Направленные графы

Лекция 5 (3)

Цель занятия

Изучить применение теории графов и линейной алгебры в формировании матриц

Вопросы занятия

5. Основные зависимости между переменными ветвей
6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

5. Основные зависимости между переменными ветвей

Для связной схемы с ***b*** ветвями и ***n*** узлами выберем дерево ***T*** и разделим матрицы инциденций **A**, главных контуров **B** и главных сечений **D** следующим образом:

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_T \vdots \mathbf{A}_L\right],$$

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{B}_T \vdots \mathbf{1}_\mu\right],$$

$$\mathbf{D} = \left[\mathbf{1}_\rho \vdots \mathbf{D}_L\right],$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_T \\ \cdots \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_T \\ \cdots \\ \mathbf{i}_L \end{bmatrix},$$

где индексы: ***T*** —дерево, ***L*** — связь, $\rho = n - 1,$

$\mu = b - n + 1.$

5. Основные зависимости между переменными ветвей

Найдем зависимости для определения напряжений ветвей связей через напряжения ветвей дерева. Для этого используем топологическую форму второго закона Кирхгофа (3.8): $\mathbf{Bu} = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{Bu} = \left[\mathbf{B}_T \vdots \mathbf{1}_\mu\right]\begin{bmatrix}\mathbf{u}_T \\ \cdots \\ \mathbf{u}_L\end{bmatrix} = \mathbf{B}_T\mathbf{u}_T + \mathbf{u}_L = \mathbf{0}. \qquad (3.15)$$

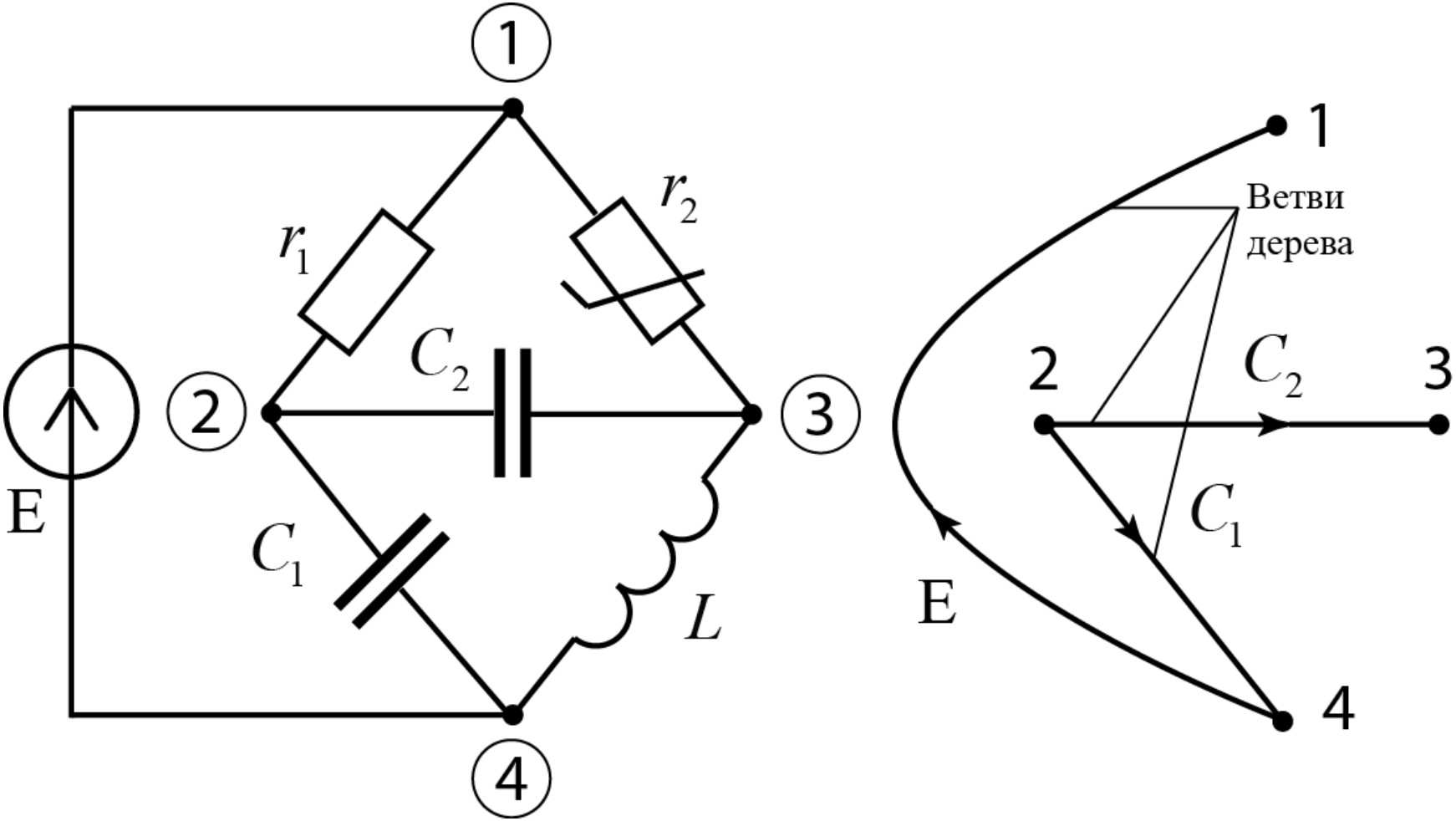
$$\mathbf{u}_L = -\mathbf{B}_T\mathbf{u}_T. \qquad (3.16)$$

