Сигнальные графы

Лекция 6 (1)

Цель занятия

Изучить основные понятия и определения теории сигнальных графов и методы их построения по системам уравнений

Вопросы занятия

1. Основные понятия и определения
2. Методы построения сигнального графа по системе уравнений

1. Основные понятия и определения

Сигнальный граф – это ориентированный граф, соответствующий линейным или линеаризированным системам уравнений математической модели электронного средства и отражающий причинно-следственные связи между переменными (сигналами) средства.

1. Основные понятия и определения

Вершины (узлы) сигнального графа соответствуют сигналам, а ветви – коэффициентам или передаточным функциям (операторам), характеризующим связь между этими сигналами. Таким образом, каждая ветвь сигнального графа отображает причинно-следственную связь между сигналами (переменными), образующими начало и конец ветви, причем начало ветви истолковывается как причина, а ее конец как следствие.

1. Основные понятия и определения

Направление ветви указывается стрелкой – от причины к следствию. Длина и кривизна ветвей значения не имеют. Ветвь является оператором (коэффициентом, передаточной функцией) (рис. 4.1.1), в общем случае нелинейным.

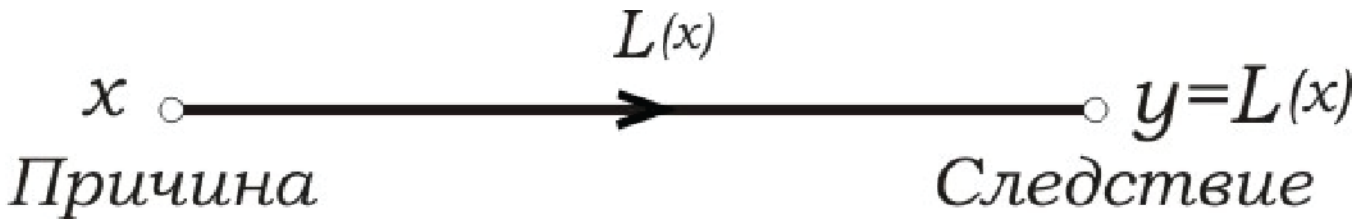
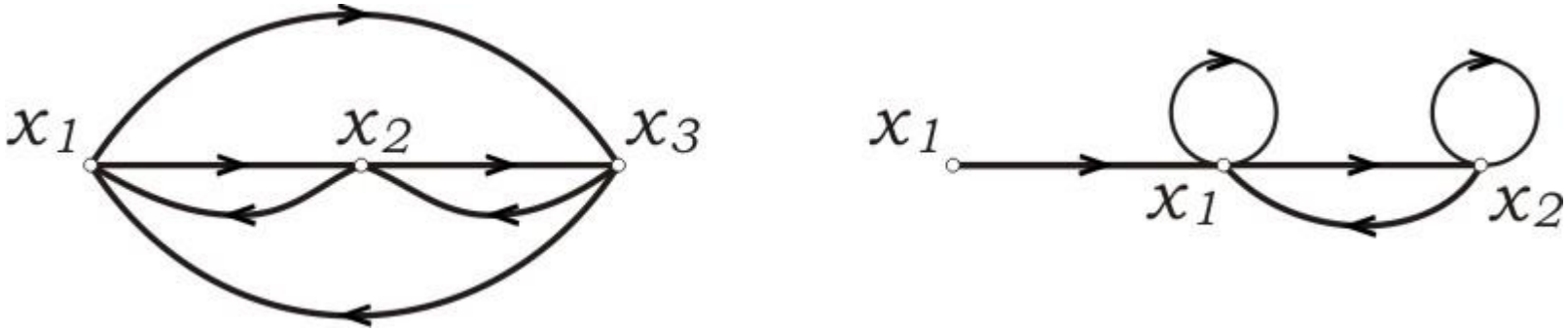


Рис. 4.1.1. К определению сигнального графа

1. Основные понятия и определения

Узлы обозначаются буквами, представляющими данную переменную, и цифрами, соответствующими порядковым номерам узлов (рис. 4.1.2*а*). Иногда, если это возможно, узел обозначается буквой с соответствующим индексом (рис.4.1.2*б*).



