# Направленные графы

## Лекция 4 (2)

# Цель занятия

**Изучить определения и методы построения матриц контуров и матриц сечений.**

# Вопросы занятия

3. Матрица контуров.
4. Матрица сечений.

# 3. Матрица контуров

Матрица контуров позволяет выразить уравнения ЗНК в виде единственного матричного уравнения.

Для получения матрицы контуров каждому контуру в направленном графе Gd задаётся ориентация.

# 3. Матрица контуров

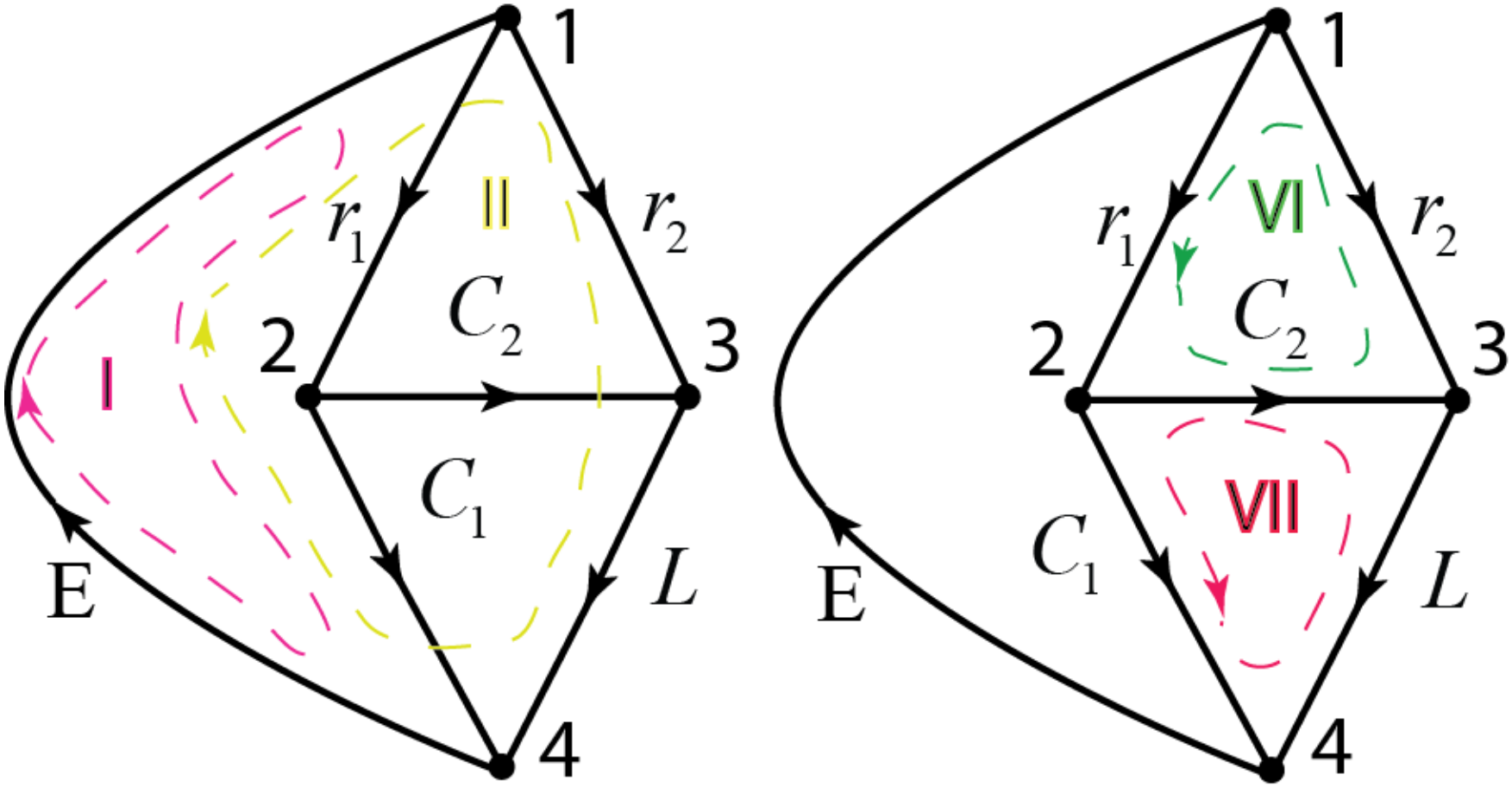



Рис. 3.5. Примеры контуров I, II, VI, VII для графа на рис. 3.1б

# 3. Матрица контуров

Для направленного графа Gd, имеющего $b$ ветвей и $n_b$ ориентированных контуров матрица контуров будет $n_b \times b$ матрицей

$$\mathbf{B}_a = \left[ b_{ij} \right],$$

$b_{ij} = 1$, если ветвь $j$ входит в контур $i$ и их направления одинаковые;

$b_{ij} = -1$, если ветвь $j$ входит в контур $i$ и их направления противоположные;

$b_{ij} = 0$, если ветвь $j$ не входит в контур $i$ ;

# 3. Матрица контуров

**Матрица контуров графа на рис. 3.1б.**

$$
\begin{array}{c|c|c}
\text{контуры} & \begin{matrix} E & C1 & C2 & r1 & r2 & L \end{matrix} & \text{ветви в контурах} \\
\mathbf{B}_a = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} EC1r1 \\ Er2L \\ EC1C2r2 \\ EC2r1L \\ C1r1r2L \\ C2r1r2 \\ C2C1L \end{matrix}
\end{array}.
$$

# 3. Матрица контуров

Помним, что ЗНК устанавливает, что алгебраическая сумма напряжений в каждом контуре любой сложной схемы всегда равна нулю. Если выразить напряжения ветвей через $b \times 1$ **столбцовый вектор** ***u*** так, что строки ***u*** имеют тот же порядок, что и столбцы матрицы $\mathbf{B}_a$, ЗНК применительно ко всем контурам может быть записан следующим выражением:

$$\mathbf{B}_a \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

**В скалярной форме уравнение для нашего примера даёт набор из семи уравнений**.

# 3. Матрица контуров

Однако при анализе схем не нужны все уравнения. Нужны только независимые уравнения.

Поэтому наиболее часто употребляется субматрица (подматрица) от матрицы $\mathbf{B}_a$, состоящая из максимального числа независимых строк матрицы $\mathbf{B}_a$, которая называется **основной матрицей контуров** и обозначается $\mathbf{B}_b$.

# 3. Матрица контуров

Для связного графа Gd с ***b*** ветвями и ***n*** узлами $\mathbf{B}_b$ имеет $b-n+1$ строк. Известно, что по этой формуле определяется число линейно независимых контурных уравнений в цепи.