5. Основные зависимости между переменными ветвей

Так как в формуле (3.16) напряжения ветвей дерева $\mathbf{u}_T$ выступают в качестве независимых переменных, через которые определяются напряжения ветвей связей $\mathbf{u}_L$, то **в дерево графа нужно в первую очередь включать ветви, содержащие независимые источники напряжения и конденсаторы**. Конденсаторы нередко представляются эквивалентными им источниками ЭДС с напряжением, определяемым из начальных условий.

5. Основные зависимости между переменными ветвей

Что мы и сделали в рассматриваемом нами примере (рис. 3.1а слева, 3.2б справа):



5. Основные зависимости между переменными ветвей

Теперь найдем зависимости для определения токов ветвей дерева через токи связей. Для этого используем систему уравнений первого закона Кирхгофа в более общей форме (3.12):

$$\mathbf{Di} = \mathbf{0},\ \ \mathbf{Di} = \left[\mathbf{1}_{\rho} \vdots \mathbf{D}_L\right]\begin{bmatrix}\mathbf{i}_T \\ \cdots \\ \mathbf{i}_L\end{bmatrix} = \mathbf{i}_T + \mathbf{D}_L\mathbf{i}_L = \mathbf{0}. \qquad (3.17)$$

$$\mathbf{i}_T = -\mathbf{D}_L\mathbf{i}_L. \qquad (3.18)$$

5. Основные зависимости между переменными ветвей

Так как в формуле (3.18) при расчете токов ветвей дерева $\mathbf{i}_T$ токи ветвей связей $\mathbf{i}_L$ выступают как независимые переменные, то **в дополнение к дереву графа нужно включать ветви, содержащие независимые источники тока**. Индуктивность часто представляется эквивалентным ей источником тока с силой тока, определяемой из начальных условий. Поэтому **ветвь с индуктивностью целесообразно иметь в графе как ветвь связи**.

5. Основные зависимости между переменными ветвей

Матрицы $\mathbf{B}_T$ и $\mathbf{D}_T$ связаны, исходя из следствий теоремы 3.3 (3.14), следующим соотношением:

$$\mathbf{DB}^t = \left[\mathbf{1}_\rho \vdots \mathbf{D}_L\right]\left[\mathbf{B}_T \vdots \mathbf{1}_\mu\right]^t = \left[\mathbf{1}_\rho \vdots \mathbf{D}_L\right]\begin{bmatrix}\mathbf{B}_T^t \\ \cdots \\ \mathbf{1}_\mu\end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{B}_T^t + \mathbf{D}_L = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{D}_L = -\mathbf{B}_T^t, \ \mathbf{B}_T = -\mathbf{D}_T^t. \qquad (3.19)$$

5. Основные зависимости между переменными ветвей

Остановимся еще на одной зависимости, которая предоставляет возможность использовать матрицу инциденций $\mathbf{A}$. Рассмотрим связную схему и соответствующий ей граф Gd с n узлами. Выберем в качестве опорного узел n. Тогда имеется $n-1$ напряжений узел-опорный узел. Выразим их вектор-столбцом:

$$\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \dots \\ v_{(n-1)n} \end{bmatrix}.$$

5. Основные зависимости между переменными ветвей

Пусть матрица $\mathbf{A}$ является редуцированной матрицей инциденций, $n-1$ строк которой соответствуют узлам 1, 2, …, $n-1$. Опорный узел в $\mathbf{A}$ отсутствует, так как в полной матрице инциденций $\mathbf{A}_a$ вычеркнута строка с номером n, соответствующая этому базовому узлу. При таком условии напряжения ветвей соответствуют напряжениям между узлами и опорным узлом в явном виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^t \mathbf{v}_n. \qquad (3.20)$$

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

Если в схеме b ветвей, то составляются $b-n+1$ независимых уравнений по ЗНК. При этом для составления уравнений в схеме должны быть предварительно найдены независимые замкнутые контуры. Именно поиск таких независимых контуров и составляет относительную трудность построения полной системы уравнений по ЗНК для цепи со сложной конфигурацией (топологией).

