Сигнальные графы

Лекция 7 (2)

Цель занятия

Изучить основные понятия и определения теории сигнальных графов и методы их построения по системам уравнений

Вопросы занятия

3. Операции над графами
4. Решение графов. Формула Мезона.

3. Операции над графами

Для одной и той же системы уравнений можно построить множество равносильных графов, отличающихся друг от друга структурой, то есть количеством узлов и ветвей, передачами ветвей и соединениями узлов. Приведение графа одной структуры к равносильному графу другой структуры называется преобразованием графа. Как правило, графы преобразуются с целью упрощения «решения графа», но возможно для большей наглядности, выявления особенностей каких-либо ветвей и узлов.

3. Операции над графами

Если результатом преобразования является граф, не допускающий дальнейших упрощений (исключения узлов и петель), он называется конечным.

Для получения конечного графа необходимо располагать набором операций (системой правил), позволяющих исключать узлы и петли исходного графа.

Преобразование можно осуществлять как непосредственно по графу, так и с помощью операций над матрицей передач $\mathbf{A}$ графа.

3. Операции над графами

Рассмотрим операции, позволяющие выполнять преобразования непосредственно по графу. Все операции доказываются при помощи формулы

$$x_j = \sum_{i=1}^{N} a_{ji} x_i. \qquad (4.3.1)$$

Объединение однонаправленных параллельных ветвей. Параллельное соединение двух однонаправленных ветвей с передачами *a* и *b* можно заменить одной ветвью с передачей $d = a + b.$ Справедливо для любого числа параллельных ветвей.

3. Операции над графами

Объединение однонаправленных последовательных ветвей (исключение смешанного узла). Последовательное соединение двух однонаправленных ветвей с передачами *a* и *b* можно заменить одной ветвью с передачей $f = ab$.

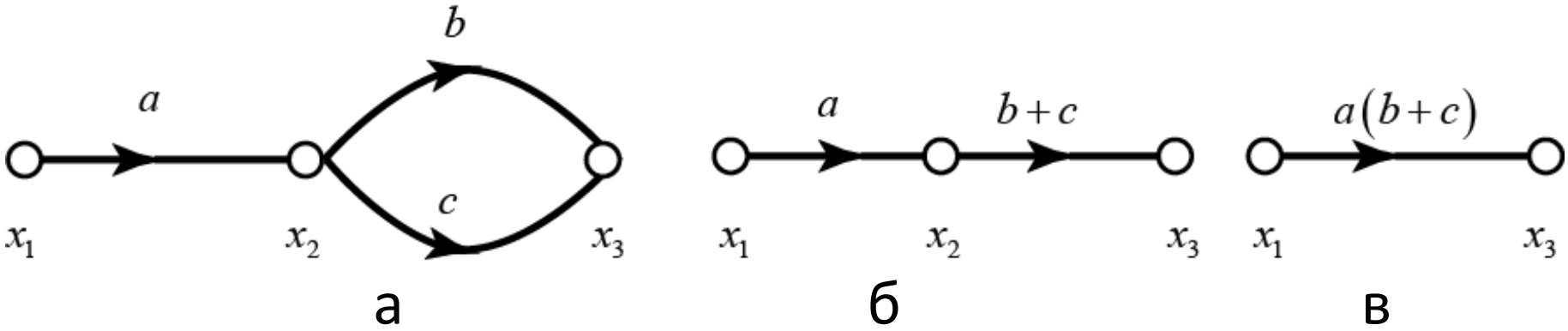
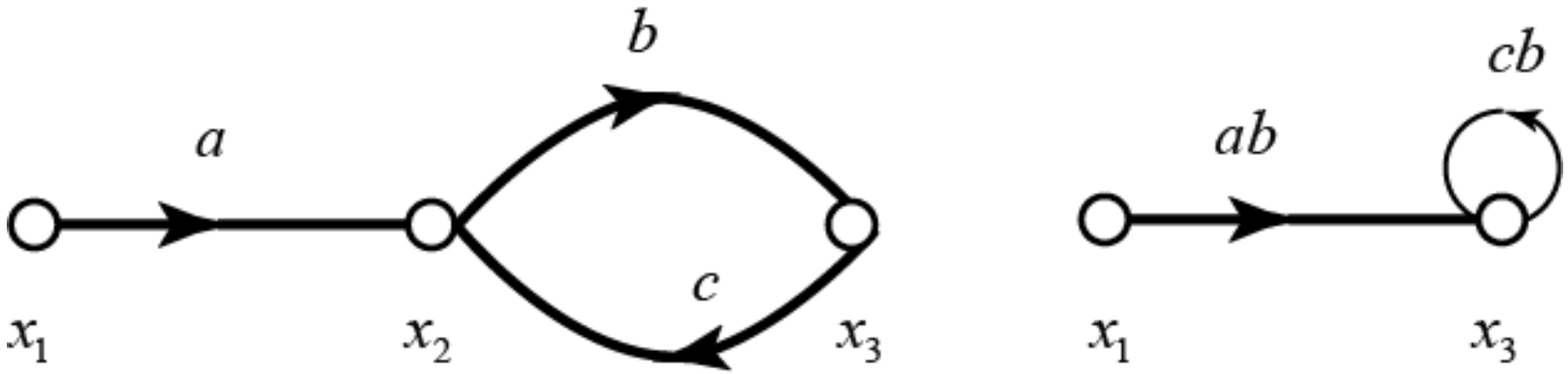