а б

Рис. 4.1.2. Структура сигнального графа

1. Основные понятия и определения

Характеристику ветви – называют также «передачей ветви» или просто «передачей». Обозначают, например, символом a_{ji} – ветвь начинается в *i*-м узле и заканчивается в *j*-м узле (рис. 4.1.3). Обозначение a_{ii} – ветвь начинается в узле (исходит из узла) *i* и кончается (входит в узел *i*) в узле *i*. Такая ветвь называется петлей.

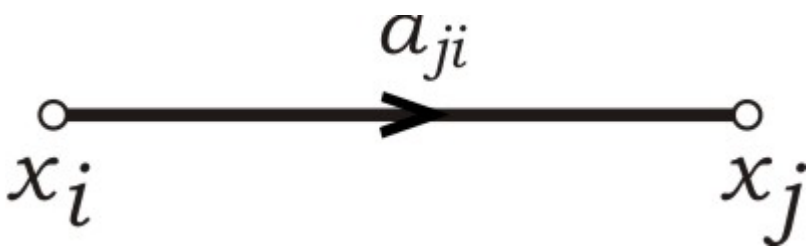


Рис. 4.1.3. Передача ветви сигнального графа

1. Основные понятия и определения

Узлы (вершины), имеющие только исходящие ветви, называются источниками (истоками), а только входящие – стоками; узлы, имеющие как исходящие, так и входящие ветви, называются смешанными.

Узлы-источники отображают независимые (свободные) переменные, а узлы-стоки и смешанные – зависимые переменные.

1. Основные понятия и определения

Правило построения сигнальных графов:

1. Сигналы передаются вдоль ветвей только в направлении их ориентации.
2. Сигнал, проходящий вдоль какой-либо ветви, умножается на передачу этой ветви.
3. Сигнал, изображаемый каким – либо узлом, является суммой всех сигналов, только приходящих в этот узел.
4. Значение сигнала, изображаемого каким-либо узлом, передаётся по всем ветвям, выходящим из него.

1. Основные понятия и определения

Согласно правилу построения сигнального графа значение сигнала (зависимой переменной) в любом зависимом узле, например, в узле k , определяется формулой:

$$x_k = \sum_{i=1}^{N} a_{ki} x_i, \qquad (4.1.1)$$

где a_{ki} – передачи входящих в узел k ветвей, а N – число узлов графа.

Замечание: выходящие из узла k ветви не оказывают на переменную узла x_k никакого влияния.

1. Основные понятия и определения

Формула (4.1.1) иллюстрирована рис. 4.1.4.

