Построение сигнальных графов

Практическое занятие

Цель занятия

Приобрести навыки построения сигнальных графов

Вопросы занятия

1. Построение нормализованных графов.
2. Построение ненормализованных графов.

1. Построение нормализованных графов

Пример 1.1. Для системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{a}x_2 - \frac{b}{a}x_3 = x_1, \\ -\frac{d}{e}x_2 + \frac{1}{e}x_3 = x_1 + \frac{1}{e}x_0. \end{cases} \qquad (1.1.1)$$

построить нормализованные сигнальные графы.

В системе уравнений (1.1.1) x_0, x_1 – свободные переменные.

1. Построение нормализованных графов

Решение. Преобразуем систему уравнений двумя способами.

1-й способ:

$$\begin{cases} x_2 = ax_1 + bx_3, & (*) \\ x_3 = ex_1 + x_0 + dx_2. & (**) \end{cases} \qquad (1.1.2)$$

Система уравнений (1.1.2) получена для x_2 – выходной переменной уравнения $(*)$, для x_3 – выходной переменной уравнения $(**)$.

1. Построение нормализованных графов

2-й способ:

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{a}{b} x_1 + \dfrac{1}{b} x_2, \\ x_2 = -\dfrac{1}{d} x_0 - \dfrac{e}{d} x_1 + \dfrac{1}{d} x_3. \end{cases} \qquad (1.1.3)$$

Система уравнений (1.1.3) получена при разрешении уравнения $(*)$ относительно x_3 , а уравнение $(**)-$ относительно x_2 .

1. Построение нормализованных графов

Построим сигнальные графы:

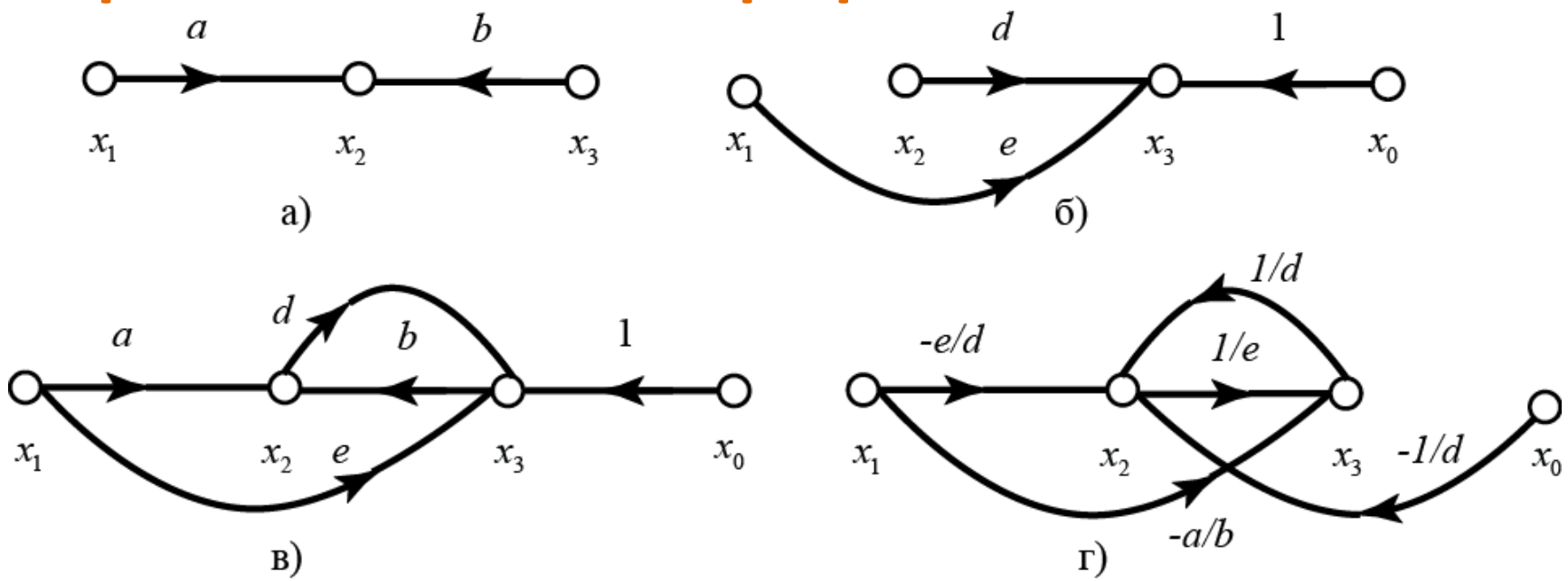

Рис. 1.1. Сигнальные графы. Соответствуют: а) уравнению $(*)$; б) уравнению $(**)$; в) системе уравнений (1.1.2); г) системе уравнений (1.1.3)

