ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

Федеральное государственное образовательное
бюджетное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»

В. А. Никамин

ЦИФРОВАЯ ЗАПИСЬ СИГНАЛОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

СПб ГУТ

Санкт-Петербург
2017

УДК 681.84
ББК 32.87
Н62

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент кафедры телевидения и метрологии
О. В. Украинский,

Рекомендовано к печати научно-технической комиссией ученого совета СПбГУТ

Никамин В. А.

Н62 Цифровая запись сигналов : [методические указания и контрольные работы]. – В. А. Никамин ; СПбГУТ. – СПб., 2017. – 30 с.
ISBN 978-5-89160-140-6

Содержит программу и варианты контрольных работ по основным темам дисциплины, элементы теории и примеры выполнения заданий, рекомендуемую литературу, требования к оформлению и методические указания к выполнению.
Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», профиль – «Цифровое телерадиовещание».

УДК 681.84
ББК 32.87

ISBN 978-5-89160-140-6

ВВЕДЕНИЕ

Цифровая запись сигналов является одной из специальных дисциплин учебного плана подготовки бакалавров по направлению 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».

Изучение данной дисциплины позволяет понять физические принципы, лежащие в основе устройств записи информации, а также ограничения, присущие тем или иным носителям, т.е. позволяет осмысленно выбирать и использовать их в своей работе. Устройства записи являются непременным атрибутом современных цифровых систем передачи информации, поскольку подавляющее большинство программ телерадиовещания готовятся заранее и перед передачей в эфир неоднократно подвергаются различным процедурам по их обработке и сведению.

Целью преподавания дисциплины «Цифровая запись сигналов» является изучение физических основ и современных форматов магнитной, оптической, магнитооптической и твердотельной записи и воспроизведения цифровой информации. Данная дисциплина позволяет обеспечить формирование фундамента подготовки будущих специалистов в области цифрового телерадиовещания.

Дисциплина изучается студентами самостоятельно. В помощь студентам университет проводит обзорные лекции по наиболее важным и сложным для понимания темам программы, а также групповые и индивидуальные консультации.

На лабораторных занятиях студенты получают навыки использования программных продуктов, применяемых при подготовке и обработке сигналов записи информации на носитель и для контроля процесса записи.

Изучение дисциплины включает в себя выполнение контрольной работы и завершается сдачей зачета по лабораторному практикуму и теоретической части. К сдаче зачета допускаются студенты, полностью закончившие учебный план.

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

1. Введение.
2. Понятие системы записи информации.
3. Система цифровой оптической записи информации.
4. Система магнитооптической записи информации.
5. Система цифровой магнитной записи информации.
6. Твердотельные носители информации.
7. Перспективные системы записи информации.

Во введении (тема 1) рассматривается эволюция цифровых систем записи информации – от первых комбинированных, когда аналоговый звуковой сигнал преобразовывался в цифровой код с помощью специальной приставки-адаптера и записывался на аналоговый видеомагнитофон вместо сигнала строчной развертки, до современных накопителей на жестких дисках и flash-памяти.

В теме 2 кратко рассматриваются все существующие (и существовавшие ранее) системы записи информации – от механической, емкостной и магнитной ленточной до оптической, магнитооптической и голографической, а также HDD- и SSD-накопителей.

В темах 3-7 все системы цифровой записи информации рассматриваются уже подробно – начиная от физических принципов записи на тот или иной носитель и построением сервосистем, обеспечивающих процессы записи и считывания информации, и заканчивая процедурами ее обработки перед записью и принципами формирования стандартных массивов записываемых данных.

В процессе изучения материала следует, прежде всего, попытаться разобраться в физической сущности процессов записи/считывания цифровых сигналов и логике обработки информации с точки зрения получения оптимальных свойств записываемых данных: наилучшей помехозащищенности, максимально возможной плотности записи, самосинхронизации потока воспроизводимых данных и формирования требуемых спектральных характеристик.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Изучение дисциплины включает в себя выполнение контрольной работы. Задание содержит три контрольных вопроса и две задачи. Выбор задания осуществляется по двум последним цифрам номера зачетной книжки. Например, если номер зачетной книжки 195612, то следует выбирать контрольные вопросы и задачи, соответствующие двум последним цифрам 12, т.е. вопросы 12, 49, 88 и задачи 12 и 89.

Решение задач должно быть развернутым, т.е. должно быть понятно каким образом получен представленный результат. Ход решения следует кратко обосновать. Необходимо делать ссылки на источники, откуда заимствованы формулы и рассуждения.

Страницы и рисунки следует пронумеровать. Список использованной литературы приводится в конце работы.

Неаккуратное выполнение задания и нарушение правил оформления повлекут за собой возвращение работы для исправления.

Получив проверенную работу, студент обязан исправить ее в соответствии с замечаниями преподавателя. Проверенная и зачтенная работа сохраняется студентом до зачета, так как без ее предъявления студент к зачету не допускается. Разрешается сдача устного зачета по содержанию контрольной работы.

ВЫБОР ВАРИАНТА ЗАДАНИЯ

Две последние цифры номера зачетной книжки	Номера		Две последние цифры номера зачетной книжки	Номера	
	Вопросов	Задач		Вопросов	Задач
01	01, 16, 52	01, 100	51	51, 03, 35	51, 03
02	02, 51, 62	02, 99	52	52, 04, 76	52, 04
03	03, 45, 76	03, 98	53	53, 01, 66	53, 05
04	04, 56, 77	04, 97	54	54,02, 72	54, 06
05	05, 61, 85	05, 96	55	55, 05, 37	55, 07
06	06, 86, 95	06, 95	56	56, 06, 83	56, 08
07	07, 25, 55	07, 94	57	57, 09, 40	57, 09
08	08, 62, 71	08, 93	58	58, 10, 20	58, 10
09	09, 35, 53	09, 92	59	59, 87, 22	59, 11
10	10, 39, 63	10, 91	60	60, 17, 89	60, 12
11	11, 37, 81	11, 90	61	61, 11, 86	61, 13
12	12, 49, 88	12, 89	62	62, 12, 41	62, 14
13	13, 38, 57	13, 88	63	63, 13, 49	63, 15
14	14, 58, 84	14, 87	64	64, 18, 43	64, 16
15	15, 64, 98	15, 86	65	65, 20, 26	65, 17
16	16, 65, 96	16, 85	66	66, 08, 47	66, 18
17	17, 28, 59	17, 84	67	67, 26, 50	67, 19
18	18, 60, 93	18, 83	68	68, 04, 27	68, 20
19	19, 50, 64	19, 82	69	69, 25, 54	69, 21
20	20, 34, 53	20, 81	70	70, 15, 24	70, 22
21	21, 40, 65	21, 80	71	71, 34, 74	71, 23
22	22, 41, 58	22, 79	72	72, 19, 36	72, 24
23	23, 54, 77	23, 78	73	73, 33, 38	73, 25
24	24, 61, 87	24, 77	74	74, 14, 33	74, 26
25	25, 48, 98	25, 76	75	75, 46, 95	75, 27
26	26, 69, 90	26, 75	76	76, 02, 47	76, 28
27	27, 07, 66	27, 74	77	77, 13, 43	77, 29
28	28, 60, 74	28, 73	78	78, 02, 45	78, 30
29	29, 56, 97	29, 72	79	79, 28, 44	79, 31
30	30, 63, 70	30, 71	80	80, 23, 46	80, 32
31	31, 48, 85	31, 70	81	81, 42, 91	81, 33
32	32, 75, 90	32, 69	82	82, 03, 92	82, 34
33	33, 67, 99	33, 68	83	83, 10, 44	83, 35
34	34, 03, 69	34, 67	84	84, 03, 30	84, 36
35	35, 19, 59	35, 66	85	85, 92, 99	85, 37
36	36, 01, 73	36, 65	86	86, 22, 33	86, 38
37	37, 17, 57	37, 64	87	87, 06, 91	87, 39
38	38, 08, 70	38, 63	88	88, 02, 93	88, 40
39	39, 14, 82	39, 62	89	89, 21, 52	89, 41
40	40, 15, 89	40, 61	90	90, 31, 51	90, 42
41	41, 07, 21	41, 60	91	91, 30, 94	91, 43
42	42, 11, 80	42, 59	92	92, 29, 39	92, 44
43	43, 35, 78	43, 58	93	93, 04, 23	93, 45
44	44, 72, 94	44, 57	94	94, 08, 84	94, 46
45	45, 71, 79	45, 56	95	95, 42, 100	95, 47
46	46, 67, 82	46, 55	96	96, 32, 100	96, 48
47	47, 05, 68	47, 54	97	97, 16, 68	97, 49