Поэтому $b-n+1$ независимых уравнений ЗНК могут быть выражены так:

$$\mathbf{B}_b\mathbf{u}=\mathbf{0}.$$

# 3. Матрица контуров

**Для связных планарных схем матрица $\mathbf{B}_b$ может быть легко построена, если выбрать $b-n+1$ контуров в виде ячеек сетки или «окон».**

**Для не планарных схем этот метод неприемлем.**

# 3. Матрица контуров

**Метод построения основной матрицы контуров использует дерево Т**. Каждая ветвь дополнения к дереву **Тс** (**ветвь связи**) особым путем через дерево **Т** образует главный контур для этой ветви связи относительно выбранного дерева **Т**. **Ориентация контура выбирается так, чтобы соответствовать направлению хорды.**

# 3. Матрица контуров

Для связного графа Gd с $n$ узлами и $b$ ветвями имеются $b-n+1$ ветвей связей и, значит, $b-n+1$ главных контуров. Субматрица от $\mathbf{B}_a$, построенная с использованием этих главных контуров, называется **матрицей главных контуров** и обозначается $\mathbf{B}$.

# 3. Матрица контуров

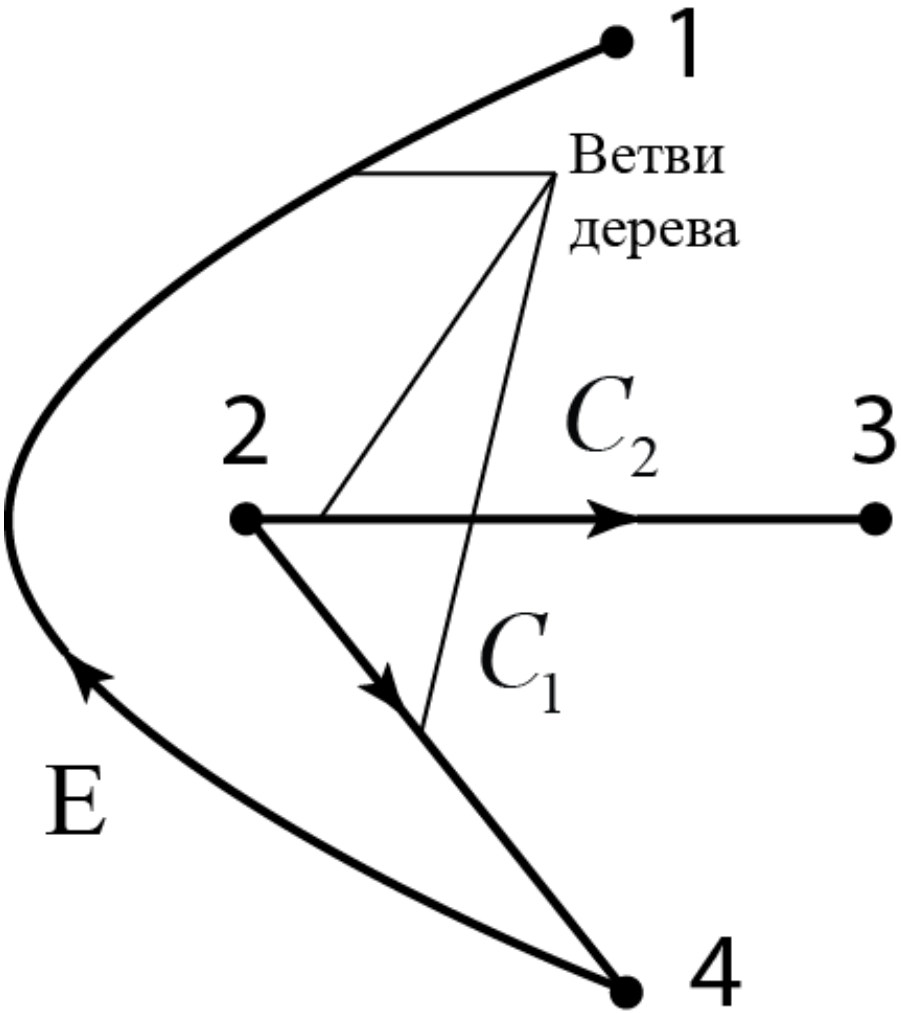



Рис. 3.2. Пример дерева

# 3. Матрица контуров

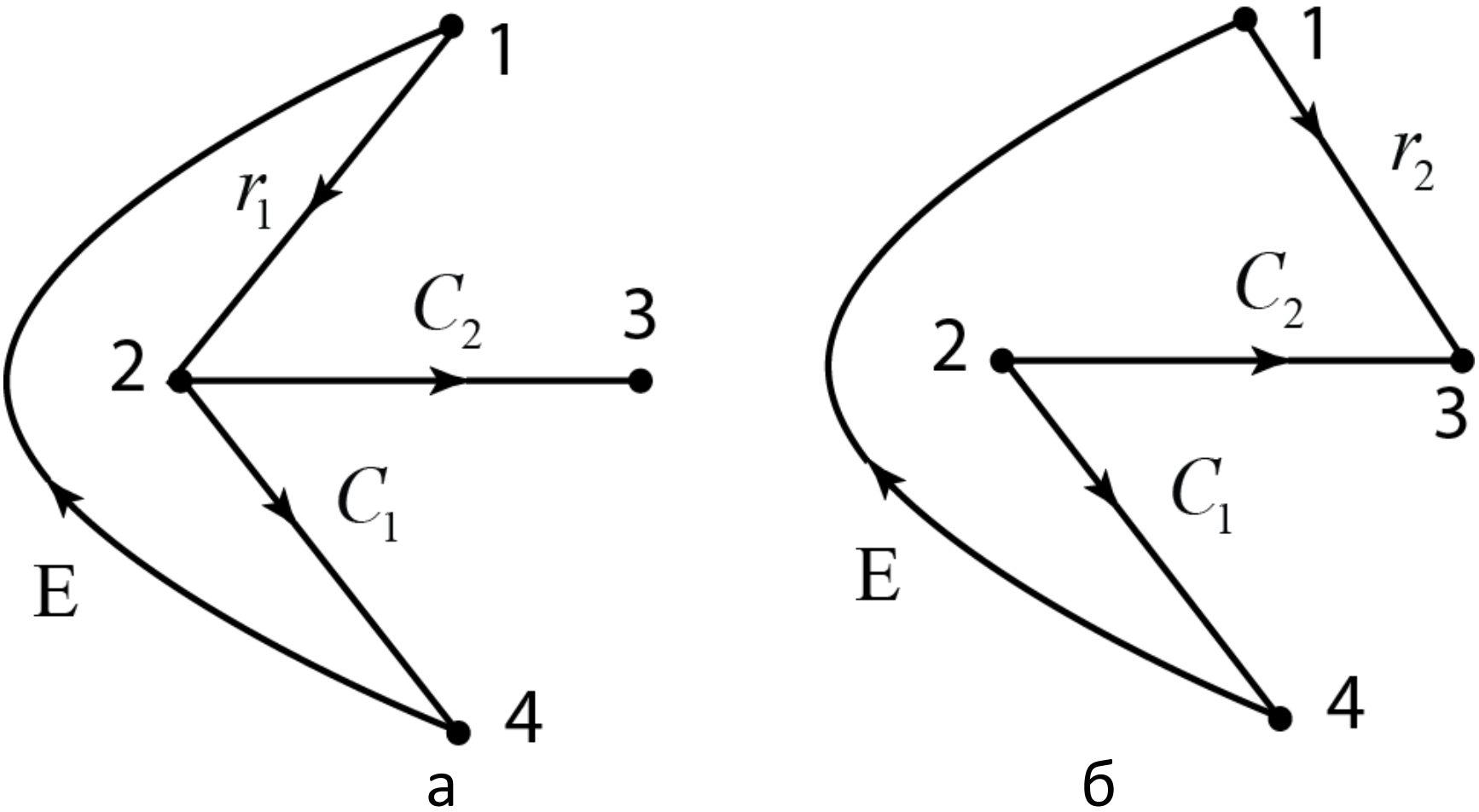



Рис. 3.5. Пример образования главных контуров: а) добавлена ветвь $r_1$; б) добавлена ветвь $r_2$.

# 3. Матрица контуров

При проведении операций с матрицами необходимо сохранять для различных матриц одинаковую последовательность следования столбцов.

