию мы судим о том, какая из альтернатив является более предпочтительной

3. Третье требование есть условие транзитивности. Оно записывается следующим образом. Если $\omega_1 > \omega_2$, (т.е. ω_1 предпочтительнее ω_2) и $\omega_1 \approx \omega_3$ (т.е. ω_1 одинаково в предпочтении с ω_3) то $\omega_1 > \omega_3$. Коротко это записывается так: если $\omega_1 > \omega_2$ и $\omega_2 > \omega_3$, то $\omega_1 > \omega_3$.

4. Наконец последнее, критерий эффективности должен быть чувствителен к показателям качества, т.е. $\{\omega_i\} \subset \Omega$. В литературе широко применяется понятие критерия эффективности или просто эффективность (как критерий).

И здесь следует отметить, что понятие эффективности используется в различных смыслах. Последнее может привести к путанице.

Впервые понятие эффективности было введено А. Н. Колмогоровым в его работе посвященной теории стрельбы в 1945г. Он определил эффективность, как степень достижения цели. По Колмогорову та артиллерийская система эффективнее, которая с большей вероятностью поражает цель. Тем самым эффективность как критерий задается на множестве систем или на множестве вариантов использования одной системы. Например, стрельба из пушки прямой наводкой более эффективна (вероятность поражения цели выше), чем стрельба из той же пушки с закрытых позиций. В дальнейшем стали рассматривать иные ситуации. Для пояснения рассмотрим ситуацию с той же стрельбой. Имеется орудие и представляется возможным с близкой дистанции поразить грузовик противника. Артиллерист может для этой цели выстрелить кумулятивным снарядом и обычным осколочным снарядом. В обоих случаях цель будет достигнута. Но кумулятивный снаряд более дорогой. Его нужно беречь для бронетехники. И артиллерист принимает решение, что стрельба кумулятивным снарядом неэф-

фективна (в данном рассматриваемом примере). Это уже другая постановка проблемы. Существует множество альтернатив достижения цели и следует проанализировать все множество, чтобы выделить одну альтернативу (единственно правильное решение, для достижения цели рассматриваемой конкретной система). В этом случае говорят об эффективности функционирования данной конкретной системы. При этом критерий эффективности задается на множестве альтернатив. Для того чтобы исключить путаницу первый критерий эффективности (заданный на множестве систем) принято называть критерием эффективности первого рода, а второй соответственно критерием эффективности второго рода.

Путаница имеет место тогда, когда критерии эффективности первого и второго рода применяются к одной и той же системе. При этом под множеством допустимых альтернатив поведения рассматривается более широкий класс поведений. В него включают так же и те альтернативы, которые не полностью достигают цели. При этом можно рассматривать критерии эффективности первого рода на множестве альтернатив $I_1(\Omega)$ критерий эффективности второго рода $I_2(\Omega)$ на том же множестве. И зачастую эти критерии оказываются противоречивыми. Поясним сказанное на примере. Предположим лицу, принимающему решение (профессору кафедры ВАС) требуется построить загородный дом. Ему (скажем семья) поставила цель: дом должен быть не хуже, чем у соседа: высокий забор, три этажа, гараж, бассейн, баня, теннисный корт и т.д. и т.п.

ЛПР, оценив свои возможности, пришел к выводу, что ему нужно проработать на его работе 1800 лет, чтобы заработать необходимые средства. Тогда можно отступить от цели. Скажем, сохранить высокий забор, а остальное не строить. Тогда можно заработать на это всего за 60 лет.

Тем самым ЛПР отступает от выполнения цели и критерий эффективности первого рода снижается, зато такая цель может быть достигнута вполне за реальное время. И коэффициент эффективности второго рода растет. Точной грани снижения одной эффективности за счет повышения другой нет. Необходимо искать компромисс. На практике, как цель, так и множество способов достижения цели оцениваются множеством показателей качества $R = \{\vec{r}\}$, $\vec{r} = \{r_1, r_2 \ldots r_k\}$ и требуется для получения критерия $I(\omega) = I(R)$ выработать способ скаляризации вектора показателей качества, так как на множестве скаляров можно установить отношение порядка. Иначе говоря, необходимо отобразить векторное пространство на числовую ось. Способов это сделать много, однако необходимо выполнить первое из приведенных требование к критерию эффективности, а именно физический смысл критерия. Поэтому получили широкое распространение несколько приемов скаляризации (сверток).

Это, во-первых, аддитивная свертка:

$$I(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i r_i \ . \tag{5.3}$$

Здесь α_i - весовые коэффициенты показателей качества. Они устанавливаются, как правило, на основании экспертного анализа. Аддитивная свертка обычно имеет смысл стоимости или потерь. В случае, когда оценивается надежность системы, которая зависит от надежности отдельных элементов, удобно использовать мультипликативную свертку:

$$I(r) = \prod_{i=1}^{K} r_i^{\mu_i} \ , \tag{5.4}$$

где μ_i — коэффициенты значимости r_i -го показателя качества.

При формировании критерия эффективности первого рода иногда можно указать идеальную цель в виде вектора показателей качества $\vec{r}^{\,o}$, тогда критерий эффективности может быть представлен в виде метрики. Например, аддитивная метрика:

$$I(r^o, \vec{r}) = \sum_{i=1}^{K} \frac{\left| r_i^o - r_i \right|}{\left| r_i^o - r_{i\min_i} \right|} \ . \tag{5.5}$$

Или в виде метрики П.Л. Чебышева:

$$I(r^o, \vec{r}) = \max_i \left| r_i^o - r_i \right| . \tag{5.6}$$

Наконец, в случаях, когда размерность вектора показателей качества невелико, например, $K = 2$ или 3, а их значения случайны, возможно получить совместную плотность распределения вероятностей $W_{\vec{r}}(\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_k)$, где $\lambda_k \quad i = \overline{1,k}$ есть фиксированные значения i -го показателя качества. Широко применяется Байесовский критерий эффективности:

$$I(r) = \int_{\lfloor r_1 \rfloor} \int_{|r_2|} ... \int_{|r_k|} \prod (\lambda_{1,} \lambda_2 ... \lambda_k) W(\lambda_{1,} \lambda_2 ... \lambda_k) d\lambda_1 d\lambda_2 ... d\lambda_k \ , \tag{5.7}$$

где $|r_i|$ — множество значений i -го показателя качества.

Когда показателей качества $\{r_i\}\ i = \overline{1,k}$ много они независимы и, тем самым, скаляризация векторов показателей качества принятия решений невозможна или затруднительна, то говорят о многокритериальной оптимизации принимаемых решений. В таких случаях обычно выделяют множество решений $\Omega_0 \subset \Omega$ таких, что среди них нет ни одного решения худшего по всем показателям качества. Это множество называется множеством Парето. Затем либо выбирают один (основной) показатель качества, например с номером $m - p_m$, по которому в дальнейшем и проводится оптимизация решения, требуя чтобы остальные показатели были не хуже некоторых граничных значений (ограничения) r_{gi}, так что $r_i \le r_{gi} \ \ i = \overline{1,k} \ \ i \ne m$. Либо выделяют подмножество $\Omega_0^m \subset \Omega_0$, для которого m-ый показатель качества максимален и выделяют из оставшихся показателей

основной и по нему проводят оптимизацию на множестве Ω_o^m и затем процедуру повторяют до последнего показателя. Если число показателей качества «k» не очень велико, то процедура оптимизации легко программируется на компьютере и оптимизация не вызывает особых сложностей.

Глава 6. Принятие решений

6.1. Принятие решений в условиях полной априорной определенности

Условия, когда для принятия решений имеется вся необходимая информация, называют условиями полной априорной определенности. Как было показано выше, это означает, что задано множество допустимых решений $\Omega = \{\omega_i\}\ i = \overline{1, N}$. На этом множестве известен функционал $I(\Omega)$ эффективности (критерий) и некоторые ограничения $F(\omega) \le 0$ типа неравенств. При этом задача сводится к классу оптимизационных задач и носят общее название задач математического программирования. Здесь термин программирование не означает написание программ для ЭВМ, а имеет смысл процедуры или планирования. Дело в том, что не все оптимизационные задачи одинаково хорошо изучены. И в некоторых случаях пока ограничиваются не математическими решениями задачи, а процедурами приводящими к некоторым приближенным решениям. Если удается отыскать некоторое решение ω^* отличное от оптимального ω_0, но гарантирующее:

$$\left| I(\omega^*) - I(\omega_0) \right| \le \delta ,$$

где δ — наперед заданная величина, то говорят, что решение ω^* является эффективным. Когда и эффективное решение найти не удается, а можно найти только решение $\tilde{\omega}$ обеспечивающее условие $I(\tilde{\omega}) > I_{гр}$, то говорят, что решение рациональное. Рациональное решение гарантирует, что эффективность выше допустимой $I_{гр}$.

6.1.1 Линейное программирование

Среди задач математического программирования лучше всего изучены задачи линейного программирования, это случай, когда функционал эффективности представляется в виде аддитивной свертки по множеству показателей качества $\vec{r} = (r_1 ... r_k)$, а ограничения в виде линейных уравнений (или неравенств) от показателей качества решений. Основная задача линейного программирования (ОЗЛП) записывается в форме:

$$
\begin{aligned}
a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + \ldots + a_{1k}r_k &= b_1 \\
a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + \ldots + a_{2k}r_k &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{m1}r_1 + a_{m2}r_2 + \ldots + a_{mk}r_k &= b_m
\end{aligned}
\tag{6.1.1}
$$

$$I = c_1r_1 + c_2r_2 + \ldots + c_kr_k \tag{6.1.2}$$

Требуется найти неотрицательные значения $r_1 \ldots r_k = \vec{r}$ максимизирующие

$$I(\vec{r}) \to \max_{\vec{r}} .$$

В случае, если требуется минимизировать $I(\vec{r})$, то задача сводится к предыдущей путем введения нового критерия $I^*(\vec{r}) = -I(\vec{r})$

Если некоторые из условий (6.1.1) имеют вид неравенств, то их можно представить в виде равенств ценой введения дополнительных переменных.

Так, например, если имеет место неравенство:

$$a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \ldots + a_{ik}r_k \le 0 ,$$

то обозначим через r_{k+1} величину:

$$r_{k+1} = -a_{11}r_1 - a_{12}r_2 - \ldots - a_{1k}r_k \tag{6.1.3}$$

Из (6.1.3) следует, что $r_{k+1} \ge 0$ и тогда имеем равенство:

$$\left(a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \ldots + a_{ik}rk\right) + r_{k+1} = 0$$

К задачам линейного программирования сводятся транспортные задачи, задачи о снабжении предприятия сырьем, задачи о загрузке оборудования, задачи о планировании производства и многие другие.

Остановимся подробнее на решении основной задачи линейного программирования (ОЗЛП).

Если задача поставлена в форме (6.1.1) и (6.1.2), то на первом этапе следует убедиться в том, что она имеет решение. Это далеко не всегда имеет место. Во-первых, уравнения (6.1.1) могут оказаться противоречивыми и, следовательно, несовместимыми. Во-вторых, решение может иметь место, но не в области, где все показатели качества (переменные) $r_1, r_2 \ldots r_k$ положительны.

Ну, и наконец, возможна ситуация, когда решение уравнений (6.1.1) для положительных переменных существует, но в этой области переменных функционал эффективности не ограничен сверху, т.е. не достигает своего максимального значения.

Наиболее наглядно ситуацию можно проследить на примере, когда число независимых уравнений m в (6.1.1) на 2 меньше числа показателей качества k, так что $k = m + 2$.

Предположим, что свободными переменными являются r_1 и r_2, тогда оставшиеся переменные могут быть разрешены относительно r_1 и r_2 :

$$
\begin{aligned}
r_3 &= \alpha_{31} r_1 + \alpha_{32} r_2 + \beta_3 \\
r_4 &= \alpha_{41} r_1 + \alpha_{42} r_2 + \beta_4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_k &= \alpha_{k1} r_1 + \alpha_{k2} r_2 + \beta_k
\end{aligned}
\qquad (6.1.4)
$$

На плоскости с координатами r_1, r_2 проведем прямые соответствующие уравнениям:

$r_i = \alpha_{i1} r_1 + \alpha_{i2} r_2 + \beta_i = 0 \;\; i = \overline{3,k}$

И рассмотрим ситуацию в первом квадранте (см. рис. 6.1) где свободные переменные положительны. На рисунке штриховкой показаны полуплоскости где $r_i > 0$. Базисные переменные положительны. На рис. 6.1а представлена ситуация, когда отсутствует область допустимых решений (ОДР). На рис. 6.1б такая область существует и она замкнута:

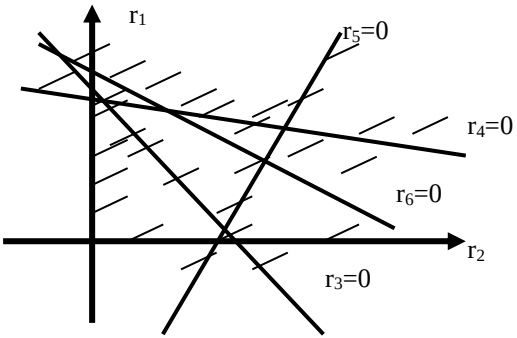

Рис.6.1а

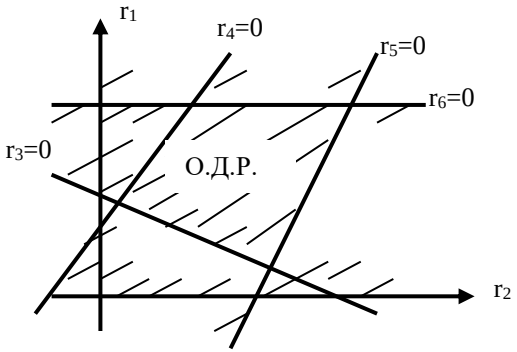

Рис. 6.1б

Используя (6.1.4) преобразуем критерий эффективности (6.1.2) к виду:

$$I = \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2 + \gamma_0$$

На рис. 6.2 изображена базисная прямая $I = \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2 + \gamma_0 = 0$ и стрелками показана область, в которой $I > 0$, перемещая параллельно эту базисную прямую в направлении стрелок получаем увеличение I.

На рис. 6.2а изображен случай, когда ОДР неограничена и решения не существует. На практике это означает, что задача поставлена некорректно. На рис 6.2б решение существует и единственное. Оно достигается в одной из вершин многоугольника, где несколько (по крайней мере две) переменных обращаются в нуль. На рис. 6.2в существует бесконечное множество оптимальных решений. Важно подчеркнуть, что, по крайней мере, в двух вершинах многоугольника ОДР решения выполняются.

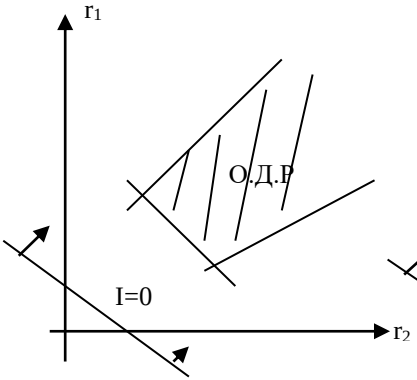

Рис.6.2а

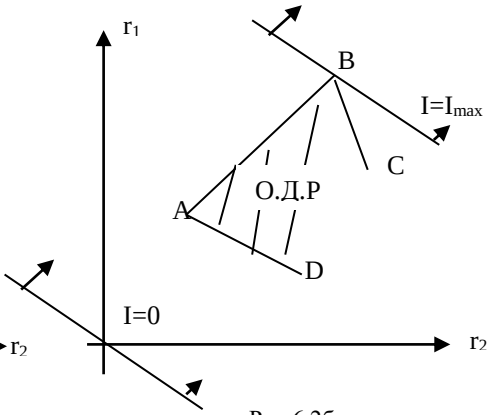

Рис.6.2б

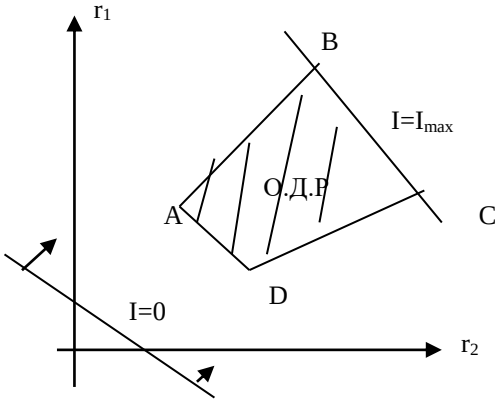

Рис.6.2в

Таким образом, можно сделать вывод, что оптимальное решение, если оно существует, всегда достигается в одной из вершин ОДР, в точке, где, по крайней мере, две из переменных, $r_1, r_2 \dots r_k$ равны нулю.