48	48, 18, 88	48, 53	98	98, 97, 80	98, 50
49	49, 31, 79	49, 01	99	99, 19, 83	99, 51
50	50, 12, 81	50, 02	00	100, 36, 96	100, 52

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Системы записи. Дать характеристику принципам записи в каждой из систем.
2. Преобразование информации в формате CD-Audio. Назначение каждого из этапов преобразования. Структура кадра.
3. Что такое перемежение данных? Назначение каждого из этапов перемежения в формате CD-Audio.
4. Канальное кодирование в формате CD-Audio. Цели и задачи, правила кодирования. Соединительные разряды и их назначение. Минимальная и максимальная длина пробега. Минимальная и максимальная длина волны записи. Спектр кода EFM.
5. Служебный символ, служебный канал, служебный блок в формате CD. Синхронизация служебной информации. Для чего еще используется сигнал синхронизации служебной информации?
6. Структурная схема проигрывателя CD. Пояснить работу и назначение элементов схемы.
7. Устройство и принцип работы полупроводникового лазера. Гетероструктуры. Ток накачки. Требования к полупроводниковым лазерам.
8. Построение оптической системы проигрывателя CD. Назначение и принцип действия основных элементов схемы.
9. Служебные каналы P и Q в формате CD-Audio.
10. Числовая (угловая) апертура объектива, и на какие технические характеристики систем записи/воспроизведения она влияет?
11. Автофокусировка по методу астигматизма пучка.
12. Автофокусировка по методу Фуко.
13. Технологии тиражирования CD-дисков.
14. Что такое канальная тактовая частота, для чего она нужна и как она выделяется из потока данных.
15. Структура данных в формате CD-ROM.
16. Помехоустойчивое кодирование в формате CD-ROM (коды EDC и ECC).
17. Что такое голографический оптический элемент (HOE) и принцип его действия.
18. Формат SACD – краткая характеристика и технические параметры. Конструкция диска SACD.
19. Структура данных в формате SACD. Блок ECC, сектор данных, физический сектор.
20. Записываемые диски CD-R, DVD-R, CD-RW, DVD-RW. Регистрирующие слои этих дисков.

21. Слежение за дорожкой по методу трех лучей.
22. Формат DVD. Общее описание. Конструкция дисков DVD.
23. Какие физические характеристики и каким образом обеспечивают увеличение информационной емкости BD-диска более чем в 5 раз в сравнении с диском DVD?
24. Регистрирующие материалы дисков BD-R: органический (ф.Fuji) и неорганический (ф.TDK).
25. Блок ECC в формате BluRay. Корректирующие возможности кодов ECC. Пикет-байты. BIS-код, его назначение и содержание данных.
26. Вобуляция и ее параметры в формате BluRay. Кодирование адресных данных с помощью вобуляции направляющей дорожки. Лог. 0 и 1 данных ADIP. Модуляция MSK и STW.
27. Три основные технологии мастеринга BD-дисков.
28. Файловая система и структура данных BD-диска.
29. Конструкция диска BluRay (однослойного и двухслойного).
30. Стратегии записи дисков BD-R.
31. Канальная модуляция в формате BluRay
32. Технологии тиражирования BD-дисков.
33. Два основных способа формирования магнитограммы на магнитооптическом носителе.
34. Парамагнетики, диамагнетики и ферромагнетики. Закон Кюри-Вейса. Какие материалы являются наиболее привлекательными для магнитооптической записи?
35. Эффект Керра и его использование при воспроизведении магнитооптической записи.
36. Структура магнитооптического минидиска. Вобуляция. Данные ADIP.
37. Формат DASH. Общее описание.
38. Структура данных в формате DASH.
39. Защита от ошибок в формате DASH.
40. Модуляция данных в формате DASH.
41. Канал управления в формате DASH. Структура сектора.
42. Формат R-DAT. Общее описание.
43. Канальное кодирование в формате R-DAT (общее описание принципов).
44. Служебная информация, содержащаяся в зоне ИКМ-данных в формате R-DAT (кроме ID7).
45. Контроль качества фонограмм в профессиональной записи на DAT-магнитофон.
46. Основное содержание информации, записываемой на DAT-ленту, и принципы ее размещения на дорожках.
47. Автотрекинг в магнитофонах DAT.
48. Функция электронного редактирования в DAT-магнитофонах.
49. Система защиты от ошибок в формате R-DAT.