Рис. 4.3.1. Объединение однонаправленных ветвей

3. Операции над графами

Объединение разнонаправленных параллельных ветвей при помощи петли.



а б

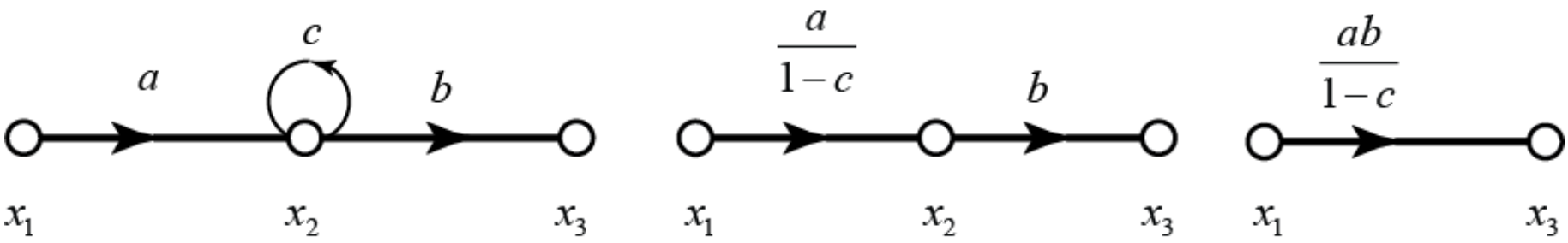
Рис. 4.3.2. Объединение разнонаправленных ветвей (исключение смешанного узла)

Согласно рис. 4.3.2:

$$x_2 = ax_1 + cx_3,\ x_3 = bx_2 \ \Rightarrow x_3 = abx_1 + cbx_3.$$

3. Операции над графами

Исключение петли.



а б в

Рис. 4.3.3. Исключение петли

Согласно рис. 4.3.3а: $x_2 = ax_1 + cx_2;\ x_3 = bx_2.$

Найдем из первого уравнения $x_2 = a\dfrac{1}{1-c}x_1$

и подставим во второе уравнение: $x_3 = \dfrac{ab}{1-c}x_1.$

3. Операции над графами

Сформулируем правило исключения петли:
петля с передачей c исключается заменой передачи a входящей ветви передачей $a/(1-c)$.
Правило справедливо только к узлу с петлей при условии, что в узел входит и из узла выходит одна ветвь.

3. Операции над графами

Если в узел с петлей входят и из него выходят несколько ветвей, то петля исключается точно также, то есть передачи всех входящих ветвей умножаются на $1/(1-c)$, а передачи исходящих ветвей остаются без изменений.

