Метод переменных состояния

Лекция 8 (3)

Цель занятия

Изучить методы построения дискретных схемных моделей

Вопросы занятия

5. Дискретная схемная модель для линейных конденсаторов.

6. Дискретная схемная модель для линейных индуктивностей.

7. Примеры построения математических моделей цепей.

5. Дискретная схемная модель для линейных конденсаторов

С точки зрения численного интегрирования дифференциальное уравнение, характеризующее ёмкость или индуктивность, может быть аппроксимировано резистивной схемой, которая называется **дискретной схемной моделью** (встречается также **сопровождающей моделью**).

Термин «**дискретные**» используется для того, чтобы подчеркнуть, что параметры модели дискретны, т. е. они изменяются от одного временного шага к другому.

5. Дискретная схемная модель для линейных конденсаторов

Использование дискретных моделей сводит анализ переходной характеристики динамической схемы к анализу резистивной схемы по постоянному току.

Дискретная схемная модель может быть получена из любой неявной формулы численного интегрирования. Мы рассмотрим процедуры с тремя обычно используемыми неявными методами: **неявным методом Эйлера, методом трапеций и методом второго порядка Гира**.

5. Дискретная схемная модель для линейных конденсаторов

Неявный метод Эйлера для решения ДУ первого порядка $U' = f(U)$ с шагом интегрирования h:

$$U_{n+1} = U_n + hf(U_{n+1}) = U_n + hU'_{n+1}. \qquad (5.1)$$

Так как для линейной ёмкости

$$i(t) = C\frac{dU}{dt} = CU'(t), \text{ то } U'(t_{n+1}) = \frac{1}{C}i(t_{n+1}). \qquad (5.2)$$

Уравнение (5.2) – точное соотношение, а уравнение (5.1) – приближенное.

5. Дискретная схемная модель для линейных конденсаторов

Аппроксимируем точные решения из (5.2) $U'(t_{n+1})$ и $i(t_{n+1})$ через U'_{n+1} и i_{n+1} соответственно. Тогда уравнение (5.2) примет вид:

$$U'_{n+1} = \frac{1}{C} i_{n+1}. \qquad (5.3)$$

Подставим (5.3) в (5.1). Получим:

$$U_{n+1} = U_n + hU'_{n+1} = U_n + h \cdot \frac{1}{C} i_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \cdot \frac{1}{C} i_{n+1} = U_{n+1} - U_n \Rightarrow \quad i_{n+1} = \frac{C}{h} U_{n+1} - \frac{C}{h} U_n. \qquad (5.4)$$

5. Дискретная схемная модель для линейных конденсаторов

Выражению (5.4) соответствует эквивалентный линейный двухполюсник на рис. 5.1 с напряжением U_{n+1} и током i_{n+1} между узлами.

При фиксированном шаге сопротивление R постоянно, а источник тока зависит от U_n.

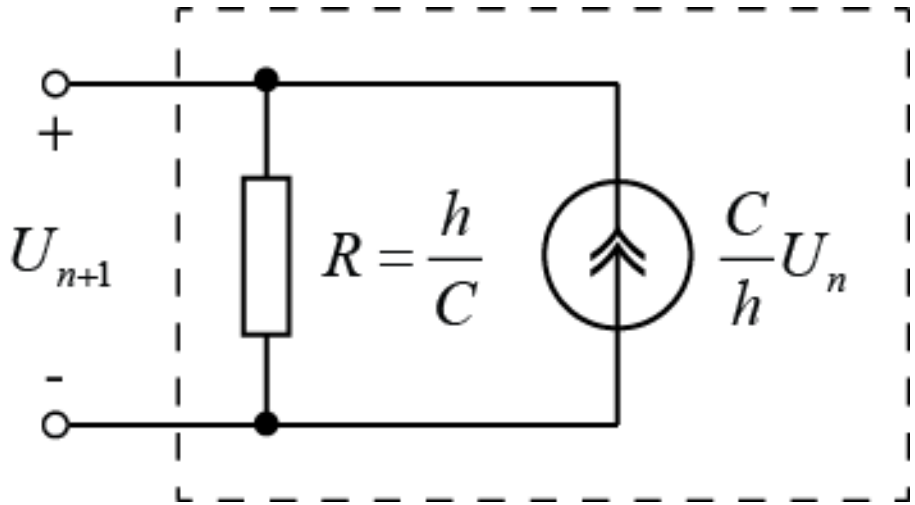

Рис. 5.1. Дискретная схемная модель для линейной ёмкости по неявному методу Эйлера

5. Дискретная схемная модель для линейных конденсаторов

Метод трапеций для уравнения $U' = f(U)$:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2}\left[f(U_{n+1}) + f(U_n) \right] =$$

$$= U_n + \frac{h}{2} U'_{n+1} + \frac{h}{2} U'_n. \qquad (5.5)$$

Точное соотношение для ёмкости – уравнение (5.2) при $t = t_{n+1}$ и при $t = t_n$

$$U'(t_n) = \frac{1}{C} i(t_n). \qquad (5.6)$$

5. Дискретная схемная модель для линейных конденсаторов

Аппроксимируем точные соотношения (5.2) и (5.6):

$$U'_{n+1} = \frac{1}{C} i_{n+1}, \quad (5.7) \qquad\qquad U'_n = \frac{1}{C} i_n. \quad (5.8)$$

Подставим (5.7) и (5.8) в (5.5) и разрешим относительно i_{n+1} :

$$U_{n+1} = U_n + \frac{h}{2C} i_{n+1} + \frac{h}{2C} i_n \Rightarrow \frac{h}{2C} i_{n+1} = U_{n+1} - U_n - \frac{h}{2C} i_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_{n+1} = \frac{2C}{h} U_{n+1} - \left(\frac{2C}{h} U_n + i_n \right). \quad (5.9)$$

5. Дискретная схемная модель для конденсаторов

Уравнению (5.9) соответствует линейный двухполюсник, представленный на рис. 5.2.