50. Расположение дорожек записи на DAT-ленте. Азимутальный способ записи.
51. Структура блока данных в формате DAT.
52. Особенности воспроизведения высокоплотной цифровой магнитной записи.
53. Форматы ADAT и DTRS.
54. Продольная запись на магнитный диск.
55. Конструкция HDD-накопителя.
56. Термомагнитная запись на магнитный диск.
57. Перпендикулярная запись на магнитный диск.
58. Физическая и логическая структура жесткого диска.
59. Магнитные головки для записи информации на жесткий диск (только общая характеристика всех типов).
60. GMR-сенсор. Конструкция и принцип действия.
61. Двухтранзисторная ячейка SSD и принцип ее работы.
62. Ячейки SLC и MLC.
63. Основные архитектуры flash-SSD (NOR, NAND).
64. Полевой транзистор с плавающим затвором и принцип его работы.
65. Ячейка SST и принцип ее работы.
66. Что такое случайная ошибка и что такое пакет ошибок. Методы борьбы с ними.
67. Сколько ошибок могут обнаружить и сколько исправить коды C1 и C2 в формате CD?
68. Что такое стирание и сколько стираний может исправить код C1 (или C2).
69. Что такое синхрогруппа и для чего она нужна.
70. Что такое DSV и как эта величина используется при формировании цифрового потока данных для записи на носитель?
71. Стратегии формирования соединительных разрядов кода EFM.
72.Что означают 16 бит «CRC» в структуре блока служебных данных канала Q формата CD.
73. Что такое вводная дорожка компакт диска, где она располагается и какую информацию содержит?
74. Что такое состояние с инверсной населенностью и чем оно характеризуется?
75. Оптический резонатор полупроводникового лазера.
76. Что такое гетероструктура?
77. Коллиматор. Его назначение.
78. Принцип работы исполнительного механизма автофокусировки.
79. Каким образом устраняются детонации в цифровой звукозаписи?
80. За счет чего достигается повышение плотности записи в оптических методах?
81. Что такое самосинхронизация и какими методами она достигается?

82. Почему пылинки и царапины на поверхности оптического диска практически не влияют на качество его воспроизведения?
83. Какой материал используется для изготовления основы дисков CD, DVD и BluRay?
84. Что такое «родительский код» в формате DVD?
85. Технологии записи дисков BluRay «in pit» и «on pit».
86. Технологии записи «in groove» и «on groove».
87. Чем руководствовались разработчики диска HD-DVD при создании нового формата?
88. Какие две составляющие обеспечивают систему защиты информации в формате BluRay?
89. Чем определяется емкость каждого слоя записываемого BD-диска в 25 или 27 Гб?
90. Что такое барометрический фильтр в конструкции HDD-накопителя?
91. Что такое фильтр рециркуляции в конструкции HDD-накопителя?
92. Что такое спиновый вентиль?
93. Чем лазерное излучение отличается от естественного света?
94. Цилиндрическая линза и ее назначение?
95. Поляризационный расщепитель луча. Принцип его работы.
96. Четвертьволновая пластинка. Принцип ее работы.
97. Что такое поляризация света? Виды поляризации.
98. Три типа барабанов DAT-магнитофона. Углы охвата.
99. Преимущества и недостатки SSD-накопителей в сравнении с жесткими дисками.
100. Что такое магнитная головка MIG-типа?

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Элементы теории помехоустойчивого кодирования, необходимые для решения задач

Коды, используемые в данной работе, относятся к классу линейных блоковых систематических кодов, построенных над полем ***GF***(2), т.е. являются двоичными кодами.

Существует два основных класса кодов: блоковые и древовидные. ***Блоковый код*** характеризуется тем, что последовательности из $\boldsymbol{k}$ входных информационных символов отображаются в последовательности из $\boldsymbol{n}$ выходных символов, т.е. каждый блок из $\boldsymbol{n}$ символов зависит только от соответствующего блока из $\boldsymbol{k}$ символов и не зависит ни от каких других блоков.

Древовидный код отображает бесконечную последовательность информационных символов, поступающих со скоростью $\boldsymbol{k_0}$ символов за один интервал времени, в непрерывную последовательность символов кодового слова со скоростью $\boldsymbol{n_0}$ символов за один интервал времени, т.е. каждый набор из $\boldsymbol{n}$ выходных символов зависит как от текущего входного набора символов, так и от некоторого числа предыдущих входных символов [1].

Линейный код – это множество последовательностей длины n над полем GF(q), называемых кодовыми словами, такое, что сумма двух кодовых слов является кодовым словом, и произведение любого кодового слова на элемент поля также является кодовым словом [2].

Систематическим кодом называется код, у которого в процессе кодирования информационные символы не изменяют своего значения и после завершения процедуры кодирования располагаются на первых позициях в кодовом слове. Вычисленные в процессе кодирования дополнительные символы называются ***проверочными символами*** [3]. Проверочные символы располагаются на последних позициях в кодовом слове.

Если в процессе кодирования информационные символы не сохраняют своих значений и в полученном кодовом слове невозможно выделить ни информационные, ни проверочные символы, то такие коды называются ***несистематическими кодами***.

Число информационных символов в кодовом слове систематического кода обозначается буквой $\boldsymbol{k}$, число проверочных – буквой $\boldsymbol{r}$, а общее число символов в кодовом слове – буквой $\boldsymbol{n}$. Обозначается систематический код следующим образом – [$\boldsymbol{n,k}$]. Например, запись [7,4] указывает на то, что общее число символов в кодовом слове равно 7, из них 4 – информационные, а 7 - 4 = 3 – проверочные.

Скорость блокового кода определяется равенством $\boldsymbol{R = k/n}$.

Избыточность блокового кода определяется равенством $\boldsymbol{R_{изб} = r/n}$.

Расстоянием по Хэммингу между двумя q-ичными последовательностями $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ длины $\boldsymbol{n}$ (в том числе кодовыми словами длины $\boldsymbol{n}$) называется число позиций, в которых они различаются. Это расстояние обозначается через $d\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

Например, расстояние между последовательностями $\boldsymbol{x} = 0\underline{10}0\underline{10}11$ и $\boldsymbol{y} = 0\underline{01}0\underline{01}11$ равно четырем (подчеркнутые позиции), т. е. d (01001011, 00100111) = 4.

Минимальным весом w по Хэммингу некоторой последовательности называется число ненулевых позиций в ней. Например, w (01001011) = 4.

Наименьшее из всех расстояний по Хэммингу между различными парами кодовых слов называется ***минимальным кодовым расстоянием*** данного кода.

Теорема о минимальном кодовом расстоянии (***граница Синглтона***) (без доказательства). Минимальное расстояние любого линейного $[n,k]$-кода удовлетворяет неравенству

$$d_{\min} \le 1 + n - k.$$

Чаще всего, $d_{\min} < 1 + n - k$. Точное его значение можно определить по порождающей матрице $\boldsymbol{G}$ рассматриваемого кода (см. ниже), строками которой являются кодовые слова всего с одним ненулевым символом в информационной части. Кодовое слово минимального веса, взятое из пространства строк матрицы $\boldsymbol{G}$, и определит точное значение минимального кодового расстояния $d_{\min}$.

Код, минимальное расстояние которого удовлетворяет равенству

$$d_{\min} = 1 + n - k,$$

называется ***кодом с максимальным расстоянием***.

Минимальное кодовое расстояние характеризует обнаруживающую и исправляющую способность кода [2].

Если $\boldsymbol{t_o}$ – число ошибок, которые код может обнаружить, а $\boldsymbol{t_u}$ – число ошибок, которое код может исправить, то

$$t_o = d_{\min} - 1$$

$t_u = \dfrac{d_{\min} - 1}{2}$ - для нечетных значений $d_{\min}$, и

$t_u = \dfrac{d_{\min} - 2}{2}$ - для четных значений $d_{\min}$.

