Метод переменных состояния

Лекция 8 (2)

Цель занятия

Изучить методы решения уравнений переменных состояния

Вопросы занятия

3. Решение уравнений переменных состояния.

4. Разностные уравнения.

Введение

Для решения обыкновенных ДУ применяются **аналитические**, **приближённые** и **численные методы**.

Аналитические методы позволяют получить решения ДУ через элементарные или специальные функции в конечном виде. Однако в практических задачах они оказываются часто неприменимыми.

Введение

Приближённые методы используют различные упрощения исходных уравнений. Однако они также имеют ограниченную область применения.

Численные методы – мощные и универсальные методы решения обыкновенных ДУ. Они позволяют получить решения тогда, когда классическими методами это сделать невозможно.

Введение

Среди численных методов одним из важнейших является **метод конечных разностей**, который основывается:

1. **На замене непрерывной области определения решения дискретным множеством точек**, называемом **сеткой**.
2. **На замене непрерывных функций дискретными (сеточными), определенными на введённой сетке изменения аргументов**.

Введение

3. **На замене производных, входящих в уравнение, конечными разностями**. В результате вместо ДУ получается конечно-разностное уравнение, определённое в узлах разностной сетки. Решение его сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки.

Введение

Методы численного решения обыкновенных ДУ делятся на два класса:

1. **Одноступенчатые (одношаговые) методы**, использующие данные о решении только в одной точке. Однако приходится вычислять функции в нескольких точках.

К этим методам относятся методы **Эйлера, Рунге-Кутта** и **метод решения с помощью рядов Тейлора**.

Введение

2. **Многоступенчатые (многошаговые) методы**, не требующие много повторных вычислений функций, использующие данные о решении в нескольких точках. Это методы Адамса, прогноза-коррекции и др.

3. Решение уравнений переменных состояния

Для получения общего решения нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка (1.1) – системы уравнений переменных состояния

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}U_1 + b_{12}U_2 + \ldots + b_{1m}U_m, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}U_1 + b_{22}U_2 + \ldots + b_{2m}U_m, \\ \qquad \ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}U_1 + b_{n2}U_2 + \ldots + b_{nm}U_m \end{cases} \quad (1.1)$$

3. Решение уравнений переменных состояния

вначале рассмотрим получение решения линейного ДУ первого порядка методом вариации постоянных (методом Лагранжа).

$$x'(t) = ax(t) + bu(t). \qquad (3.1)$$

3. Решение уравнений переменных состояния

Получим общее решение для однородного ДУ, когда $u(t)=0.$

$$x' = ax \Rightarrow \frac{dx}{dt} = ax \Rightarrow dx = axdt \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = adt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int adt \Rightarrow \ln|x| = at + C \Rightarrow$$

$$x = e^{at+C} = e^{at} \cdot \underbrace{e^{C}}_{k} = ke^{at}. \quad (3.2)$$

3. Решение уравнений переменных состояния

При $u(t) \neq 0$ **решение уравнения (3.1) будем искать в предположении, что** k **является функцией** t **(метод Лагранжа – вариации произвольной постоянной). Тогда общее решение имеет вид:**

$$x(t) = k(t)e^{at}. \qquad (3.3)$$

А производная:

$$x'(t) = ae^{at}k(t) + e^{at}k'(t). \qquad (3.4)$$

3. Решение уравнений переменных состояния

Подставим (3.3) и (3.4) в уравнение (3.1) $x'(t) = ax(t) + bu(t)$. **Получим:**

$$\underline{ae^{at}k(t)} + e^{at}k'(t) = \underline{ae^{at}k(t)} + bu(t),$$

$$e^{at}k'(t) = bu(t),$$

$$k'(t) = be^{-at}u(t). \qquad (3.5)$$

3. Решение уравнений переменных состояния

Интегрируем левую и правую части уравнения (3.5) в пределах от $t = t_0$ до t.

Получим:

$$\int_{t_0}^{t} k'(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} be^{-a\tau}u(\tau)d\tau,$$

$$k(t) - k(t_0) = \int_{t_0}^{t} be^{-a\tau}u(\tau)d\tau,$$

$$k(t) = \int_{t_0}^{t} be^{-a\tau}u(\tau)d\tau + k(t_0). \qquad (3.6)$$

3. Решение уравнений переменных состояния

Из уравнений (3.3) и (3.6) получим:

$$x(t) = e^{at}\left[\int_{t_0}^{t} b e^{-a\tau} u(\tau) d\tau + k(t_0)\right].$$

Раскроем квадратные скобки:

$$x(t) = e^{at}\int_{t_0}^{t} b e^{-a\tau} u(\tau) d\tau + e^{at} k(t_0). \quad (3.7)$$