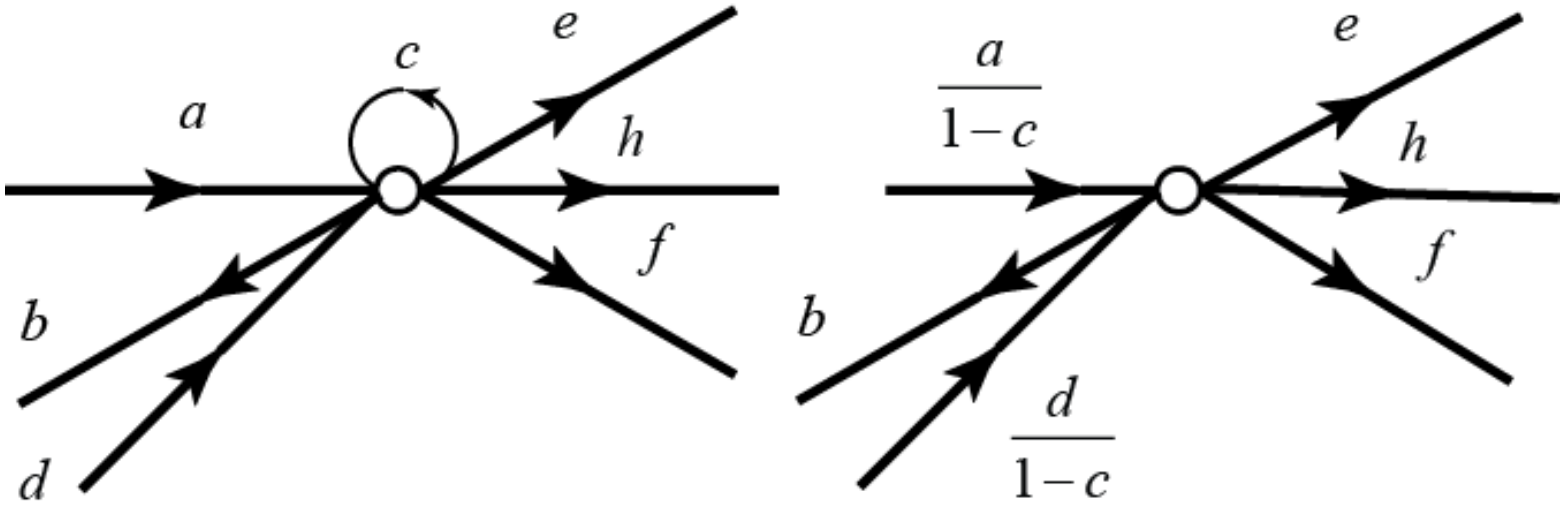


Рис. 4.3.4. Удаление петли

3. Операции над графами

Исключение простых узлов.