Код называется ***циклическим***, если он линеен и любой циклический сдвиг кодового слова также является кодовым словом. Например, если $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ принадлежит коду C, то и $(c_{n-1}, c_0, \ldots, c_{n-2})$ и $(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_0)$ также принадлежат коду C.

Кодами Хэмминга называются коды, у которых

$$n = 2^r - 1,\ \text{а}\ k = 2^r - 1 - r.$$

Кодирование блоковых кодов состоит в том, что каждому из k-символьных информационных слов ставится в соответствие n-символьное кодовое слово, причем у систематических кодов первые k символов являются исходными информационными символами. Дополнительные $r = n\text{-}k$ символов называются ***проверочными*** и определяются по k информационным, исходя из определенных правил. У двоичных кодов для этого чаще всего используется проверка на четность, т.е. результат сложения некоторых информационных символов и одного из проверочных по модулю 2, с таким расчетом, чтобы полученная сумма была равна 0. Число таких проверок, разумеется, равно числу проверочных символов r.

Например, для того чтобы кодировать 3-символьные информационные слова в 6-символьные кодовые (код [6,3]), необходимо задать 3 проверки на четность, определяющие значения трех проверочных символов. Это можно сделать следующим образом:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = b_1 \\ a_2 + a_3 = b_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1.1)$$

где a_1, a_2, a_3 – информационные символы, а b_1, b_2, b_3 – проверочные символы. То же самое можно записать в другом виде:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + b_1 = 0 \\ a_2 + a_3 + b_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + b_3 = 0 \end{cases} \qquad (1.2)$$

Однако вместо того чтобы явно выписывать уравнения для проверок на четность, часто более удобным оказывается использовать матричные обозначения. Матрица, содержащая ту же информацию, что и система уравнений для проверок на четность, называется ***проверочной матрицей H***.

$$\boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} 1\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,0\,0\,1 \end{vmatrix}$$

Каждый столбец матрицы H соответствует некоторому символу кодового слова: первые три столбца – информационным символам, а последние три – проверочным. Соотношение, выражаемое первой строкой, состоит в том, что четвертый символ является суммой a_1 и a_2. Аналогично вторая строка указывает, что пятый символ является суммой a_2 и a_3 и т.д. Такая форма записи матрицы ***H*** называется ***канонической*** [4]. Это значит, что первые k столбцов задают информационные символы, которые входят во все уравнения, в то время как последние $n - k$ столбцов образуют единичную матрицу $\boldsymbol{I}_{n\text{-}k}$.

$$\boldsymbol{H} = \left|\begin{array}{c|c} 1\,1\,0 & 1\,0\,0 \\ 0\,1\,1 & 0\,1\,0 \\ 1\,1\,1 & 0\,0\,1 \end{array}\right| = \left|\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{I}_{n\text{-}k}\right|$$

Таким образом, если некоторый набор символов ***a*** длины *n* является кодовым словом, то должно выполняться равенство:

$$\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}} = 0 \quad (1.3)$$

где $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}$ – матрица-столбец, составленная из символов, входящих в набор ***a***. Это равенство называется ***условием ортогональности***.

Используя проверочную матрицу, легко построить ***кодер*** заданного ею кода (рис. 1.1). Для этого на входы сумматоров по модулю 2, формирующих значения проверочных символов b_1, b_2 и b_3, из соответствующих им строк матрицы ***H*** подаются те значения a_1, a_2 и a_3, которым соответствуют «единицы».

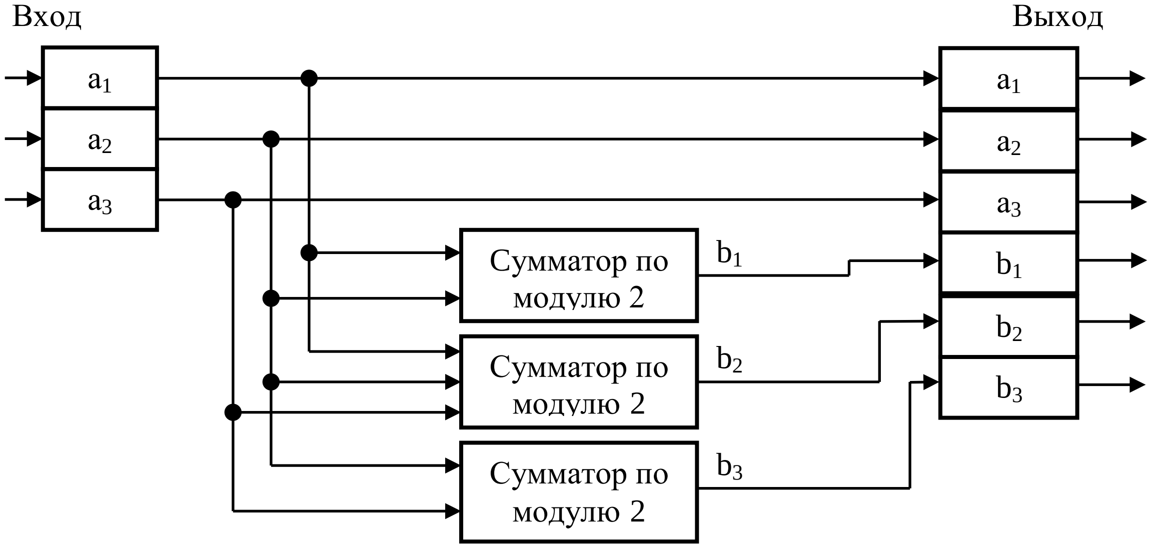


Рис. 1.1. Кодер кода [6,3]

Для построения ***декодера*** можно использовать систему уравнений (1,2), эквивалентом которой является матрица ***H*** (рис. 1.2). Символы каждой строки подаются на вход одного из трех сумматоров по модулю 2. Если в принятом кодовом слове ошибок нет, то все три уравнения системы выполняются, и на выходах всех трех сумматоров будут «нули». Если в одном из символов есть ошибка, то те уравнения, где есть этот символ, выполняться не будут. На выходах сумматоров получится некоторый набор «единиц» и «нулей», которые называются ***синдромами S***. Для каждого из символов кодового слова этот набор будет своим, поэтому с помощью логической схемы можно сформировать «1» на том ее выходе, который соответствует ошибочному символу, и исправить его путем простого инвертирования.

Следует отметить, что ошибке в первом символе будет соответствовать набор синдромов, эквивалентный ее первому столбцу, ошибке во втором символе – второму столбцу и ошибке в третьем символе – третьему столбцу.