Утверждение можно обобщить на случай, когда число независимых уравнений m на n меньше чем число переменных k, т.е. $k - m = n > 2$.

Справедливо утверждение: оптимальное решение ОЗЛП (если оно существует) достигается при такой совокупности переменных $e_1, r_1 \dots r_k$, где, по крайней мере, n из них обращается в нуль.

Отсюда вытекает основная идея рабочих методов решения ОЗЛП. Это идея последовательного перебора. Однако этот перебор должен быть направленным. Множество точек в области допустимых значений бесконечно. Число же вершин ОДР конечно. Поэтому первое, что напрашивается, обнаружить все вершины, их координаты подставить в выражение для критерия I и определить ту из них в которой $I = I_{\max}$. Это и есть искомое оптимальное решение.

Порядок действия следующий. Выберем m базовых переменных и разрешим основное уравнение (6.1.1) относительно свободных переменных. Положим теперь $n = k - m$ свободных переменных равными нулю и вычислим значения базовых переменных. Если значения базовых переменных <u>неотрицательны</u>, то это вершина многогранника ОДР. Вычислим значение критерия I_1 в этой точке (при свободных переменных равных нулю). Затем дадим <u>положительное</u> приращение (сколь угодно малое) свободным переменным и снова вычислим значение критерия I_2. Если это значение уменьшилось, т.е. $I_1 - I_2 > 0$, то в этой вершине имеет место оптимум, следовательно, задача решена. В противном случае необходимо выбрать другое множество базисных решений m уравнений с k переменными, число возможных комбинаций равно: $N = \dfrac{k!}{m!(k-m)!}$, и это число быстро растет с увеличением k. Например, для $k = 10; m = 5; N = 252$, а при $k = 20; m = 10 \quad N = 2 \cdot 10^7$. Поэтому простой перебор в задачах с большой размерностью может превратиться в громоздкие вычисления.

Постановка задачи и первые варианты решения задач линейного программирования были опубликованы Л. В. Конторовичем[1] в 1939г. в монографии: «Математические методы организации и планирования производства». Широкое применение методов линейного программирования началось с 1947г., после изобретения Д.Данцигом (США) эффективного метода решения задач линейного программирования — симплекс-метода.

---

[1] Конторович Леонид Витальевич (1912-1986) – академик, лауреат Ленинской, Государственной премий.

Отличие симплекс-метода от прямого перебора вершин состоит в последовательном переходе от одной допустимой вершины к другой с монотонным улучшением целевой функции (критерия эффективности).

Более сложной оказывается задача, когда показатели качества решения $r_{i1}, r_{i2} \ldots r_{ik}$; для некоторых i могут принимать только целочисленные значения (задача целочисленного программирования).

Отметим сразу же, что решение задачи линейного программирования с непрерывными значениями и последующим округлением в общем случае недопустим, так как округление может вывести решение из области допустимых значений. Однако решение такой задачи линейного программирования полезно и используется в так называемом <u>методе ветвей и границ.</u> Сущность этого метода заключается в следующем.

Пусть некоторый показатель качества r^* принимает только целочисленные значения. Тогда сначала решается обычная задача линейного программирования. Пусть в результате получено r_x^* значение показателя качества при ослабленных требованиях, т.е. дробное значение. Обозначим через $[r]$ наибольшее целое меньшее чем r. Тогда ясно, что в интервале $[r_x^*] \div [r_x^*]+1$ допустимых целочисленных решений нет. Тогда возможны два случая: $r^* \le [r_x^*]$ или $r^* \ge [r_x^*]+1$. Это дополнительные условия для задачи линейного программирования. Решая эти две задачи (разветвление задачи) получим целочисленные значения r^*, но в общем случае с разными значениями критерия эффективности I. Если в одном из них значение I больше чем в другом, то его следует зафиксировать как оптимальное. Если решения нецелочисленные, то процедуру повторяют снова уже разветвляя полученные результаты. Эффективность метода повышается за счет введения понятия <u>границы</u>.

Пусть в результате ветвления получено целочисленное значение r_1^* и нецелочисленное значение r_2^* такое что $I(r_1^*) > I(r_2^*)$. Тогда нецелесообразно ветвить нецелочисленное решение, так как $I(r_1^*)$ является оценкой снизу целевой функции исходной задачи, наличие которой устанавливает правило исключения бесперспективных задач, т.е. является <u>границей</u>.

6.1.2 Нелинейное программирование

Задача нелинейного программирования сохраняет классическую постановку. Задан функционал на множестве возможных решений $\Omega = \{\omega_1\}\ i = \overline{1, N}$, каждое из которых характеризуется вектором показателей качества $\vec{r}_i = \{r_{i1}, r_{i2} \ldots r_{ik}\}$:

$$I(\vec{r}) = I\{r_1, r_2 \ldots r_k\} \qquad (6.1.5)$$

Требуется найти глобальный (абсолютный) максимум функционала, при ограничениях на аргументы:

$$h(\vec{r}) = h\{r_{j1}, r_{j2} ... r_{jk}\} = 0\,, \quad j = 1, m\,. \tag{6.1.6}$$

В частном случае, когда функционал $I(\vec{r})$ и ограничения $h_j(\vec{r})$ $j = \overline{1, m}$ являются линейными, задача сводится к задаче линейного программирования. Если хотя бы одно из уравнений (6.1.5) и (6.1.6) является нелинейным, то это уже задача нелинейного программирования. Если в линейном программировании максимум функционала эффективности достигался на границе области допустимых значений аргументов и хотя бы в одной из вершин многогранника области допустимых решений, то в нелинейном программировании экстремумов функционала может быть несколько, глобальный экстремум (максимум из максимумов или минимум из минимумов) может располагаться и внутри области допустимых решений.

Известно много различных методов и приемов решения задачи нелинейного программирования. До настоящего времени, однако, нет единого универсального метода решения этой задачи. Такая ситуация обусловлена, в первую очередь, тем что слишком богат набор различных особенностей нелинейных преобразований и всегда может появиться такая форма нелинейности, для которой задача (6.1.5) и (6.1.6) оказывается неразрешимой. Если, кроме того, задача принятия решения связана с оптимизацией управления большой системой (например, распределение потоков в государственной коммуникационной сети), то получение решения даже эффективного или рационального с применением современных средств автоматизации является чрезвычайно сложной проблемой.

Упростим несколько поставленную задачу и от условной оптимизации (задача 6.1.5, 6.1.6) перейдем к безусловной оптимизации, когда условия ограничения отсутствуют. Для этого критерий качества решения (или функционал эффективности) $I(\vec{r}_\varepsilon)$ представим в форме:

$$\Phi(\vec{r}_\varepsilon) = I(\vec{r}) + \sum_{j=1}^{m} h_j^2(r)\,, \tag{6.1.7}$$

где $h_j(\tau)$ — некоторые штрафные функции.

Заметим, что если задача условно решена и $I(\vec{r})$ принимает свое экстремальное значение при $\sum_{j=1}^{m} h_j(\vec{r}) = 0$; при $\vec{r} = r_o$, то $\Phi(\vec{r}_o)$ также имеет экстремальное значение. Таким образом, среди всех решений безусловной оптимизации по критерию $\Phi(\vec{r})$ будут находиться и решения условной оптимизации. Такой прием принято называть методом штрафных функций. Здесь за нарушение условия $h_j(\vec{r}) = 0$ назначается штраф равный $h^2(\vec{r})$.

Теперь рассмотрим безусловную задачу нелинейного программирования, найти $\vec{r}_o$ такой, что:

$$\Phi(\vec{r}_o) = \max_{\vec{r}} \Phi(\vec{r}) \qquad (6.1.8)$$

В литературе часто критерий оптимизации $\Phi(\vec{r})$ называют целевым функционалом. Напомним, что если требуется искать минимум, то следует перейти к новому критерию с изменением знака. Не сужая общности, далее будем говорить лишь об отыскании максимума.

Поступим самым простым способом. Выберем произвольную точку в пространстве показателей качества принимаемых решений $\vec{r}_1$. Вычислим значение критерия $\Phi(\vec{r}_1)$. Дадим приращение аргументу или просто выберем другую точку случайным образом $\vec{r}_2$ и вычислим $\Phi(\vec{r}_2)$. Проверим:

$$\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) = \Delta\Phi(r_1).$$

Если $\Delta\Phi(r_1) > 0$, то запомним $\Phi(\vec{r}_2)$ и процедуру будем повторять до тех пор, пока не найдется такой $\vec{r}_o$, что n попыток улучшить результат таким случайным образом не удается, и тогда будем считать $\Phi(\vec{r}_o)$ решением задачи. Или зададимся граничным значением $\Phi_{гр}$ и тогда в случае, когда на l-ом шаге окажется: $\Phi(\vec{r}_l) > \Phi_{гр}$, примем $\vec{r}_l$ за решение задачи. Это рациональное решение не претендующее на оптимальность. Описанная процедура является рекурентной. Она имеет массу недостатков. Главный из них заключается в том, что она не гарантирует получение оптимального и даже рационального решения. Этот метод, часто называемый методом случайного поиска, имеет одно преимущество — это простота. Зачастую он оказывается единственно доступным методом, например, именно так и поступает житель большого города, приобретая некоторый товар в условиях рыночной экономики. Если нашелся источник, цена подходящая, качество приличное купил и никого не беспокоит факт, что в городе возможно найти лучший вариант. Но возможен и другой исход. Товар с подходящей ценой не найти, хотя в городе он существует. Можно указать направления совершенствования процедуры, если имеется некоторая априорная информация, конкретизирующая постановку задачи, которая позволяет повысить эффективность итерационных алгоритмов, реализуемых по схеме:

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \alpha_n^k \vec{P}_N, \qquad (6.1.9)$$

где $\vec{r}_{n+1}$ следующая точка, а $\vec{r}_n$ предыдущая точка в векторном пространстве, α_n - длина шага, $\vec{P}_n$ - единичный вектор, определяющий направление шага.

Рассмотрим пути совершенствования описанного метода оптимизации. Общая процедура итерации в соответствии с (6.1.9) позволяет установить направления повышения эффективности этого метода. Под эффективностью итерационного метода оптимизации принято понимать скорость его сходимости к оптимальному решению $\vec{r}_o$.

Различают две основные скорости сходимости:

1. Последовательность $\{\vec{r}_n\}$, вырабатываемая процессом (6.1.9), сходится к точке максимума $\vec{r}_o$ с линейной скоростью, если начиная с некоторого номера N имеет место неравенство:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(r_{(n+1)i}-r_{oi}\right)^2} \le q\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(r_{ni}-r_{oi}\right)^2}\,, \qquad (6.1.10)$$

где q — показатель скорости сходимости $q \in [0,1] = const$.

2. Скорость сходимости называют квадратичной, если:

$$\sum_{i=1}^{k}(\vec{r}_{(n+1)i}-r_{oi})^2 \le q\left[\sum_{i=1}^{n}(r_{ni}-r_{oi})^2\right] \qquad (6.1.11)$$

Квадратичная скорость сходимости выше, чем линейная. Если при $k \to \infty, q \to 0$, то скорость (как линейная, так и квадратичная) сверхвысокая.

Для конкретной задачи нелинейного программирования, когда задан критерий оптимизации и условия ограничения, эффективность итерационного метода удобно оценивать максимальным числом итераций достаточное для решения поставленной задачи.

Анализируя (6.1.9), легко заметить, что эффективность итерационной процедуры существенно зависит от начальной точки итерации $\vec{r}_1$. Действительно, если априори можно указать некоторую область $\Delta\vec{r}$ внутри которой находится точка $\vec{r}_o$ соответствующая оптимальному решению $\omega_0 \in \Omega$, то это может существенно снизить число итераций достаточных для решения задачи. К сожалению общих рекомендаций для выбора начальной точки не существует. Если начальная точка выбрана, то эффективность решения будет зависеть от выбора направления и длины шага итерации.

<u>Выбор направления очередного шага.</u>

В ранее рассмотренном примере направление шага было случайным. Понятно, что можно значительно снизить число шагов в итерационном процессе, если оптимально выбирать вектор $\vec{p}_n$ на каждом шаге. Если целевой функционал $\Phi(\vec{r})$ является гладким, так что существуют все его частные производные, то можно найти направление максимального возрастания (или убывания) функционала в любой точке $\vec{r}$.

Пусть из точки $\vec{r}_i$ проведен луч в направлении единичного вектора $\vec{p} = \{p_1, p_2 ... p_k\}$:

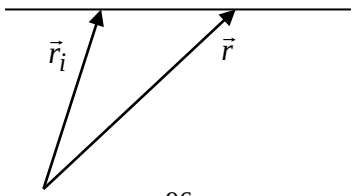

Рис.6.3

Геометрическое место точек принадлежащих этому лучу записывается как:

$$\vec{r} = \vec{r}_i + \lambda\vec{p} = (r_{i1} + \lambda p_1; r_{i2} + \lambda p_2; ... r_{ik} + \lambda p_k) \qquad (6.1.12)$$

Производной в точке $\vec{r}_i$ по направлению $\vec{p}$ принято называть предел:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\Phi(\vec{r}_i + \lambda p) - \Phi(\vec{r}_i)}{\lambda} = \frac{\partial f(x)}{\partial p} \qquad (6.1.13)$$

Равенство (6.1.13) можно записать в иной форме:

$$\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial p} = \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial r_1} p_1 + \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial r_2} p_2 + ... + \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial r_k} p_k \qquad (6.1.14)$$

Вектор, с проекциями на оси координат равными частным производным от функционала $\Phi(\vec{r})$ по составляющим, называют градиентом функционала и обозначают:

$$\nabla\Phi(\vec{r}) = \left(\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial r_1}; \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial r_2}; ... \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial r_k} \right) \qquad (6.1.15)$$

Тогда выражение для производной по направлению $\vec{p}$ (6.1.14) можно записать в виде скалярного произведения векторов $\nabla\Phi(\vec{r})$ и $\vec{p}$:

$$\frac{\partial \Phi(r)}{\partial p} = \left(\nabla\Phi(\vec{r})\vec{p}\right) = \left|\nabla\Phi(\vec{r})\right| |\vec{p}| \cos\varphi = |\nabla\Phi(\vec{r})| \cos\varphi, \qquad (6.1.16)$$

где $|\nabla\Phi(\vec{r})|$ и $|\vec{p}| = 1$ — абсолютные значения векторов, φ — угол между градиентом $\nabla\Phi(\vec{r})$ и выбранным направлением луча $\vec{p}$.

Производная по направлению (6.1.13) является скоростью изменения функционала в направлении $\vec{p}$. Тогда из (6.1.16) видно, что максимальная скорость возрастания функционала $\Phi(\vec{r})$ совпадает с направлением градиента $\nabla\Phi(\vec{r})$, при этом $\varphi = 0; \cos\varphi = 1$ и:

$$\frac{\partial \Phi(r)}{\partial p} = |\nabla\Phi(\vec{r})|$$

Если целевой функционал $\Phi(\vec{r})$ дважды дифференцируем, то используют три члена разложения $\Phi(\vec{r})$ в ряд Тейлора:

$$\Phi(\vec{r}) \cong \Phi(\vec{r}_1) + (\nabla\Phi(\vec{r}_1); \vec{r} - \vec{r}_1) + 0{,}5(\nabla^2\Phi(\vec{r}_1)(\vec{r} - \vec{r}_1); \vec{r} - \vec{r}_1). \qquad (6.1.17)$$

Но в этом случае на каждом шаге итерации необходимо вычислять не только градиент $\Phi(\vec{r}_1)$, но и матрицу Гессе $\nabla^2\Phi(\vec{r}_1)$, что резко увеличивает время, необходимое для реализации шага итерации, хотя число шагов при этом уменьшается.

Теперь, когда направление очередного шага итерации определено, необходимо определить величину шага α_n (6.1.9).

Выбор величины шага.

В целях уменьшения объема вычислений на каждом этапе итерационного процесса и, следовательно, в интересах повышения эффективности этого процесса, разработан целый ряд способов определения шага. Наиболее распространенными среди них являются два.