3. Решение уравнений переменных состояния

Для определения $k(t_0)$ **в уравнении (3.3) примем** $t = t_0$ **. Тогда**

$$x(t_0) = e^{at_0} k(t_0) \Rightarrow k(t_0) = e^{-at_0} x(t_0).$$

Подставим $k(t_0)$ **в (3.7). Таким образом, общее решение уравнения (3.1):**

$$x(t) = e^{at} \int_{t_0}^{t} b e^{-a\tau} u(\tau) d\tau + e^{a(t-t_0)} x(t_0). \quad (3.8)$$

3. Решение уравнений переменных состояния

Общий вид решения системы (1.1) будет аналогичен решению уравнения (3.1), если в нём заменить скалярные функции на матричные. При этом матричная экспоненциальная функция $e^{\mathbf{A}t}$, где $\mathbf{A}$ – матрица системы порядка n, задаваемая сходящимся рядом Тейлора:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(\mathbf{A}t)^n + \ldots \quad (3.9)$$

3. Решение уравнений переменных состояния

Значит $e^{\mathbf{A}t}$ представляет собой квадратную матрицу порядка n, элементами которой являются функции t.

Например, если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, то

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} t + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 t^2 + \ldots =$$

3. Решение уравнений переменных состояния

$$=\begin{pmatrix} 1+at+\frac{1}{2}(at)^2+\ldots & 0 \\ 0 & 1+bt+\frac{1}{2}(bt)^2+\ldots \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}.$$

3. Решение уравнений переменных состояния

Свойства $e^{\mathbf{A}t}$**:**

1. $e^{\mathbf{A}0} = 1.$

2. $e^{\mathbf{A}t} \cdot e^{\mathbf{B}t} = e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}$**, если** $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}.$

3. $\left[e^{\mathbf{A}t}\right]^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}.$

4. $\dfrac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}.$

5. $\int\limits_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau = \mathbf{A}^{-1}\left(e^{\mathbf{A}t} - 1\right) = \left(e^{\mathbf{A}t} - 1\right)\mathbf{A}^{-1}.$

3. Решение уравнений переменных состояния

Заменим скалярную запись решения уравнения (3.1) – выражение (3.8) матричной, используя свойства $e^{\mathbf{A}t}$:

$$\mathrm{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathrm{BU}(\tau)\,d\tau +$$

$$+e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathrm{X}(t_0). \qquad (3.10)$$

3. Решение уравнений переменных состояния

Подставим полученное выражение для переменных состояния в выходное уравнение $\mathbf{Y} = \mathbf{CX} + \mathbf{DU}$:

$$\mathrm{Y}(t) = \mathrm{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathrm{X}(t_0) +$$

$$+\left[\mathrm{C}e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathrm{BU}(\tau)d\tau + \mathrm{DU}(t)\right]. \quad (3.11)$$

3. Решение уравнений переменных состояний

Первый член в равенстве (3.11) представляет собой отклик вследствие наличия в системе запасённой энергии при ненулевых начальных условиях.

Второй член определяет вклад в реакцию цепи источников сигналов с момента $t > t_0$.

3. Решение уравнений переменных состояний

Точное решение уравнения (3.11) в аналитическом виде возможно осуществить в ограниченных случаях для цепей малого порядка и тогда, когда, например, матрица системы $\mathbf{A}$ такова, что позволяет при суммировании членов ряда (3.9) находить элементы матрицы $e^{\mathbf{A}t}$ в замкнутой форме, а функции сигналов $\mathbf{U}(t)$ просты для интегрирования.

3. Решение уравнений переменных состояний

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ - представление решений дифференциальных уравнений аналитическими формулами, использующими указанный априори запас функций и перечисленный заранее набор математических операций.

3. Решение уравнений переменных состояний

Если в качестве функций допускаются **элементарные функции** и функции, входящие в **уравнение**, а под операциями понимаются конечные последовательности алгебраических операций и операций взятия неопределенного интеграла (квадратуры) от допустимых функций, то говорят об интегрировании (т. е. решении) ДУ в квадратурах. Примером обыкновенного ДУ, интегрируемого в квадратурах, служит ***Бернулли уравнение***:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) y^n.$$

3. Решение уравнений переменных состояний

При решении системы уравнений (3.11) численными методами интегрирование выполняется с помощью разностных уравнений.

4. Разностные уравнения

Решение с помощью разностных уравнений выполняется на компьютере. Значения $\mathbf{X}(t)$ **вычисляются для дискретных значений** $t, t = kT,$ **где** $k -$ **целые числа, а** $T -$ **шаг интегрирования.**

4. Разностные уравнения

Вид разностного уравнения зависит либо от способа аппроксимации функций сигналов в подынтегральном выражении (3.10), либо от способа аппроксимации производных.