1. Построение нормализованных графов

Пример 1.2. По системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 - f_1 = 0, \\ bx_1 - x_2 + fx_3 + ex_4 = 0, \\ gx_1 + dx_3 - x_4 = 0, \\ cx_2 - x_3 = 0, \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

не составляя матрицу передач $\mathbf{A}$ в явном виде, построить нормализованный сигнальный граф, в котором определить источники, стоки и смешанные вершины.

1. Построение нормализованных графов

Решение. 1) Определим число узлов сигнального графа: $N = n + r = 4 + 1 = 5.$

2) Нанесем и идентифицируем узлы на поле графа:

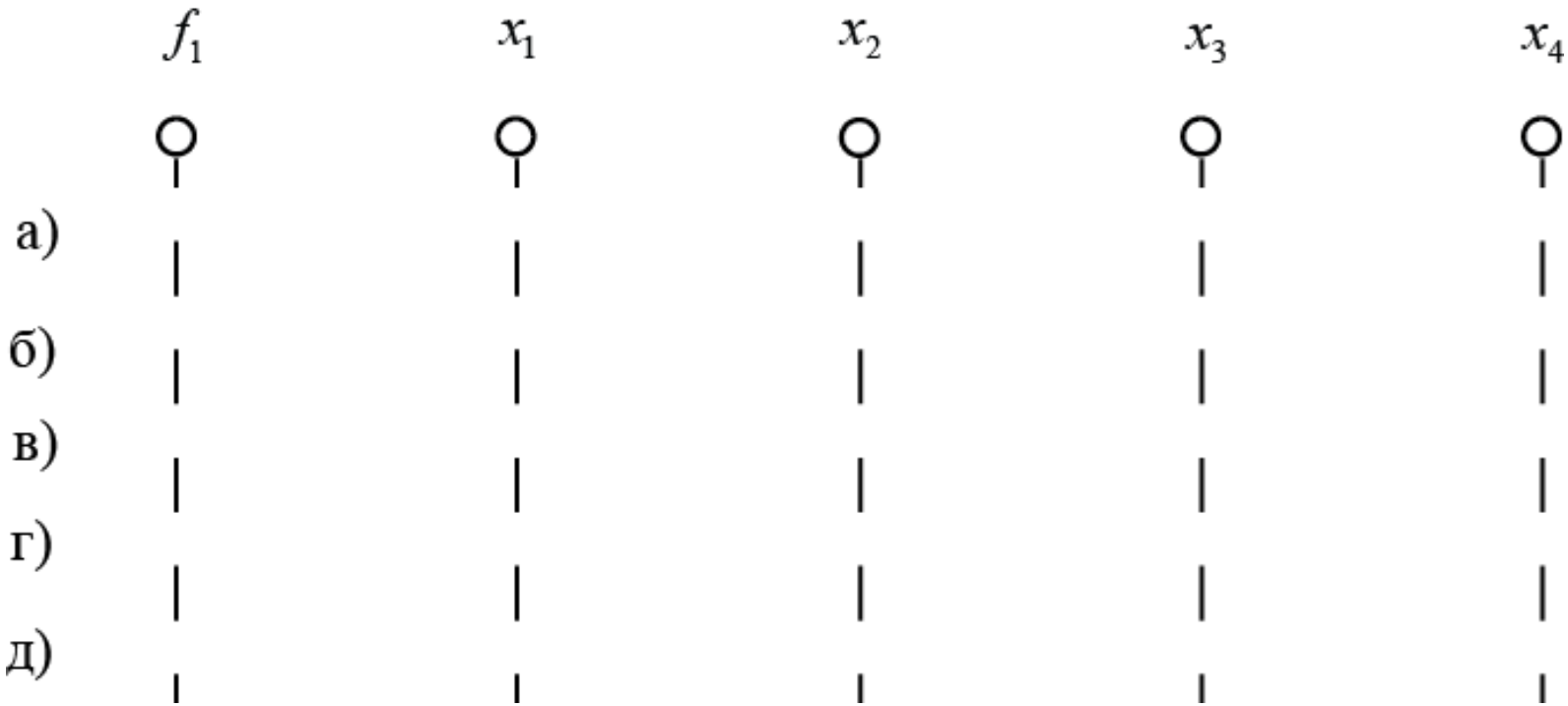

Рис. 2.1. Поле графа

1. Построение нормализованных графов

Решение. 3) Выразим переменные из уравнений системы:

$$\begin{cases} x_1 = f_1, \\ x_2 = bx_1 + f_2 x_3 + ex_4, \\ x_4 = gx_1 + dx_3, \\ x_3 = cx_2. \end{cases} \qquad (1.2.2)$$

1. Построение нормализованных графов

Решение. 4) Построим подграфы, соответствующие нормализованным уравнениям системы:

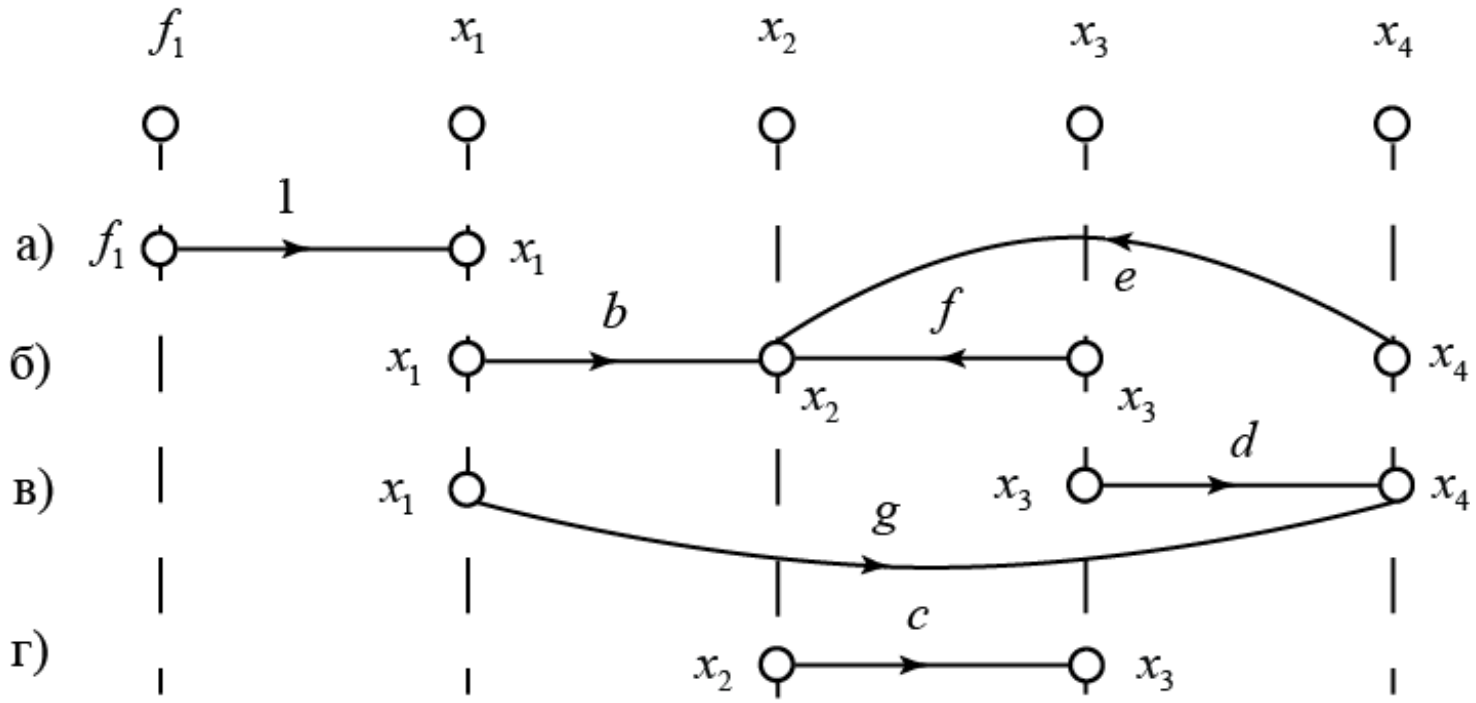

Рис. 1.2.2. Подграфы

1. Построение нормализованных графов

Решение. 5) Объединим подграфы и получим сигнальный граф, соответствующий системе уравнений (1.2.2):