1. Шаг α_n на основе эксперимента или априорных сведений принимают постоянным и сохраняют его до тех пор, пока: $\Phi(\vec{r}_n) < \Phi(\vec{r}_{n+1})$

Если это условие (условие нарастания целевого функционала) нарушается, то шаг уменьшают. Этот способ применяют, когда поведение функционала $\Phi(\vec{r})$ хорошо известно, его еще называют способом ручной регулировки

2. При втором способе, в каждой достигнутой точке вычисляют единичный вектор градиента:

$$p(\vec{r}_n) = \frac{\nabla\Phi(\vec{r}_n)}{|\nabla\Phi(\vec{r}_n)|} \qquad (6.1.18)$$

Перемещаясь в направлении $p(\vec{r}_n)$ вдоль луча $\vec{r} = \vec{r}_n + \lambda p(\vec{r}_n)$ значение целевого функционала увеличивается. Длину шага находят из уравнения:

$$\frac{d\Phi(\vec{r}_n + \lambda p(\vec{r}_n))}{d\lambda} = 0 \qquad (6.1.19)$$

Корень уравнения (6.1.19) λ_n максимизирует целевой функционал. Исследуя приближение для $\vec{r}_{n+1}$ получаем из соотношения $\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \lambda_n \vec{p}(\vec{r}_n)$.

Верификация решения.

Под верификацией решения понимается выработка критериев остановки итерационного процесса и, таким образом, принятия решения. При этом необходимо знать, каким это решение является, оптимальным, эффективным или рациональным. Особую важность представляет верификация (выработка достаточных признаков) глобального максимума (минимума). Отметим, что решение этой задачи удается получить только в некоторых случаях.

Верификация безусловного локального максимума (минимума) сводится к проверке условия:

$$\nabla\Phi(\vec{r}_o) = 0 \qquad (6.1.20)$$

Если условие (6.1.20) в точке $\vec{r}_o$ выполняется то, как известно из математического анализа, в этой точке имеет место локальный экстремум (максимум или минимум). В общем случае глобальный экстремум не совпадает с локальным. Глобальный экстремум следует искать среди локальных, в точке где функционал терпит разрыв (градиент $\nabla\Phi(\vec{r}) = \infty$) или на границе допустимых значений, определяемых ограничениями. Понятно, что решение можно искать методом перебора. Однако это может оказаться сложным. Существуют ситуации, когда верификация максимума (минимума) упрощается, в частности, когда глобальный и локальный экстремумы совпадают. Такое совпадение имеет место, если

множество значений целевого функционала и множество допустимых значений его аргумента $\vec{r}$ (множество показателей качества) являются выпуклыми. В этом случае говорят о выпуклом программировании.

Множество $M \subset E_n$ называется выпуклым, если весь отрезок, соединяющий две его любые точки, также принадлежит этому множеству. Примером выпуклых множеств является отрезок, круг, прямоугольник, для которых справедливо, что для любых r_1 и r_2 принадлежащих множеству M справедливо утверждение, что и $\vec{r} = (1-t)\vec{r}_1 + t\vec{r}_2 \in M$, т.е так же принадлежит множеству M.

Функция, заданная на выпуклом множестве $\Phi(\vec{r})$ называется выпуклой, если для любых двух точек r_1 и r_2:

$$\Phi\left[(1-t)\vec{r}_1 + t\vec{r}_2\right] \le (1-t)\Phi(\vec{r}_1) + t\Phi(\vec{r}_2) \qquad (6.1.21)$$

Пусть выпуклая функция $\Phi(\vec{r})$ имеет локальный минимум в точке $\vec{r}_1 \in M$ и, следовательно, $\Phi(\vec{r}_1) \le \Phi(\vec{r})$ в некоторой окрестности точки $M \subset M_1$.

Предположим, что в M существует другая точка $\vec{r}_2$ с меньшим значением функции $\Phi(\vec{r}_1) < \Phi(\vec{r}_1)$. Рассмотрим отрезок $\vec{r} = (1-t)\vec{r}_1 + t\vec{r}_2$, соединяющий точки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Так как области M выпуклая этот отрезок полностью содержится в M. Выберем точку на отрезке $\vec{r}_o \in M$ не совпадающую с $\vec{r}$, так что:

$$\vec{r}_o = (1-t_o)\vec{r}_1 + t_o\vec{r}_2 .$$

Поскольку целевой функционал выпуклый, то имеем:

$$\Phi(\vec{r}_o) = \Phi\left[(1-t_o)\vec{r}_1 + t_o\vec{r}_2\right] \le (1-t_o)\Phi(\vec{r}_1) + t_o\Phi(r_2)$$

Предположим, что $\Phi(\vec{r}_2) < \Phi(\vec{r}_1)$, тогда:

$$\Phi(\vec{r}_o) < (1-t_o)\Phi(\vec{r}_1) + t_o\Phi(\vec{r}_1) = \Phi(\vec{r}_1) , \qquad (6.1.22)$$

т.е. оказалось, что в окрестности M, точки $\vec{r}$ локального минимума существует точка $\vec{r}_o$ с меньшим значением целевого функционала $\Phi(\vec{r}_o) < \Phi(\vec{r}_1)$, а это противоречит тому, что $\Phi(\vec{r}_1)$ наименьшее значение функционала в области M. Следовательно, предположение о том, что существует точка $\vec{r}_2$ с меньшим значением функционала, чем в точке $\vec{r}_1$ неверно. А это означает, что точка $\vec{r}_1$ является точкой глобального минимума. Аналогично доказывается и утверждение о том, что для выпуклого целевого функционала заданного на выпуклом множестве показателей качества локальный максимум является и глобальным.

Рассмотрим теперь общий случай нелинейного программирования, когда приходится иметь дело с условной оптимизацией. Пусть требуется найти глобальный минимум функционала $I(\vec{r})$:

$$I(\vec{r}) = I(r_1, r_2 ... r_k) , \qquad (6.1.23)$$

при ограничениях:

$$h_j(\vec{r}) = h(r_{j1}, r_{j2} ... r_{jk}) \le 0 \qquad \text{при } j = \overline{1, m} \qquad (6.1.24)$$

Здесь принято, что все ограничения типа неравенства «$\le$». Понятно, что если это не так, то путем введения новых переменных их можно привести к виду (6.1.24).

Функцией Лагранжа для сформулированной задачи (6.1.23), (6.1.24) называется выражение:

$$L(\vec{r},\vec{u}) = I(\vec{r}) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(\vec{r}), \qquad (6.1.25)$$

где $\vec{u}$ — постоянный вектор, составляющие которого $(\vec{u}_1, \vec{u}_2 ... \vec{u}_k)$ называются множителями Лагранжа. Если все $\vec{u}_i \ge 0$ $i = \overline{1,m}$, то вектор $\vec{u}$ называют <u>неотрицательным</u>.

Условие Слейтера состоит в том, что область допустимых значений аргументов D, определяемая неравенствами (6.1.24), должна иметь хотя бы одну точку $\vec{r}_o$, такую, что $h_j(\vec{r}_o) < 0$ для всех $j = \overline{1,m}$.

Теперь сформулируем одну из основных теорем нелинейного программирования.

<u>Теорема Куна-Таккера.</u>

Пусть выполнено условие Слейтера. Тогда для того, чтобы точка $\vec{r}_o$ была точкой глобального минимума при ограничениях (6.1.24), необходимо и достаточно существование такого вспомогательного неотрицательного вектора $\vec{u}_o$, при котором пара $\vec{r}_o$ и $\vec{u}_o$ была бы седловой точкой функции Лагранжа, т.е. выполнялось неравенство:

$$L(\vec{r},\vec{u}_o) \ge L(\vec{r}_o,\vec{u}_o) \ge L(\vec{r}_o,\vec{u}), \qquad (6.1.26)$$

при любом $r \in D$. Докажем достаточность, что важно для верификации решения.

Выражение (6.1.26) с учетом (6.1.25) и (6.1.23) принимает вид:

$$I(\vec{r}) + \sum_{i=1}^{m} u_{oi} h(r) \ge I(\vec{r}_o) + \sum_{i=1}^{m} u_{oi} h(\vec{r}_o) \ge I(\vec{r}_o) + \sum_{i=1}^{m} u_i h(\vec{r}_o) \qquad (6.1.27)$$

Убедимся, что если выполняются (6.1.27), то выполняются все ограничения (6.1.24). Действительно, если бы для некоторого i оказалось $h_i(r_0) > 0$, то сумму в правой части (6.1.27) можно было бы сделать неограниченно большой за счет увеличения u_{0i}, но это противоречит ограничению (6.1.27). Таким образом (6.1.27) удовлетворяет всем ограничениям (6.1.24). Поскольку $u_{0i} \ge 0$ и $h_i(\vec{r}) \le 0$ для всех $\vec{r}$ из допустимой области, то в левой части неравенства (6.1.27) сумма: $\sum_{i=1}^{m} u_{oi} h_i(\vec{r}) \le 0$. Отбросив ее, получаем усиление неравенства, так что: $I(\vec{r}) \ge I(\vec{r}_o) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(\vec{r}_o)$, или, полагая $u_i = 0$, что допустимо по условию

теоремы, имеем: $I(\vec{r}) \geq I(\vec{r}_o)$ для всех $\vec{r}$ из области допустимых значений. Достаточность доказана.

Отметим в заключение этого параграфа, что если функция Лагранжа (6.1.25) дифференцируема по всем r_j $j = \overline{1,k}$ и u_i $i = \overline{1,m}$, то решения уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial r_j} = 0 \quad \text{для } j = \overline{1,k} \text{ и } \frac{\partial F}{\partial u_i} = 0 \quad \text{для } i = \overline{1,m}$$

позволяют получить точку условного локального экстремума $\vec{r}_o$.

Такой прием называют методом множителей Лагранжа. Однако его применение ограничено из-за громоздкости решений и отсутствия критерия идентификации глобального экстремума.

6.1.3 Динамическое программирование

Метод динамического программирования широко используется в различных областях экономики, техники, производства, военного дела и т.д. Он предложен в 50-ые года Р. Белманом и применим к системам, для которых справедлив принцип Белмана. Сущность принципа Белмана удобно пояснить на примере оптимального управления некоторой системой, заданной уравнением переменных состояний:

$$\frac{d\vec{S}(t)}{dt} = \vec{f}(\vec{S}(t), \vec{x}(t), t), \tag{6.1.28}$$

где $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t) ... x_m(t))$ — вектор внешних воздействий,

$\vec{S}(t) = (S_1(t), S_2(t) ... S_n(t))$ — вектор переменных состояний, $f(t)$ — некоторая функция определяющая свойства системы.

Под управлением понимается воздействие на вход системы $\vec{x}(t)$ с целью перевода состояния системы из начального состояния $\vec{S}_н(t_н)$ в конечное $\vec{S}_к(t_к)$ за промежуток времени $T = (t_k - t_H) > 0$. Понятно, что такое управление может быть реализовано различными способами. Обозначим множество внешних воздействий на систему, решающих задачу управления (обеспечивающих достижение цели) через X. Пусть задан некий функционал эффективности второго рода:

$$\Phi = \int_{t_н}^{t_к} G(\vec{S}(t), x(t), t) dt. \tag{6.1.29}$$

Тогда задача оптимального управления системой заданной своей моделью в форме (6.1.28) сводится к отысканию такого внешнего воздействия $\vec{x}_o(t) \in X$ (обеспечивающего достижение цели), которое минимизирует (максимизирует), следуя Белману, функционал эффективности (6.1.29).

Принцип Белмана сводится к требованию удовлетворения свойств марковости на любом конечном отрезке времени $[t_1;t]$ $t_H \le t_1 \le t \le t_k$. Это означает, что поведение системы на этом отрезке (изменение состояния $\vec{S}(t); t \in [t_1;t]$) полностью определяется управлением на этом отрезке и состоянием системы в начальный момент времени $\vec{S}(t_1)$. И не зависит от того, каким образом система попала в состояние $\vec{S}(t_1)$ (т.е. от предыстории).

Рассмотрим некоторый момент времени t_1 $t_H < t_1 < t < t_k$. И пусть состояние $\vec{S}(t_1)$ в момент t_1 находится на <u>оптимальной</u> траектории изменения $\vec{S}(t)$ под воздействием $\vec{x}_o(t)$. Тогда согласно принципу Белмана, при отыскании оптимального управления на промежутке времени нет необходимости рассматривать поведение системы на интервале $[t_1;t_k]$, а достаточно рассматривать $\vec{S}(t_1)$, как начальное состояние и искать оптимальное управление на промежутке $[t_1;t_k]$. Таким образом, отрезок оптимальной траектории сам по себе оптимален. Предположим, что это не так. И на интервале $[t_1;t_k]$ нашлась оптимальная траектория, не лежащая на траектории оптимальной для управления на интервале $[t_H;t_k]$. (см. рис. 6.4. пунктирная линия)

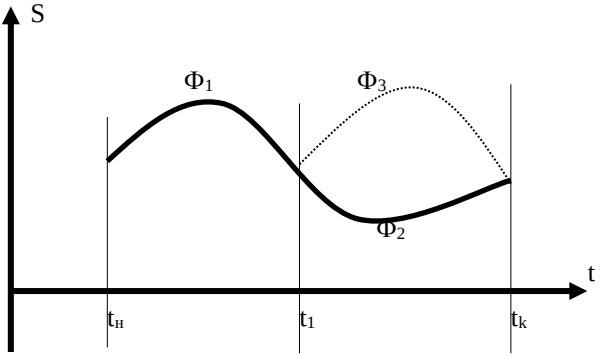

Рис. 6.4

Тогда, в силу аддитивных свойств функционала (6.1.29) имеем:

$$\Phi_1 + \Phi_2 > \Phi_1 + \Phi_3 .$$

Следовательно, исходная траектория состоящая из участков $1-2$ не является оптимальной. Что доказывает утверждение принципа Белмана.

Введем функцию весьма удобную для промежуточных выкладок – функцию Белмана $B(t_0)$ $t_0 \in [t_н, t_k]$:

$$B(t_o) = \min_{\vec{x}\in X} \Phi(\vec{x}(t), \vec{S}(t), t) = \min_{\vec{x}\in X} \int_{t_o}^{t_k} G(\vec{x}(t), \vec{S}(t), t)dt \qquad (6.1.30)$$

Замечаем из (6.1.30), что функция Белмана зависит только от начального момента t_0, поскольку минимизация проведена по всем управляющим воздействиям, а по времени проводится интегрирование. При этом предполагается, что конечный момент времени t_k является фиксированным. Выберем некоторый момент времени $t_1 \in [t_0, t_k]$ близкий к t_0, так что $t_1 = t_0 + \Delta t$, тогда функцию Белмана можно представить в форме:

$$B(t_o) = \min_{\vec{x}\in X} \int_{t_o}^{t_1} G(\vec{x}(t), \vec{S}(t), t)dt + B(t_o + \Delta t)$$

Представляя интеграл по теореме о среднем, прикладывая в ряд Тейлора $B(t_o + \Delta t)$, получаем:

$$B(t_o) = \min_{\vec{x}\in X}\left[G(\vec{x}(t), S(t), t)\Delta t\right] + B(t_o) + \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B}{\partial S_i(t)} \frac{dS_i(t)}{dt} + \frac{\partial B(t)}{\partial t}\right]\Delta t + O(\Delta t^2), \quad (6.1.31)$$

где $O(\Delta t^2)$ — бесконечная величина порядка Δt^2.

Принимая во внимание (6.1.28), приводя подобные члены и внося под знак минимума функцию Белмана и ее производные (что можно делать, поскольку функция B не зависит от $\vec{x}(t)$), получаем окончательно:

$$\min_{\vec{x}\in X}\left\{G(\vec{x}(t), S(t), t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B}{\partial S_i} \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{S}(t), t)\right\} = -\frac{B(t_o, t)}{\partial t} \qquad (6.1.32)$$

Теперь установим порядок решения задачи оптимального управления методом динамического программирования.

1. Составляется уравнение Белмана (6.1.31) и из условия минимума его левой части находят управление $x_0(t)$, зависящее от неизвестной функции Белмана $B(t_0)$. Задача особенно упрощается, если эта функция не зависит в явном виде от времени, так что $\partial B / \partial t = 0$.

2. Подставляют найденное оптимальное управление снова в уравнение Белмана и получают уравнение для $B(\vec{S}(t))$. Это дифференциальное уравнение и его решение ищут либо в виде квадратичной формы, например, при $n = 2$ $B = a_{11}S_1^2 + 2a_{12}S_1S_2 + a_{22}S_2^2$, либо в виде функций А.М. Ляпунова

3. Полученное выражение для B, подставляют в выражение для оптимального управления $\vec{x}_o(t)$ и задача решена.