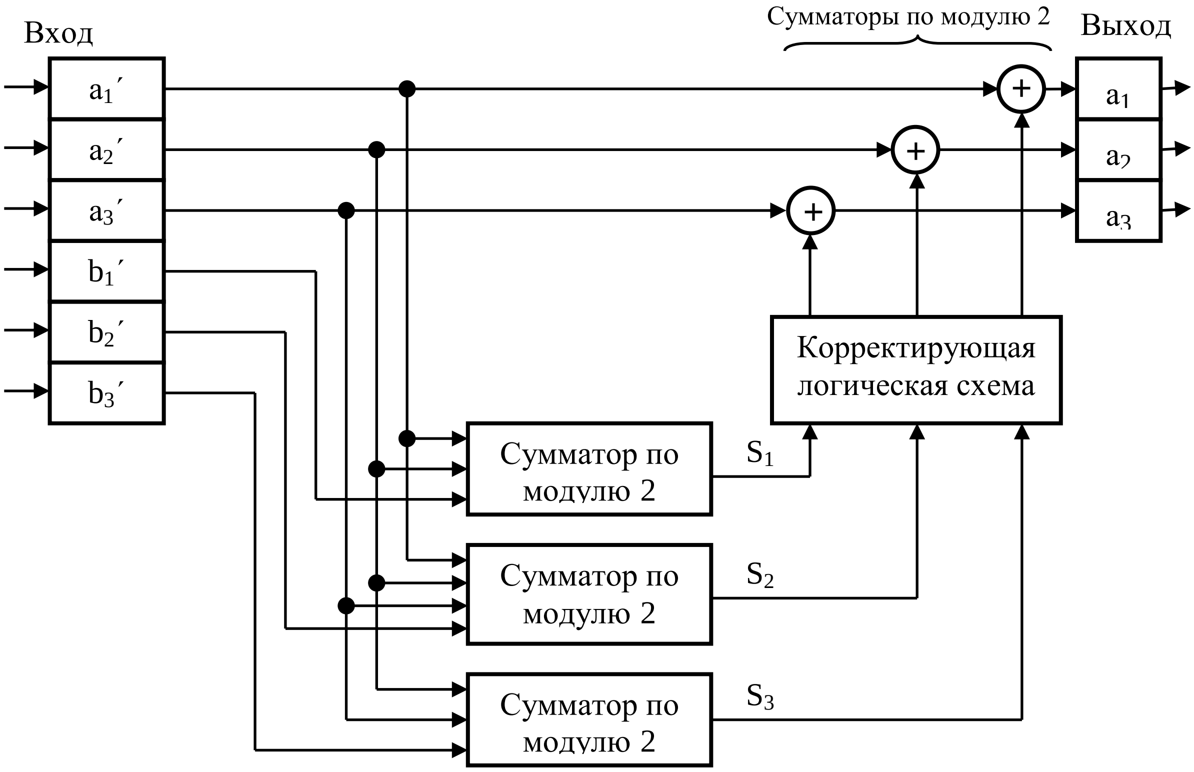


Рис.1.2. Декодер кода [6,3]

Код можно задать и другим способом, который также является компактным выражением метода кодирования. Для этого используется матрица $\boldsymbol{G}$, которая называется ***порождающей матрицей*** кода. Порождающей она называется потому, что если информационное слово $\boldsymbol{i}$ длины k умножить на матрицу $\boldsymbol{G}$, то должно получиться кодовое слово $\boldsymbol{a}$ длины n, т.е. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{iG}$.

Чтобы понять, как должна выглядеть порождающая матрица, вспомним, что сумма по модулю 2 двух любых кодовых слов также является кодовым словом. Несколько раз используя это свойство, получаем, что любая линейная комбинация кодовых слов (при сложении по модулю 2) также является кодовым словом. Поскольку информационные символы выбираются независимо, можно надеяться, что существуют кодовые слова, каждое из которых содержит ровно один символ «1» в информационной части кодового слова. Тогда все 2^k кодовых слов можно будет получить как 2^k возможных линейных комбинаций этих k кодовых слов или ***базисных векторов*** (если код рассматривать как линейное векторное пространство, что и в самом деле является справедливым).

Попробуем найти три различных кодовых слова кода [6,3], упомянутого выше, каждое из которых содержит единственный символ «1» на первых трех позициях. Предположим, что первое из этих кодовых слов имеет вид 1 0 0 b_{11} b_{12} b_{13}. Умножая кодовый вектор на каждую из строк матрицы $\boldsymbol{H}$, находим, что b_{11}, b_{12}, b_{13} должны быть элементами ее первого столбца, т.е. набором 101. Аналогично, полагая, что второе кодовое слово имеет вид 0 1 0 b_{21} b_{22} b_{23}, получаем, что элементы b_{21} b_{22} b_{23} совпадают с элементами второго столбца матрицы $\boldsymbol{H}$, т.е. набором 111 и т.д. Таким образом, проверочные символы каждого из трех кодовых слов с единственным символом «1» на первых трех позициях совпадают с одним из первых трех столбцов проверочной матрицы $\boldsymbol{H}$. Если сформировать из этих трех кодовых слов матрицу, то эта матрица и будет порождающей матрицей $\boldsymbol{G}$ кода [6,3].

$$\boldsymbol{G} = \begin{vmatrix} 1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1 \end{vmatrix}$$

Анализируя строки матрицы $\boldsymbol{G}$, можно отметить, что минимальное кодовое расстояние кода [6,3] $d_{\min} = 3$, поскольку первая и третья строки матрицы содержат по три «единицы».

Любое кодовое слово кода [6,3] может быть получено как линейная комбинация строк этой матрицы. В канонической форме матрица $\boldsymbol{G}$ всегда состоит из единичной матрицы размерности $k{\times}k$, к которой присоединена $k{\times}(n\text{-}k)$-матрица проверочных символов.

$$\boldsymbol{G} = \left|\begin{array}{c|c} 1\,0\,0 & 1\,0\,1 \\ 0\,1\,0 & 1\,1\,1 \\ 0\,0\,1 & 0\,1\,1 \end{array}\right| = \left|\boldsymbol{I}_k \middle| \boldsymbol{B}\right|$$

Проверочная часть порождающей матрицы получается из матрицы $\boldsymbol{H}$ (в канонической форме) транспонированием подматрицы, образованной первыми k столбцами.

Любое информационное слово $\boldsymbol{i}$ кодируется в кодовое слово $\boldsymbol{a}$ путем умножения на порождающую матрицу $\boldsymbol{G}$. Например, если $\boldsymbol{i} = 011$, то

$$\boldsymbol{a} = |0\,1\,1| \begin{vmatrix} 1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1 \end{vmatrix} = |0\,1\,1\,1\,0\,0|$$

Следует отметить, что проверочная часть первой строки матрицы $\boldsymbol{G}$ эквивалентна первому столбцу матрицы $\boldsymbol{H}$, проверочная часть второй строки – второму столбцу и проверочная часть третьей строки – третьему столбцу.

Циклические коды, в силу их алгебраической структуры, проще всего задавать с помощью порождающего многочлена $g(x) = g_r x^r + g_{r-1} x^{r-1} + \ldots + g_1 x + g_0$ с коэффициентами из поля GF(q). В случае двоичного поля коэффициентами g(x) будут 0 и 1.