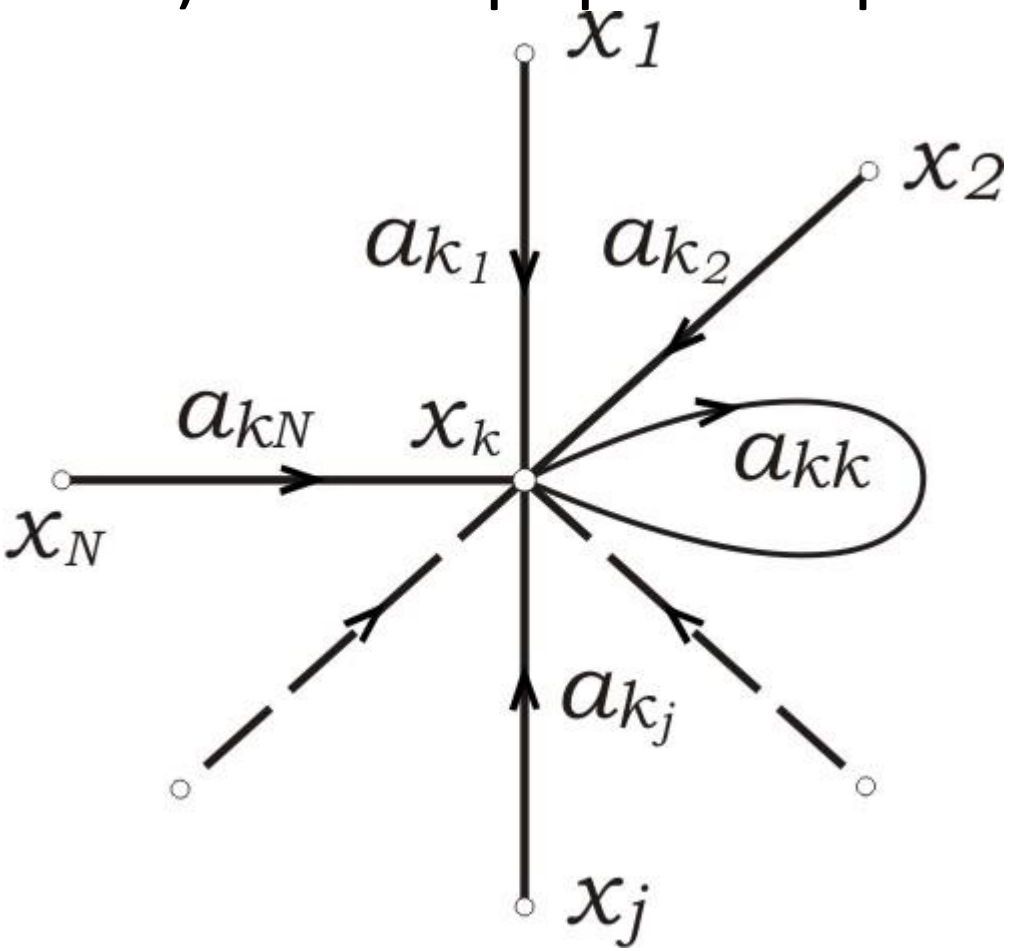


Рис. 4.1.4. К определению зависимого сигнала

1. Основные понятия и определения

Так как переменная в каждом узле определяется формулой (4.1.1), то граф соответствует (эквивалентен) системе линейных уравнений:

$$x_j = \sum_{i=1}^{N} a_{ji} x_i, \quad j = \overline{1, N}. \qquad (4.1.2)$$

Передачи ветвей a_{ji} графа можно представить в виде квадратной матрицы $\mathbf{A}$ размером $N \times N$, N – число узлов в символьном графе.

1. Основные понятия и определения

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots & a_{2N} \\ & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{ij} \dots & a_{iN} \\ & \dots & \\ a_{N1} & a_{N2} \dots a_{Nj} \dots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

Передачи к узлу *i* от всех узлов

Передачи от узла *j* ко всем узлам

1. Основные понятия и определения

Если все элементы строки матрицы $\mathbf{A}$ являются нулями, то соответствующий узел представляет собой узел-исток.

Если все элементы столбца матрицы $\mathbf{A}$ являются нулями, то соответствующий узел называют узлом-стоком.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Задача составления графа по заданной схеме (цепи) состоит из двух задач: составление системы уравнений и построение графа по данной системе. Составление системы уравнений можно исключить и строить граф непосредственно по схеме. При этом вместе с построением графа составляется и система уравнений в неявном виде. Метод, построения графа, при котором система уравнений записывается в явном виде, называется косвенным. Метод, при котором граф строится без предварительной записи системы уравнений, называется прямым. Для блок-схем граф строится всегда без записи системы уравнений.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Для предварительного формирования системы уравнений можно использовать любой из известных координатных базисов: базис узловых потенциалов, базис контурных токов, различные смешанные базисы и т.д. Предпочтение следует отдать базису узловых потенциалов, так как обобщенный метод узловых потенциалов, изучаемый в качестве базового, хорошо согласуется с другими методами анализа, в том числе и с методом сигнальных графов. Граф Мезона, который будет рассмотрен позже, построенный в базисе узловых потенциалов, проще и нагляднее в силу того, что узлы графа соответствуют узлам схемы.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Для построения сигнального графа по системе уравнений нужно определить множество его узлов и составить матрицу передач ветвей графа $\mathbf{A}$.