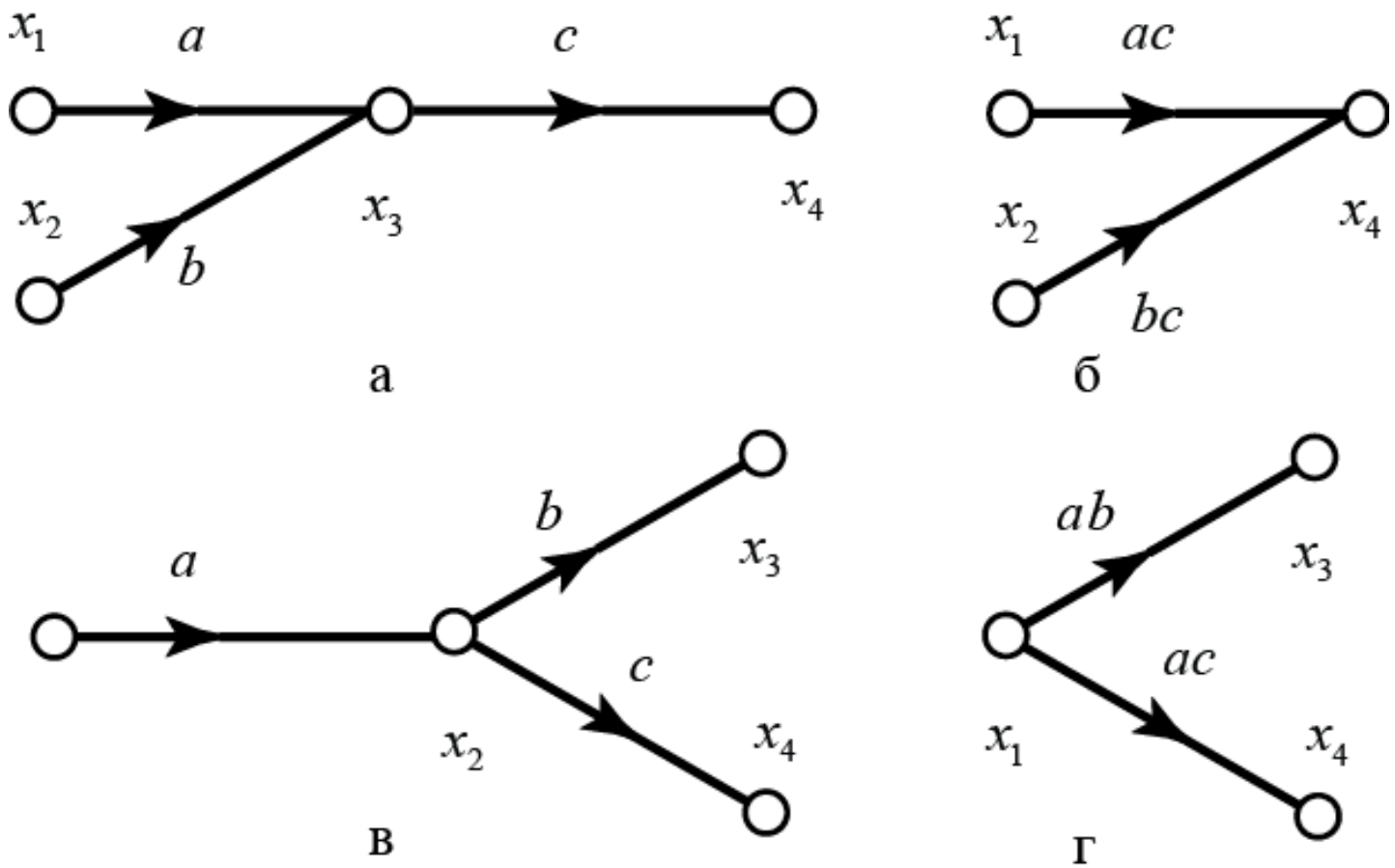
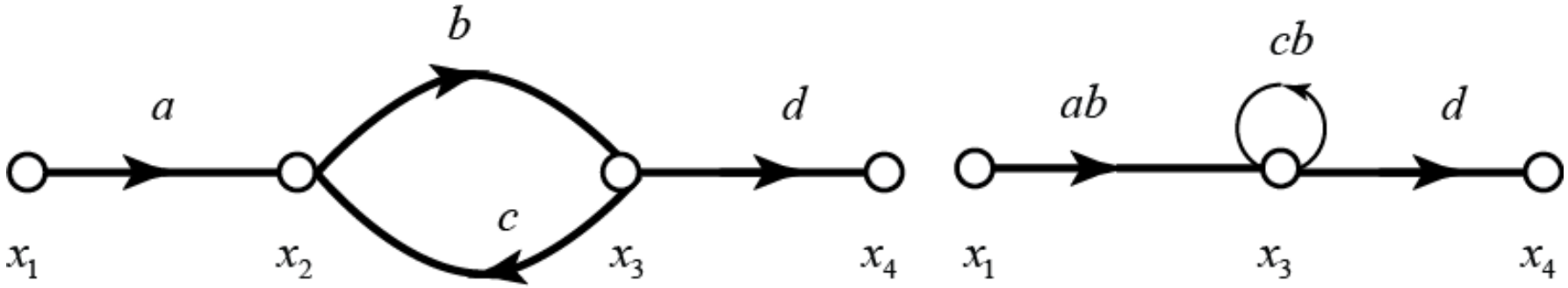