Процедура принятия решения по оптимальному управлению динамическими системами, описанная выше, даже для простых ситуаций является чрезвычайно трудоемкой и трудно автоматизируемой. По этой причине широкое применение на практике получил приближенный (упрощенный) подход к решению задач динамического программирования. Сущность этого подхода заключается в следующем.

Во-первых, предполагается, что принцип Белмана удовлетворяется. Во-вторых, задачу дискретизируют по времени, состоянию и управлению, так что, время управления T разбивают на N одинаковых промежутков и в каждом из промежутков управление считается постоянным, что резко упрощает задачу, и такую дискретизированную задачу решают с конца. Считают что к концу N -го (последнего) промежутка времени система должна оказаться в состоянии $\vec{S}_k$. На предыдущем шаге (конец $N-1$ -го промежутка) состояние может быть любым из Z конечных дискретных состояний. Из каждого из таких состояний считается управление x_{n-1} и значение функционала Φ_{n-1} для достижения $\vec{S}_k$. Затем переходят в конец интервала N -2 и оттуда с каждого и Z состояний вычисляются управления и их эффективность до $\vec{S}_k$, используя аддитивность функционала эффективности управления и принцип Белмана. Продолжая итеративный процесс доходят до начального состояния $\vec{S}_н(t_o)$. На завершающем этапе проходят от начала к концу уже по оптимальной траектории управления. При этом приходится решать задачу дискретного управления на интервале $Z \cdot N$ раз. Если решение задачи проводить от начала к концу, то потребовалось бы обследовать Z^N различных маршрутов и для каждого из них решать N раз дискретную задачу управления и затем выбирать лучший маршрут. Всего бы потребовалось NZ^N решений дискретной задачи, что значительно больше, чем $Z \cdot N$.

6.2. Статистические задачи принятия решений

Характерной особенностью статистических задач принятия решений является:

1. Наличие случайности связанной либо с определением функционала эффективности, либо с ограничениями.
2. Проявление случайности подчиняется определенным законам, которые могут быть описаны методами математической статистики.
3. Решение принимается неоднократно в одинаковых условиях.

Естественно, что проявление случайности в исходе принятого решения всегда связано с проявлением некоторой неопределенности. Но эта неопределенность относится к исходу принимаемого решения, а не к процессу принятия решений. Поскольку предполагается, что все законы распределения случайных величин и событий, влияющих на принятие решений, известны, то решение принимается в условиях полной априорной определенности. Хотя при этом приходится пользоваться аппаратом теории вероятностей и математической статистики. Статистическая неопределенность — это почти определенность, если только известны все необходимые вероятностные характеристики.

6.2.1 Стохастическое программирование

Стохастическое программирование является разделом теории принятия решений, в котором рассматриваются задачи с явными стохастическими свойствами. Эти свойства проявляются либо в случайности целевого функционала, либо в случайности ограничений. Простейшим примером является задача принятия решения, в которой целевой функционал $I(\vec{r},\Theta)$ и ограничения зависят от неизвестного случайного параметра Θ.

$$g_i(\vec{r},\Theta) \le 0 \qquad i=\overline{1,m};\ \vec{r} \in R \tag{6.2.1}$$

Так, при оптимальной обработке принимаемого сигнала в приемном устройстве, когда необходимо принять решение, какой из возможных сигналов принят при наличии помех, вероятность ошибки зависит от соотношения мощности сигнала к мощности помехи в точке приема.

В зависимости от априорной информации о неизвестном параметре Θ разработаны несколько процедур принятия решения. Наиболее широко применяется процедура оценки неизвестного параметра перед каждым принятием решения (так, например, и поступают при оптимальной обработке сигнала). Естественно, что оценивание параметра связано с измерением (наблюдением).

Тогда задача принятия решения ставится так, найти такое решение, для которого $\vec{r}_o(r_{10}, r_{20}...r_{k0}) \in R$ обеспечивает минимум (максимум) функционала $I(\vec{r}_o,\widetilde{\Theta})$ при ограничениях $g(\vec{r}_o,\widetilde{\Theta}) \le 0$, где $\widetilde{\Theta}$ — оценка неизвестного параметра, полученная в результате решения задачи оценивания. Поскольку решение принимается многократно, то каждый раз предварительно решается задача оценивания, а затем задача линейного или нелинейного программирования. Такую процедуру принято называть задачей <u>многоэтапного, оперативного, стохастического программирования</u>

Если задача принятия решения (задача программирования) решается сначала, а затем задача оценивания, то такая повторяющаяся многократно процедура называется задачей <u>перспективного стохастического программирования</u>. На первый взгляд последняя процедура кажется нелогичной, однако к перспективному стохастическому программированию сводятся многие практические задачи. Так поступает командующий войсками, который наносит превентивный удар, затем оценивает обстановку и снова наносит удар и т.д.

Если известна функция распределения случайного параметра $F_\Theta(\lambda)$, то задачу принятия решения формулируют, ориентируясь на среднее значение целевого функционала, т.е. найти минимум математического ожидания функционала:

$$\min_{\vec{r}\in R} M\{I(\vec{r},\Theta)\}, \tag{6.2.2}$$

при ограничениях: $M[g_i(\vec{r},\Theta)] \le 0$, $i=\overline{1,m}$.

В этом случае задача сводится к нелинейному динамическому программированию. На практике иногда задачу (6.2.2) упрощают, и она ставится так: найти

$$\min_{\vec{r}\in R}\left\{Bep\left[I(\vec{r},\Theta)\right]\geq\delta\right., \qquad (6.2.3)$$

при условии, что: $Bep\{g_i(\vec{r}.\Theta)\leq 0\}\geq p_i \qquad i=\overline{1,m}$,

где δ и p_i, $i=\overline{1,m}$ — фиксированные значения вероятностей, определяемые из априорных условий.

Однако задача стохастического программирования не всегда может быть сведена к нелинейному программированию. Дело в том, что $M\{I(\vec{r},\Theta)\}$ может не иметь производных по r_i, $i=\overline{1,k}$ и Θ. В этом случае не работают градиентные методы, играющие первостепенное значение в нелинейном программировании. В таких ситуациях прибегают к различным эвристическим процедурам, таким как метод квазиградиентов, когда производная от $M\{I(\vec{r},\Theta)\}$ заменяется на производную от $I(\vec{r},M\{\Theta\})$, или стохастической аппроксимации, когда в итерационном процессе динамического программирования вместо производной по показателям качества в решении используют отношение приращения функционала к длине шага. Однако доказательство сходимости таких прямых методов имеет место только для частных случаев, и они скорее относятся к классу эвристических процедур.

6.2.2 Конечные задачи стохастических решений

Среди стохастических задач особую роль играют задачи, когда множество возможных решений конечно, множество всех внешних (и внутренних) факторов, влияющих на принятие решений так же являются конечными. Такие задачи более просты в постановке и допускают решение переборным методом. Однако для лица принимающего решение они представляются иногда непреодолимо трудными. Действительно, для того чтобы к концу года авиационный завод выпустил намеченное число самолетов необходимо:

— заключить договоры с различными предприятиями на поставку комплектующих;

— заключить договоры с поставщиками материалов;

— распределить производство всех деталей и узлов по станкам;

— выбить ссуду по госзаказам;

— набрать и подготовить специалистов;

— оценить перспективу рынка и т.д. и т.п.

Читатель прекрасно понимает, что перечень проблем планируемых к разрешению не вместится в данное скромное пособие. Попытаемся, однако, упорядочить проблему, стоящую перед руководителем авиационного открытого акционерного общества. Что его интересует? В настоящее время наверное только прибыль, возможно, степень защищенности нашей Родины от агрессивных нападок, а может тщеславие и т.д. и т.п. Остановимся на самом современном — прибыли, которая является исходом принятого решения. Множество возможных

исходов определим как X. Сразу же отметим, что это множество конечно, ибо по условию все варианты, которые приводят к исходам перечислены и их множество конечно, поскольку конечно множество допустимых решений Ω. Какое количество самолетов каждого типа выпустить, с кем и какие договоры заключить, и т.д. и т.п. Но на исход будут влиять и случайные события. Их можно разделить на две группы.

К «внутренним» случайным событиям относятся, например, забастовка, стихийные бедствия на заводе и т.д. и т.п. Вторая группа «внешние» случайные события независимые от деятельности данного предприятия, например, изменение стратегии правительства в области транспорта, или снижение цен на нефть и с нею связанным понижением покупательной способности рубля и т.д. и т.п. Важно подчеркнуть, что таких неприятностей много, но их число (существенно влияющих на рассматриваемую проблему) конечно. Естественно, что в процессе выполнения поставленной задачи приходится проводить ряд исследований и экспериментов, которые так же повлияют на конечный исход обсуждаемой операции, к примеру, это исследование рынка сбыта, обследование надежности давно используемой в технологическом процессе аппаратуры и техники и т.д. и т.п. В результате можно сделать вывод: всего не учтешь, потом посмотрим, или как выразился Наполеон Бонапарт: сначала нужно ввязаться в драку, а там разберемся. Такие умозаключения в настоящее время нужно признавать как минимум ограниченными, а как максимум непрофессиональными. В современном мире ничего нельзя оставлять на «авось». Для безошибочного принятия решения в таких сложных ситуациях в первую очередь необходимо классифицировать возможные варианты (ведь их конечное число). Затем представить ситуацию в ярком очевидном ракурсе, чтобы принятие решения не вызывало принципиальных трудностей.

Таким приемом информационного обеспечения принятия решения является построение дерева решений. Под деревом решений понимается ориентированный граф изображающий процесс от принятия решения из множества Ω до множества возможных исходов $\mathbf{X}$. Дерево решений позволяет наглядно оценить обстановку и обоснованно выбрать решение, приводящее к наилучшему исходу. Простейшее дерево решений изображено на рис. 6.5. Здесь квадратом изображен узел принятия решения и множество исходов, отмеченных закрашенными прямоугольниками. Из узла исходят дуги ведущие к исходам. Каждая дуга соответствует своему решению.

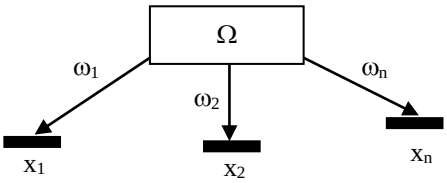

Рис. 6.5

Это тривиальный случай принятия решения, когда решение сразу приводит к исходу. Если на множестве исходов задано отношение порядка, то, перебирая попарно исходы, можно найти наиболее благоприятный исход и, следовательно, решить задачу принятия решения.

В действительности приходится встречаться с более сложными ситуациями. При одном и том же решении исходы могут зависеть от случайных факторов, которые могут быть разделены на внешние, обусловленные внешними причинами и на внутренние, вызванные изменением состояния управляющей системы. Кроме того, априорная неопределенность заставляет лицо принимающее решение решиться на предварительные исследования (эксперимент, разведка и т.д. и т.п.). Естественно, что затраты на такие исследования и их результаты в значительной степени повлияют на целевую функцию и могут кардинально изменить решения.

Построим теперь дерево решений для более общего случая. Будем предполагать, что множество факторов влияющих на решение, множество решений и множество исходов являются конечными. Фрагменты дерева решений для этого случая изображены на рис. 6.6. Здесь сделаны следующие обозначения.

1. Квадратами изображены узлы (ситуации) в которых необходимо принимать решения, их две группы. Группа A, состоящая из одного узла, в котором принимаются решения на предварительные исследования (эксперименты), и группа C, где принимаются решения с известными результатами каждого из возможных экспериментов.

2. Кружками обозначены ситуации, к которым приводят решения: B — после выбора эксперимента и $Д$ — после принятия решений.

3. Дугами (линиями) изображены сами явления или события изменяющие ситуации. Так $\vec{a} = \{a_0, a_1..a_m\}$ - множество экспериментов, которые могут быть проведены в результате принятия решения A. Каждый из экспериментов, естественно, приводит к своей ситуации $B = \{B_1, B_2 \ldots B_k\}$. Действительно, каждый эксперимент потребует своих затрат, своей подготовки и т.д. Под a_0 будем понимать нулевой эксперимент (т.е. отсутствие предварительных исследований). Дуги $\vec{b} = \{b_0, b_1..b_k\}$ результаты эксперимента, которые возможно предвидеть. Естественно они изменяют ситуацию, предваряющую принятие решений в узлах $C = \{C_0, C_1 \ldots C_L\}$, где C_0 — ситуация, в которой принимается решение при отсутствии предварительных исследований. Каждое из множества возможных решений $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_n\}$ приводят к ситуациям D, в которых действуют случайные факторы $\vec{d} = \{d_i\}$ $i = \overline{\alpha,1}$ к различным исходам X (обозначенными закрашенными квадратами).

Таким образом, исход $X_{i,j,V,Q}$ $i = \overline{0,m}; j = \overline{1,n}; q = \overline{1,\alpha}$ зависит от того, какой эксперимент был проведен, каков результат эксперимента, какое принимать

решение и какой случайный фактор может воздействовать в процессе реализации решения.

Рис. 6.6

Понятно, что исходы X являются случайными. На множестве исходов задается функция полезности $F(X)$, которая вносит отношение порядка на этом множестве. По своему смыслу это может быть выигрыш, прибыль, затраченный ресурс и т.д. и т.п.

Теперь, естественно, проблема сводится к выбору такого решения, которое обеспечило бы максимум функции полезности, однако эта задача неразрешима в силу случайности исхода и, следовательно, полезности. Возникает проблема выработки критерия на множестве всех ситуаций, по которому можно было бы определиться в части выбора решения и проведения эксперимента.

6.2.3. Критерии оптимальности принятия стохастических решений

Наиболее распространенным критерием оптимальности выбираемого решения является Байесовский критерий. Сущность его проста. Если полезность решения является случайной величиной, то следует ориентироваться на среднее значение этой случайной величины, т.е. на математическое ожидание $M\{F(X(a,b,\omega,d))\}$, где случайными являются результаты эксперимента $\{b_j\}$, $j=\overline{1,k}$ и влияние случайного фактора (внешнего и внутреннего) $\{d_v\}, v=\overline{1,\alpha}$.

Величины a - вид эксперимента и ω - принимаемое решение являются варьируемыми, так что выражение для Байесовского критерия принимает вид:

$$I = MF(x) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\Theta=1}^{\alpha} P(b_j d_\Theta) F[X(a, b_j, \omega, d_\Theta)] \qquad (6.2.4)$$

Оптимальное решение ищется из условия оптимизации:

$$\max_{a,\omega} I = \max_{a,\omega} \sum_{j=1}^{k}\sum_{\Theta=1}^{\alpha} P(b_i d_\Theta) F[X(a, b_j, \omega, d_\Theta)] \qquad (6.2.5)$$

Если проявление случайного фактора и результатов эксперимента представляются как непрерывные случайные величины с совместной плотностью распределения вероятностей $W_{b,\Theta}\left(\lambda_1, \lambda_2\right)$, то выражение (6.2.5) принимает вид:

$$\max_{a,\omega} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} W_{b,\Theta}(\lambda_1, \lambda_2) F[X(a, \lambda_1, \omega, \lambda_2)] d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$= \max_{a,\omega} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} W_b(\lambda) W_{\Theta/b}(\lambda_2 / \lambda_1) F[X(a, \lambda_1, \omega, \lambda_2)] d\lambda_1 d\lambda_2 , \qquad (6.2.6)$$

где $W_{\Theta/b}(\lambda_2 / \lambda_1)$ — апостериорная плотность распределения вероятностей действия случайного фактора.

В случае, когда результат предварительных исследований достоверно известен и равен $\hat{b}$, то условие определения оптимального решения упрощается и принимает вид:

$$\max_{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\Theta/b}(\lambda_2 / \hat{b}) F[X(a, \hat{b}, \omega, \lambda_2)] d\lambda_2 \qquad (6.2.7)$$

Особенностью Байесовского критерия является его ориентация на среднее значение полезности. Это оправдывает себя в случаях, когда решение принимается многократно в одинаковых условиях (статистическая задача принятия решения).

В некоторых задачах принятия решений целью является не достижение максимальной полезности, а достижение определенного уровня $F_{гр}$. Критерий, соответствующий этому принципу, принято называть критерием предельного уровня. Целевой функцией при использовании этого критерия является вероятность того, что достигаемая в результате принятия решения полезность превысит заданный граничный уровень:

$$p = Вер\{F[X(a, b, \omega_i, d)]\} \geq F_{гр} \qquad (6.2.8)$$

При этом принимается то решение ω_i, при котором вероятность превышения заданного граничного уровня окажется максимальной:

$$\omega_i : Вер\{F[X(a, b, \omega_i, d) \geq F_{гр}]\} = \max_{\omega} \qquad (6.2.9)$$

Характерной особенностью данного критерия является то, что необходимо знать закон распределения вероятностей полезности F. Однако это не всегда просто может быть получено.