Замечание. По одной и той же системе линейных уравнений могут быть построены разные сигнальные графы, называемые равносильными.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Задана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1j}x_j + \ldots + b_{1n}x_n = f_1, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2j}x_j + \ldots + b_{2n}x_n = f_2, \\ \ldots \\ b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + b_{ij}x_j + \ldots + b_{in}x_n = f_i, \\ \ldots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nj}x_j + \ldots + b_{nn}x_n = f_n. \end{cases} \qquad (4.2.1)$$

Требуется по ней построить сигнальный граф.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

На поле предполагаемого графа наносятся N узлов, $N = n + r$, где $n -$ число уравнений (число переменных) системы, $r -$ число правых частей уравнений системы $f_i \neq 0$, не равных нулю. Каждому узлу сопоставляется одна переменная x или f . Переменным x соответствуют зависимые узлы, переменным f – независимые узлы – истоки. В однородных системах, т. е. при $f_i = 0$ для всех i узлы являются зависимыми.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Располагать узлы сигнального графа на поле чертежа и сопоставлять им переменные можно произвольно. Обычно, когда необходимо составлять матрицу $\mathbf{A}$, первым по порядку узлам условимся сопоставлять зависимые узлы, а оставшимся r узлам – независимые.

В противном случае следует исходить из удобства изображения и наглядности графа.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

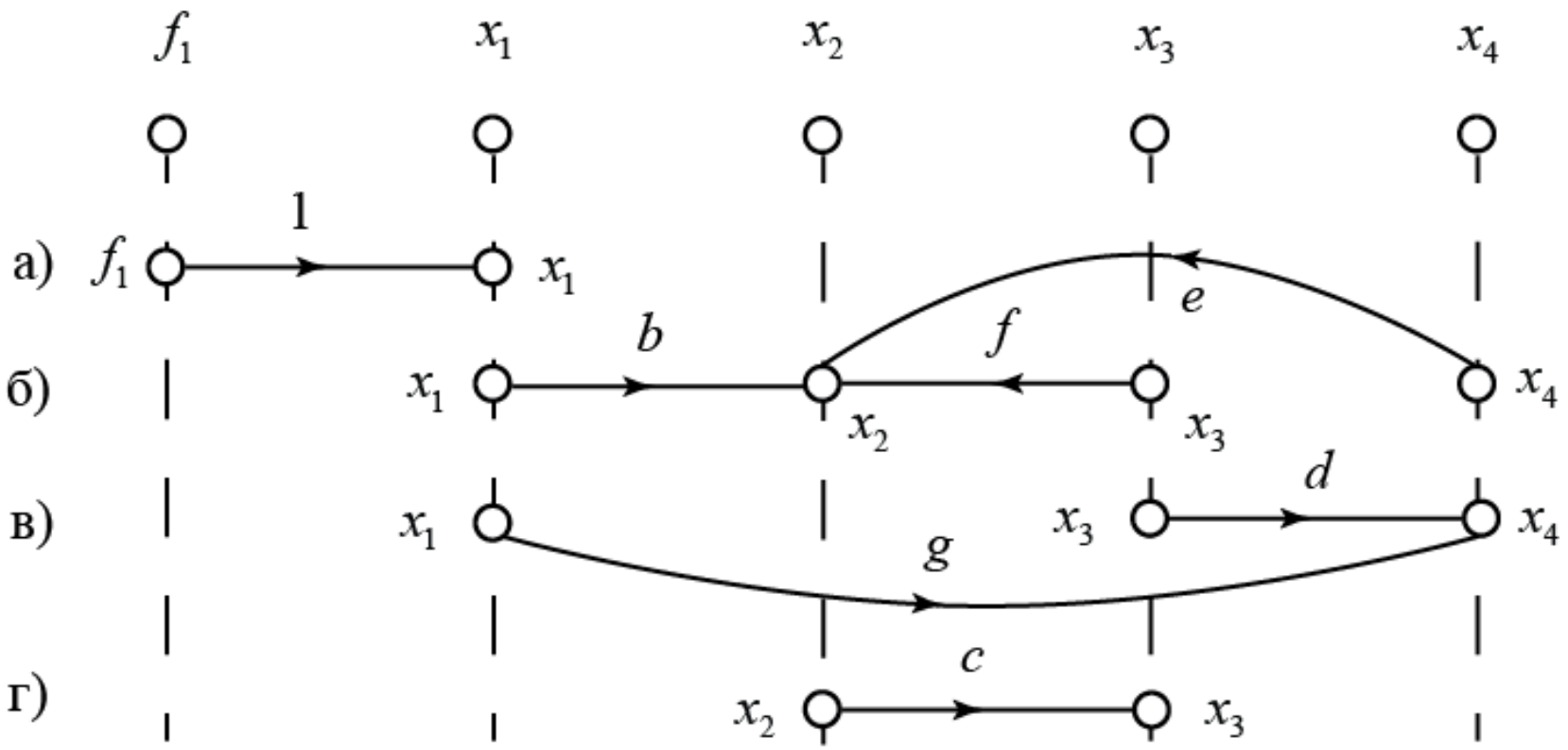


Рис. 4.1.5. Пример построения сигнального графа

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Передачи ветвей сигнального графа по заданной системе уравнений можно определить двумя основными способами, каждый из которых приводит к своему графу. Полученный первым способом граф называют нормализированным, а вторым – ненормализованным.