**Сначала располагаются столбцы, соответствующие ветвям дерева, и затем столбцы, соответствующие ветвям связей.**

# 3. Матрица контуров

Например, для графа на рис. 3.1б, при выборе дерева Т, состоящего из ветвей Е, С1, С2 (рис. 3.3), матрица главных контуров будет иметь вид:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} E & C1 & C2 & r1 & r2 & L \end{array} \\ \mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \end{array}$$

# 3. Матрица контуров

Очевидно, что любая матрица может быть разделена следующим образом:

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{B}_T \vdots 1\right],$$

где столбцы $\mathbf{B}_T$ соответствуют ветвям дерева, а столбцы единичной матрицы $\mathbf{1}$ порядка $b - n + 1$ соответствуют связям. Из наличия $\mathbf{1}$ следует, что строки матрицы главных контуров $\mathbf{B}$ линейно независимы.

# 3. Матрица контуров

Максимальное количество линейно независимых уравнений электрического равновесия записывается матричным уравнением

$$\mathbf{Bu} = \mathbf{0},$$

которое является **вторым законом Кирхгофа, записанным в топологической форме**.

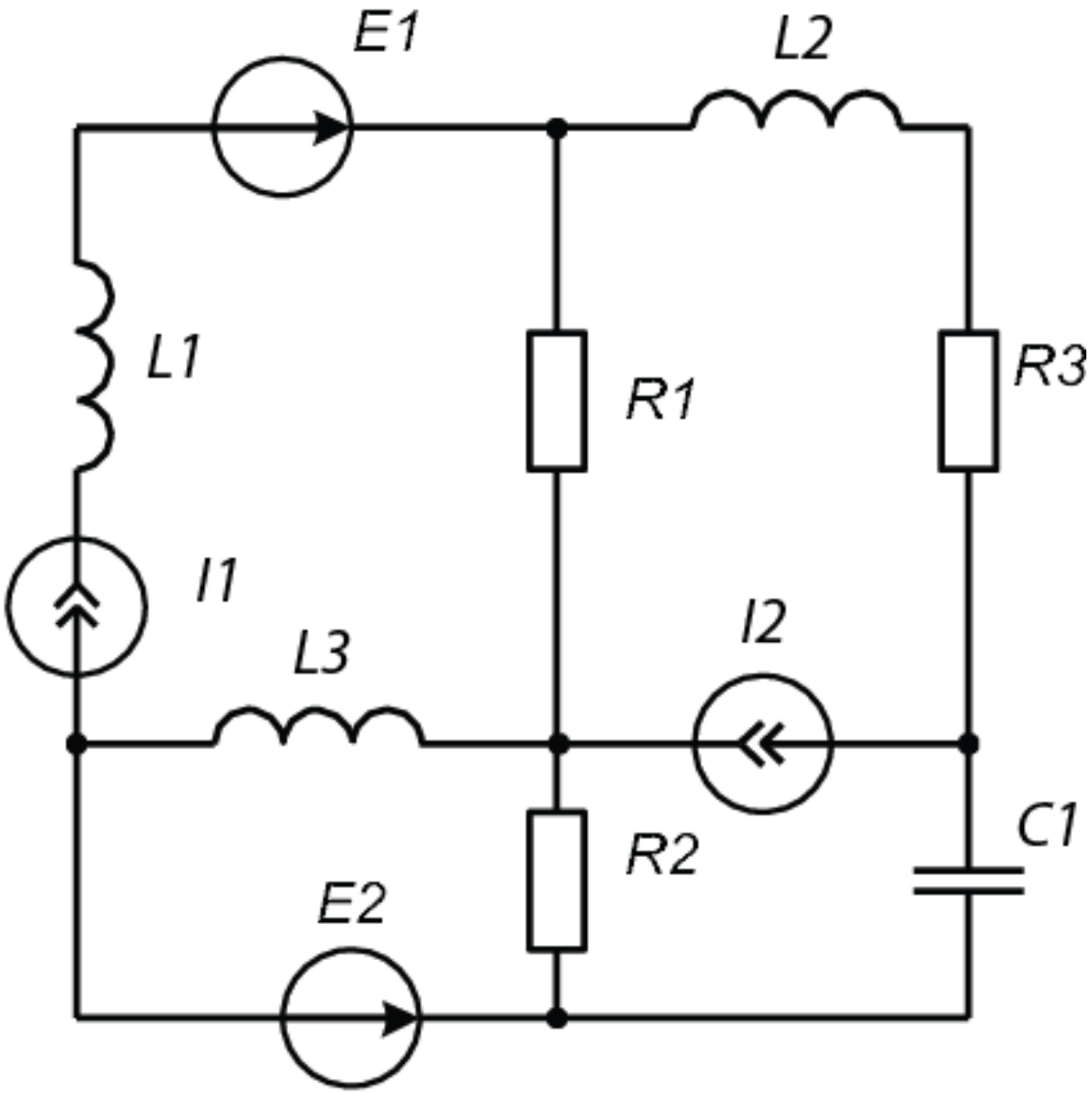
# 3. Матрица контуров

**Примеры. Для данных схем:**

1) **пронумеровать узлы;**
2) **пронумеровать ветви;**
3) **определить деревья;**
4) **построить матрицы главных контуров.**