Рис. 4.3.5. Иллюстрация удаления простых узлов

3. Операции над графами

Исключение контура в графе. Для устранения контура в графе необходимо устранить любую одну из вершин этого контура. Для графа на рис. 4.3.6а имеем: $x_2 = ax_1 + cx_3;\ \ x_3 = bx_2;\ \ x_4 = dx_3.$ Исключим из этих уравнений x_2 и получим: $x_3 = abx_1 + bcx_3;\ \ x_4 = dx_3$ (рис. 4.3.6б):



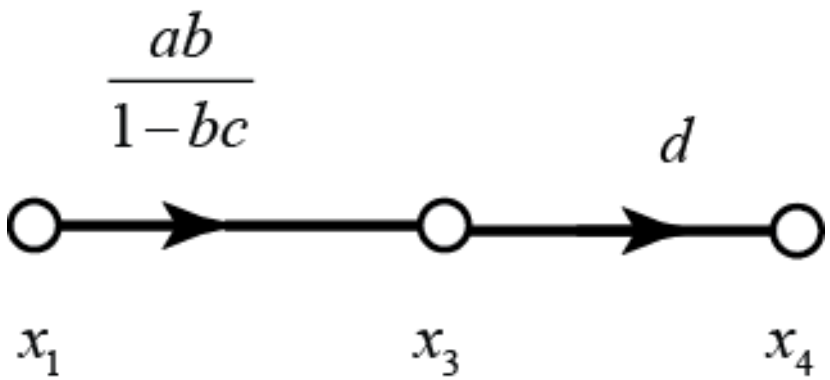
а б

Рис. 4.3.6. Удаление контура в графе

3. Операции над графами

Произошло слияние вершины x_2 с вершиной x_3. Устраним петлю (рис. 4.3.6б) и получим (рис. 4.3.6в):

$$x_3 = \frac{ab}{1-bc} x_1; \;\; x_4 = dx_3.$$



в

Рис. 4.3.6. Удаление контура в графе

4. Решение графов. Формула Мэзона

Под решением графа понимают решение системы уравнений, соответствующей данному графу. Решить систему уравнений можно, например, **методом Крамера**. Результатом применения этого метода являются выраженные через коэффициенты и свободные члены (правые части уравнений) значения неизвестных, удовлетворяющие уравнениям системы. В переводе на «язык графов» это означает, что переменные в зависимых узлах должны быть выражены через передачи ветвей графа и значения переменных в независимых узлах. Решение графов может быть получено без составления системы уравнений двумя способами.

4. Решение графов. Формула Мэзона

Первый метод решения графов. Исходный граф при помощи известных правил преобразуется в конечный. Если конечный граф состоит из одного источника и одного стока, то переменная в узле-стоке записывается $x_j = a_{ji} x_i$, где $x_i -$ значение переменной в узле-источнике, а a_{ij} зависит лишь от передач ветвей исходного графа. При сведении исходного графа к конечному операция исключения узлов эквивалентна исключению неизвестных системы уравнений. Этот способ может оказаться неудобным, так как для определения значений переменных во всех узлах граф нужно столько раз приводить к конечному, сколько есть зависимых узлов.

4. Решение графов. Формула Мэзона

Второй метод решения графов был разработан С. Мэзоном в 1953-1956 гг. Метод позволяет непосредственно по виду графа, то есть по его структурным свойствам, сразу выписать выражения для его решений. Для использования формулы С. Мэзона введем дополнительные топологические определения.

Передача $k-$ го пути (вес $k-$ го пути) от узла *i* к узлу *j* определяется произведением передач набора ветвей, образующих $k-$ й путь.

Передача контура (вес контура) определяется произведением передач набора ветвей, образующих контур.

4. Решение графов. Формула Мэзона

Касание. Путь контур $\leftrightarrow$ контур, контур $k \leftrightarrow$ контур r называются касающимися, если они имеют хотя бы один общий узел. В противном случае они называются не касающимися.

Передача графа при «движении» от узла *i* к узлу *j* определяется отношением $T_{ji} = x_j / x_i$.

Для одного источника формулу Мэзона можно записывать в следующем общем виде:

$$x_j = \frac{\left[\sum_k P_{ijk} \prod_l^m (1 - L_l)\right]^*}{\left[\prod_l^n (1 - L_l)\right]^*} x_i. \quad (4.4.1)$$

4. Решение графов. Формула Мэзона

В выражении (4.4.1) символ $*$ указывает на то, что все произведения передач касающихся контуров должны быть обращены в нули.