Графы, определенные первым и вторым способами, являются равносильными.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Построение нормализованного графа

Для построения нормализованного графа система (4.2.1) переписывается так, чтобы в каждом уравнении коэффициент при одной из переменных x был равен единице (нормализованная переменная). Далее необходимо нормализованную переменную выразить через все остальные переменные, перенося их в правую часть, то есть разрешить все уравнения относительно нормализованной переменной.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

$$
\begin{cases}
x_1 = -0 \cdot x_1 - \dfrac{b_{12}}{b_{11}} x_2 - \ldots - \dfrac{b_{1j}}{b_{11}} x_j - \ldots - \dfrac{b_{1n}}{b_{11}} x_n + \dfrac{1}{b_{11}} f_1, \\
x_2 = -\dfrac{b_{21}}{b_{22}} x_1 - 0 \cdot x_2 - \ldots - \dfrac{b_{2j}}{b_{22}} x_j - \ldots - \dfrac{b_{2n}}{b_{22}} x_n + \dfrac{1}{b_{22}} f_2, \\
\ldots \\
x_j = -\dfrac{b_{i1}}{b_{ij}} x_1 - \dfrac{b_{i2}}{b_{ij}} x_2 - \ldots - 0 \cdot x_j - \ldots - \dfrac{b_{in}}{b_{ij}} x_n + \dfrac{1}{b_{ij}} f_i, \\
\ldots \\
x_n = -\dfrac{b_{n1}}{b_{nn}} x_1 - \dfrac{b_{n2}}{b_{nn}} x_2 - \ldots - \dfrac{b_{nj}}{b_{nn}} x_j - \ldots - 0 \cdot x_n + \dfrac{1}{n} f_n.
\end{cases}
\qquad (4.2.2)
$$

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Слагаемые в выражении (4.2.2) являются составляющими x_j, а коэффициенты при переменных x и правой частью f – передачами ветвей матрицы $\mathbf{A}$. Так как каждое уравнение может быть нормализовано относительно любой переменной, то: для одной и той же системы уравнений можно построить различные нормализованные графы, но они будут равносильными.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Таким образом, в правой части каждого из уравнений системы (4.2.2) не имеется слагаемого, содержащего переменную, представленную в левой части этого уравнения, т. е. эта система записывается в виде:

$$x_j = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{N} a_{ji} x_i \quad (4.2.3).$$

Сигнальный граф не имеет петель при узлах, так как элементы главной диагонали матрицы передач равны нулю.

Такой граф называется нормализованным.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Элементы матрицы передач нормализованного графа определяются следующим образом:

$$a_{ji} = -\frac{b_{ji}}{b_{jj}} \left(i \neq j\right) \left(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, n}\right);$$

$$a_{jj} = 0,\ a_{j(n+k)} = 0\ \left(k \neq j\right)\ \left(k = \overline{1, r}\right); \qquad (4.2.5)$$

$$a_{j(n+k)} = 1/b_{jj}\ \left(k = j\right).$$

Соединяя согласно матрице передач узлы на поле предполагаемого графа получаем нормализованный сигнальный граф.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Для однородной системы уравнений матрицу A можно составить непосредственно по матрице коэффициентов системы (4.2.1) при помощи равенства: $\mathrm{A} = \mathrm{DB} + 1_n$, (4.2.6)

где B – квадратная матрица коэффициентов системы (4.2.1); D – диагональная матрица, составленная из соответствующих и противоположных по знаку обратных элементов диагонали матрицы B; 1_n – единичная матрица порядка n.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Пример.