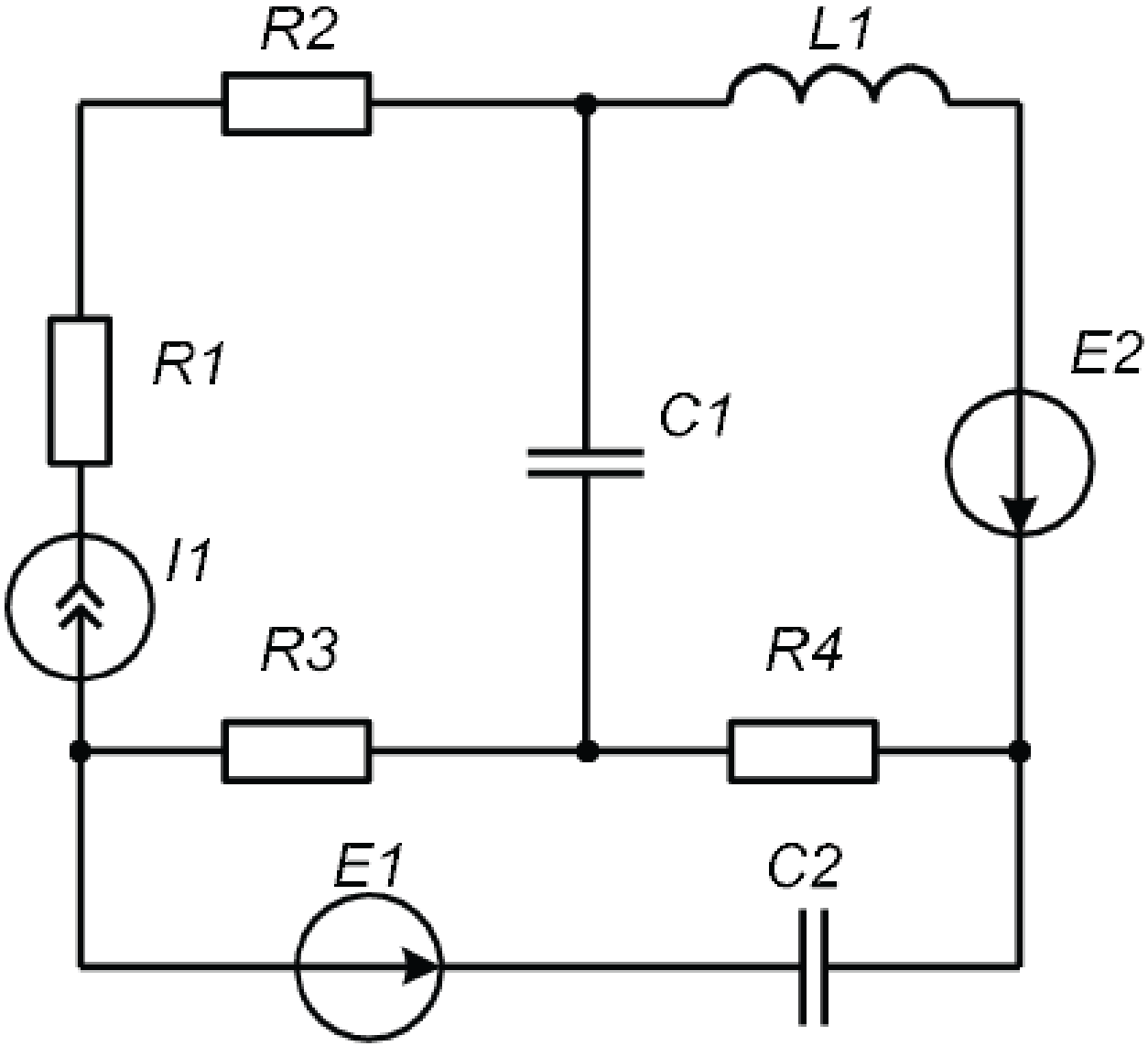
# 3. Матрица контуров

**Пример 1**.



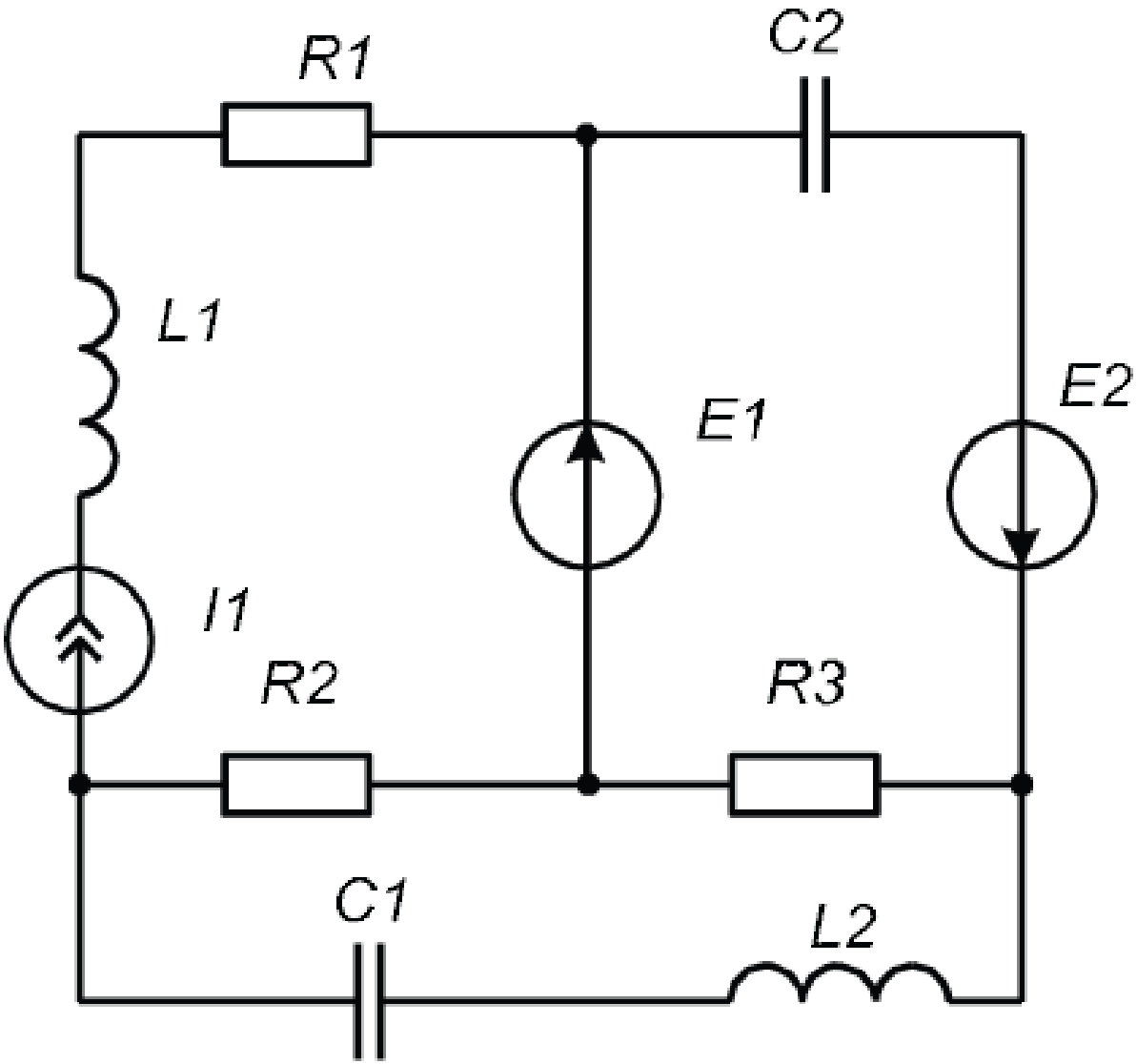
# 3. Матрица контуров

**Пример 2.**



# 3. Матрица контуров

**Пример 3.**



# 4. Матрица сечений

Первый закон Кирхгофа формулируется так: алгебраическая сумма токов, входящих в любой узел схемы и исходящих из него, всегда равна нулю. **Более общая форма ЗТК гласит, что алгебраическая сумма всех токов через сечение всегда равна нулю.**

**Вторая форма ЗТК является более общей, потому что сечение может охватывать все ветви, сходящиеся в узле, а может и не охватывать**.

# 4. Матрица сечений

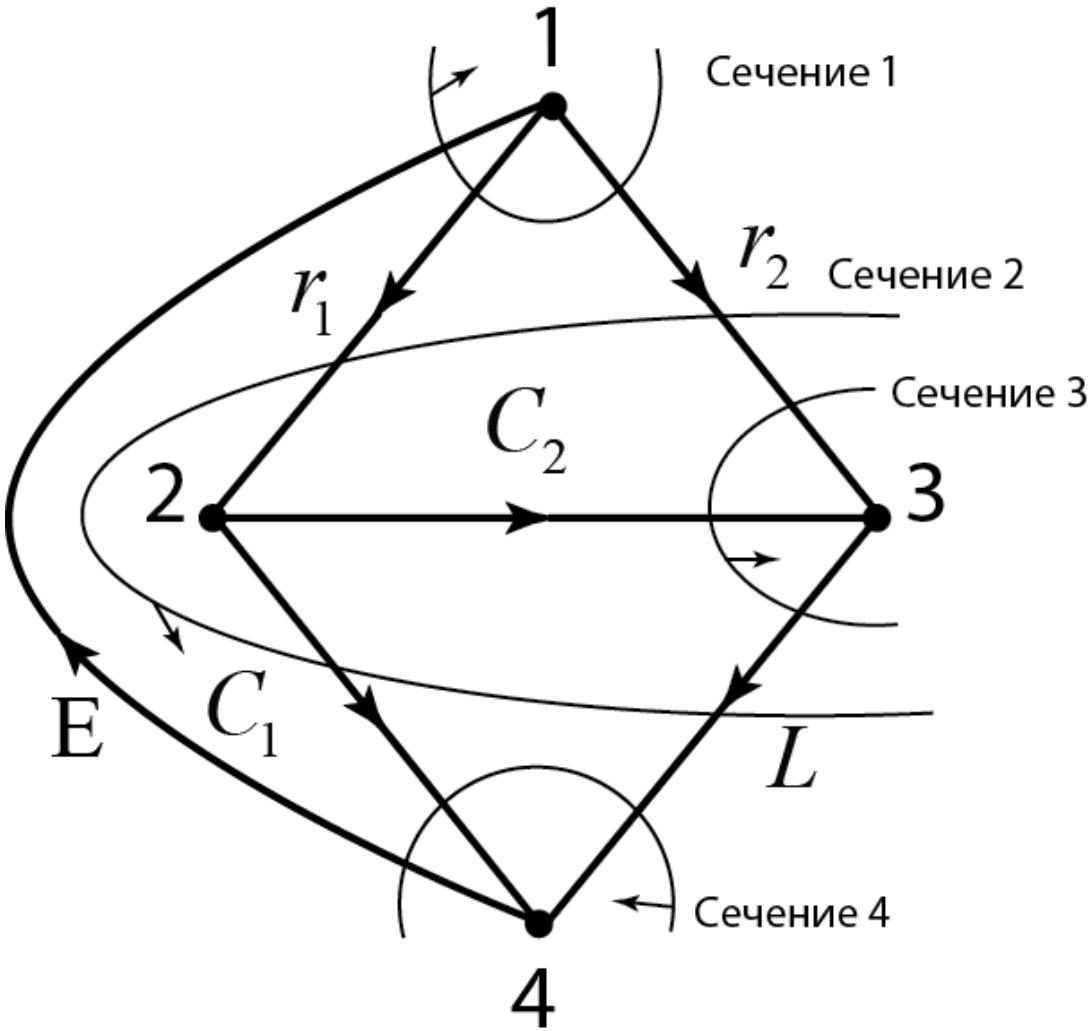



Рис. 3.7. Пример для построения матрицы сечений направленного графа

# 4. Матрица сечений

**Обычно ЗКТ формулируется относительно узлов, но его можно формулировать и относительно главных сечений.** На основании принципа нейтральности заряда в любой части схемы количество заряда, втекающего внутрь выделенной сечением части схемы за некоторое время, равно количеству заряда, вытекающего из этой области за то же время.

Иначе, **алгебраическая сумма токов относительно сечения равна нулю**.

Придерживаясь такой формулировки ЗКТ, получаем следующую систему уравнений для сечений на рис. 3.7.

# 4. Матрица сечений

Для сечений на рис. 3.7 согласно общему ЗТК запишем:

- **сечение 1:** $i_E - i_{r_1} - i_{r_2} = 0;$
- **сечение 2:** $-i_{C_1} + i_{r_1} + i_{r_2} - i_L = 0;$
- **сечение 3:** $i_{C_2} + i_{r_2} - i_L = 0;$
- **сечение 4**: $-i_E + i_{C_1} + i_L = 0.$

Уравнения ЗТК для сечений 1, 3, 4 соответствуют узлам 1, 3, 4, а для сечения 2 уравнение не охватывает все ветви, сходящиеся в узле 2, то есть не является результатом применения ЗТК к какому-либо одному узлу.