В качестве неприводимого многочлена может использоваться один из неприводимых многочленов степени $n\text{-}k = r$. Кодовые слова циклического кода состоят из всевозможных произведений многочленов степени не выше k–1 (информационных слов длины k) на порождающий многочлен g(x).

Таким образом, любое кодовое слово циклического кода должно делиться на g(x) без остатка. Если при делении принятого кодового слова на g(x) получается остаток не равный 0, значит, в нем имеется ошибка. Остаток от деления может служить синдромом ошибки. Так же, как и в случае матричного задания кода, по характеру синдромов можно определить в каком именно символе произошла ошибка.

Кодирование циклических кодов реализуется с помощью регистров сдвига с обратными связями. Величина обратной связи соответствует коэффициенту при x в соответствующей степени. В случае двоичных кодов «1» соответствует наличию связи, а «0» - ее отсутствию. Например, для $g(x) = x^3 + x + 1$ будет выглядеть, как показано на рис. 1.3.

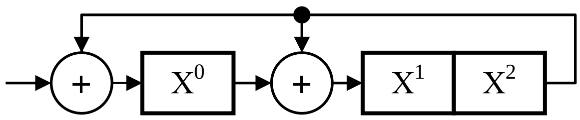


Рис. 1.3. Схема умножения на многочлен $\boldsymbol{g(x) = x^3 + x + 1}$.

С помощью такой схемы можно выполнять кодирование кода [7,4]. Однако кодовые слова, полученные с помощью такой схемы, будут несистематическими. Чтобы избавиться от этого неудобства, вместо умножения информационного многочлена на g(x) используют предварительное умножение его на x^r и последующее деление на g(x). Остаток суммируют с делимым. Для этого используют схему, как показано на рис. 1.4, где выполняется предварительное умножением на x^r, где $r = 3$. Код при этом получится тот же самый, но кодовые слова будут систематическими, т.е. на первых позициях будут располагаться информационные символы, а на последних – остаток от деления информационного многочлена на порождающий.

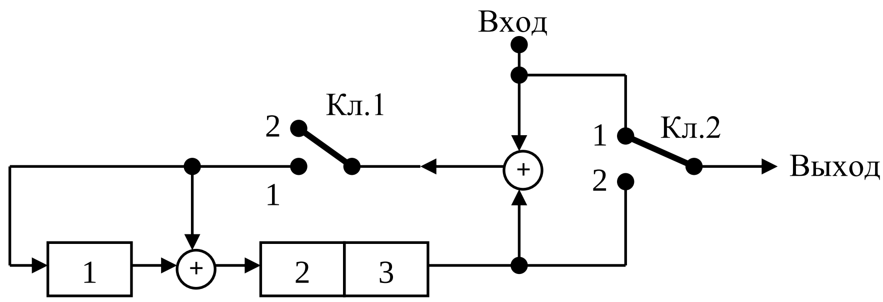


Рис. 1.4. Кодер циклического кода [7,4] с предварительным умножением на x^3 и последующим делением на $g(x) = x^3 + x + 1$.

Декодирование циклического кода состоит в делении кодового слова на порождающий многочлен g(x) с помощью схемы, подобной показанной на рис. 1.3, и анализе полученного остатка. Если остаток равен 0, то ошибок нет, если не равен, то такой остаток рассматривается как синдром и по характеру синдрома определяется положение ошибки и производится ее коррекция, как и в случае матричного задания кода. Для того чтобы найти проверочную матрицу, используют связь многочленов, выражающих кодовые слова циклических кодов, с элементами конечных полей. Для некоторых n столбцы проверочных матриц циклических [n, k]-кодов (например, кодов Хэмминга), являются элементами конечного поля $GF(2^{n-k})$ с тем же самым порождающим многочленом g(x), т.е. проверочную матрицу кода [7,4] можно записать как

$$\boldsymbol{H} = \left| 1\ \alpha\ \alpha^2\ \alpha^3\ \alpha^4\ \alpha^5\ \alpha^6 \right|$$

где α – примитивный элемент поля $GF(2^3)$ = 010.

Найти элементы поля $GF(2^3)$ можно, используя схему на рис. 1.3. Для этого нужно записать в крайнюю левую ячейку «1» (элемент $\alpha^0 = 1$ или 100) и сделать еще 6 сдвигов вправо. Каждый сдвиг будет соответствовать умножению на α, т.е. при этом степень α будет увеличиваться на единицу: после первого сдвига получим α^1 (010), после второго - α^2 (001), после третьего - α^3 (110), после четвертого – α^4 (011) и так далее до α^6. Всего должно быть 7 сдвигов. В результате получим все 7 столбцов матрицы ***H***.

Вероятность $P_{отк}$ отказа от декодирования декодера [n,k]-кода можно найти по формуле:

$$P_{отк} = 1 - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p^i (1-p)^{n-i} ,$$

где p – вероятность ошибки в канале, а $\alpha_i = C_i^n$ - число картин ошибок кратности i в кодовом слове из n символов ($C_i^n = \dfrac{n!}{(n-i)! \cdot i!}$).

<u>Внимание!</u> При расчете вероятности $P_{отк}$ следует помнить, что величина эта очень маленькая, поэтому вычисления нужно производить с возможно большим числом значащих цифр после запятой – ничего не отбрасывая и не округляя. Верным признаком того, что количества значащих цифр после запятой недостаточно, служит факт получения отрицательного значения вероятности $P_{отк}$, чего в принципе быть не может.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
Пример выполнения элементов задания

Пусть задан код Хэмминга с порождающим многочленом g(x) = x^3 + x + 1. Вероятность ошибки в канале записи/воспроизведения p = 10^{-5}.

1. Кодами Хемминга называются коды, длина которых $n = 2^r - 1$. Величина r (количество проверочных символов в кодовом слове) заданного кода равна степени порождающего многочлена $g(x)$, т.е. $r = 3$. Следовательно, длина кодового слова заданного кода $n = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$. Количество информационных символов в кодовом слове $k = n - r = 7 - 3 = 4$. Значит, заданный код является кодом Хэмминга [7,4].

Скорость кода $R = k/n = 4/7$.

Избыточность кода $R_{изб} = r/n = 3/7$.

Минимальное кодовое расстояние кода $d_{min} \leq n - k + 1 = 3 + 1 = 4$ (граница Синглтона). Точное значение d_{min} определим позже – после того, как построим порождающую матрицу G кода.

2. Проверочную матрицу H заданного кода можно отыскать двумя способами.

Первый способ – с помощью регистра сдвига с обратными связями, осуществляющего последовательное деление степеней x, отождествляемого примитивному элементу α поля GF(2^3), начиная от x^0 до x^6, на порождающий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$.