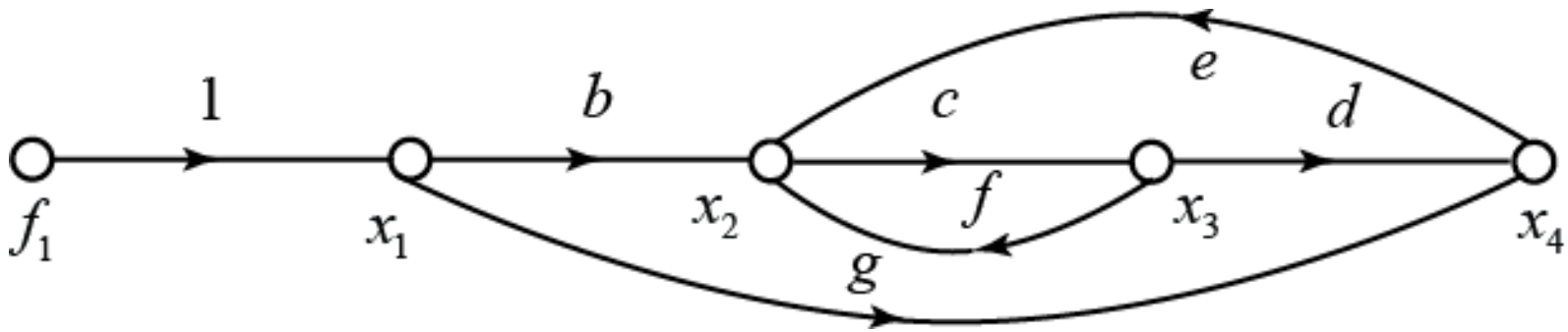

Рис. 1.2.3. Сигнальный граф

Из рис. 1.2.2 следует, что узел f_1 является источником, остальные узлы – смешанные. Сток отсутствует.

1. Построение нормализованных графов

Решение. 6) Запишем матрицу передач:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Построение ненормализованных графов

Пример 2.1. Найти матрицу передач и построить ненормализованный граф по системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 = f_1, \\ b_{21}x_1 - x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = 0, \\ b_{31}x_1 + b_{33}x_3 - x_4 = 0, \\ b_{42}x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решить обратную задачу: по полученному графу найти систему уравнений.

2. Построение ненормализованных графов

Решение. Воспользуемся формулой (4.2.10):

$$A = \left[\left(\mathrm{B} + 1_n \right) \left(\frac{-1_m}{0_{(n-m)m}} \right) \right].$$

Запишем сначала матрицу коэффициентов системы:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & -1 & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & 0 & b_{33} & -1 \\ 0 & b_{42} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Построение ненормализованных графов

Решение. Число правых частей в заданном уравнении, отличных от нуля, $r = 1$. Размерность системы $n = 4$. Значит:

$$\mathbf{1}_{r=1} = \mathbf{1};\ \mathbf{1}_{n=4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Построение ненормализованных графов

Решение. По формуле (4.2.10)

$$A = \left[\left(\mathrm{B} + 1_n \right) \left(\frac{-1_m}{0_{(n-m)m}} \right) \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ b_{21} & 0 & b_{23} & b_{24} & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{33}+1 & -1 & 0 \\ 0 & b_{42} & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Построение ненормализованных графов

Решение. Для того, чтобы сделать матрицу квадратной, добавим одну нулевую строку. Нулевые строки, соответствующие узлам источникам, нужно добавлять снизу.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ b_{21} & 0 & b_{23} & b_{24} & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{33}+1 & -1 & 0 \\ 0 & b_{42} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Построение ненормализованных графов

Решение. Соединим узлы графа согласно матрице передач $\mathbf{A}$ и получим сигнальный граф:

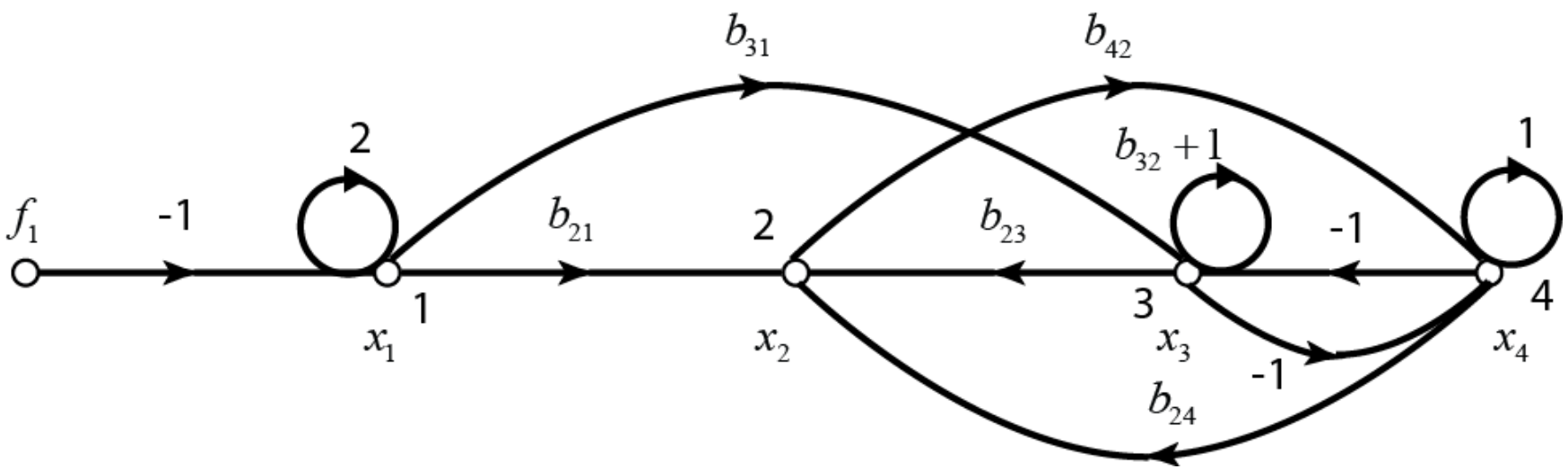

Рис. 2.1.1. Сигнальный граф

2. Построение ненормализованных графов

Решение. Составим по графу систему уравнений. После приведения подобных членов получим исходную систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 = -f_1 + 2x_1, \\ x_2 = b_{21}x_1 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4, \\ x_3 = b_{31}x_1 + \left(b_{33} + 1\right)x_3 - x_4, \\ x_4 = b_{42}x_2 - x_3 + x_4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = f_1, \\ b_{21}x_1 - x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = 0, \\ b_{31}x_1 + b_{33}x_3 - x_4 = 0, \\ b_{42}x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

2. Построение ненормализованных графов

Пример 2.2. Построить ненормализованный сигнальный граф по заданной системе уравнений:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = f_1, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 = f_2, \\ b_{32}x_2 + b_{33}x_3 = 0. \end{cases}$$

Проверить решение путем составления системы уравнений по построенному сигнальному графу.

2. Построение ненормализованных графов

Решение. Воспользуемся формулой (4.2.10):

$$A = \left[\left(\mathrm{B} + 1_n \right) \left(\frac{-1_m}{0_{(n-m)m}} \right) \right].$$

Запишем матрицы: коэффициентов системы $\mathbf{B}$, $\mathbf{1}_{r=2}$, $\mathbf{1}_{n=3}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}_{r=2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}_{n=3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Построение ненормализованных графов

Решение. По формуле (4.2.10) запишем матрицу передач:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_{11}+1 & b_{12} & b_{13} & -1 & 0 \\ b_{21} & b_{22}+1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & b_{32} & b_{33}+1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Построение ненормализованных графов

Решение.