Пусть $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$, **тогда по (3.10)**

$$\mathbf{X}\left[(k+1)T\right] = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{X}(kT) + \\ + e^{\mathbf{A}(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)\,d\tau. \qquad (3.12)$$

4. Разностные уравнения

Пусть $\mathbf{U}(t)$ **– постоянная на каждом из временных интервалов (рис. 4.1), т.е.**

$$\mathbf{U}(t)=\mathbf{U}(k,T),\ kT\le t\le(k+1)T,$$

$$k=0,1,2,\ldots$$

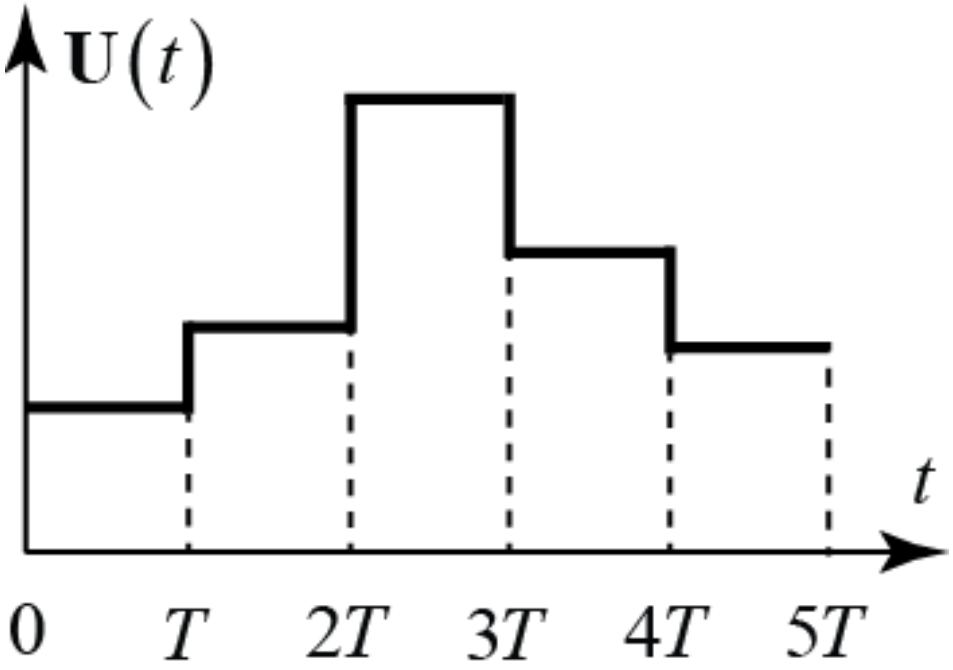

Рис. 3.1. Кусочно-постоянная функция

4. Разностные уравнения

С учётом свойства (5) для $e^{\mathbf{A}T}$ имеем:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{BU}(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau}\left(-\frac{1}{\mathbf{A}}\right)\mathbf{BU}(\tau)\,d(-\mathbf{A}\tau) =$$

$$= \left[-e^{-\mathbf{A}\tau}\right]_{kT}^{(k+1)T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BU}(kT) =$$

$$= \left[-e^{-\mathbf{A}(k+1)T} + e^{-\mathbf{A}kT}\right]\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BU}(kT). \quad (*)$$

4. Разностные уравнения

С учётом (*) уравнение (3.12) получит вид:

$$\mathbf{X}\left[(k+1)T\right]=e^{\mathbf{A}T}\mathbf{X}(kT)+$$

$$+e^{\mathbf{A}(k+1)T}\left[-e^{-\mathbf{A}(k+1)T}+e^{-\mathbf{A}kT}\right]\cdot\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BU}(kT)=$$

$$=e^{\mathbf{A}T}\mathbf{X}(kT)+\left[e^{\mathbf{A}T}-1\right]\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BU}(kT).\quad(3.13)$$

Уравнение (3.13) является искомым разностным уравнением и дает точное решение уравнения (3.12) при входной функции $\mathbf{U}(t)$ **кусочно-постоянной.**

4. Разностные уравнения

В уравнении (3.13) не нужно вычислять обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, так как $e^{\mathbf{A}T}$ в вычислениях представляется рядом:

$$\left(e^{\mathbf{A}t}-\mathbf{1}\right)\mathbf{A}^{-1}=$$

$$=\left[\left(\mathbf{1}+\mathbf{A}T+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^2T^2+\frac{1}{3!}\mathbf{A}^3T^3+\ldots\right)-\mathbf{1}\right]\mathbf{A}^{-1}=$$

$$=1T+\frac{1}{2!}\mathbf{A}T^2+\frac{1}{3!}\mathbf{A}^2T^3+\ldots$$

4. Разностные уравнения

Приближенные разностные уравнения для интегрирования системы (1.1) можно получить, если предположить, что $\dot{\mathrm{X}}(t)$ или равносильно этому подинтегральное выражение в уравнении (3.11) являются кусочно-постоянными, кусочно-линейными функциями.