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \mathrm{D} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{a_{22}} \end{pmatrix}; 1_{n=2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для неоднородной системы уравнений формула, аналогичная (4.2.6), громоздка и неудобна для использования.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Построение ненормализованного графа

Если на формулу (4.2.1) не наложено ограничений формулы (4.2.3) (отсутствие петель в узлах), то каждая переменная x выражается через все переменные. Для этого прибавим к обеим частям каждого уравнения системы (4.2.1) по переменной $x_i, i = \overline{1, n}$ и разрешим их относительно x_i. Это приведет к образованию петель с передачами $\left(b_{ii} + 1\right)$. Но передачи ветвей проще, чем в нормализованном графе.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Так как они являются коэффициентами системы уравнений (4.2.1). Каждая переменная x_i выражается через все переменные.

$$\begin{cases} x_1 = (b_{11}+1)x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1j}x_j + \ldots + b_{1n}x_n - f_1, \\ x_2 = b_{21}x_1 + (b_{22}+1)x_2 + \ldots + b_{2j}x_j + \ldots + b_{2n}x_n - f_2, \\ \qquad \ldots \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nj}x_j + \ldots + (b_{nn}+1)x_n - f_n. \end{cases}$$

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Перейдем к методу построения ненормализованного графа. Запишем систему уравнений (4.2.1) в матричной форме:

$$\mathrm{BX} = \mathrm{F}, \qquad (4.2.7)$$

B – квадратная матрица порядка n коэффициентов b; X – матрица-столбец переменных x, имеющая n элементов; F – матрица-столбец правых частей f, имеющая m первых элементов, отличных от нуля (условимся в верхних строках системы (4.2.1) записывать уравнения, у которых правые части не равны нулю).

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Для нахождения матрицы A нужно систему (4.2.7) решить относительно переменных x.

Для этого прибавим к обеим частям равенства (4.2.7) матрицу X: $\mathrm{BX}+\mathrm{X}=\mathrm{F}+\mathrm{X}.$

Выполнив элементарные преобразования, получим:

$$\mathrm{X}=\left(\mathrm{B}+1_n\right)\mathrm{X}-\mathrm{F}, \qquad (4.2.8)$$

$$\mathrm{X}=\left[\left(\mathrm{B}+1_n\right)\left(\frac{-1_m}{0_{(n-m)m}}\right)\right]\left[\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{F}^0}\right] \qquad (4.2.9)$$

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

В выражении (4.2.9) матрицы , входящие в выражение (4.2.8), играют роль элементов (субматриц) матрицы (4.2.9), а матрица F^0 имеет лишь элементы матрицы F , отличные от нуля. Уравнение (4.2.9) представляет собой матричную форму системы уравнений (4.2.1), разрешенных относительно каждой переменной x , причем эта переменная, как уже известно, выражена через все переменные x и правые части f .

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Следовательно, первая матрица в выражении (4.2.9) есть матрица передач A порядка $N = r + n$ столбцов и n строк. Для того чтобы сделать эту матрицу квадратной, нужно добавить r нулевых строк, соответствующих числу узлов-источников.

Таким образом, по заданной системе линейных уравнений можно сразу записать матрицу A:

$$\left[\left(\mathrm{B} + 1_n \right) \left(\frac{-1_m}{0_{(n-m)m}} \right) \right] \qquad (4.2.10)$$

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Для расчета электрических цепей, несмотря на более сложную свою структуру, ненормализо-ванные графы более предпочтительны, так как передачами ветвей, за исключением петель, являются коэффициенты системы уравнений (4.2.1). Это позволяет реализовать прямые методы построения графа по исходной схеме, минуя этап составления системы уравнений, описывающих цепь.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Рассмотренный метод построения нормализованного графа является единственно возможным. Для построения же ненормализованных графов можно предложить много методов. В заключение следует отметить, что наряду с рассматриваемыми сигнальными графами Мэзона распространение получили унисторные графы, графы Коутса и обобщенные графы Анисимова.

2. Построение сигнального графа по системе уравнений

Рассмотренный метод построения нормализованного графа является единственно возможным. Для построения же ненормализованных графов можно предложить много методов. В заключение следует отметить, что наряду с рассматриваемыми сигнальными графами Мэзона распространение получили унисторные графы, графы Коутса и обобщенные графы Анисимова.

Заключение

Тема и вопросы следующего занятия

Построение сигнальных графов

1. Построение нормализованных графов
2. Построение ненормализованных графов