Существует множество других критериев в задачах принятия решений. Например, критерий «ожидаемая полезность-дисперсия», в котором на ряду со средним значением полезности учитывают и второй момент закона распределения вероятностей полезности D:

$$I = M\left\{\vec{F}\right\} - \gamma\sqrt{D}\ , \qquad (6.2.10)$$

где γ — коэффициент выбираемый по интуиции (при $\gamma = 0$ критерий «ожидаемая полезность-дисперсия» переходит в байесовский).

6.3 Принятие решений в конфликтной ситуации

6.3.1 Основные определения

Ситуация, когда исход определяется принятием решений несколькими лицами (множество лиц принимающих решений больше или равно двум) с различными целями, (не обязательно согласованными, а зачастую противоречивыми) называется конфликтной.

Каждое лицо, принимающее решение в конфликтной ситуации находится в условиях неопределенности. Эта неопределенность заключается в том, что ему не известно какое решение будет принято конфликтующими сторонами. Такая неопределенность является специфической. Дело в том, что другое лицо, принимающее решение может проанализировать все возможные ситуации и попытаться из них выбрать наиболее благоприятно, предполагая при этом, что другие лица участвующие в ситуации поступят аналогичным образом. Иногда такая задача может быть строго решена. В других случаях удается получить некоторые полезные результаты путем анализа ситуации. Раздел математики изучающий проблемы принятия решений в конфликтной ситуации называется теорией игр. В теории игр конфликтная ситуация называется игрой. Лица, принимающие решения в игре называются игроками. Решения, которые могут приниматься называются стратегиями. Если некоторые подмножества игроков вступают (или могут вступать) в соглашение, когда наряду с индивидуальными целями преследуются еще и коллективные цели, то игра называется коалиционной. Совокупность стратегий принятых игроками определяет ситуацию игры. Естественно, что множество ситуаций равно декартовому произведению множеств стратегий всех коалиций (включая и коалиции, состоящие из одного игрока).

Для каждого игрока на множестве возможных ситуаций задается отношение предпочтения, что позволяет ему ориентироваться в игре; стараясь выбирать наиболее благоприятные ситуации.

Не все ситуации, которые могут сложиться в процессе игры, допускаются. Есть ситуации запрещенные. Деление ситуаций на запрещенные и разрешенные называют правилами игры. Таким образом, правила игры определяют и некоторые стратегии каждого игрока как запрещенные.

Отношение предпочтения на множестве ситуаций для каждого игрока обычно задают в виде таблицы выигрыша, где выигрыш определяется числом. Последнее несколько сужает значимость теории, ведь на практике решение может иметь различные аспекты (экономический, социальный, моральный, этический и т.д. и т.п.), поэтому задание отношения предпочтения само является непростой задачей, а решение игры (отыскание оптимальной стратегии) зачастую представляется неразрешимой что в свою очередь подчеркивает факт, о широких возможностях теории игр. Теория игр является довольно древней наукой. Во всяком случае, она появилась ранее теории вероятностей. Однако фундаментальные работы в этой области были получены во второй половине 19-го века и в первой половине 20-го, когда проблемы экономики удалось сформулировать на языке теории игр. Школа советских ученых возглавлялась Л.В. Канторовичем (Московская школа), Ю.В. Линником и Н.Н. Воробьевым (Ленинградская школа). К основополагающим зарубежным работам относятся работы Дж. Неймана и Дж. Мак-Кинси.

6.3.2 Классификация игр

Классификация игр является важной и ответственной проблемой, так как пока не существует теории, которая позволяла бы решить основную задачу теории игр в общем случае.

Основная задача теории игр состоит в нахождении таких способов выбора стратегий каждым участником игры, когда с гарантией и в максимальной степени обеспечиваются интересы каждого игрока.

Игры классифицируются по составу участников на коалиционные, когда допускается организация коалиций игроков, и безкоалиционные, когда они запрещаются. Если участников игры двое и их интересы противоположны, то игра называется антагонистической. Каждый игрок располагает набором действий (множеством решений по выбору того или иного действия) т.е. стратегиями. Каждая стратегия взятая отдельно называется чистой стратегией, в отличии от смешанной стратегии, когда игрок комбинирует чистыми стратегиями.

Выбор чистой стратегии каждым из игроков определяет выигрыш каждого из игроков, который обычно задается в виде платежной матрицы. Так антагонистические игры называют обычно матричными играми с нулевой суммой (когда алгебраическая сумма выигрышей игроков равна нулю). При этом элементами матрицы являются выигрыш одной стороны и одновременно проигрыш другой.

Реальные игры представляют собою процесс во времени, когда игроки действуют в заданной последовательности, а выигрыш определяется в конце игры. Такие игры принято называть позиционными.

Если стратегия игроков является, одноразовым выбором, то считают, что игра задана в нормальной форме. Ниже будут рассматриваться только антагонистические игры, заданные в нормальной форме.

6.3.3 Матричные игры. Цена игры. Игры с седловой точкой

Рассмотрим антагонистическую игру порядка $m*n$, где m есть число стратегий первого игрока, а n — число стратегий второго игрока. Если m и n конечные числа, то игра называется конечной. Обозначим множество стратегий первого игрока через $X=\{x_i\}\ i=\overline{1,m}$, а множество стратегий второго игрока через $Y=\{y_j\}\ j=\overline{1,n}$. Матрица выигрышей (платежная матрица) задается в виде матрицы $A=\|a_{ij}\|\ i=\overline{1,m}\ \ j=\overline{1,n}$, где α_{ij} выигрыш первого игрока выбравшего стратегию x_i^* в то время как второй игрок принял стратегию y_i. В антагонистической игре a_{ij} проигрыш второго игрока при тех же условиях.

Нижней ценой игры α называют:

$$\alpha=\max_i \min_j a_{ij} \tag{6.3.1}$$

Это означает, что при фиксированной стратегии первого игрока ищется минимальный выигрыш по всем стратегиям второго игрока. Затем ищется такая стратегия первого игрока x_i, когда этот выигрыш наибольший. Нижней ценой игры, таким образом, называется минимальный <u>гарантированный</u> выигрыш первого игрока. Действительно выигрыш первого игрока не может быть меньше α, если игрок будет придерживаться описанному правилу выбора чистой стратегии. Аналогично верхней ценой игры называют β:

$$\beta=\min_j \max_i a_{ij} \tag{6.3.2}$$

Это минимальный гарантированный проигрыш второго игрока. Понятно каким образом второй игрок должен выбирать чистую стратегию. Для этого он сначала для всех чистых стратегий находит максимальный проигрыш по всем возможным стратегиям первого игрока и затем выбирает такую свою стратегию $y*$, для которой этот максимум минимален.

Покажем, что всегда имеет место неравенство:

$$\alpha=\max_i \min_j a(x_i,y_j)\le \min_j \max_i a(x_i,y_j)=\beta \tag{6.3.3}$$

Действительно, для заданной конечной игры всегда справедливо:

$$\min_j a(x_i,y_j)\le a(x_i,y_j'), \tag{6.3.4}$$

где y_j' — любая стратегия второго игрока, поскольку слева стоит минимальное значение этой же функции по аргументу y. Но соотношение (6.3.4) имеет место для любого x_i, следовательно:

$$\max_i \min_j a(x_i,y_j)\le \max_i a(x_i,y_j'),$$

тогда (6.3.3) тем более справедливо. Если нижняя цена игры равна верхней цене игры $\alpha = \beta = V$, то говорят, что игра имеет седловую точку с ценой игры V.

При наличии седловой точки первый игрок имеет оптимальную стратегию x^*, такую что $a(x^*, y) \geq V$, а оптимальная стратегия второго игрока y^* гарантирует $a(x, y^*) \leq V$.

Поясним сказанное на примере, однако предварительно отметим, что стратегия первого игрока x_p, называется <u>пассивной стратегией</u>, если существует такая стратегия x_0, что выигрыш при чистой стратегии x_0 всегда больше чем для x_p, иначе говоря: $x = x_p$,если $\exists x_0$: для $\forall y_j \in Y$, $a(x_0, y) > a(x_p, y)$

Пассивную стратегию нет смысла применять, так что при решении игры ее можно опустить. Если матрица игры получена из практических соображений, то всегда могут появиться пассивные чистые стратегии. Их устранение может в значительной степени упростить решение игры.

Пример. Игра задана платежной матрицей (таблица 6.1). Сразу же замечаем, игра имеет пассивные стратегии:

Таблица.6.1

x / y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
x_1	11	7	3	9	10	8	4.5
x_2	6	9	4	7	5	10	4.5
x_3	3	2	3	10	4	2.5	3.5
x_4	13	7	6	3	5	8.5	6.5
x_5	5.6	3	4	2	4	5	4.3

Так, сравнивая x_2 и x_5, убеждаемся, что x_5 пассивная. Выигрыш первого игрока при стратегии x_2 больше, чем при стратегии x_5 для всех стратегий второго игрока.

Таблица 6.2

x / y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\min\limits_j a_{ij}$
x_1	11	7	3	9	10	3
x_2	6	9	4	7	5	4
x_3	3	2	3	10	4	2
x_4	13	7	6	3	5	3
$\max\limits_i a_{ij}$	13	9	6	9	10	

Аналогично убеждаемся, что y_6 и y_7 — пассивные относительно y_2 и y_3 соответственно. Устраняя пассивные стратегии, получаем игру представленную в табл. 6.2. Убеждаемся, что для этой игры $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 4$. Оптимальными стратегиями являются $x_0 = x_2$; $y_0 = y_3$. Игра имеет седловую точку. Действительно при стратегии первого игрока x_2, любая отличная от y_3 стратегия второго игрока разве лишь увеличит выигрыш. При стратегии игрока второго y_3, любая отличная от x_2 стратегия первого игрока приводит к уменьшению его выигрыша, а, следовательно, к уменьшению проигрыша второго игрока.

Игра устойчива и поведение игроков установлено. Однако не всегда игры имеют седловую точку. Рассмотрим эту ситуацию подробнее.

6.3.4. Игры без седловой точки. Игры со смешанными стратегиями

В случае, когда в игре седловая точка отсутствует и

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij} = \beta ,$$

то оптимальную стратегию ищут в смешанных стратегиях. Если в этом случае решение принимается многократно, то под смешанной стратегией понимается случайное чередование отдельных чистых стратегий.

Обозначим смешанную стратегию первого игрока через $S_x(\vec{p},\vec{x})$:

$$S_x(\vec{p},\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1, x_2 \ldots x_m \\ p_1, p_2 \ldots p_m \end{pmatrix},$$

где p_i — вероятность применения i-ой чистой стратегии, так что: $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Аналогично смешанную стратегию второго игрока обозначим через S_V:

$$S_y(\vec{p},\vec{q}) = \begin{pmatrix} y_1, y_2 \ldots y_n \\ q_1, q_2 \ldots q_n \end{pmatrix}; \qquad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 .$$

Будем предполагать, что принятие решения о выборе стратегии одним игроком производится скрытно от другого игрока. Так, что вероятность появления стратегий x_i и y_j $P(x_i, y_j) = P(x_i)P(y_j)$. Среднее значение выигрыша первого игрока и проигрыша второго равно математическому ожиданию:

$$M\{A\} = V(S_x, S_y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \qquad (6.3.5)$$

Если известна платежная матрица A и смешанные стратегии $\vec{p}$, $\vec{q}$, то в играх без седловой точки, когда $\alpha \neq \beta$, первый игрок (выигрывающий) за счет использования смешанных стратегий может обеспечить средний гарантированный выигрыш больше нижней границы $V > \alpha$.

Действительно перепишем выражение (6.3.5) заменяя в сумме α_{ij} $i=\overline{1,m}$ через минимальное значение $a_i = \min_j a_{ij}$:

$$V_1 = M\{A\} > \sum_{j=1}^{n} q_j \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i p_i \right\} = \sum_{i=1}^{m} a_i p_i = F(S_x)$$

Последнее означает, что средний выигрыш первого игрока при любой смешанной стратегии второго игрока больше выражения в правой части равенства. Отсюда следует, что первому игроку необходимо выбирать такую смешанную стратегию S_x, которая максимизирует $F(S_x)$ и, следовательно, средний выигрыш. Оценим величину:

$$\max_{S_x} F(S_x) = \max_{S_x} (a_1 p_1 + a_2 p_2 ... a_m p_m) \qquad (6.3.6)$$

Среди α_i есть наибольшее. Предположим, что это α_k. Если первый игрок выберет чистую стратегию $p_k = 1$ $p_i = 0$ $i \neq k$, то:

$$\max_{S_x} = a_k = \alpha ,$$

т.е. нижней цене игры. Отсюда следует, что:

$$V = M\{A\} \geq \max_{S_x} F(S_x) \geq \alpha \qquad (6.3.7)$$

Таким образом, первый игрок путем оптимизации смешанной стратегии может обеспечить гарантированный выигрыш больший, чем нижняя цена игры. Аналогично доказывается, что второй игрок выбором своей смешанной стратегии в состоянии снизить проигрыш и сделать его меньше верхней цены игры β.

Отсюда утверждение, доказанное Дж. Нейманом в 1928 о том, что в матричных играх с нулевой суммой существуют такие смешанные стратегии игроков p^* и q^*, для которого V_1 (выигрыш первого игрока) достигает своего наибольшего значения V^*, а величина V_2 (проигрыш второго игрока принимает свое наименьшее значение V^*) и ни одному из игроков невыгодно отклоняться от оптимальных стратегий p^* и q^*.

$$V^* = V^*(S_x^*, S_y^*) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ik} p_i^* q_j^* \qquad (6.3.8)$$

Однако теорема Неймана не является конструктивной. Она не дает решения основной задачи теории игр, а только утверждает ее существование.

Оптимальные смешанные стратегии могут быть найдены либо путем сведения задачи к основной задаче линейного программирования, либо итерационным методом.

6.3.5 Решение основной задачи теории игр в смешанных стратегиях

Основной задачей теории игр является выбор оптимальной стратегии максимизирующей средний выигрыш для выигрывающего (первого) игрока и минимизирующий средний проигрыш для проигрывающего (второго) игрока. Эта задача решается довольно просто, если имеется седловая точка игры. Если этой седловой точки не существует, то решение ищется в смешанных стратегиях S_x и S_V. Выше было показано, что оптимальные стратегии существуют. Из этого следует:

$$\alpha \le V\left(S_x^*, S_y\right) \ge V\left(S_x, S_y^*\right) \le \beta \qquad (6.3.9)$$

Если второй игрок принимает чистую стратегию: $S_y = \begin{pmatrix} y_1 \ldots y_k \ldots y_n \\ 0 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots 1 \end{pmatrix} = y_k$, то из (6.3.9) получаем:

$$V\left(S_x^*, y_k\right) \ge V\left(S_x, S_y^*\right) \text{ при } \forall k = \overline{1, n} \qquad (6.3.10)$$

Распишем (6.3.2) подробно:

$$\begin{cases} a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^* + \ldots + a_{m1} p_m^* \ge V(S_x, S_y^*), \\ a_{12} p_1^* + a_{22} p_2^* + \ldots + a_{m2} p_m^* \ge V(S_x, S_y^*), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} p_1^* + a_{2n} p_2^* + \ldots + a_{mn} p_m^* \ge V(S_x, S_y^*). \\ p_1^* + p_2^* + \ldots + p_m^* = 1 \end{cases} \qquad (6.3.11)$$

Если платежная матрица имеет положительные элементы $a_{ij} \ge 0 \; i = \overline{1, m} \; j = \overline{i, n}$, то $V\left(S_x, S_y^*\right) \ge 0$. Если это не так, то ко всем элементам следует прибавить постоянное число C такое, чтобы все элементы были положительными: $a_{ij} + C \ge 0 \; \forall i, j$, при этом цена игры $V_c = V + C$ и вычислив V_c, получаем V. Таким образом, задача отыскания оптимальной стратегии свелась к задаче линейного программирования: найти оптимальную стратегию S_x^*, максимизирующую средний выигрыш при ограничениях (6.3.11):

$$S_x^* : \max_{S_x} V(S_x, S_y^*) = V(S_x^*, S_y^*)$$

Рассуждая подобным образом, получаем задачу линейного программирования для определения оптимальной стратегии второго игрока S_y^*: определить S_y^* $\max_{S_y} V(S_x^*, S_y) = V(S_x^*, S_y^*)$, при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{21}q_2^* + ... + a_{m1}q_m^* \le V(S_x^*, S_y), \\ a_{12}q_1^* + a_{22}q_2^* + ... + a_{m2}q_m^* \le V(S_x^*, S_y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{1n}q_1^* + a_{2n}q_2^* + ... + a_{mn}q_m^* \le V(S_x^*, S_y). \\ q_1^* + q_2^* + ... + q_m^* = 1 \end{cases} \qquad (6.3.12)$$

Задача (6.3.11) является двойственной задачей относительно задачи (6.3.12).