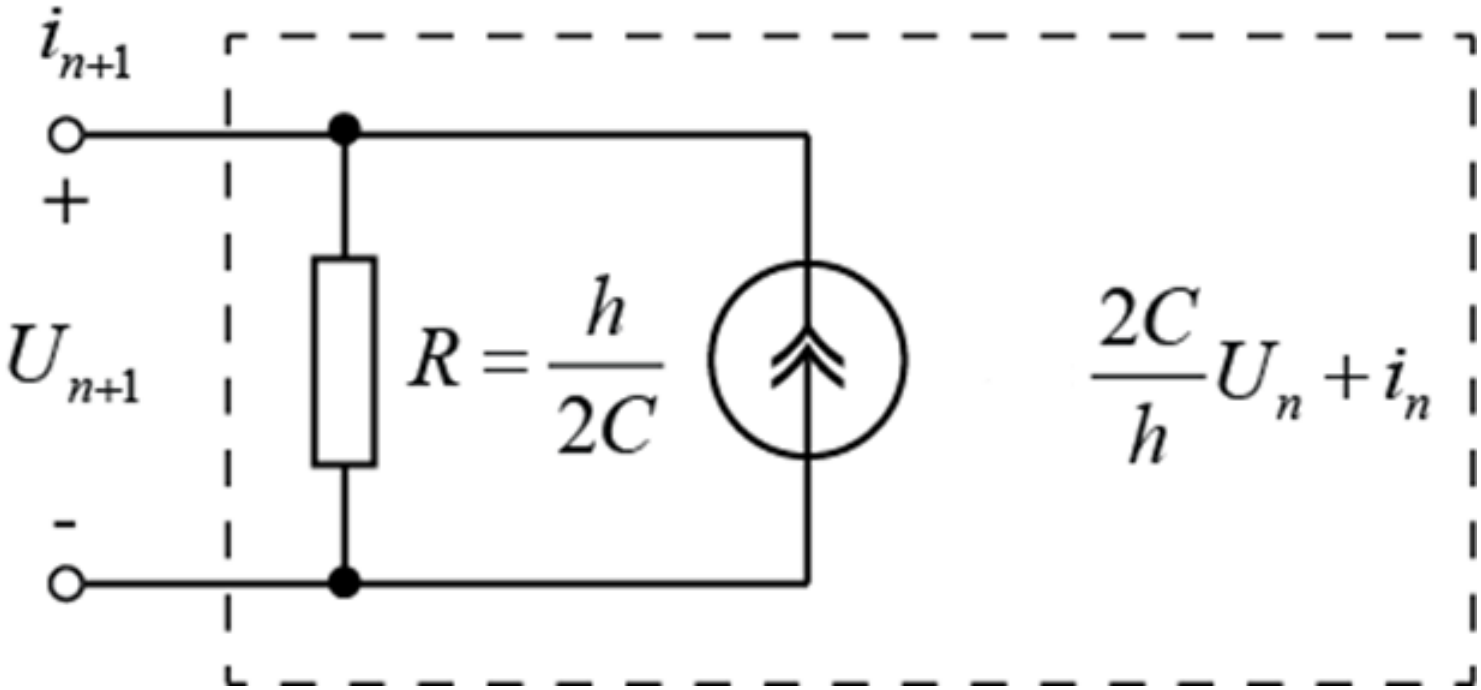

Рис. 5.2. Дискретная схемная модель для линейной ёмкости по методу трапеций

5. Дискретная схемная модель для конденсаторов

Метод второго порядка Гира при решении уравнения $U' = f(U)$ записывается так:

$$U_{n+1} = \frac{4}{3}U_n - \frac{1}{3}U_{n-1} + h\left[\frac{2}{3}f(U_{n+1})\right] =$$

$$= \frac{4}{3}U_n - \frac{1}{3}U_{n-1} + \frac{2}{3}hU'_{n+1}. \qquad (5.9а)$$

Подставим (5.7) в (5.9а), решим его относительно тока и получим:

$$i_{n+1} = \frac{3C}{2h}U_{n+1} - \left(\frac{2C}{h}U_n - \frac{C}{2h}U_{n-1}\right). \qquad (5.9б)$$

5. Дискретная схемная модель для конденсаторов

Уравнению (5.9б) соответствует линейный двухполюсник, представленный на рис. 5.2а.