4. Разностные уравнения

Из множества разработанных для решения обыкновенных ДУ первого порядка методов рассмотрим методы Эйлера и Рунге-Кутта численного решения задачи Коши на примере ДУ

$$x'(t) = f\left(t, x(t)\right), \quad t = t_0, \quad x = x(t_0).$$

Метод Эйлера является исторически первым и наиболее простым.

Явный метод Эйлера

В основе метода лежит аппроксимация производной отношением конечных приращений зависимой Δx и независимой Δt переменных :

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} =$$

$$= \frac{x_{i+1} - x_i}{h} = f(t_i, x_i) \Rightarrow$$

$$x_{i+1} = x_i + h \cdot f(t_i, x_i), \quad i = 0, 1, \ldots \qquad (4.1)$$

Явный метод Эйлера

В методе Эйлера используется простейшая формула интегрирования – формула прямоугольников по левому краю отрезка интегрирования.

Точность метода прямо пропорциональна шагу интегрирования h. Она возрастает медленно при уменьшении шага интегрирования. Для достижения приемлемой точности нужно выбирать малый шаг интегрирования.

Неявный метод Эйлера

Если на правой границе отрезка использовать точное значение производной от решения, то получается неявный метод Эйлера первого порядка точности:

$$x_{i+1} = x_i + h \cdot f\left(t_{i+1}, x_{i+1}\right), \quad i = 0, 1, \ldots \quad (4.2)$$

В общем случае нелинейное относительно x_{i+1} неявное уравнение (4.2) численно решается, например, методом Ньютона или его модификациями.

Усовершенствованный метод Эйлера. Метод Гюна

Точность метода до h^2 **повышена за счет использования для аппроксимации интеграла более точной формулы –** **формулы трапеций**. **Для каждого узла интегрирования производится следующая цепочка вычислений:**

$$\tilde{x}_{i+1} = x_i + h \cdot f\left(t_i, x_i\right), \qquad (4.3)$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} \cdot \left[f\left(t_i, x_i\right) + f\left(t_{i+1}, \tilde{x}_{i+1}\right) \right].$$

Метод Рунге-Кутта третьего порядка

Точность метода до h^3 повышена за счет использования для аппроксимации интеграла формулы Симпсона:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}\left(k_0 + 4k_1 + k_2\right), \qquad (4.4)$$

$$k_0 = h \cdot f\left(t_i, x_i\right), \quad k_1 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_0}{2}\right),$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_i + h, x_i + 2k_1 - k_0\right).$$

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка

Точность метода $\square\ h^4$:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}\left(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3\right), \quad (4.5)$$

$$k_0 = h \cdot f\left(t_i, x_i\right), k_1 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_0}{2}\right),$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_i + h, x_i + k_2\right).$$

4. Разностные уравнения

Методы численного интегрирования обобщим для системы уравнений переменных состояния.

Явный метод Эйлера

$$\dot{\mathbf{X}}(t) \approx \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{h} = \mathrm{A}\mathbf{X}_n + \mathbf{BU}(t_n) \Rightarrow$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + h\mathbf{AX}_n + h\mathbf{BU}(t_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}_{n+1} = (1 + h\mathbf{A})\mathbf{X}_n + h\mathbf{BU}(t_n). \quad (4.6)$$

4. Разностные уравнения

Неявный метод Эйлера

$$\dot{\mathbf{X}}(t) \approx \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{h} = \mathbf{A}\mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{B}\mathbf{U}(t_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + h\mathbf{A}\mathbf{X}_{n+1} + h\mathbf{B}\mathbf{U}(t_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}_{n+1} - h\mathbf{A}\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + h\mathbf{B}\mathbf{U}(t_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}_{n+1}(1 - h\mathbf{A}) = \mathbf{X}_n + h\mathbf{B}\mathbf{U}(t_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}_{n+1} = (1 - h\mathbf{A})^{-1}\left[\mathbf{X}_n + h\mathbf{B}\mathbf{U}(t_n)\right]. \quad (4.7)$$

4. Разностные уравнения

Метод трапеций

$$\mathbf{X}_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2} h\mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \tag{4.8}$$

$$\cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{2}\mathbf{A}\right)\mathbf{X}_n + \frac{h}{2}\left[\mathbf{U}(t_n) + \mathbf{U}(t_{n+1})\right] \right\}.$$

4. Разностные уравнения

Таким образом, решение для динамической линейной цепи всегда может быть выражено аналитически через переходные матрицы состояния $e^{\mathbf{A}t}$ **и реализовано численно разностными уравнениями.**

Для динамических нелинейных цепей решение может быть получено графическими и численными методами.

Заключение

Тема следующего занятия

Дискретные схемные модели