Как было показано ранее, задача линейного программирования резко усложняется при увеличении размерности матрицы платежей. На практике получил распространение итерационный метод решения задачи, который легко может быть запрограммирован для решения на персональном компьютере. Сущность итерационного метода сводится к следующим процедурам.

1. Проводится упрощение платежной матрицы, при этом устраняются пассивные стратегии и, если требуется, обеспечивается положительная определенность всех ее членов.
2. Выбирается произвольная чистая стратегия первого игрока и выигрыш для различных стратегий второго игрока (см. табл. 6.3)
3. Определяется оптимальная чистая стратегия второго игрока, минимизирующая выигрыш первого и заносится в таблицу величина $(min\, a_j / k)$, где k — номер итерации.
4. Оценивается суммарный выигрыш первого игрока при различных его стратегиях и фиксированной стратегии второго игрока. Записывается в таблицу.
5. Определяется оптимальная стратегия первого игрока максимизирующая выигрыш. Записывается $(\max a_i / k)$. В последнем столбце записывается разность:

$$\varepsilon = \max_i \frac{a_i}{k} - \min_j \frac{a_j}{k}.$$

6. На второй итерации выбирается стратегия первого игрока и определяется суммарный выигрыш при различных стратегиях второго игрока и т.д.

Процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится неравенство:

$$\max_i \frac{a_i}{k} - \min_j \frac{a_j}{k} \le \varepsilon,$$

где ε — некоторое наперед заданное число.

После этого получают оценку оптимальных стратегий:

$$\widehat{p}_i = \frac{N_i}{N}, \qquad \widehat{q}_j = \frac{M_j}{N},$$

где N_i — число итераций в которых принималась чистая стратегия x_i, M_i — число итераций в которых применялась j-ая стратегия, N — общее число итераций.

Пример. В таблице 6.3 задана платежная матрица игры для $m = 3$ и $n = 3$.

Таблица 6.3.

Y_j / X_i	y_1	y_2	y_3	$\min_j a_{ij}$	$\max_i \min_j a_{ij}$
X_1	4	1	2	1	
X_2	3	7	4	3	3
X_3	6	0	1	0	
$\max_i a_{ij}$	6	7	4		
$\min_j \max_i a_{ij}$			4		

Замечаем, что седловая точка отсутствует и решение необходимо искать в смешанных стратегиях. Все члены матрицы положительны. Дальнейшее решение сводится в таблицу 6.4.

Таблица 6.4

№ итерации К	Выбор стратегии первым игроком X_i	Суммарный выигрыш первого игрока при стратегии второго			$\min_j \frac{a_j}{k}$	Выбор стратегии вторым игроком Y_i	Суммарный выигрыш второго игрока при стратегии первого			$\max_i \frac{a_i}{k}$	$\max_i \frac{a_i}{k} - \min_j \frac{a_j}{k}$
		Y_1	Y_2	Y_3			X_1	X_2	X_3		
1	X_2	3	7	4	3	Y_1	4	3	6	6	3
2	X_3	9	7	5	5/2	Y_3	6	7	7	7/2	1
3	X_2	12	14	9	9/3	Y_3	8	11	8	11/3	2/3
4	X_2	15	21	13	13/4	Y_3	10	15	9	15/4	1/2
5	X_2	18	28	17	17/5	Y_3	12	19	10	19/5	2/5
6	X_2	21	35	21	21/6	Y_1	16	22	16	22/6	1/6
7	X_2	24	42	25	24/7	Y_1	20	25	22	25/7	1/7
8	X_2	27	49	29	27/8	Y_1	24	28	28	28/8	1/8
9	X_3	33	49	30	30/9	Y_3	26	32	29	32/9	2/9
10	X_2	36	56	34	34/10	Y_3	26	36	30	36/10	1/5

В рассматриваемой задаче после 10 итераций $N = 10$ $N_i = 0 : N_2 = 8$ $N_3 = 2$ $M_1 = 4 : M_2 = 0$ $M_3 = 6$. Получаем оценки оптимальных стратегий:

$$\hat{S}_x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Цена игры определяется из условия:

$$\max_j \frac{a_j}{k} \le V \le \min_i \frac{a_i}{k}$$

Получаем для цены игры: $3.4 \le V \le 3.6$. При полученных стратегиях цена игры может быть оценена:

$$\hat{V} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\hat{p}_i\hat{q}_j = 3*0.8*0.4 + 4*0.8*0.6 + 6*0.2*0.4 + 1*0.2*0.6 = 3.48$$

Рассмотренный набор моделей конфликтных ситуаций далеко не является полным. В практике встречаются более сложные конфликтные ситуации, на некоторых из них остановимся несколько подробнее.

6.3.6. Статистические игры

Конфликтность игр не обязательно должна носить антагонистический оттенок. Жизнь богата конфликтными ситуациями существенно отличающимися от рассмотренных. Так решение может приниматься в условиях, когда другие участники (например противник) не обязательно действуют сознательно и, поэтому, за него нельзя рассуждать здраво. Такие ситуации принято называть играми с природой или статистическими играми. Обоснование решений в таких ситуациях значительно более трудная задача, так как степень неопределенности этих задач значительно выше. Отметим ряд критических замечаний в адрес рассмотренных ранее моделей, укажем на способы совершенствования моделей и пути решения основной задачи теории игр.

Во-первых, на практике чисто антагонистические конфликты редко встречаются. Это скорее всего игры (шашки, кости, карты и т.д.) или очень ограниченные по своему значению операции. Даже простейшую военную операцию за овладением господствующей высоты лишь с натягом можно отнести к антагонистической модели игр. Действительно, ведь здесь возможен такой исход, когда обе стороны несут потери, а цель не достигнута ни кем. И эта операция уже не может быть сведена к парной игре с нулевой суммой.

Во-вторых, в конфликтных ситуациях цели участников не обязательно противоположны. Они могут просто не совпадать. И при этом рассмотренные модели уже не работают. Здесь возникает так называемая «биматричная игра» где каждый участник максимизирует свой выигрыш и не имеет стремления снизить выигрыш противника.

В-третьих, смешанные стратегии игры имеют смысл только в случаях, когда приходится многократно принимать решение в условиях сохранения платежной

матрицы. На практике решение часто приходится принимать один раз и при этом исход игры неразумно перекладывать на случай.

Наконец в четвертых на практике перечень возможных стратегий противника как правило неизвестен. Более того, каждый участник конфликтной ситуации будет стремится выйти за границы известного множества стратегий, чтобы поставить противника в более сложную ситуацию.

Из сказанного конечно не следует, что теория игр является бесполезной наукой. Она учит выбирать решение в сложных ситуациях и учитывать, что противник так же анализирует обстановку и ищет наиболее выгодное решение. Отсутствие сознательного противника облегчает принятие решения, но усложняет процесс его обоснования.

Предположим, что игра задана, как и ранее, платежной матрицей $A = \left[a_{ij}\right] i = \overline{1,m}\ \ j = \overline{1,n}$. Пусть, как и ранее, первый игрок $X = \left\{x_i\right\} i = \overline{1,m}$ имеет m стратегий, что касается поведения второго игрока, то мы можем только предполагать относительно его состояния $Y = \left\{y_j\right\}\ j = \overline{1,n}$.

Как и ранее следует, если это возможно, устранить пассивные и дублирующие стратегии, что упрощает задачу. Однако устранять можно только пассивные стратегии первого игрока. Что касается второго то устранять стратегии «природы» нельзя. Ведь противная сторона не следует никаким разумным соображениям.

Как же в этих условиях принимать обоснованное решение? Здесь нужны совершенно иные подходы. Ведь если $a_{ij} \geq a_{ik}$, то из этого отнюдь не следует, что решение x_i лучше решения x_L. Ведь это возможно обусловлено более удачной обстановкой природы. Просто повезло. Например, поле не поливали, а урожай больше чем в прошлом году, когда полив был проведен. Из этого нельзя сделать вывод, что для получения более высокого урожая не следует организовывать полив. Просто вовремя прошли дожди.

Для того чтобы обоснованно принимать решение в таких ситуациях, вводятся показатели качества принимаемого решения, которые не просто определяли бы выигрыш от принятия той или иной стратегии, но отражали бы и то, насколько удачно выбрана стратегия.

Основополагающим понятием в теории принятия решения является понятие риска. Под риском r_{ij} игрока X, при пользовании стратегии x_i в условия Π_j, принято понимать разность между выигрышем, который получил бы игрок X, если бы знал заранее условие $\Pi_j - \beta_j$, и выигрышем, который он имеет, не зная Π_j и принимая стратегию x_{ij}:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$$

Риск это плата за отсутствие информации []. Теперь появляется двойственность в решении задачи. С одной стороны желательно максимизировать выигрыш, а с другой хотелось бы минимизировать риск. Если смешанная стратегия

«природы» заранее известна, например (из статистических испытаний), то критерии:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \Rightarrow \max \quad \text{и} \quad r_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \Rightarrow \min$$

дают одно и то же оптимальное решение (q_j — вероятность принятия стратегии j вторым игроком).

Если вероятности $\vec{q}_j = (q_1, q_2 ... q_n)$ неизвестны, то необходимо попытаться получить их оценку на основании проведения эксперимента или на основании экспертных оценок. В этом случае следует помнить, что любая попытка оценить $\vec{q}$ требует материальных затрат и реализуется только, если эти затраты не превышают минимального среднего риска.

Напомним, что иногда (когда нет никаких сведений о значении вектора $\vec{q}_j$) прибегают к «принципу недостаточности» Лапласа, считая $q_j = 1/n$ (равновероятное распределение).

В случае, когда исключена возможность пользоваться понятием вероятности (однократные решения или случайность вне законов распределения, когда случайность не проявляет никаких закономерностей) используют специальные критерии, которые позволяют если не получить наибольший выигрыш, то во всяком случае избежать наихудших вариантов. Остановимся вкратце на наиболее распространенных из них:

1. <u>Минимаксный критерий Вальда.</u>

Согласно этому критерию, предполагается что природа ведет себя как противник в антагонистической игре и оптимальной считается стратегия, при которой гарантируется выигрыш не меньший чем нижняя цена игры:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

Это критерий в игре отражает позицию крайнего пессимизма.

2. <u>Критерий минимального риска Сэвиджа.</u>

При использовании этим критерием выбирается та стратегия, при котором величина риска в наихудших условиях минимальна:

$$e = \min_j \max_i r_{ij}$$

Этот критерий позволяет избежать большого риска. Это тоже пессимистический критерий, как и критерий Вальда.

3. <u>Критерий Гурвица.</u>

Это критерий разумного оптимизма:

$$H = \max_j \left\{ \mu \min a_{ij} - (1-\mu) \max_i a_{ij} \right\},$$

где μ - коэффициент «пессимизма» $\mu \in [0,1]$.

При $\mu = 1$ критерий Гурвица совпадает с критерием Вальда, при $\mu = 0$ он превращается в критерий крайнего оптимизма. При этом рекомендуется выбрать ту стратегию, при котором самый большой выигрыш в строке – максимален.

В заключении отметим, что приведенные критерии не дают гарантии четкого решения задачи и отличаются субъективизмом. Выбор критерия, выбор параметра μ и т.д. и т.п. является субъективным процессом.

Теория и не может выдать непререкаемых окончательных рекомендаций в условиях неопределенности. Она только позволяет выработать обоснованные советы для лица принимающего решения, которое несет ответственность за последствия принятого решения. И это немаловажно.

6.4 Эвристические процедуры принятия решений

6.4.1. Основные понятия и определения

Эвристические процедуры используют для принятия решений в условиях высокого уровня априорной неопределенности. В литературе встречается термин «полной априорной неопределенности» для характеристики, рассматриваемой ситуации. На наш взгляд этот термин является спорным. Действительно, понимание самой необходимости принятия решения уже говорит о некоторой осведомленности лица принимающего решения о сложившейся ситуации. И, поэтому, говорить о полной неопределенности некорректно. Здесь речь идет о ситуации, когда задача принятия решения не формализуется рассмотренными ранее методами. Это может быть обусловлено рядом причин.

Во-первых, на выбор решения влияют некоторые случайные явления и процессы, законы, распределения которых неизвестны и методами математической статистики нельзя помочь делу хотя бы потому, что решение принимается однократно и ориентировка на средние выигрыши неоправданна. В реальной ситуации, при однократном принятии решений, лучше ориентироваться на неоправданный средний результат, чем принимать решение «наобум». Это хоть какое никакое, но обоснование. Дело усложняется, когда, проведение статистических исследований невозможно по ряду причин (отсутствие ресурсов, нет времени и т.д. и т.п.).

Во-вторых, случайные величины не могут быть описаны законами распределения (как было отмечено, такие случайные величины существуют).

В-третьих, (не вникая в причины) отметим, что решение приниматься в условиях, когда управляемая система недоступна для исследований, и когда для аргументированных решений нет необходимой информации. Например, когда решение относится к далекому будущему. В этих ситуациях принятие решений осуществляется на основе анализа опыта лица, принимающего решения, или на основании проведения эксперимента над людьми, имеющими опыт с целью по-

лучения объективных сведений, последнее называется экспертизой, а сами опытные и знающие люди называются экспертами.

Таким образом, экспертиза это использование коллективного разума для принятия решений. Существуют проверенные и четко описанные процедуры проведения экспертизы. Но тогда возникает вопрос, а причем здесь эвристические методы в принятии решений, раз процедуры установлены? Дело в том, что в проведении экспертиз остается, много позиций для эвристического разрешения проблемы. Действительно, сколько нужно экспертов? Кого использовать для проведения экспертизы? Как обработать результаты экспертного анализа? И далеко не на все перечисленные вопросы имеются ответы. Но тогда возникает главный вопрос. Не является ли эвристическая процедура научным обоснованием произвола принятий решений? Таких примеров мы видим в изобилии за всю историю человечества. Однако, последнее не принижает значимость эвристических методов и, в частности, значимость экспертных анализов. Важно подчеркнуть, что экспертный анализ может дать объективные результаты для принятия решений и ими с успехом можно пользоваться. Что касается методов научной фальсификации, то это отдельная отрасль научных исследований.

Существенно подчеркнуть другое. Ведь эвристические методы не ограничиваются экспертным анализом. Существует целое направление в философии известное как «интуицизм», в котором утверждается, что все новое об окружающей действительности может быть получено только в результате «озарения», «догадки», «интуиции». Что же касается дедуктивных методов они только последовательно излагают содержание заложенное в аксиомах, хотя сами аксиомы формулируются эвристически.

Действительно, ведь не на основе дедуктивных рассуждений Д. И. Менделеев пришел к открытию своей таблицы! Более того, целые направления в науке, например ботаника, зоология и т.д., не пользуются дедуктивными методами рассуждений. Из сказанного следует один вывод, что игнорировать эвристические методы нельзя. Формальные и неформальные методы тесно связаны друг с другом. Нужно по возможности стремиться их формализовать. Вот на формализации экспертного анализа мы остановимся подробнее, поскольку в практике принятия решений в сложных ситуациях экспертный анализ оказывается единственным источником информации необходимой для построения модели объекта и принятия решений.

6.4.2 Экспертиза. Принципы. Этапы

Под экспертизой обычно принято понимать проведения группой специалистов оценок некоторых параметров объектов, процессов или систем, необходимых для принятия решений. Обоснованием возможности использования экспертных методов являются следующие соображения:

во-первых, эксперты это люди, у которых в результате профессиональной деятельности в сознании сформировалась субъективная динамическая модель объекта исследования;

во-вторых, из множества субъективных суждений путем статистической обработки можно получить объективные выводы;

и в-третьих, процесс принятия решений есть объективная реальность и материальным носителем этого процесса является человек.

Экспертиза строится на основе следующих принципов:

— ограничения разнообразия суждения экспертов за счет итеративного подхода к формированию коллективного мнения и за счет создания информационной неоднородности при выявлении мнения каждого эксперта;

— регламентирования обмена информацией между экспертами;

— количественных (измеримых) оценок исследуемого явления каждым экспертом.