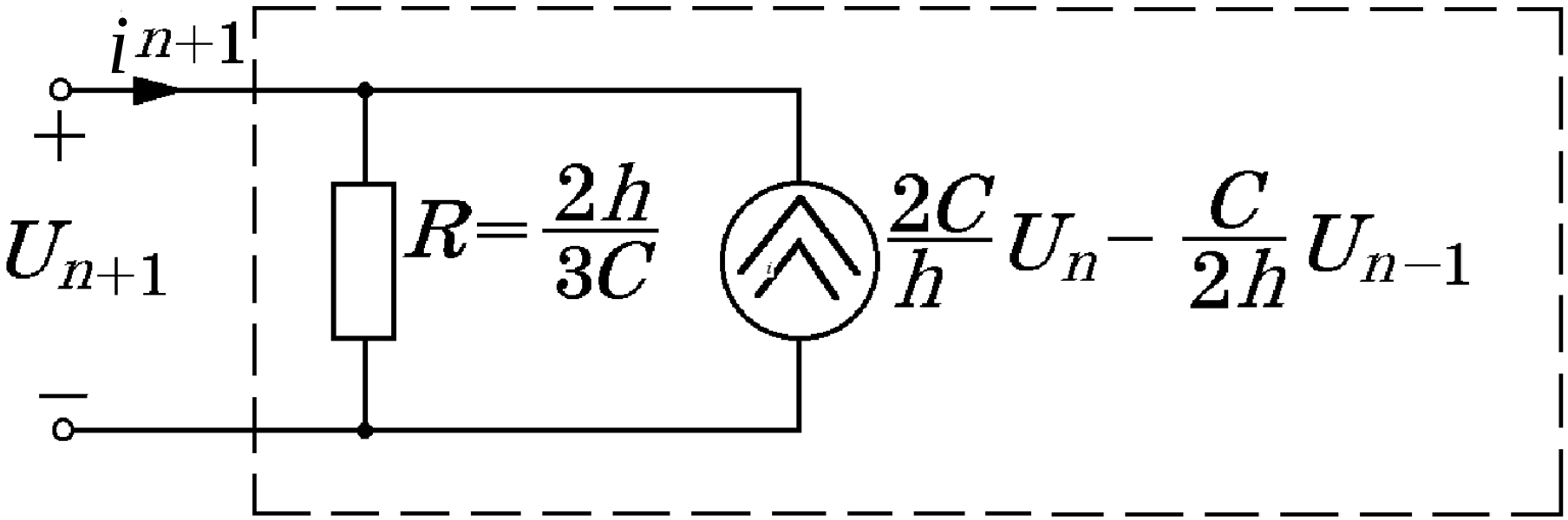

Рис. 5.2а. Дискретная схемная модель для линейной ёмкости согласно методу второго порядка Гири

5. Дискретная схемная модель для конденсаторов

Рассмотренные три дискретные схемные модели для линейной ёмкости показывают, что **топология схемы остается неизменной, изменяются лишь параметры схемы**.

Если для расчета резистивной схемы должен быть использован узловой анализ, то соответствующие **модели для неявного метода Эйлера и метода второго порядка Гира имеют некоторые преимущества в вычислениях над моделью, соответствующей методу трапеций**, потому что источник тока на рис. 5.1 и 5.2а зависит только от напряжения в предшествующем временном шаге, в то время как источник тока (рис. 5.2), требует знания не только напряжения U_n, но и тока i_n .

6. Дискретная схемная модель для линейных индуктивностей

Неявный метод Эйлера для решения ДУ первого порядка $i' = f(i)$ с шагом h:

$$i_{n+1} = i_n + hi(t_{n+1}) = i_n + hi'_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow hi'_{n+1} = i_{n+1} - i_n \Rightarrow \quad i'_{n+1} = \frac{1}{h} i_{n+1} - \frac{1}{h} i_n. \quad (5.10)$$

Для линейной индуктивности точное соотношение $U(t) = Li'(t)$. Аппроксимируем его так при t_{n+1}:

$$i'_{n+1} = \frac{1}{L} U_{n+1}. \quad (5.11)$$

6. Дискретная схемная модель для линейных индуктивностей

Подставим правую часть (5.10) в (5.11):

$$\frac{1}{h}i_{n+1} - \frac{1}{h} = \frac{1}{L}U_{n+1} \Rightarrow \qquad i_{n+1} = \frac{h}{L}U_{n+1} + i_n. \qquad (5.12)$$

Выражению (5.12) соответствует эквивалентный двухполюсник, показанный на рис. 5.3.

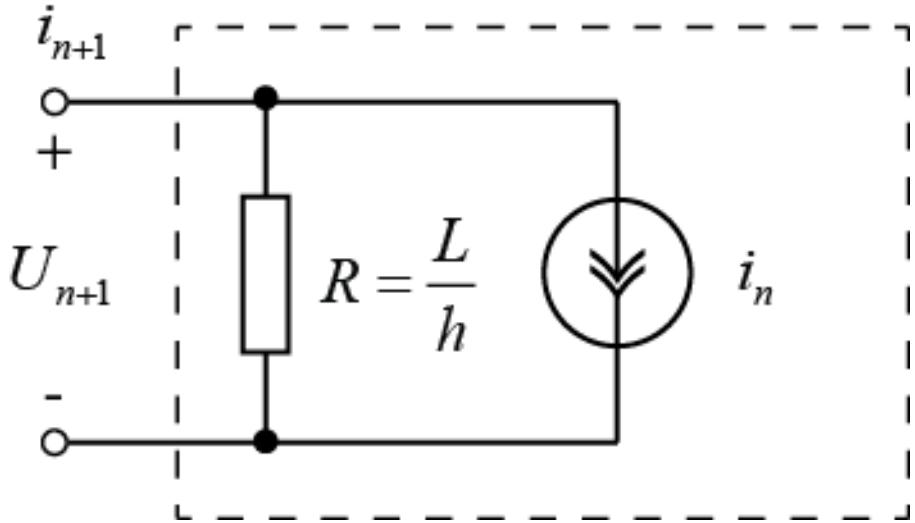

Рис. 5.3. Дискретная схемная модель для линейной индуктивности по неявному методу Эйлера

6. Дискретная схемная модель для линейных индуктивностей

Метод трапеций для решения уравнения $i' = f(i)$:

$$i_{n+1} = i_n + \frac{h}{2}\left[f(i_{n+1}) + f(i_n) \right] = i_n + \frac{h}{2} i'_{n+1} + \frac{h}{2} i'_n. \quad (5.13)$$

Как и ранее, сделаем подстановку в (5.13)

$$i'_{n+1} \approx \frac{1}{L} U_{n+1}, \quad i'_n \approx \frac{1}{L} U_n.$$

Получим:

$$i_{n+1} = \frac{h}{2L} U_{n+1} + \frac{h}{2L} U_n + i_n. \quad (5.14)$$

6. Дискретная схемная модель для линейных индуктивностей

Выражению (5.14) соответствует эквивалентный двухполюсник, показанный на рис. 5.4.