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

Рассмотрим алгоритм, который позволяет упростить получение топологических уравнений. Алгоритм имеет два этапа:

1. Формирование по исходным данным матрицы инциденций (структурной матрицы).

2. Преобразование матрицы инциденций для получения матрицы главных сечений $\mathbf{D}$.

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

Рассмотрим оба этапа формирования матрицы главных сечений на примере схемы цепи:

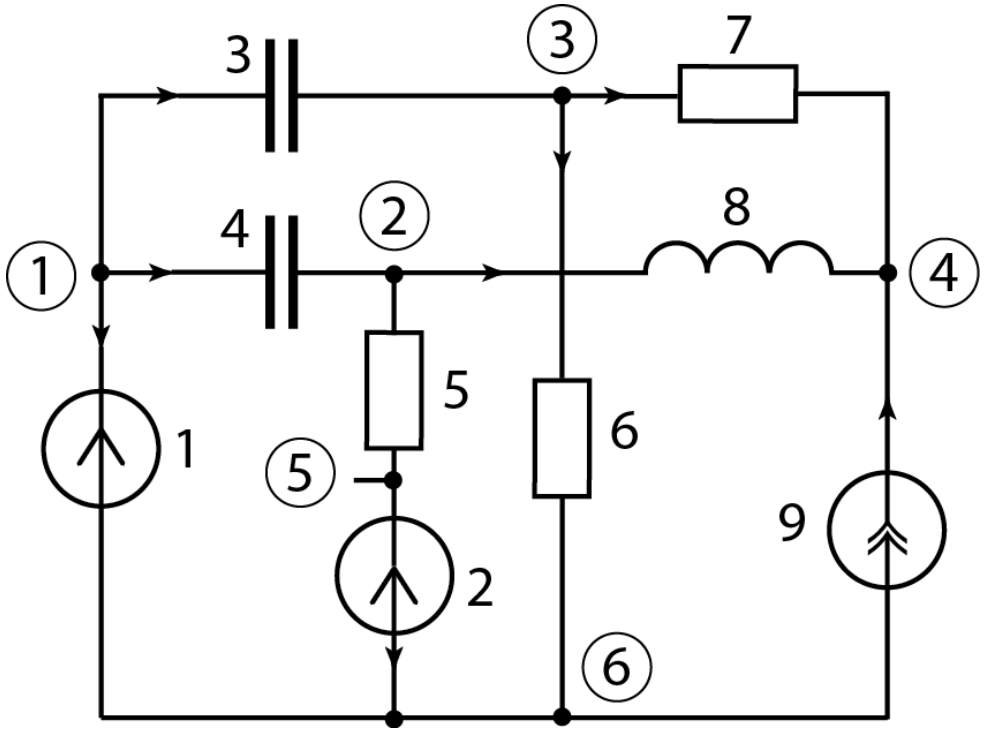


Рис. 3.8. Схема цепи

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

Формирование матрицы инциденций

1. Нумерация узлов (см. рис. 3.8).
2. Нумерация ветвей (см. рис. 3.8).
3. Выбор направлений тока в элементах схемы (см. рис. 3.8).
4. Построение направленного графа схемы.
5. Построение матрицы инциденций (структурной матрицы).

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

4) Направленный граф схемы:

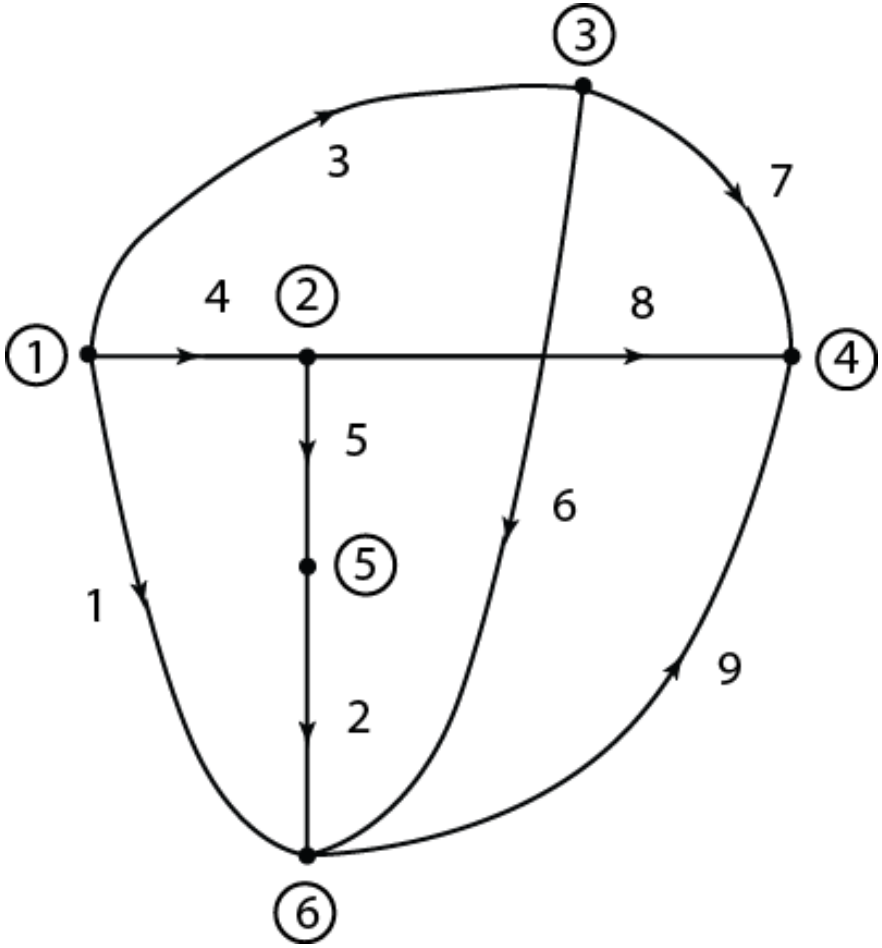


Рис. 3.9. Граф схемы цепи

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

5) Редуцированная матрица инциденций (вычеркнута последняя строка):

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \text{Узлы} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \text{Ветви} \\ \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

Преобразование матрицы инциденций

1) задается $j = 1$;

2) исключаются из просмотра первые $(j-1)$ строк и $(j-1)$ столбцов и просматривается остальная часть матрицы по столбцам до нахождения первого ненулевого элемента a_{ik};

3) если $k \neq j$, то $k-$й столбец ставится на $j-$ е место, столбцы от $j-$ го до $(k-1)-$ го сдвигаются вправо;

4) если $i > j$, то меняются местами $i-$я и $j-$ я строки;

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

Преобразование матрицы инциденций

5) Если $a_{jj} = -1$, то меняются на обратные знаки элементов $j-$ й строки;

6) если в $j-$м столбце кроме элемента a_{ji} имеются дополнительные ненулевые элементы, то от них избавляются прибавлением (или вычитанием) $j-$й строки к строкам этих элементов;

7) задается $j = j+1$. Если $j \le n-1$, то переход к шагу 2, в противном случае $b-(n-1)$ правых столбцов матрицы есть искомая матрица главных сечений $\mathbf{D}$.

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

$j = 1$. На первом шаге преобразований нет, так как $a_{11} = 1$.

$j = 2$. Рассматриваем матрицу без первой строки и первого столбца. Просматриваем второй столбец сверху вниз. Находим первый ненулевой элемент $a_{52}\left(i = 5,\ k = 2\right)$.

Узлы	Ветви 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	–1	1	0	0	1	0
3	0	0	–1	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	–1	–1	–1
5	0	**1**	0	0	–1	0	0	0	0

Поменять местами

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

Анализируем: 3) $k = 2 = j = 2$ – перестановки столбцов нет; 4) $i = 5 > j = 2$ – меняем местами вторую и пятую строки; 5) $a_{52} = 1$ – знаки на обратные не меняем; 6) элементов второго столбца, равных 1, нет, поэтому нет вычитания (сложения).

Узлы	Ветви 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	–1	0	0	0	0
3	0	0	–1	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	–1	–1	–1
5	0	0	0	–1	1	0	0	1	0

Поменяли местами

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

$j = 3$. Рассматриваем матрицу без двух верхних строк и двух левых столбцов. Находим первый ненулевой элемент a_{33} $(i = 3, k = 3)$.