Из существа перечисленных принципов следует, что для ограничения разнообразия суждений экспертов, четко формулируется порядок проведения экспертного опроса. При необходимости, экспертиза повторяется до тех пор пока не будут получены признаки, свидетельствующие об объективности полученных результатов. Принципы предусматривают безыскаженную циркуляцию информации между экспертами и четкую организацию экспертизы с целью получения количественных оценок.

Работа по организации и проведению экспертизы проводится в три этапа: подготовка экспертизы, собственно проведение экспертизы и обработка полученных результатов. Рассмотрим перечисленные этапы более подробно, напомнив еще раз, что эта деятельность требует значительных затрат как материальных, так и затрат человеческого труда и времени.

6.4.3. Подготовка экспертизы

Подготовка экспертизы включает в себя ряд мероприятий, формализовать которые невозможно. Однако опыт экспертного анализа столь значителен, что он может быть оформлен в виде инструкции. Подготовка экспертизы начинается с подбора экспертов. Сразу же возникает ряд вопросов. Действительно, каким требованиям должен удовлетворять эксперт? Сколько экспертов нужно привлечь для экспертизы? Как установить взаимодействие между экспертами? Какие вопросы можно задавать экспертам? И т.д. и т.п. Отметим, что четких ответов на эти вопросы не существует и, более того, в литературе мы встречаем множество противоречивых рекомендаций в решении задач отвечающих на перечисленные и многие другие вопросы. В этом уже проявляется эвристичность проблемы, поэтому в дальнейшем будем придерживаться здравого смысла, а затем обсудим предлагаемую процедуру.

Предполагается, что до организации экспертизы, лицо, принимающее решение, четко сформулировало ее цель и задачи. Это может быть задача оценива-

ния, т.е. получения оценки $\tilde{\alpha}$ некоторой величины α, которая принимает значение в интервале $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$. Это может быть задача ранжирования, когда задается множество явлений или факторов $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$, и на котором требуется установить отношение порядка «$\succ$», так что для $\forall\ i$ и $j < n$ либо $\beta_i \succ \beta_j$, либо $\beta_j \succ \beta_i$. Это может быть задача выбора при этом из множества $\mathbf{X} = \{x_i\}$, $i = 1, N$, следует выбрать один элемент x_0 наилучший в некотором смысле (например, задача диагностики).

Возможны и другие постановки задачи, отличающиеся несколько организацией процедуры экспертизы, однако напомним, что генеральная проблема одна: принятие решения, как выбор наилучшего варианта из множества возможных.

Отметим, что задача экспертизы и цель, в интересах которой она проводится, не являются идентичными понятиями и они по разному влияют на организацию экспертизы. Поясним сказанное на примере выбора экспертов и их числа.

В принципе рекомендуется, чтобы каждый эксперт обладал следующими свойствами:

— эксперт должен быть специалистом в рассматриваемой проблеме более высокого класса, чем лицо, организующее экспертизу;

— он должен быть заинтересован в решении задачи экспертизы;

— судьба эксперта не должна быть зависима от результатов экспертизы.

Число экспертов рекомендуется иметь 6-12 человек. Меньшее число затрудняет получение объективной оценки, большее, как будет показано, усложняет работу. Отметим, что эти требования не являются независимыми друг от друга и от цели экспертизы. Поясним мысль примерами. Так, если лицо принимающее решение в условиях полной априорной неопределенности может обратится к лицу или лицам, авторитет которого для него непререкаем, то он обращается и решает проблему. Так больной обращается к врачу, водитель машины к механику, президент берет себе советника по проблеме, в которой он слабо разбирается. Это тоже экспертиза, граничащая с заменой лица принимающего решение. В ней число экспертов сведено до одного высококвалифицированного лица. А вот некий холуй частной телевизионной компании объявляет рейтинг доверия к политическим деятелям в условиях полной свободы слова и демократии. При этом у него всегда одно и тоже лицо на первом месте. Объявляется, что опрошено более 2000 человек и результаты обработаны на основе математической статистики. Весьма убедительно на первый взгляд. Но обратите внимание, никто не может быть осведомлен о том кого опрашивали, (одно дело рабочих в шахте, другое прихлебателей у государственной думы, которые называются теперь специалистами по PR), кто и как обрабатывал результаты, кто несет ответственность за сделанные выводы и уж конечно нельзя гарантировать хоть какой-нибудь уровень профессиональной подготовленности таких экспертов в области государственного строительства. Нужно всегда быть настороже, когда апеллируют к математической статистике и экспертизе. Не напрасно в прошлом веке один великий математик назвал математическую статистику третьим, а мы

добавим самым опасным, видом лжи[2]. Действительно, подбирая факты (и экспертов) можно сфабриковать любое утверждение, облачив его в научную форму, памятуя о том, что науке нельзя не доверять.

Для того чтобы сохранить и уберечь от инсинуаций научное содержание экспертизы необходимо:

1. четко фиксировать в протоколе лиц привлекаемых в качестве экспертов;
2. протоколировать все показания выдаваемые каждым экспертом;
3. привлекать экспертов не только высококвалифицированных в определенной области знаний, но еще и способных работать в экспертизе;
4. игнорировать результаты экспертизы явно обусловленными эмоциональными вспышками отдельных экспертов;
5. стремиться сохранять в тайне от экспертов цель экспертизы до конца работы;
6. подробно и четко протоколировать процесс обработки показаний экспертов и его результаты.

Для того чтобы удовлетворить перечисленным требованиям, нельзя увеличивать резко число экспертов. Если их более 10, то уже очень трудно надежно оформить процесс выработки решения.

Когда состав экспертов определен, переходят к выработке методики организации работы экспертов. Широкое применение нашли четыре способа, отличающихся друг от друга принципом взаимодействия экспертов друг с другом. Первый из них — принцип свободного общения. Ярким представителем такого способа проведения экспертизы является «круглый стол». Это способ организации экспертизы, когда обсуждение ведется свободно при полном взаимодействии экспертов и ведущего. При этом устанавливается доверительная психологическая обстановка. Каждый эксперт имеет право высказать открыто свое мнение, выслушать другого и, если считает нужным, критиковать любого выступающего. В результате обсуждения вырабатывается коллективное мнение, и оно фиксируется. Понятно, что круглый стол организовать при числе экспертов более 10 человек очень трудно.

Второй способ организации экспертизы отмечается регламентированием общения экспертов между собою. Примером такого способа является «мозговая атака». При этом сначала всем экспертам предлагается высказывать свое мнение и предлагать новое, еще не предложенное ни кем, решение. Критика предложений не допускается. На втором этапе мозговой атаки последовательно критикуются, с целью отвергнуть, каждое из высказанных предложений. Среди оставшихся, можно надеяться, находится оптимальное решение. Если отвергнуты все, меняют вопросы и начинают сначала.

Третий метод характерен полной изоляцией экспертов друг от друга. Всем экспертам задается один и тот же вопрос. Каждый эксперт вырабатывает ответ

---

[2] Первая ложь благородная, когда лгут в интересах обманываемого. Вторая отвратительная, когда лгут в интересах лгущего. Третий вид лжи – математическая статистика.

самостоятельно и, если может, аргументирует свое решение независимо от других экспертов. Результаты фиксируются и затем обрабатываются.

Наконец четвертый метод организации экспертизы это опрос. Он характерен случайным выбором экспертов из определенного наперед заданного множества людей и общением с каждым совершенно независимо. Обобщая, в результате обработки, все ответы можно выявить объективное мнение наиболее типичное для данного множества людей по данной проблеме. Характерной особенностью данного метода является не только абсолютная изоляция экспертов друг от друга, но и полная неосведомленность экспертов как о других экспертах, так и о целях экспертизы. Возможны и комбинации перечисленных способов. В процессе подготовки экспертизы, ориентируясь на цель, которую нужно достичь, задачи, решаемые экспертизой, и ресурсы, выделенные на проведение экспертизы, выбирается метод ее проведения. После этого вырабатываются вопросы, которые следует задавать экспертам.

Различают два вида экспертиз — экспертиза простая, когда вопросы формулируются таким образом, чтобы сразу получить ответы и переходить к обработке, и экспертиза сложная, когда предусматривается возможность развития вопроса путем введения дополнительной информации. В некоторых ситуациях прямой вопрос является столь неопределенным, что высока вероятность того, что большинство экспертов даст один и тот же ответ – «не знаю». Например, сегодня 10 июня в С.-Пб. чистое небо, солнце. Вопрос экспертам: «Когда в Санкт-Петербурге будет дождь?». Скорее всего каждый ответит – не знаю. Если добавить, что в Солнечном идет гроза и ветер с юго-запада, то эксперты ответят – ну к вечеру и у нас разразится. Если еще добавить информацию о скорости ветра, то ответ будет еще определеннее и точнее. Конечно, возникает вопрос: А почему сразу не дать полную информацию и не тянуть время? По приведенному выше примеру это действительно так. В практике же приходится учитывать, что информация требует значительных затрат ресурсов. Поэтому готовя экспертизу, необходимо отработать схему (дерево) вопросов таким образом, чтобы от экспертов получить всю информацию. Обычно используются зависимые события, например γ и δ.Задается вопрос, какова вероятность события γ. Ответа нет, тогда какова вероятность δ? Ответ получен. Какова вероятность γ, при условии, что δ имеет место. Если ответ получен, тогда вероятность события вычисляется. Если ответ не получен, то нужно искать другое связанное с этим событие и т.д. и т.п.

Подводя итог, отметим, что уже подготовка экспертизы дело непростое и требует от организатора не только знаний и организаторских способностей, но и творчества, так как не формализуемый процесс это всегда процесс творческий.

6.4.4. Проведение экспертизы

На первый взгляд процедура проведения экспертизы наиболее простой этап. Действительно. Задачи известны, эксперты подобраны. Остается задавать во-

просы, получить и фиксировать ответы. Однако и на этом этапе есть особенности. Далеко не все вопросы целесообразно задавать каждому эксперту. Задавать можно, но доверять ответам следует весьма осторожно. Действительно. Экспертиза собирается для решения не одной задачи, а целого ряда различных задач. Пусть число экспертов N. Введем оценку компетентности i-го эксперта в решении j-ой задачи и обозначим ее через коэффициент компетентности K_i^j. Логично потребовать, чтобы величина коэффициента компетентности принимала значения в интервале:

$$0 \le K_i^j \le 1, \quad i = \overline{1, N_j}$$

Получают коэффициенты компетенции в процессе проведения экспертизы. Для этого каждому эксперту предлагается дать оценку коэффициента компетенции в j-ой задаче для каждого из экспертов, включая себя. При этом получают коэффициент компетенции по оценке i-го эксперта в j-той задаче l-го эксперта — K_{il}^j. Вводятся пороговые значения для коэффициента компетенции δ^j при решении j-той задачи. Если окажется, что среднее значение коэффициента компетентности l-го эксперта по оценке всех $i = \overline{1, N}$ экспертов меньше допустимого порогового для решения j-той задачи, то этот эксперт освобождается от участия в решении j-той задачи. Оставшиеся, $N_j \le N$ эксперты продолжают работу.

При получении коэффициента компетенции по оценки i-м экспертом, возможно, что i-тый эксперт не может оценить компетентность некоторого l-го эксперта при решении j-той задачи. В этом случае i-тый эксперт делает прочерк и усреднение ведется только по тем $N_j \le N$ экспертам, которые оценили l-го эксперта. Так что:

$$K_i^j = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} K_{il}^j \tag{6.4.1}$$

Матрица коэффициентов компетенции при решении j-той задачи K_{il}^j может содержать некоторые аномалии. Так один и тот же эксперт получил очень высокий балл компетенции от одних экспертов и очень низкий балл от других, то следует разобраться в причинах. Это может свидетельствовать и об оригинальности мышления оцениваемого эксперта, которое признают одни и игнорируют другие и об особенностях его характера. Возможно, имеет смысл, ограничится мнением только одной группой экспертов.

После оценки компетенции экспертов в решении j-той задачи начинается собственно решение задачи путем опроса.

Предположим, что для принятия решения необходимо оценить значение некоторой величины x^j, для чего были заданы вопросы всем экспертам и получены от каждого из них оценки x_i^j, тогда в качестве оценки x^{j*} принимается ее среднее значение с учетом компетенции каждого эксперта при решении этой j-ой задачи:

$$x^{j*} = \frac{\sum_{i=1}^{N_j} x_i^j \cdot K_i^j}{\sum_{i=1}^{N_j} K_i^j}$$

Полученная оценка, еще не является окончательным результатом. Дело в том, что в оценке этой величины может проявиться тенденция одной группы экспертов к более низким оценкам, а других к более высоким. Разброс мнений определяют с помощью оценки дисперсии величины x^j:

$$D(x^j) = \frac{1}{N_j - 1} \sum_{i=1}^{N_j} (x_i^j - \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} x_i^j)^2$$

Если дисперсия велика, то следует разбираться в причинах. В случае, когда существуют две противоречивые точки зрения, лицу, принимающему решение необходимо определиться и ограничится только одной группой экспертов или обеспечить экспертов дополнительной информацией и повторить экспертизу. Итерационный процесс проводится до тех пор, пока не будет получена оценка x_0^{j*}, с дисперсией $D^*(x_0^{j*}) < D_{ГР}$, где $D_{ГР}$ — некоторая граничная величина.

6.4.5 Принципы обработки результатов экспертизы

В принципе результаты экспертизы обрабатываются по общим правилам математической статистики. Генеральная ориентировка направлена на оценку средних значений утверждений, полученных от различных экспертов. Качество экспертизы оценивается по выборочной дисперсии. Особенностью экспертизы является тот факт, что получаемые результаты не всегда выражаются в количественной форме. Очень часто множество альтернатив $\Omega = \{w_i\}$, $i = \overline{1,n}$ требуется упорядочить в некотором смысле. Иначе говоря, на множестве Ω установит отношение порядка в определенном смысле, последнее позволяет лицу, принимающему решение справиться со своей задачей, в той или иной степени используя ранее рассмотренные методы. Если перед экспертами поставить задачу выбора варианта отношения порядка на множестве Ω из всех возможных число которых равно $n!$, то скорее всего все эксперты окажутся некомпетентными для решения поставленной задачи. Число перестановок из n элементов $P_n = n!$ растет чрезвычайно быстро с увеличением n и человек просто не в состоянии

сориентироваться в выборе варианта, если $n > 5$. На практике зачастую мощность множества альтернатив может превышать 10. В этом случае перед экспертами ставится упрощенная задача. От него не требуется выбрать вариант отношения порядка, но требуется каждой альтернативе $w_i \in \Omega$ поставить в соответствие ранг важности K_i, выраженный целым числом $K_i = \overline{1,n}$. В результате, от N_j, экспертов, допущенных для решения проблемы, получается матрица рангов размерностью $N_j \cdot n$:

Альтернативы / Эксперты	W_1	W_2	….	W_i	….	W_n
$Э_1$	K_{11}^j	K_{12}^j	…..	K_{1i}^j	…..	K_{1n}^j
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
$Э_L$	K_{L1}^j	K_{L2}^j	…..	K_{Li}^j	…..	K_{Ln}^j
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
$Э_N$	K_{N1}^j	K_{N2}^j	…..	K_{Ni}^j	…..	K_{Nn}^j

На множество значений рангов накладываются дополнительные условия.

Во-первых, требуют, чтобы сумма элементов каждой строки матрицы была постоянна и равна:

$$\sum_{i=1}^{n} K_{li}^j = \sum_{i=1}^{m} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{для} \forall l$$

Во-вторых, в случае, если эксперт не может различить несколько альтернатив w_{li}, $w_{li+1}, \ldots, w_{li+m}$ по важности, т.е. считает их одинаковыми по важности, им всем приписывается одинаковый ранг равный среднему значению всех рангов, которые должны быть приписаны этим альтернативам, т.е.:

$$K_{об} = \frac{1}{m+1} \sum_{l=1}^{N_j} K_{li}$$

Очевидно, что в этом случае возможны дробные значения общего ранга $K_{об}$.

Теперь обработка сводится к вычислению среднего ранга для каждой альтернативы $\overline{K}_i$ по всем экспертам:

$$\overline{K}_i = \frac{1}{N_j} \sum_{l=1}^{N_j} K_{li}$$

Отношение порядка по важности альтернативы устанавливается по рангам. Так альтернатива p считается важнее альтернативы q, если ее средний ранг больше, что записывается: $w_p \succ w_q \to \overline{K}_p > \overline{K}_q$

Таким образом можно ранжировать по важности все множество альтернатив Ω, (по возрастанию или по убыванию важности).