# 4. Матрица сечений

Пусть в графе Gd имеется $n_c$ сечений. Тогда для направленного графа Gd с $b$ ветвями и $n_c$ ориентированными сечениями матрицей сечений является матрица $n_c \times b$ следующего вида: $\mathbf{D}_a = \left[ d_{ij} \right]$, где

$d_{ij} = 1$, если ветвь *j* находится в сечении *i* и их ориентации совпадают;

$d_{ij} = -1$, если ветвь *j* находится в сечении *i* и их ориентации противоположны;

$d_{ij} = 0$, если ветвь *j* не находится в сечении *i*.

# 4. Матрица сечений

Число сечений в графе может быть большим. Но известно, что согласно первому закону Кирхгофа число линейно независимых уравнений для цепи равно $n-1$ ( $n$ - число узлов). Поэтому можно предположить, что матрица сечений $\mathbf{D}_a$ будет иметь избыточную информацию о цепи, т.е. не будет линейно независимой система уравнений:

$$\mathbf{D}_a\mathbf{i} = \mathbf{0}. \qquad (3.9)$$

Нужно перейти к субматрице (подматрице) от $\mathbf{D}_a$ , которая состоит из максимального числа независимых строк этой матрицы и *называется* ***базовой матрицей сечений*** $\mathbf{D}$ .

# 4. Матрица сечений

**Основой метода построения базовой матрицы сечений является дерево Т**. Каждая ветвь дерева **Т** вместе с некоторой (возможно отсутствующей) связью в соответствующем дополнении к дереву **Тс** образует сечение, называемое ***главным сечением*** относительно выбранного дерева Т.

**Опорное направление сечения выбирается согласно опорному направлению ветви дерева.**

# 4. Матрица сечений

Для связного графа с $n$ узлами имеется $n-1$ ветвей дерева, значит $n-1$ главных сечений для каждого выбранного дерева.

Субматрица от $\mathbf{D}_a$, составленная для главных сечений, называется ***матрицей главных сечений*** и обозначается $\mathbf{D}$.

# 4. Матрица сечений

**Замечание**. Сечением иногда называют также линию, которая однократно пересекает ветви некоторой совокупности ветвей графа и разделяет граф на две несвязанные части. **Если такая линия пересекает одну ветвь дерева, то сечение называют главным**.

На рис. 3.7а для дерева с ветвями E, C1, C2 показаны главные сечения.

# 4. Матрица сечений

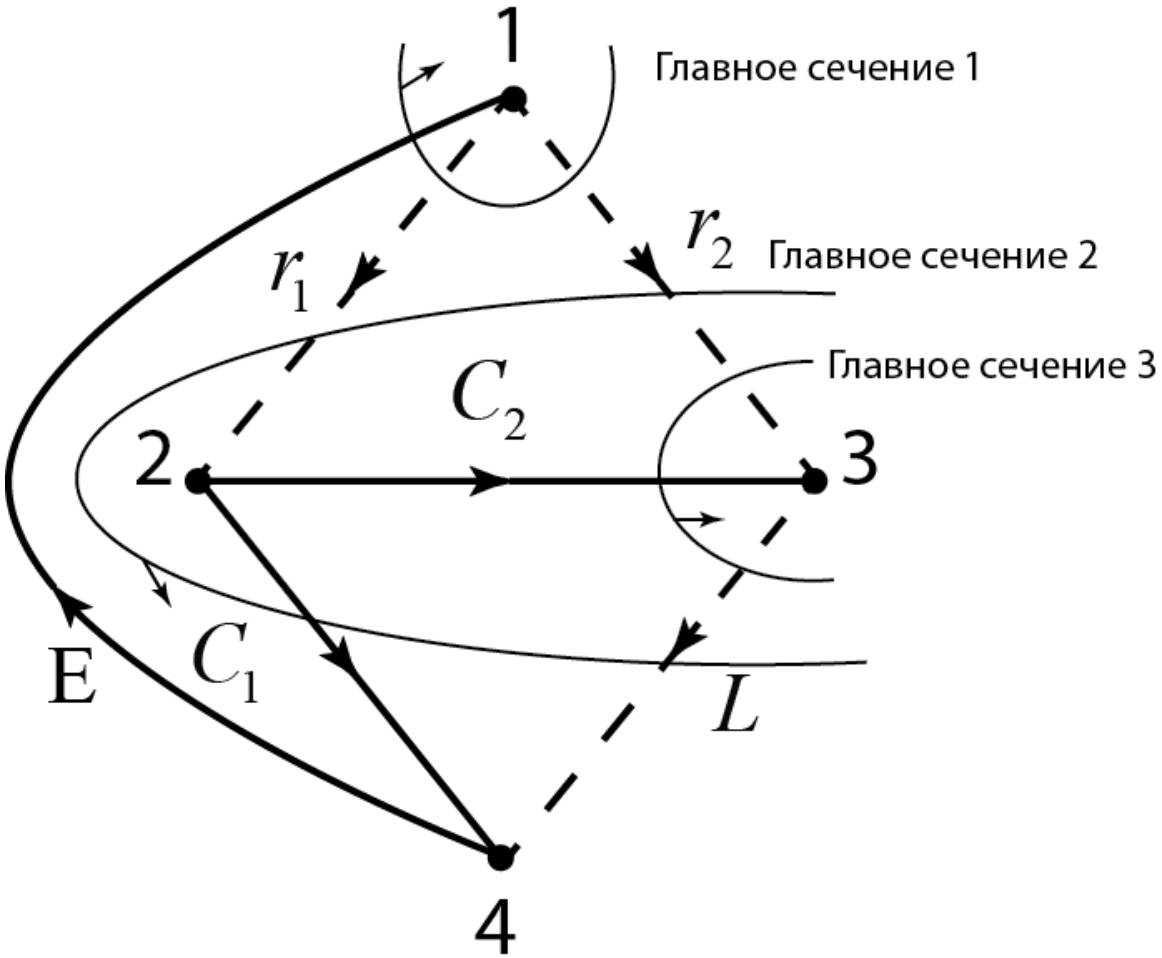



Рис. 3.7а. Пример главных сечений для дерева с ветвями E, C1, C2

# 4. Матрица сечений

Для дерева, состоящего из ветвей E, C1, C2 (см. рис. 3.7а) матрица главных сечений имеет вид:

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} E & \tilde{N}1 & \tilde{N}2 & r1 & r2 & L \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \end{array}. \qquad (3.10)$$

Согласно методу получения главной матрицы сечений очевидно, что любая матрица может быть разделена так: $\mathbf{D} = \left[\mathbf{1} \vdots \mathbf{D}_L\right]$, (3.11)

где столбцы единичной матрицы $\mathbf{1}$ соответствуют ветвям дерева, а столбцы $\mathbf{D}_L$ — связям.