Узлы	Ветви 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	–1	0	0	0	0
3	0	0	**–1**	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	–1	–1	–1
5	0	0	0	–1	1	0	0	1	0

Поменять знаки

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

Анализируем: 3) $k = 3 = j = 3$ – перестановки столбцов нет; 4) $i = 3 = j = 3$ – строки местами не меняем; 5) $a_{33} = -1$ – меняем у элементов третьей строки знаки на обратные; 6) $a_{13} = 1$ – вычитаем поэлементно из первой строки третью – результат в первую строку.

Узлы	Ветви 1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	Результат вычитания
2	0	1	0	0	–1	0	0	0	0	
3	0	0	1	0	0	–1	–1	0	0	Поменяли знаки
4	0	0	0	0	0	0	–1	–1	–1	
5	0	0	0	–1	1	0	0	1	0	

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

$j = 4$. Рассматриваем матрицу без трех верхних строк и трех левых столбцов. Находим первый ненулевой элемент a_{54} $(i = 5, k = 4)$.

Узлы	Ветви 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
2	0	1	0	0	–1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	–1	–1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	–1	–1	–1
5	0	0	0	**–1**	1	0	0	1	0

Меняем знаки

Меняем местами

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

Анализируем: 3) $k = 4 = j = 4$ – перестановки столбцов нет; 4) $i = 5 > j = 4$ – меняем местами четвертую и пятую строки; 5) $a_{54} = -1$ – меняем у элементов четвертой строки знаки на обратные; 6) $a_{14} = 1$ – вычитаем из строки 1 строку 4 – результат в строку 1.

Узлы	Ветви 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
2	0	1	0	0	–1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	–1	–1	0	0
4	0	0	0	1	–1	0	0	–1	0
5	0	0	0	0	0	0	–1	–1	–1

6) Результат вычитания

5) Поменяли знаки

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

$j = 5$. Рассматриваем матрицу без четырех верхних строк и четырех левых столбцов. Находим первый ненулевой элемент a_{57} $(i = 5, k = 7)$.

Узлы	Ветви 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	–1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	1	–1	0	0	–1	0
5	0	0	0	0	0	0	–1	–1	–1

3) Поменять местами

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

Анализируем: 3) $k = 7 \neq j = 5$ – ставим на место столбца 5 столбец 7, а столбцы 5 и 6 сдвигаем вправо;

4) $i = 5 = j = 5$ – строки местами не меняем;

Узлы	Ветви 1	2	3	4	7	5	6	8	9
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
2	0	1	0	0	0	–1	0	0	0
3	0	0	1	0	–1	0	–1	0	0
4	0	0	0	1	0	–1	0	–1	0
5	0	0	0	0	–1	0	0	–1	–1

3) Поменяли местами

Сдвинули вправо

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

5) $a_{57} = -1$ – меняем у элементов пятой строки знаки на обратные;

Узлы	Ветви 1	2	3	4	7	5	6	8	9	
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	
2	0	1	0	0	0	–1	0	0	0	
3	0	0	1	0	–1	0	–1	0	0	
4	0	0	0	1	0	–1	0	–1	0	
5	0	0	0	0	1	0	0	1	1	— Поменяли знаки

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

6) $a_{17} = 1$ – вычитаем поэлементно из строки 1 строку 5 – результаты в строку 1; $a_{37} = -1$ – прибавляем поэлементно к строке 3 строку 5 – результаты записывем в строку 3;

Узлы	Ветви					Хорды				
	1	2	3	4	7	5	6	8	9	
1	1	0	0	0	0	1	1	0	–1	Результаты вычитания
2	0	1	0	0	0	–1	0	0	0	
3	0	0	1	0	0	0	–1	1	1	Результаты сложения
4	0	0	0	1	0	–1	0	–1	0	
5	0	0	0	0	1	0	0	1	1	

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

$j = 6 > n = 5$. Алгоритм заканчивает работу. Левая часть до второй сплошной линии – единичная матрица. Правая часть – искомая матрица главных сечений.

Узлы	Ветви					Хорды			
	1	2	3	4	7	5	6	8	9
1	1	0	0	0	0	1	1	0	–1
2	0	1	0	0	0	–1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	–1	1	1
4	0	0	0	1	0	–1	0	–1	0
5	0	0	0	0	1	0	0	1	1
	Единичная матрица					Матрица главных сечений			

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений

Представим матрицу главных сечений в следующем виде.

Ветви	Хорды 5	6	8	9
1	1	1	0	–1
2	–1	0	0	0
3	0	–1	1	1
4	–1	0	–1	0
7	0	0	1	1

Заключение

Тема следующей лекции

Сигнальные графы

Вопросы лекции

1. Основные понятия и определения
2. Методы построения сигнального графа по системе уравнений