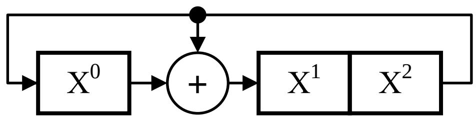
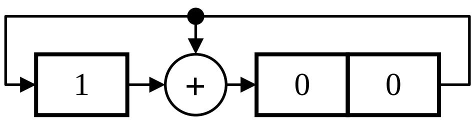
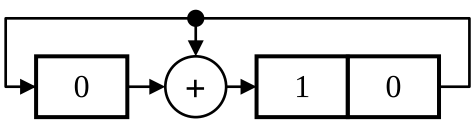


Рис. 2.1. Схема деления на многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$.

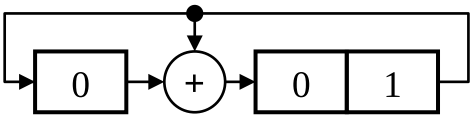
Проверочная матрица H должна содержать 7 столбцов (количество столбцов равно длине кодового слова n)и 3 строки (количество строк равно количеству проверочных символов r). Следовательно, для того, чтобы найти эти 7 столбцов, нужно выполнить 7 сдвигов вправо «единицы», которая записывается первым тактовым импульсом в крайнюю левую ячейку регистра, соответствующую x^0.



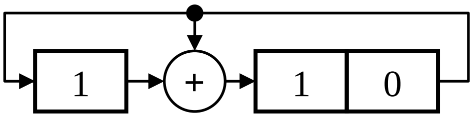
Таким будет содержимое регистра после 1-го такта



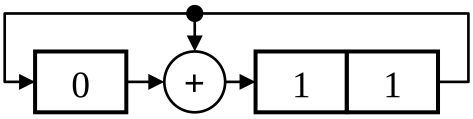
Таким будет содержимое регистра после 2-го такта



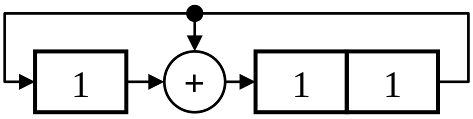
Таким будет содержимое регистра после 3-го такта



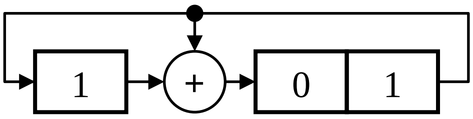
Таким будет содержимое регистра после 4-го такта



Таким будет содержимое регистра после 5-го такта



Таким будет содержимое регистра после 6-го такта



Таким будет содержимое регистра после 7-го такта

Получим 7 троек двоичных символов, которые соответствуют 7 столбцам матрицы $\boldsymbol{H}$. Для того чтобы записать матрицу $\boldsymbol{H}$ в канонической форме, тройки символов следует расположить следующим образом:

100 – 7-й столбец
010 – 6-й столбец
001 – 5–й столбец
110 – 4-й столбец
011 – 3-й столбец
111 – 2-й столбец
101 – 1-й столбец

В результате, матрица $\boldsymbol{H}$ будет иметь вид:

$$\boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} 1\,1\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1 \end{vmatrix}$$

<u>Второй способ</u> состоит в непосредственном делении $\boldsymbol{x}$ в соответствующей степени на многочлен $\boldsymbol{g(x) = x^3 + x + 1}$ и представлении остатка от деления в двоичной форме.

$x^0 \rightarrow 100$
$x^1 \rightarrow 010$
$x^2 \rightarrow 001$
$x^3 = x + 1 \rightarrow 110$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^3 + x + 1 \\ \hline + \; \underline{x^4 + x^2 + x} & x \\ x^2 + x \rightarrow 011 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l}
\boldsymbol{x}^5 & \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x} + 1 \\
+\underline{\boldsymbol{x}^5 + \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x}^2} & \boldsymbol{x}^2 + 1 \\
\quad \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x}^2 & \\
+\underline{\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x} + 1} & \\
\quad \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x} + 1 \rightarrow 111 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\boldsymbol{x}^6 & \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x} + 1 \\
+\underline{\boldsymbol{x}^6 + \boldsymbol{x}^4 + \boldsymbol{x}^3} & \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x} + 1 \\
\quad \boldsymbol{x}^4 + \boldsymbol{x}^3 & \\
+\underline{\boldsymbol{x}^4 + \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x}} & \\
\quad \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x} & \\
+\underline{\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x} + 1} & \\
\quad \boldsymbol{x}^2 + 1 \rightarrow 101 &
\end{array}
$$

Получим те же самые 7 троек двоичных чисел, которые соответствуют тем же 7 столбцам матрицы ***H***, что и при первом способе:

100 – 7-й столбец
010 – 6-й столбец
001 – 5–й столбец
110 – 4-й столбец
011 – 3-й столбец
111 – 2-й столбец
101 – 1-й столбец

3. Для того, чтобы найти порождающую матрицу ***G***, запишем матрицу ***H*** в виде системы уравнений проверки на четность:

$$
\begin{cases}
a_1 + a_2 + a_3 + b_1 = 0 \\
a_2 + a_3 + a_4 + b_2 = 0 \\
a_1 + a_2 + a_4 + b_3 = 0
\end{cases}
\qquad (2.1)
$$

Последовательно приравнивая «единице» каждый из информационных символов a_1, a_2, a_3 и a_4, найдем порождающую матрицу ***G***:

$$
\boldsymbol{G} = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{vmatrix}
$$

Из матрицы ***G*** видно, что минимальное кодовое расстояние данного кода $d_{\min} = 3$ (1-я, 3-я и 4-я строки).

Следовательно, количество ошибок $t_и$, которое данный код может гарантированно исправить

$$t_и = \frac{d - 1}{2} = 1.$$

Количество ошибок $t_о$, которое данный код может гарантированно обнаружить

$$t_о = d - 1 = 2.$$

4. Для того чтобы найти матрицы синдромов, воспользуемся системой уравнений (2.1). Синдром – это результат проверки выполнения уравнения этой системы, т.е.

$$
\begin{cases}
a_1 + a_2 + a_3 + b_1 = \boldsymbol{S_1} \\
a_2 + a_3 + a_4 + b_2 = \boldsymbol{S_2} \\
a_1 + a_2 + a_4 + b_3 = \boldsymbol{S_3}
\end{cases}
\qquad (2.2)
$$

Если в принятом кодовом слове ошибок нет, то все синдромы будут равны 0, и матрица синдромов S будет выглядеть так:

$$\boldsymbol{S} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{S1} \\ \boldsymbol{S2} \\ \boldsymbol{S3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Если ошибка произойдет в символе a_1, то не будут выполняться 1-е и 3-е равенства этой системы, и матрица синдромов будет выглядеть как

$$\boldsymbol{S_{a1}} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Если ошибка произойдет в символе a_2, то не будет выполняться ни одно равенство этой системы, и матрица синдромов будет выглядеть как

$$\boldsymbol{S_{a2}} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Если ошибка произойдет в символе a_3, то не будут выполняться 1-е и 2-е равенства этой системы, и матрица синдромов будет выглядеть как

$$\boldsymbol{S_{a3}} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Если ошибка произойдет в символе a_4, то не будут выполняться 2-е и 3-е равенства этой системы, и матрица синдромов будет выглядеть как

$$\boldsymbol{S_{a4}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Если ошибка произойдет в одном из проверочных символов b_1, b_2 или b_3, то не будет выполняться только одно из равенств системы (2.1) и в матрице синдромов будет только одна единица:

$$\boldsymbol{S_{b1}} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{S_{b2}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{S_{b3}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

5. Схема кодера Хэмминга [7,4] будет выглядеть, как показано на рис. 2.2, где каждый из трех сумматоров по модулю 2 выполняет операцию соответствующую одному из трех уравнений системы (2.3), полученной из системы уравнений (2.1).