Очевидно, что далеко не всякий результат экспертизы может быть признан удовлетворительным. Так если мнения экспертов резко расходятся, то результаты экспертизы следует считать неприемлемыми и изменять процедуру экспертизы. Критерием степени несогласованности экспертов и, следовательно, приемлемости результатов экспертизы является выборочная дисперсия[3]:

$$D(\overline{K}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{K}_i - M(\overline{K}))^2 ,$$

где $M(\overline{K})$ — математическое ожидание среднего ранга:

$$M(\overline{K}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}K_i = \frac{n+1}{2}$$

Минимальное значение дисперсии $D(\overline{K})$ соответствует случаю, когда мнения всех экспертов совпадают, и ранги важности $\overline{K}_i$ образуют ряд чисел от 1 до n. Если согласованность у экспертов отсутствует, то $\overline{K}_i$ группируются около математического ожидания. Таким образом, максимальное значение $D_{max}(\overline{K})$ равно:

$$D_{max}(\overline{K}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(i - \frac{n+1}{2})^2 = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Критерий согласованности экспертов «δ» можно представить в виде:

$$\delta = \frac{D(\overline{K})}{D_{max}(\overline{K})} = \frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}(\overline{K}_i - \frac{n+1}{2})^2$$

Для полностью согласованных экспертов $\delta = 1$, а при абсолютной несогласованности $\delta = 0$. В частном случае, предположим, что из N экспертов $N - m$ человек абсолютно некомпетентных и принимают решение наобум (случайные), в то время как остальные m эксперты – специалисты высокого класса и их мнения (высказанные независимо) совпадают, тогда:

$$D(\overline{K}) = \frac{1}{N}[mD_{max} - (N-0)0] = \frac{m}{N}D_{max} ,$$

и критерий согласованности экспертов будет равен: $\delta = m/N$.

---

[3] Понятно, что при решении поставленной задачи общение между экспертами исключается, в противном случае будет иметь место единое мнение. Здесь изучается степень согласованности индивидуальных мнений экспертов.

Таким образом, если в результате обработки данных экспертизы получено значение критерия согласованности равно 0,1, то это эквивалентно случаю, когда только 10% экспертов — специалисты, заслуживающие доверия, а остальные 90% случайные люди. Естественно, что и результатам экспертизы не следует доверять. Говоря о согласованности экспертов, имеется ввиду не обязательное совпадение результатов оценки экспертами всех факторов. Если разброс значений имеется в оценке различных факторов, то эффективность экспертизы сохраняется.

Несогласованность экспертов свидетельствует не обязательно о их некомпетентности, возможно, что объект настолько сложен, что эксперту трудно ориентироваться в поставленной задачи. Такое положение имеет место при очень большом количестве альтернатив. В таких ситуациях необходимо упрощать процедуру экспертизы.

Одним из методов упрощения процедуры экспертизы является переход к попарному сравнению. Это в значительной степени упрощает работу эксперта, однако резко усложняет обработку результатов. Каждый эксперт, сравнивая две альтернативы, например, w_i и w_l принимает одно из трех решений: либо w_i более предпочтительный фактор, чем w_l ($w_i \succ w_l$), либо наоборот ($w_i \prec w_l$), либо они эквивалентны с точки зрения ранжирования $w_i \approx w_l$.

Введем индекс предпочтения q_{il}:

$$q_{il} = \begin{cases} 1, \text{ если } \omega_i \succ \omega_l \\ 0, \text{ если } \omega_i \approx \omega_l \\ -1, \text{ если } \omega_i \prec \omega_l \end{cases}$$

Каждый эксперт, как результат проведенной работы, представляет матрицу размерностью ($n \times n$).

W_l / W_i	W_1	W_2	….	W_n
W_1	0	q_{12}	….	q_{1n}
W_2	q_{21}	0	….	q_{2n}
…..	…..	….	q_{il}	….
W_n	q_{n1}	q_{n2}	….	0

Эта матрица должна удовлетворять ряду свойств:

1. $q_{ii} = 0$.
2. $q_{il} = -q_{li}$.
3. Свойство транзитивности предпочтения альтернатив, если $w_i \succ w_l \succ w_k$, то $w_i \succ w_k$, и, следовательно, если $q_{il} = 1$, $q_{lk} = 0$, то $q_{ik} = 1$.

4. Транзитивность эквивалентности. Действительно, если $w_i \approx w_l$, а $w_l \approx w_k$, то и $w_i \approx w_k$, следовательно, из $q_{il} = 0$ и $q_{lk} = 0$ следует, что $q_{ik} = 0$.

Эти свойства должны быть проверены для матрицы представленной каждым из экспертов. Нарушение хотя бы одного из правил должно быть исправлено экспертом.

Когда проверены матрицы всех N экспериментов, вычисляется усредненная матрица $\overline{\mathbf{Q}} = \|\overline{q}_{il}\|$, где $\overline{q}_{il} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} q_{il}^{\ j}$, где $q^{j}{}_{il}$ — индекс предпочтения i-той альтернативы относительно l-той по оценке j-того эксперта. $\overline{q}_{il}$ — среднее значение индекса предпочтения.

Согласованность экспертов, как и ранее, оценивается по дисперсии среднего значения $\overline{q}_{il}$

$$D(\overline{q}_{il}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\overline{q}_{il})^2$$

Математическое ожидание $M(\overline{q}_{il}) = 0$ в силу свойств матрицы. Максимальное значение дисперсии $D_{max}(\overline{q}_{il}) = 1$, поэтому для критерия согласованности экспертов δ имеем:

$$\delta = \frac{D(\overline{a}_{il})}{D_{max}(\overline{q}_{il})} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\overline{q}_{il})^2$$

Как и ранее, $\delta \in [0,1]$ и $\delta = 1$ означает абсолютное согласие экспертов, а $\delta = 0$ полное противоречие друг другу.

Если согласованность экспертов устраивает лицо, принимающее решение, в интересах которого и приводится экспертиза, то переходят к следующему этапу обработки результатов экспертизы. Ведь конечной целью экспертизы является установление отношения порядка на всем множестве альтернатив $\Omega = \{w_i\},\ i = \overline{1,n}$.

Существует несколько разных приемов перехода от усредненной матрицы по парного предпочтения к рангу важности i-той альтернативы w_i и тем самым сведения задачи к предыдущей. Наиболее простой прием сводится к определению среднего предпочтения ко всем остальным:

$$\overline{q}_i = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\overline{q}_{il}, \qquad i = \overline{1,n}.$$

После этого естественно, первый ранг важности приписывается той альтернативе, для которой $\overline{q}_i$ максимален. Эту альтернативу ставят на первое место по важности, среди оставшихся снова выбирают альтернативу с максимальным средним предпочтением и т.д.

Другие приемы перехода к рангу важности альтернатив отличаются большей степенью проявления интуиции, например, введения некоторых пороговых уровней, обосновать которые очень трудно.

В заключении отметим, что экспертиза является мощным источником получения объективной информации об исследуемых явлениях и процессов. В ее примах широко применяются классические методы математической статистики. В то же время экспертиза в большей степени является искусством, поскольку личное творчество организатора экспертизы играет очень важную роль в получаемых результатах.

Глава 7. Реализация управления

Реализация управления является заключительным этапом оптимально управление. От того, как будут реализованы замыслы и идеи зависит многое. История военного искусства, история государств, в истории науки изобилуют примеры, когда нацеленные, продуманные и подготовленные операции не были реализованы по тем или иным причинам. Так коммунизм в отдельно взятой стране не построен, хотя кажется, всё было обдумано, спланировано, решены проблемы объединения всех народов, устранения терроризма и преступности. Страна вышла на передовые позиции в промышленности, науке, приросту населения и другим показателям прогрессирующего государства. Началась реализации ускорения и перестройки. Мгновенно страна оказалась на уровне колониальной державы. Назвать коммунистическим общество олигархов нельзя, так как фантастическое богатство не есть признак коммунистического счастья. Явно, реализация подвела население великой державы СССР. Отсюда можно сделать выводы о важности проблемы реализации оптимального управления большими организационно – техническими системами.

7.1. Концептуальная модель реализации управления

Концепция (от лат. conceptus) – содержание, понятие, смысл, значение т.е. всё то, что является адекватным восприятием данного объекта или явления.

В настоящее время под концепцией принято понимать совокупность принципов $\Omega = \{\omega_i\} \quad i = \overline{1,N}$ и множество ограничений $\mathrm{B} = \{b_j\} \quad j = \overline{1,M}$, в условиях которых реализуются замыслы управления. Действительно, возможны ситуации, когда сформулирована цель управления, выяснены возможные пути достижения цели, найден оптимальный путь достижения цели из множества возможных. Остаётся реализовать управление, но при этом появляются новые концепции, обусловленные изменением обстановки. Это может быть связано с коррекцией цели управления или в возможности реализации управления.

Концепции могут появляться как требование выше стоящей системы по уровню управления. Концепции могут рождаться в результате анализа возможностей реализации управления. Наконец, концепция может быть результатом

проявления влияния внешней среды, в которой функционирует управляемая система. Важно отметить, что концепций может проявляться множество, а эффективная реализация управления возможна лишь с учетом одной концепции. Поэтому первым этапом реализации управления является создание концептуальной модели реализации, целью которой является анализ всех существующих концепций и выработку одной единственной обобщенной концепции допускающей решение поставленной задачи. Решение этой проблемы требует разработки процедуры сравнения концепций и операций над концепциями.

Пусть множество концепций есть $\{C_n\}$ $n=\overline{1,K}$. Две концепции являются эквивалентными, $C_n \sim C_m$, если они состоят из одинаковых принципов и имеют одинаковые ограничения. Так что $C_n \sim C_m$, если для $\forall\ \omega_{m_i} \in \Omega_m$ $\omega_{m_i} \in \Omega_n$. И для $\forall\ \omega_{n_j} \in \Omega_n$ $\omega_{n_j} \in \Omega_m$. Аналогично для ограничений $\forall\ b_{m_i} \in B_m$ $b_{m_i} \in B_n$ и для $\forall\ b_{n_j} \in B_n$ $b_{n_j} \in B_m$. Концепция C_m считается более строгой, чем концепция C_n, $C_m > C_n$, если для $\forall\ \omega_{m_i} \in \Omega_m$ следует, что $\omega_{m_i} \in \Omega_n$ и для $\forall\ b_{m_i} \in B_m$ следует, что $b_{m_i} \in B_n$. Обратное же не верно.

Две концепции считаются несравнимыми, если они состоят из различных принципов (хотя ограничения их могут совпадать).

Таким образом, установление порядка на множестве концепций не всегда возможно. Если это возможно, то тогда существует самая строгая концепция, которой и следует придерживаться. Для решения задачи выработки единой концептуальной модели реализации управления введём на множестве концепций две операции $+$ и $\bullet$. Под операцией $+$ (объединения двух концепций C_m и C_n) понимают концепцию C такую, что её множество принципов есть объединение множеств принципов первой Ω_m и Ω_n. А так же и множество ограничений B_c есть объединение ограничений первой и второй концепций так, что $C = C_n \bullet C_m$; $\Omega_C = \Omega_m \cup \Omega_n$; $B_C = B_m \cup B_n$. Возникает вопрос, а всегда ли возможна эта операция. Да, она всегда возможна, если среди принципов и ограничений объединяемых концепций нет противоречивых. А такие ситуации возможны, например, в управлении вооружёнными силами некоторого государства появились две концепции: одна из них включает принцип расширения численности личного состава, другая же наоборот сокращение его. Поэтому в операции объединения двух концепций следует игнорировать противоположные принципы и ограничения. Но тогда возможна ситуация, когда объединение двух концепций дает пустую концепцию C_0, в которой нет принципов и нет ограничений. Так объединение двух концепций в управлении государством – первой идти по пути совершенствования социалистического строя и второй совершенствовать капиталистические отношения в стране приводят к хаосу.

Введения операция объединения концепций обладает свойством замкнутости, транзитивности, наличия нейтрального элемента. Иначе говоря, множество концепций с операцией объединения $+$ образует алгебраическую структуру известную, как коммутативная группа.

Объединение множества концепций приводит к еденной концепции, что в принципе решает поставленную проблему. Однако иногда такая операция приводит к чрезвычайно громоздкой концепции, что реализация управления делается невозможной (угодить всем бывает проблемой непреодолимой). В этой ситуации пользуются другой операцией – операцией пересечения $\bullet$.

Пересечение двух концепций C_m и C_n есть концепция $C = C_m \bullet C_n$, множество принципов и ограничений которой есть пересечение принципов и ограничений C_m и C_n, так что $C = C_m \bullet C_n$:

$$C = \{\Omega, B\}: \ \Omega = \Omega_m \cap \Omega_n \text{; и } B = B_m \cap B_n$$

При этом соблюдаются только те принципы и ограничения, которые присущи всем исходным концепциям, а остальные игнорируются. Введенная операция замкнута, коммутативна, транзитивна, однако не имеет нейтрального элемента, а следовательно и обратного. Поэтому множество концепций $\{C\}$ с введенными на нем операциями $+$ и $\bullet$ образуют алгебраическую структуру типа квазитело.

Выработка единой концепции в реализации управлением большой системой является тяжелой и болезненной проблемой, однако игнорирование этой проблемы может привести к еще более трагическим последствиям.

7.2 Планирование работ по реализации управления

Исходными предпосылками для планирования работ по реализации управления является принятая концепция, а так же результаты решения проблем по формированию цели и способов ее достижения. Из концепции следуют виды и объем работ, которые необходимо и возможно выполнить в процессе управления, а так же ресурсы, которыми можно и необходимо располагать при реализации этой задачи.

Планирование реализации управления включает в себя следующие этапы:

1. Выяснением всего множества работ, которые необходимо или желательно выполнить для обеспечения управления объектом здесь учитываются и работы, которые возможно (а может и нет) придется выполнять.
2. Вычисление необходимого количества ресурсов для выполнения установленных работ для достижения цели. Это:

- Ресурсы в живой силе. Количество людей по различным специальностям.
- Материальные ресурсы (материалы техника, горючее, питание и т.д.).
- Временной ресурс. Это и время выполнения отдельных работ в процессе управления и время достижения цели управления.

- Пространственный ресурс, т.е. конкретные границы пространства, где будет реализована деятельность по управлению.

3. Выяснения объема ресурсов, которыми можно располагать для решения поставленной задачи.
4. Коррекция всей проблемы управления исходя из возможностей по управлению. Такая коррекция может привести доже к изменению цели управления и, следовательно пересмотру всех этапов управления. Ибо ограничение ресурсов приводит к пересмотру ограничений в задачах оптимизации.
5. Распределение ресурсов по множеству выполняемых работ с учетом образования необходимых резерва сил и средств.
6. Сетевое планирование. Разработка сетевого плана должна производиться по всему комплексу работ связанных с управлением, в том числе и по работам, обеспечивающим управление. Чем подробнее и детальнее разрабатывается сетевой план, тем надёжнее контроль за его выполнением.

7.3. Реализация управления

При организации управления большими организационно–техническими системами создается штаб управления, в обязанности которого входит:

1. Юридическое оформление участия лиц и подразделений в работах по реализации управления, поскольку в этих работах могут участвовать частные лица и предприятия.
2. Штаб устанавливает жёсткую ответственность лиц и предприятий за своевременное и качественное выполнение работ, а также юридически закрепляет эту ответственность.
3. Штаб создаёт орган контроля, который в процессе реализации контролирует строгость выполнения технологических процессов по выполнению и своевременность выполнения этапов работ. Ставит об этом в известность штаб управления.
4. В случае отклонения процесса управления от намеченного (оптимального) штаб обязан оценить обстановку принимать решение о перегруппировке сил и средств, а также прогнозировать последствия и учитывать прогноз в своей деятельности.
5. После завершения процесса управления управляемым объектом штаб:

а. Оценивает степень достижения цели управления (окончательной или промежуточной).
б. Исследует эффективность управления по выработанным заранее критериям.
в. Даёт оценку качества работ ответственных лиц и подразделений, участвующих в управлении.
г. Составляет акт о проделанной работе.
д. Пишет отчет о проделанной работе с выводами и рекомендациями по совершенствованию процесса управления.

Приведённая выше схема реализации идей управления относится к ситуации, когда целью управления является некоторое состояние управляемого объекта отличающаяся достижимостью за конечный промежуток времени. Эта схема меняется определённым образом, если цель не достижима или, когда целью управления является стабилизация состояния системы в определённой области. Естественно при этом будет корректироваться план реализации управления. Перечисленные этапы реализации, как и весь перечисленный материал не являются инструкцией, но представляет лишь отправной материал для творческого процесса управления большими системами.