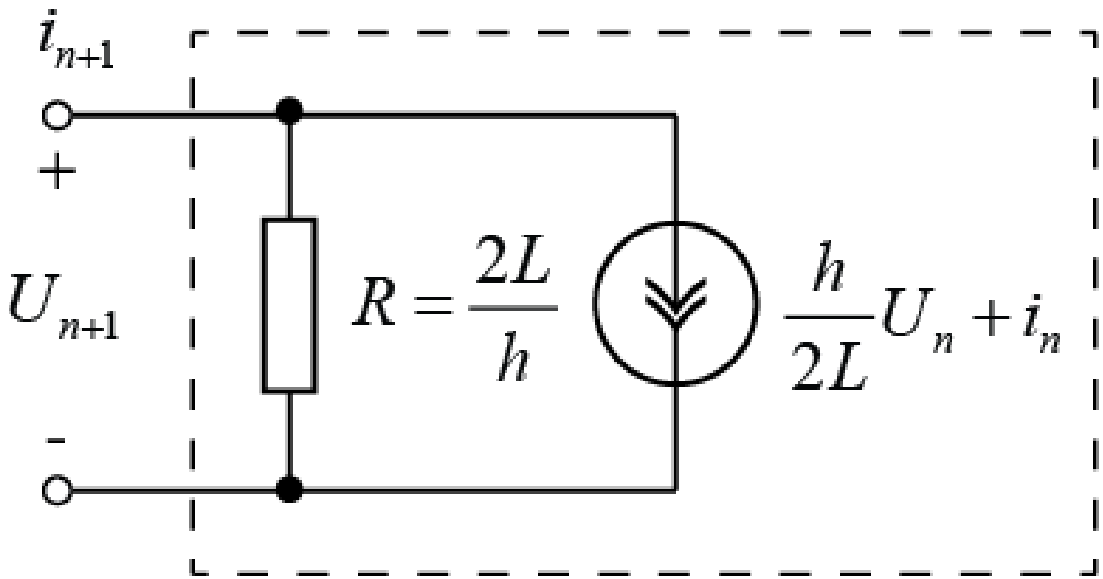

Рис. 5.4. Дискретная схемная модель для линейной индуктивности по методу трапеций

6. Дискретная схемная модель для линейных индуктивностей

Метод второго порядка Гира записывается следующим образом:

$$i_{n+1} = \frac{4}{3} i_n - \frac{1}{3} i_{n-1} + h\left[\frac{2}{3} f\left(i_{n+1}\right)\right] = \frac{4}{3} i_n - \frac{1}{3} i_{n-1} + \frac{2}{3} h i'_{n+1}. \quad (5.15)$$

Сделаем соответствующую подстановку в (5.15) согласно результатам вышеприведенного анализа и получим эквивалентное выражение:

$$i_{n+1} = \frac{2h}{3L} U_{n+1} + \left(\frac{4}{3} i_n - \frac{1}{3} i_{n-1}\right). \quad (5.16)$$

6. Дискретная схемная модель для линейных индуктивностей

Выражению (5.16) соответствует эквивалентный двухполюсник, показанный на рис. 5.4.