В числителе формулы: $L_l -$ передачи всех m контуров части графа, не касающейся $k -$го пути; $P_{ijk} -$ передачи путей от узла *i* до узла *j*; $x_i -$ значение переменной в узле-источнике; в знаменателе $L_l -$передачи всех n контуров графа.

Формула (4.4.1), по существу, является формулой Крамера для случая, когда граф содержит лишь один источник (соответственно лишь одно из уравнений системы имеет правую часть, отличную от нуля).

4. Решение графов. Формула Мэзона

Знаменатель формулы (4.4.1) по аналогии с формулой Крамера называется общим определителем графа, а числитель (под знаком произведения) – частным. Поэтому (4.4.1) можно записать:

$$T_{ji} = \frac{x_j}{x_i} = \frac{\sum_k P_{ijk}\Delta_k}{\Delta}, \qquad (4.4.2)$$

где $\Delta -$ общий определитель графа, $\Delta_k -$ определитель части графа, не касающийся $k -$ го пути (не имеющего общего узла).

4. Решение графов. Формула Мэзона

В формуле Мезона (4.4.2):

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \ldots, \qquad (4.4.3)$$

где L_i –передача *i*-го одиночного контура графа; $L_i L_j$ – произведение передач пар несоприкасающихся контуров (не имеющих общих узлов) графа; $L_i L_j L_k$ – произведение троек несоприкасающихся контуров и т.д. Значение Δ_k формируется аналогично Δ из произведений передач контуров, но здесь учитываются лишь контуры, не соприкасающиеся (не имеющие общих узлов) с k – м путем. Суммирование распространяется на все контуры (пути, пары и т.д.) графа.

4. Решение графов. Формула Мэзона

Для других типов сигнальных графов: графа Коутса, обобщенного сигнального графа Анисимова, унисторного графа и др., существуют свои топологические формулы передачи.

Матрица проводимостей электронной схемы сильно разрежена. Поэтому вычисление числителя формулы (4.4.2) передачи вход-выход схемы не представляет трудностей. Так как прямые методы построения сигнального графа предполагают ненормализованную его форму, то наличие петель делает более трудоемкой операцию вычисления знаменателя формулы (4.4.2). Устранение петель приводит к более громоздкой записи числителя, что может оказаться неудобным.

4. Решение графов. Формула Мэзона

Рассмотрим схему на рис. 4.4.1а и ее сигнальный граф на рис. 4.4.1б:

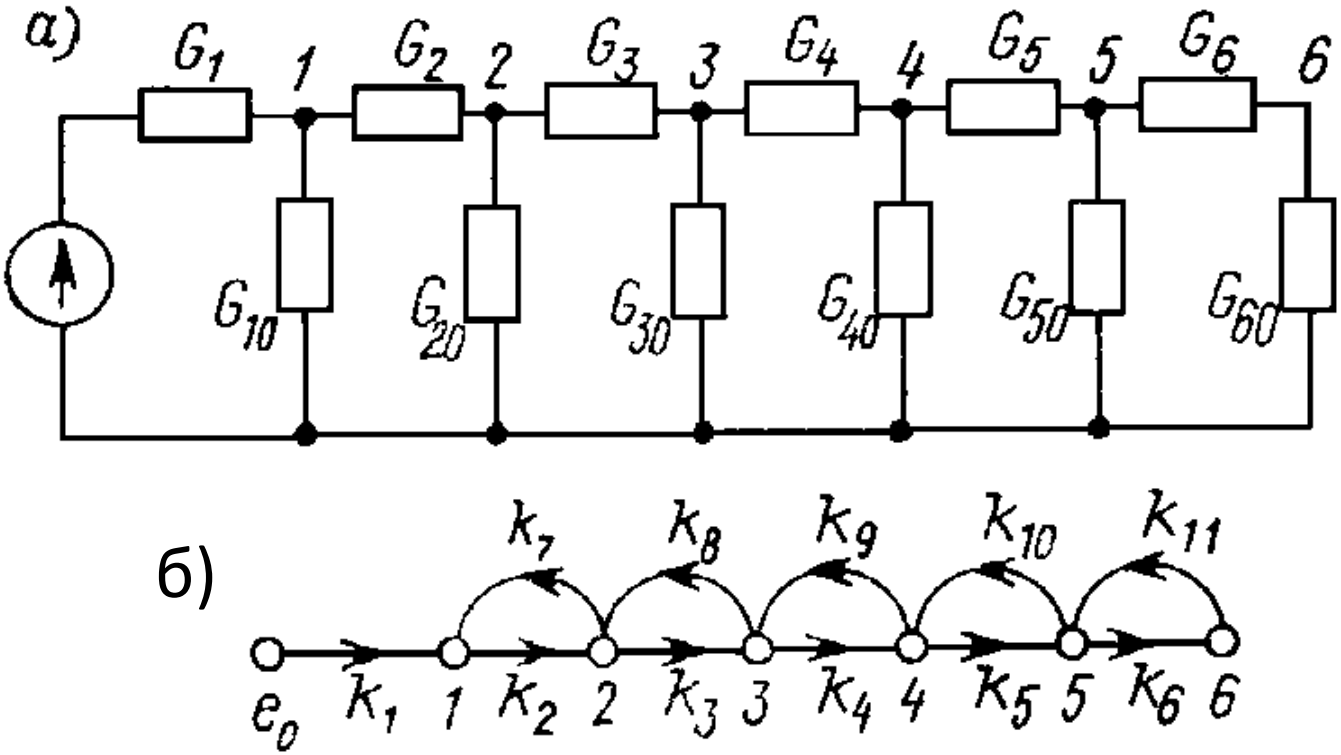


Рис. 4.4.1. Схема (а) и ее граф (б) для определения передачи по формуле Мэзона

4. Решение графов. Формула Мэзона

Переменными графа являются узловые напряжения.

Передачи ветвей графа равны:

$$k_1 = G_1 / G_{11};\ k_2 = G_2 / G_{22};\ k_3 = G_3 / G_{33};$$

$$k_4 = G_4 / G_{44};\ k_5 = G_5 / G_{55};\ k_6 = G_6 / G_{66};$$

$$k_7 = G_2 / G_{11};\ k_8 = G_3 / G_{22};\ k_9 = G_4 / G_{33};$$

$$k_{10} = G_5 / G_{44};\ k_{11} = G_6 / G_{55};$$

$$G_{11} = G_1 + G_2 + G_{10};\ G_{22} = G_2 + G_3 + G_{20};$$

$$G_{33} = G_3 + G_4 + G_{30};\ G_{44} = G_4 + G_5 + G_{40};$$

$$G_{55} = G_5 + G_6 + G_{50};\ G_{66} = G_6 + G_{60};$$

4. Решение графов. Формула Мэзона

Граф включает пять контуров:

1-й – 121; 2-й – 232; 3-й – 343; 4-й – 454; 5-й – 565.

Их передачи:

$$L_1 = k_2 k_7;\ L_2 = k_3 k_8;\ L_3 = k_4 k_9;\ L_4 = k_5 k_{10};\ L_5 = k_6 k_{11}.$$

К выходному узлу 6 от истока ведет единственный путь: $e_0 123456.$ Его передача $P = k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6.$

Запишем в числителе формулы Мэзона передачу указанного пути. Этому пути соответствует $\Delta_k = 1$: он соприкасается (имеет общие узлы) со всеми перечисленными контурами.

4. Решение графов. Формула Мэзона

В знаменателе Δ со знаком «минус» учитываем все пять контуров, затем со знаком «плюс» берем произведение несоприкасающихся пар (их всего шесть). Снова со знаком «минус» берем произведение передач несоприкасающейся тройки контуров 1, 3 и 5. Получим:

$$T = \frac{u_{60}}{e_0} =$$

$$= \frac{P}{1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 - L_5 + L_1L_3 + L_1L_4 + L_1L_5 + L_2L_4 + L_1L_5 + L_3L_5 + L_1L_3L_5}.$$

Заключение