# 4. Матрица сечений

Из наличия единичной матрицы **1** в уравнении (3.11) следует, что строки матрицы $\mathbf{D}$ линейно независимы. Тогда система уравнений первого закона Кирхгофа в общей форме запишется так:

$$\mathbf{Di} = \mathbf{0}. \qquad (3.12)$$

Из записей в топологической форме систем уравнений электрического равновесия по первому (3.11) и второму (3.8) законам Кирхгофа видно, что системообразующими в первом случае являются **ветви дерева**, а во втором случае — **ветви связей**.

# 4. Матрица сечений

Связь между матрицами главных контуров и главных сечений устанавливает следующая теорема (без доказательства):

**Теорема 3.3**. Если столбцы матриц $\mathbf{D}_a$ и $\mathbf{B}_a$ имеют одинаковый порядок следования столбцов (ветвей), то для всех $i,\ j$

$$\left[\text{строка } i \text{ для } \mathbf{B}_a\right]\left[\text{строка } j \text{ для } \mathbf{D}_a\right]^T = 0. \qquad (3.13)$$

**Следствия** теоремы:

$$\mathbf{D}_a\mathbf{B}_a^T = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_a\mathbf{D}_a^T = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{D}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}\mathbf{D}^T = \mathbf{0}. \qquad (3.14)$$

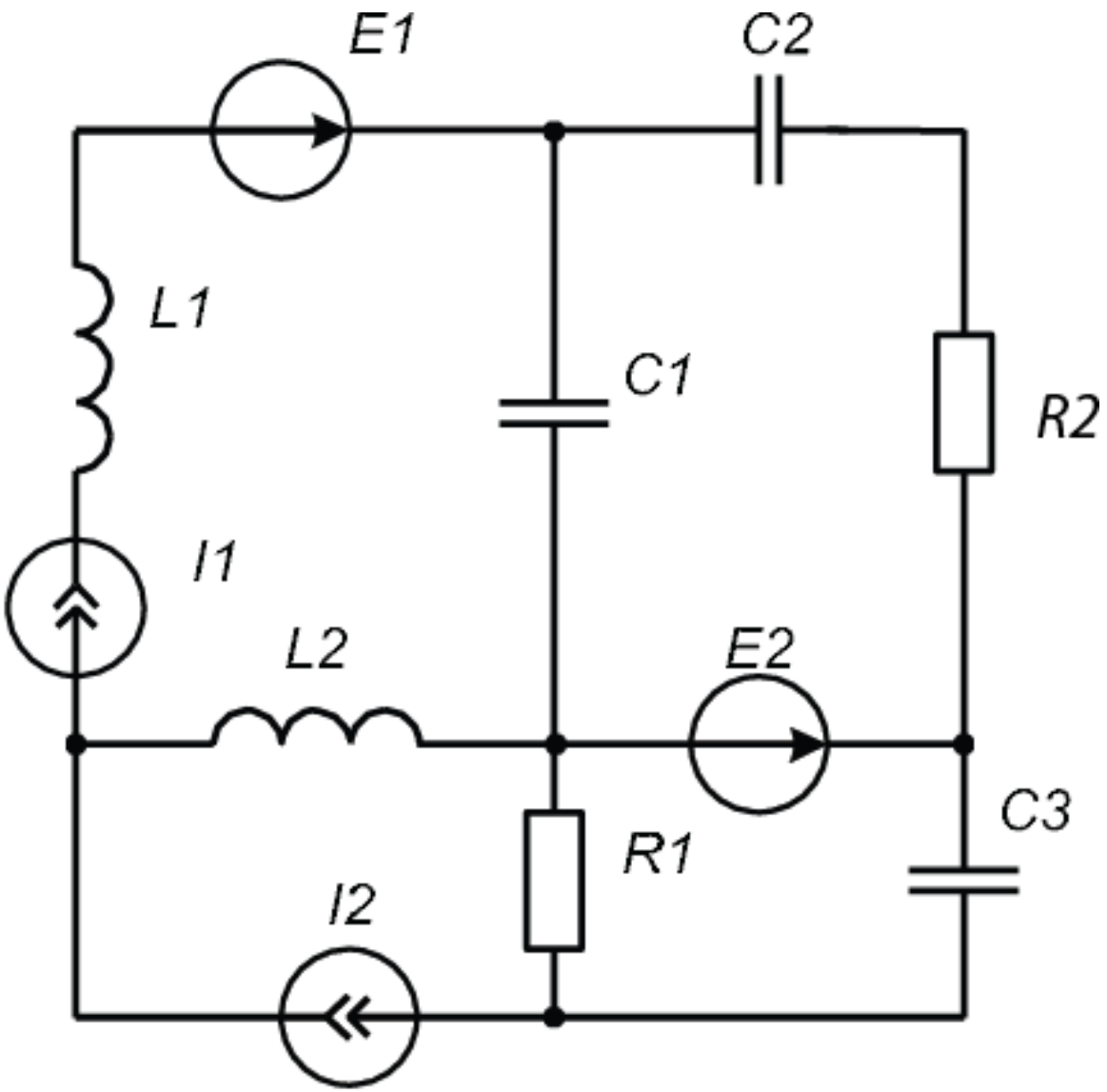
# 4. Матрица сечений

**Примеры. Для данных схем:**

1) **пронумеровать узлы;**
2) **пронумеровать ветви;**
3) **определить деревья;**
4) **построить матрицы главных сечений.**