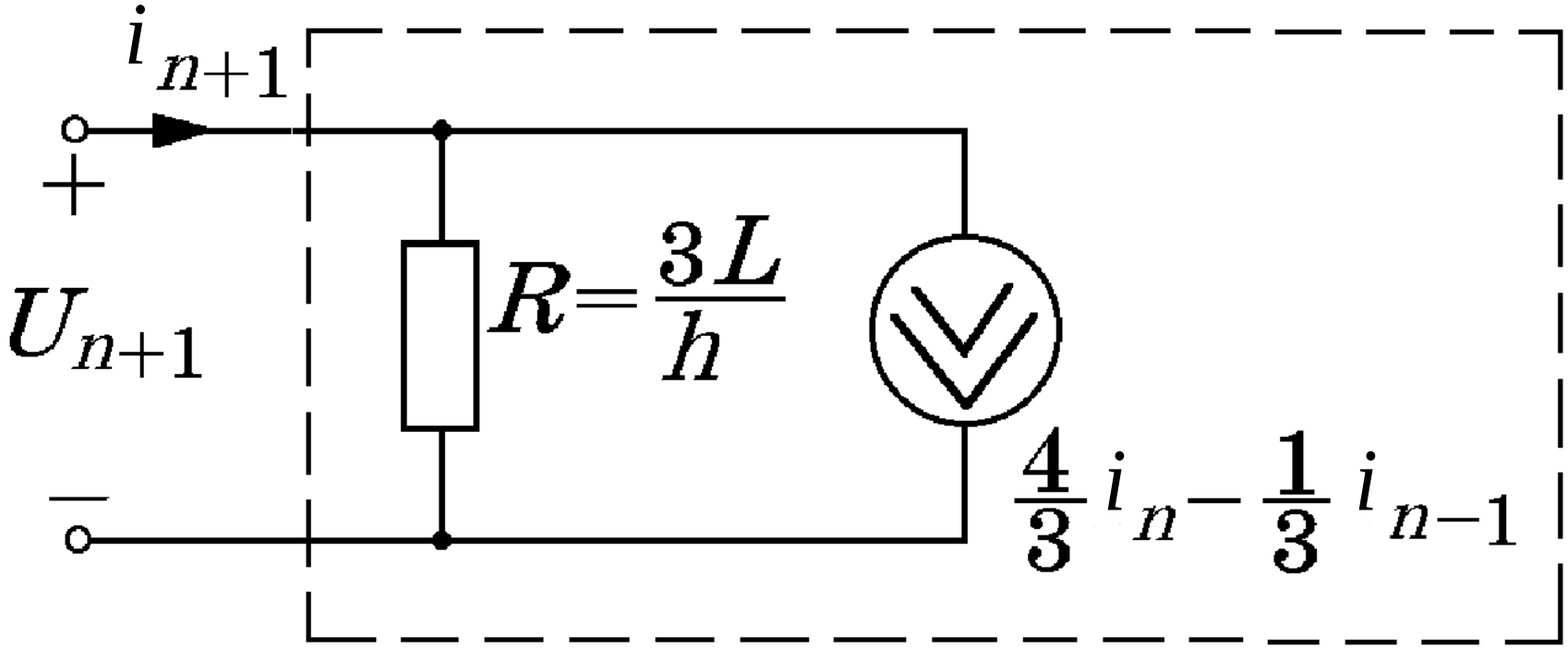

Рис. 5.4а. Дискретная схемная модель для линейной индуктивности согласно методу второго порядка Гира

6. Дискретная схемная модель для линейных индуктивностей

Рассмотренные дискретные схемные модели для линейной ёмкости и индуктивности позволяют выбирать тип модели в зависимости от цели и вида анализа. Если для расчёта эквивалентной резистивной схемы должен быть использован узловой анализ, то соответствующие **модели для неявного метода Эйлера являются наиболее предпочтительными**, так как позволяют осуществлять первый шаг расчёта и последующие за ним шаги непосредственно от заданных начальных условий.

7. Примеры построения математических моделей цепей

Пример 1. Построить математическую модель цепи, представленной на рис. 5. 5.

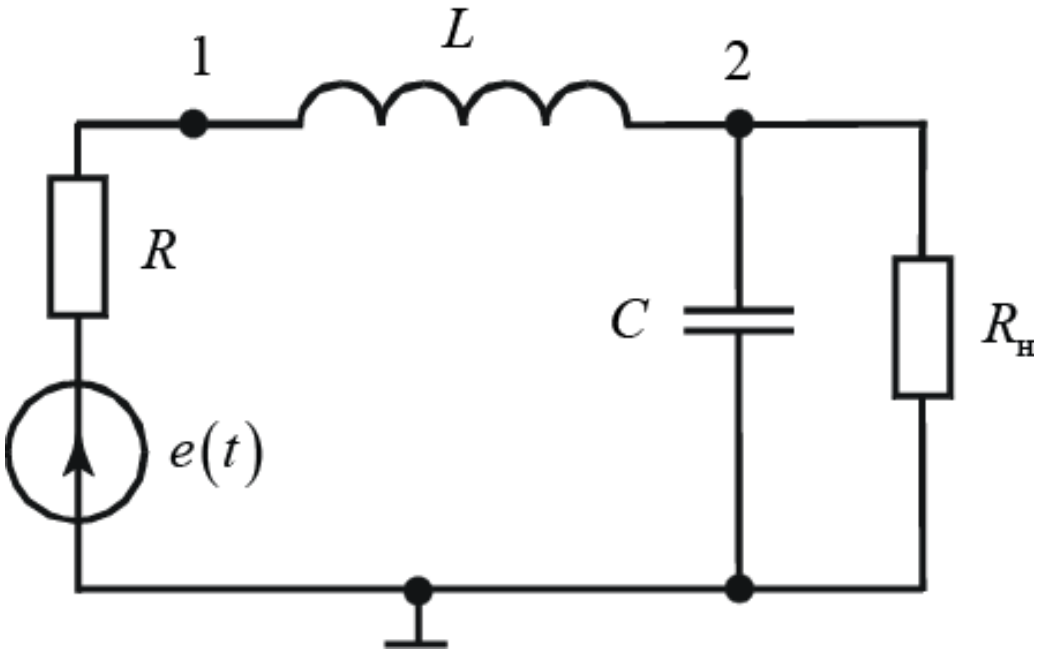

Рис. 5.5. Схема для построения математической модели цепи

Пример 1

1. Составление эквивалентной резистивной схемы замещения для узлового анализа.