По матрице передач построим сигнальный граф:

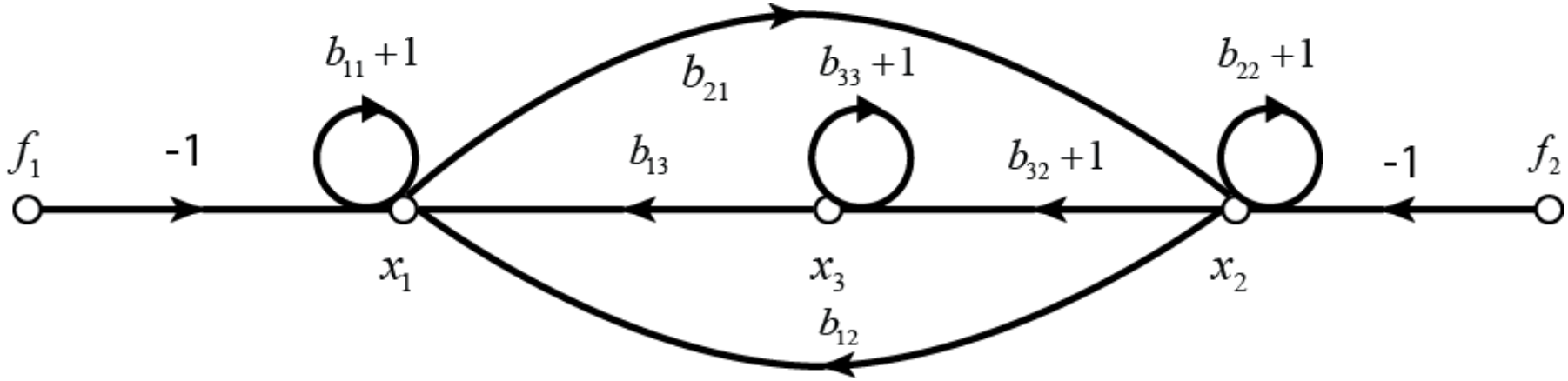

Рис. 2.2.1. Сигнальный граф

2. Построение ненормализованных графов

Решение. По сигнальному графу (рис. 2.2.1) запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = -f_1 + (b_{11} + 1)x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3, \\ x_2 = -f_2 + b_{21}x_1 + (b_{22} + 1)x_2, \\ x_3 = b_{32}x_2 + (b_{33} + 1)x_3. \end{cases}$$

После приведения подобных членов получим исходную систему уравнений.

2. Построение ненормализованных графов

Пример 2.3. Построить нормализованный и ненормализованный графы по системе уравнений:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = 0, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = 0, \\ b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 = 0. \end{cases}$$

Записать матрицу $\mathbf{A}$. Доказать, что построенные сигнальные графы равносильны.

2. Построение ненормализованных графов

Решение.

1) Построение нормализованного графа.

а) Выразим переменные из уравнений системы и запишем матрицу передач:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{b_{12}}{b_{11}} x_2 - \dfrac{b_{13}}{b_{11}} x_3, \\ x_2 = -\dfrac{b_{21}}{b_{22}} x_1 - \dfrac{b_{23}}{b_{22}} x_3, \\ x_3 = -\dfrac{b_{31}}{b_{33}} x_1 - \dfrac{b_{32}}{b_{33}} x_2, \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{b_{12}}{b_{11}} & -\dfrac{b_{13}}{b_{11}} \\ -\dfrac{b_{21}}{b_{22}} & 0 & -\dfrac{b_{23}}{b_{22}} \\ -\dfrac{b_{31}}{b_{33}} & \dfrac{b_{32}}{b_{33}} & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Построение ненормализованных графов

Решение.

1) Построение нормализованного графа.

б) По матрице передач построим граф:

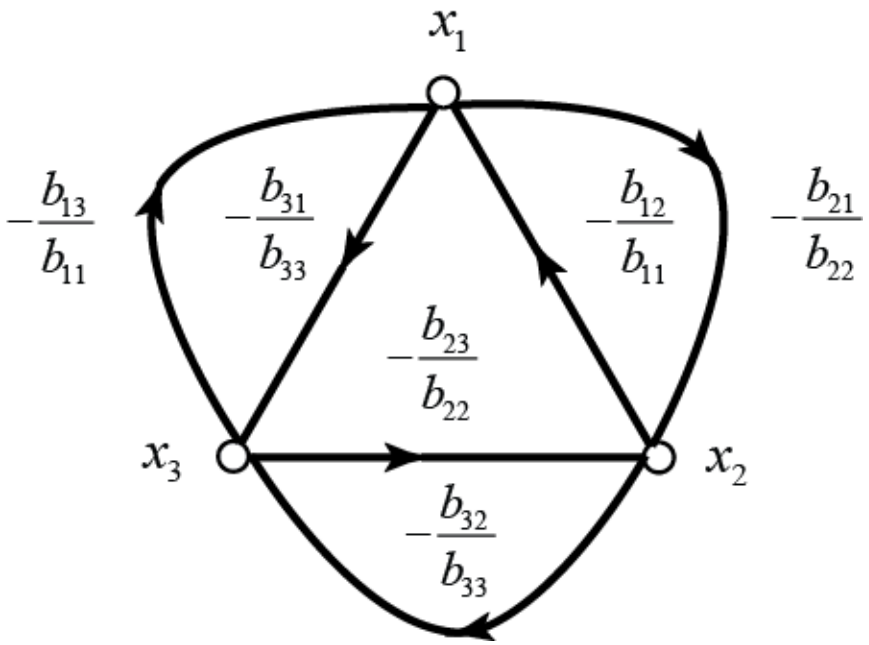

Рис. 2.3.1. Нормализованный сигнальный граф

2. Построение ненормализованных графов

Решение.

2) Построение ненормализованного графа.

а) Получим матрицу передач по формуле, так как все правые части уравнений системы равны нулю:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{1}_{n=3} = \begin{bmatrix} b_{11}+1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}+1 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}+1 \end{bmatrix}.$$

2. Построение ненормализованных графов

Решение.

2) Построение ненормализованного графа.

б) По матрице передач построим сигнальный граф:

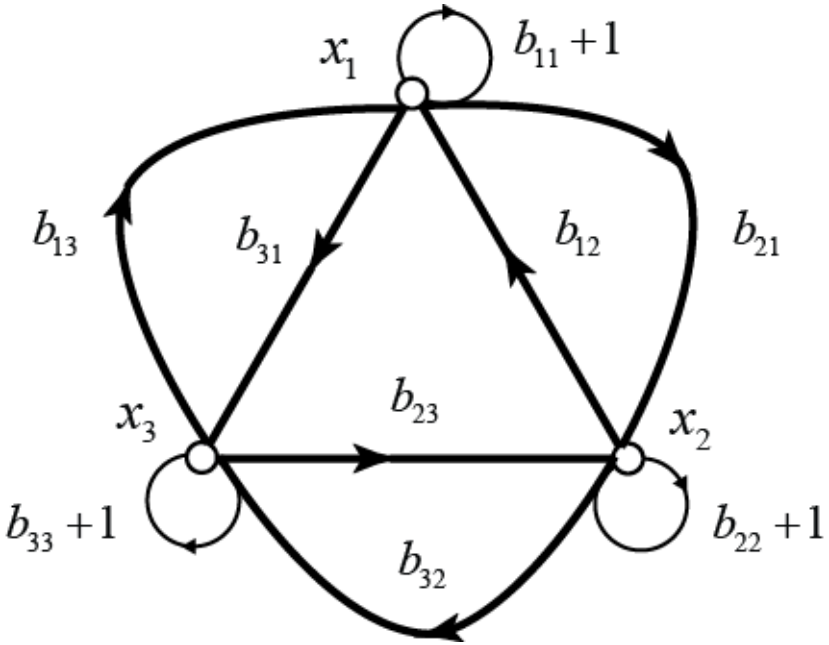

Рис. 2.3.2. Ненормализованный сигнальный граф

2. Построение ненормализованных графов

Решение.

3) Определение равносильности графов.

а) Составим системы уравнений по графам:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{b_{12}}{b_{11}} x_2 - \dfrac{b_{13}}{b_{11}} x_3, \\ x_2 = -\dfrac{b_{21}}{b_{22}} x_1 - \dfrac{b_{23}}{b_{22}} x_3, \\ x_3 = -\dfrac{b_{31}}{b_{33}} x_1 - \dfrac{b_{32}}{b_{33}} x_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = (b_{11}+1) x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3, \\ x_2 = b_{12} x_1 + (b_{22}+1) x_2 + b_{13} x_3, \\ x_3 = b_{13} x_1 + b_{23} x_2 + (b_{33}+1) x_3. \end{cases}$$

2. Построение ненормализованных графов

Решение.

3) Определение равносильности графов.

б) После приведения подобных получим одинаковые системы уравнений. Вследствие этого равносильны нормализованный и ненормализованный сигнальные графы.

Заключение

Тема следующей лекции

Сигнальные графы

3. Операции над графами
4. Решение графов. Формула Мезона