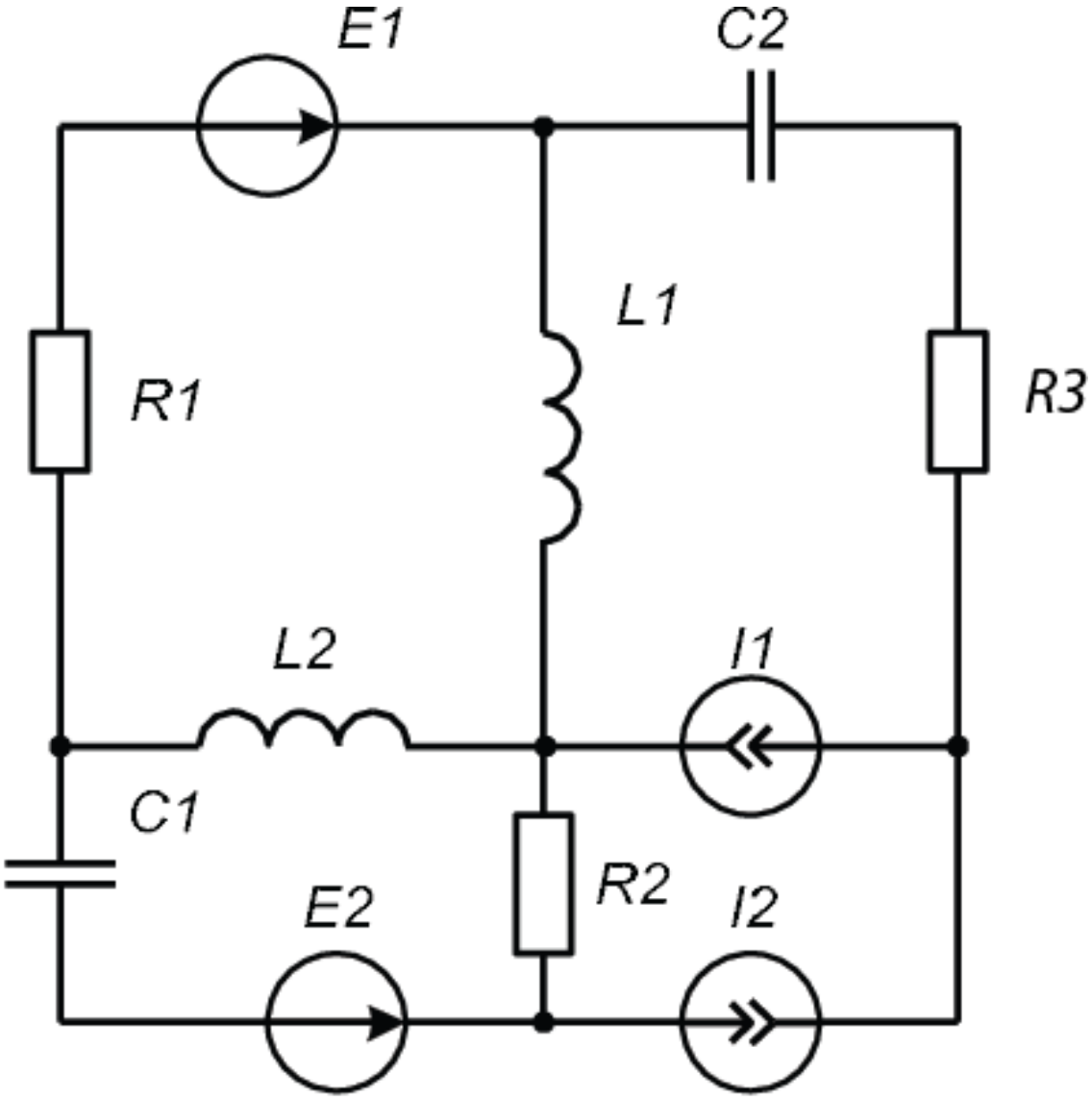
# 4. Матрица сечений

**Пример 1.**



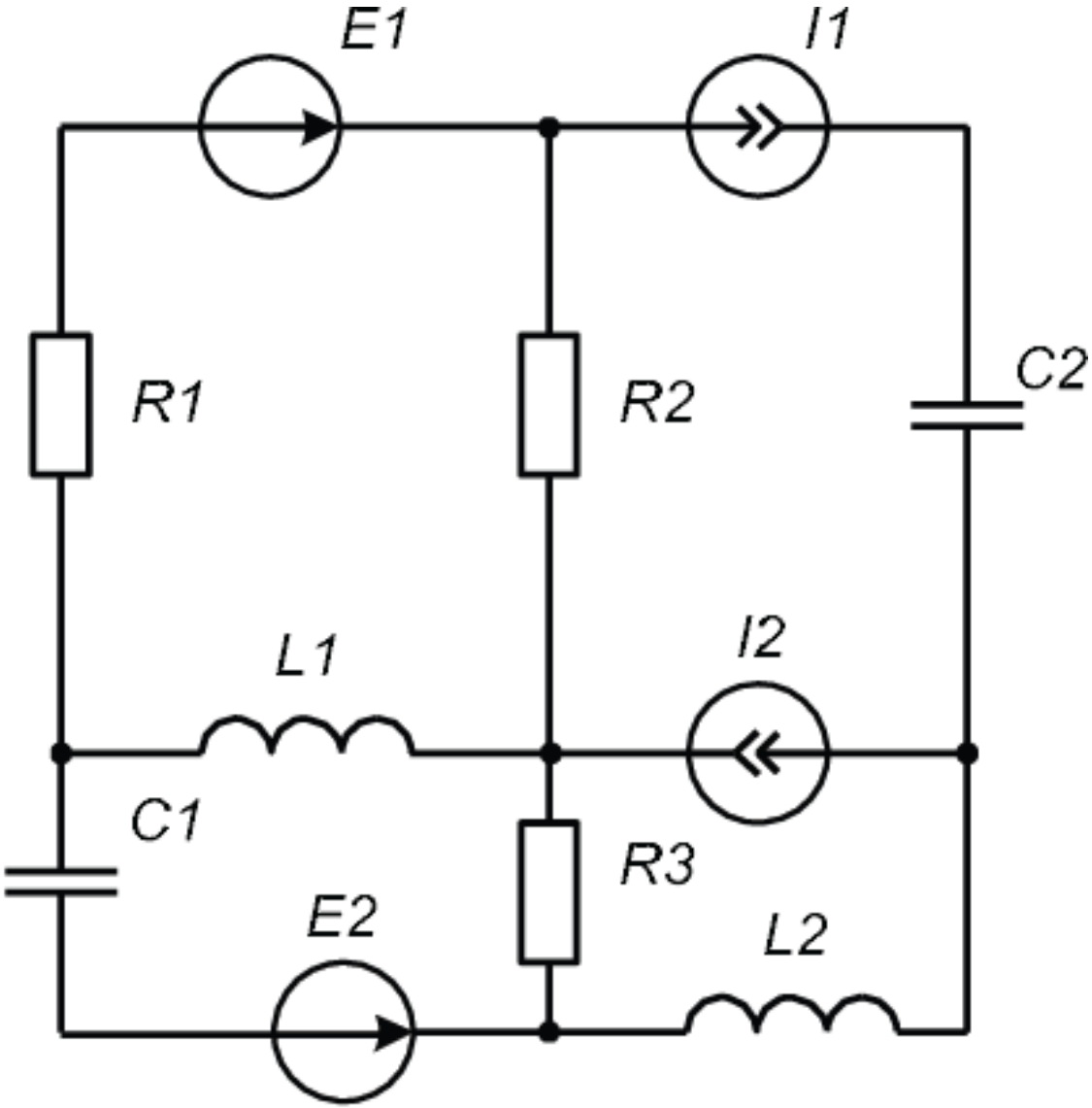
# 4. Матрица сечений

**Пример 2.**



# 4. Матрица сечений

**Пример 3.**



# Заключение

# Тема следующей лекции

5. Основные зависимости между переменными ветвей.

6. Алгоритм формирования матрицы главных сечений.