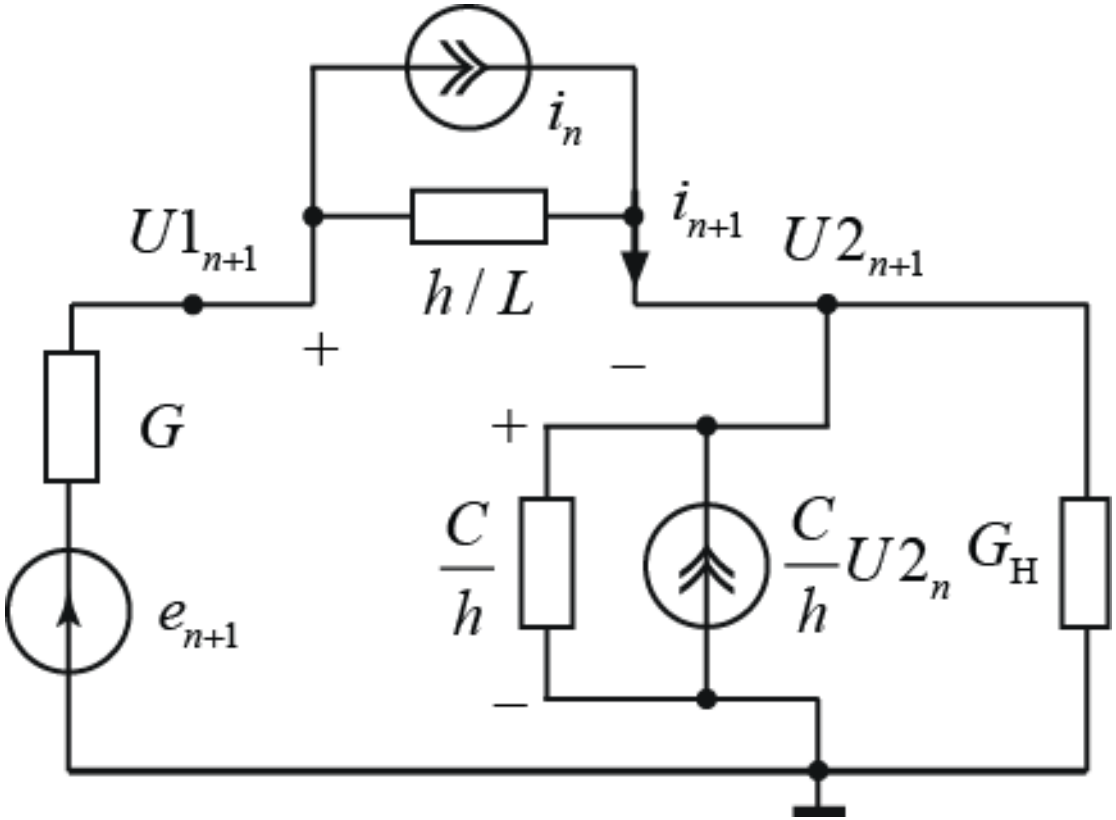

Рис. 5.6. Эквивалентная резистивная схема замещения

Пример 1

2. Выбор положительных направлений токов и напряжений (см. рис. 5.6).

3. Запись узловых уравнений.

$$\left(G+\frac{h}{L}\right)U1_{n+1}-\frac{h}{L}U2_{n+1}=$$

$$=Ge_n-i_n-\frac{h}{L}U1_{n+1}-\left(\frac{h}{L}+\frac{C}{h}+G_{\text{Н}}\right)U2_{n+1}=$$

$$=\frac{C}{h}U2_n+i_n.$$

Пример 1

4. Запись компоненты уравнения для дискретной модели индуктивности. Ток через индуктивность в $t = t_{n+1}$ равен

$$i_{n+1} = \frac{h}{L}\left(U1_{n+1} - U2_{n+1}\right) + i_n.$$

5. Запись процедуры расчёта цепи в MathCad при заданных нулевых условиях для $U1_0, U2_0, i_0$.

$$\begin{bmatrix} U1_{n+1} \\ U2_{n+1} \\ i_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G + h/L & -h/L & 0 \\ -h/L & h/L + C/h + G_{\text{Н}} & 0 \\ -h/L & h/L & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Ge_n - i_n \\ (C/h)U2_n + i_n \\ i_n \end{bmatrix}$$

В правой части уравнения элементы третьей строки матриц могут иметь обратные указанным знаки.

Пример 2

Рассчитать методом переменных состояния электрическую цепь, представленную на рис. 5.7.

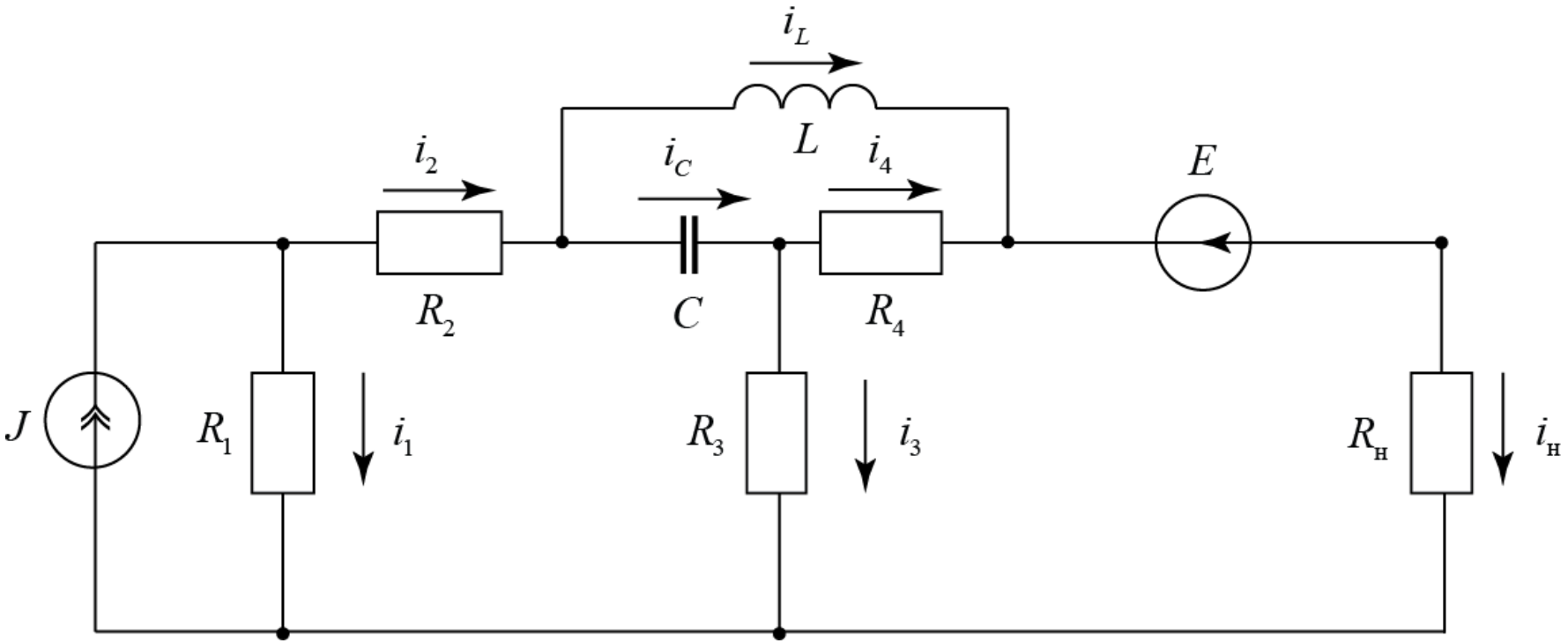

Рис. 5.7. Схема для расчёта цепи

Пример 2

Элементы электрической цепи имеют следующие характеристики:

- индуктивность $L = 0,05\ \text{Гн};$
- ёмкость $C = 0,025\ \text{мкФ};$
- резисторы $R_1 = R_4 = 500\ \text{Ом};$
- резисторы $R_2 = R_3 = R_{\text{н}} = 1000\ \text{Ом};$
- источники $E = 7\ \text{В},\quad J = 4\ \text{А}.$

Каков порядок получения уравнений переменных состояния нами рассмотрен на одной из предыдущих лекций.

Вспомним его.

Пример 2

Решение.

1. Нумерация узлов.
2. Нумерация ветвей.
3. Выбор направлений токов.
4. Построение направленного графа цепи.
5. Запись матрицы инциденций.
6. Формирование матрицы главных сечений.
7. Формирование матрицы главных контуров.

Пример 2

Решение.

8. Запись матричного уравнения главных контуров в алгебраической форме.

9. Запись матричного уравнения главных сечений в алгебраической форме.

10. Формирование системы уравнений в нормальной форме.

11. Запись системы уравнений переменных состояния в матричной форме.

12. Получение выходных уравнений.

Пример 2

Решение.

Будем полагать, что для данного примера 2 пп. 1-7 выполнены. Продолжим решение.

8. Запись матричного уравнения главных контуров в алгебраической форме

$$\begin{cases} -i_1R_1 + i_2R_2 + u_C + i_3R_3 = 0, & (1) \\ L\dfrac{di_L}{dt} - i_4R_4 - u_C = 0, & (2) \\ i_4R_4 + i_{\text{Н}}R_{\text{Н}} - i_3R_3 = -E. & (3) \end{cases}$$

Пример 2

9. Запись матричного уравнения главных сечений в алгебраической форме

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = J, & (4) \\ C\dfrac{du_C}{dt} - i_3 - i_4 = 0, & (5) \\ i_2 - C\dfrac{du_C}{dt} - i_L = 0, & (6) \\ i_L + i_4 - i_{\text{Н}} = 0. & (7) \end{cases}$$

Пример 2

10. Формирование системы уравнений в нормальной форме

$$(6) \Rightarrow i_2 - C\frac{du_C}{dt} - i_L = 0 \Rightarrow \quad i_2 = C\frac{du_C}{dt} + i_L; \quad (8)$$

$$(4) \Rightarrow \quad i_1 + i_2 = J \Rightarrow \quad i_1 = J - i_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_1 = J - \left(C\frac{du_C}{dt} + i_L \right); \qquad (9)$$

$$(2) \Rightarrow L\frac{di_L}{dt} - i_4 R_4 - u_C = 0 \Rightarrow$$

$$i_4 = \left(L\frac{di_L}{dt} - u_C \right) \Big/ R_4; \quad (10)$$

Пример 2

10. Формирование системы уравнений в нормальной форме

$$(1) \Rightarrow -i_1R_1 + i_2R_2 + u_C + i_3R_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_3 = \left(i_1R_1 - i_2R_2 - u_C\right)/R_3 \Rightarrow$$

$$i_3 = \left[J - \left(C\frac{du_C}{dt} + i_L\right)\right]\frac{R_1}{R_3} -$$

$$-\left(C\frac{du_C}{dt} + i_L\right)\frac{R_2}{R_3} - \frac{u_C}{R_3}. \quad (11)$$

Пример 2

10. Формирование системы уравнений в нормальной форме

$$(3) \Rightarrow i_4 R_4 + i_{\text{Н}} R_{\text{Н}} - i_3 R_3 = -E \Rightarrow$$

$$i_{\text{Н}} = \left(i_3 R_3 - i_4 R_4 - E \right) / R_{\text{Н}} \Rightarrow$$

$$i_{\text{Н}} = \left[J - \left(C \frac{du_C}{dt} + i_L \right) \right] \frac{R_1}{R_{\text{Н}}} - \left(C \frac{du_C}{dt} + i_L \right) \frac{R_2}{R_{\text{н}}} -$$

$$- \frac{u_C}{R_{\text{Н}}} - \left(L \frac{di_L}{dt} - u_C \right) \Big/ R_{\text{Н}} - \frac{E}{R_{\text{Н}}}. \qquad (12)$$

Пример 2

10. Формирование системы уравнений в нормальной форме

$$(5) \Rightarrow \quad C\frac{du_C}{dt} - i_3 - i_4 = 0 \Rightarrow \quad \frac{du_C}{dt} = \left(i_3 + i_4\right)/C,$$

$$(7) \Rightarrow \quad i_L + i_4 - i_{\text{Н}} = 0 \Rightarrow i_L = i_{\text{Н}} - i_4.$$

$$\begin{cases} \dfrac{du_C}{dt} = -1{,}9048 \cdot 10^4 u_C - 3{,}619 \cdot 10^7 i_L + \\ +9{,}5238 \cdot 10^6 J - 7{,}619 \cdot 10^3 E, \\ \dfrac{di_L}{dt} = 19{,}0952 u_C - 7{,}619{,}0476 i_L + 952{,}381 J - 4{,}47619. \end{cases} \qquad (13)$$

Пример 2

Решения системы (13) с использованием явного метода Эйлера определяются из выражений:

$$u_C[(n+1)h] = u_C(nh) + u'_C(nh) =$$
$$= u_C(nh) + h[-1{,}9048 \cdot 10^4\ u_C(nh) - \qquad (14)$$
$$-3{,}619 \cdot 10^7\ i_L(nh) + 9{,}5238 \cdot 10^6\ J - 7{,}619 \cdot 10^3 E].$$

$$i_L(n+1)h] = i_L(nh) + i'_L(nh) =$$
$$= i_L(nh) + h[18{,}0952\, u_C(nh) - \qquad (15)$$
$$-7619{,}0476\, i(nh) + 952{,}38\ J - 4{,}7619\ E].$$

Пример 2

Для решения системы (14)-(15) нужно определить начальные условия.

Начальными условиями называются мгновенные значения отдельных токов и напряжений, а также их первых, вторых и т.д. производных в начале переходного процесса, т.е. в момент коммутации при t=0. Начальные условия делятся на 2 вида: независимые и зависимые.

Пример 2

К независимым начальным условиям относятся токи в катушках $i_L(0)$ и напряжения на конденсаторах $u_C(0)$. Независимые начальные условия определяются законами коммутации, они не могут измениться скачкообразно и не зависят от вида коммутации. Их значения определяются из расчета схемы цепи в установившемся докоммутационном режиме на момент коммутации $t = 0$.

Пример 2

К **зависимым начальным условиям** относятся значения всех остальных токов и напряжений, а так же значения производных от всех переменных в момент коммутации при $t = 0$. Зависимые начальные условия могут изменяться скачкообразно, их значения зависят от вида и места коммутации. Зависимые начальные условия определяются на момент коммутации $t = 0$ из системы ДУ (уравнений Кирхгофа), составленных для схемы в состоянии после коммутации, путем подстановки в них найденных ранее независимых начальных условий.

Пример 2

Определим независимые начальные условия для напряжения на ёмкости $u_C\left(t=0\right)$ и тока $i_L\left(t=0\right)$ через индуктивность из схемы коммутации (до включения E).

Принимаем, что до коммутации
в цепи имел место установившийся режим постоянного тока. Это позволяет представить исходную схему в виде, показанном на рис. 5.8.

Пример 2

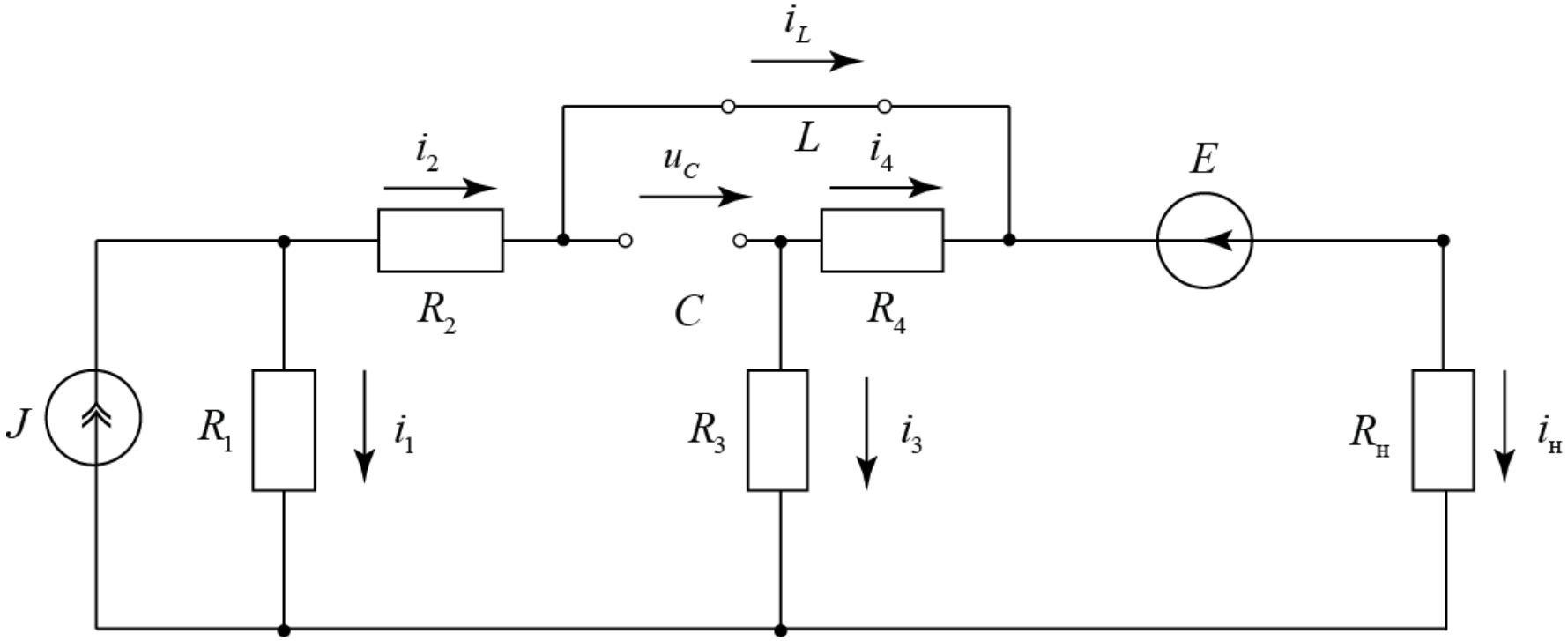

Рис. 5.8. Схема для определения независимых начальных условий

Независимые начальные условия из этой схемы:

$$u_C(t=0)=190,4762; \qquad i_L=0,9524.$$

Заключение