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = b_1 \\ a_2 + a_3 + a_4 = b_2 \\ a_1 + a_2 + a_4 = b_3 \end{cases} \qquad (2.3)$$

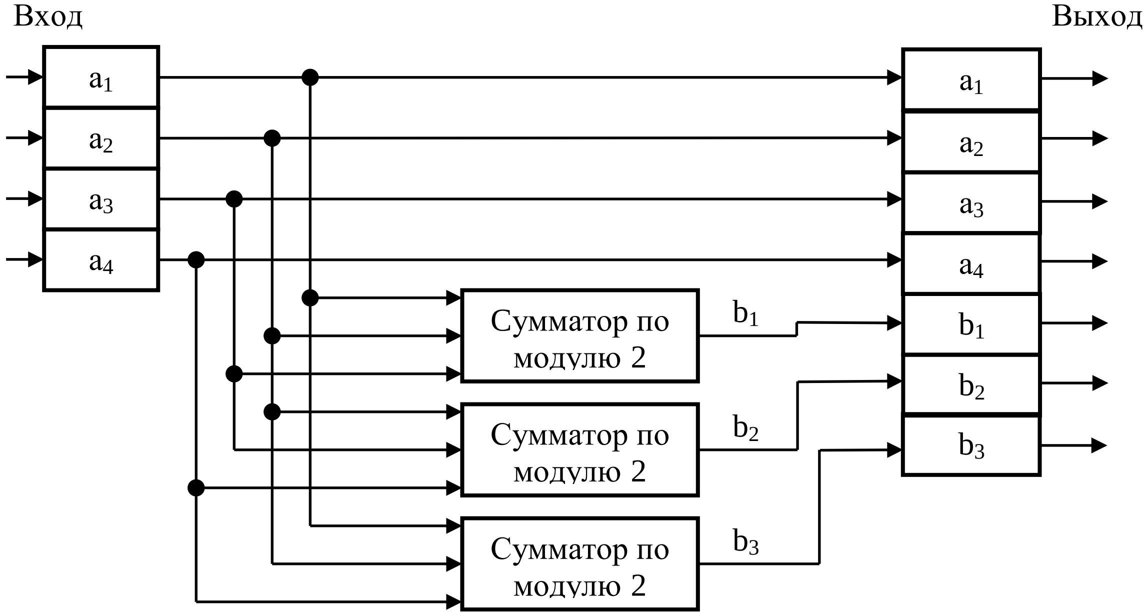


Рис. 2.2. Кодер Хэмминга [7,4]

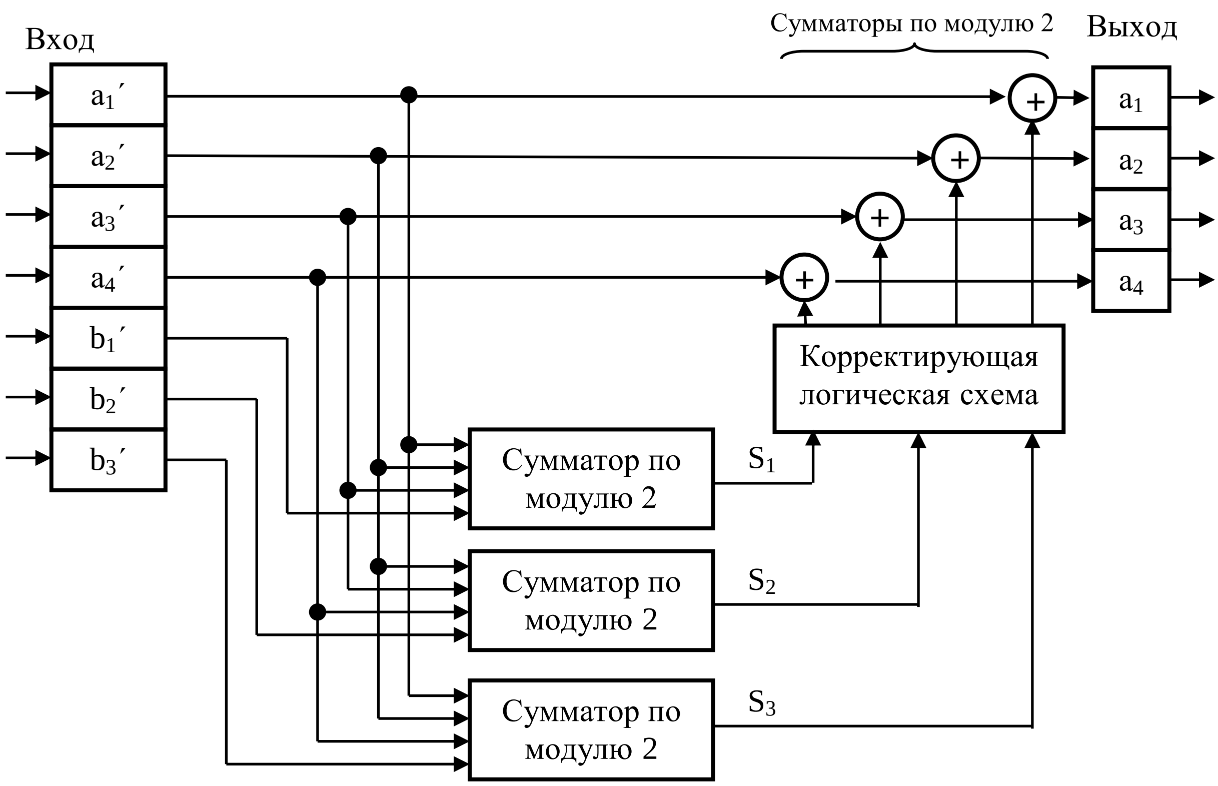


Рис.2.3. Декодер Хэмминга [7,4]

Схема декодера Хэмминга [7,4] будет выглядеть, как показано на рис.2.3, где каждый из трех сумматоров по модулю 2 выполняет операцию соответствующую одному из трех уравнений системы (2.2).

Корректирующая схема, показанная на рис. 2.4, содержит четыре трехвходовые схемы «И» (&), на входы которых подаются наборы синдромов, соответствующие матрицам синдромов $\boldsymbol{S_{a1}}$, $\boldsymbol{S_{a2}}$, $\boldsymbol{S_{a3}}$ и $\boldsymbol{S_{a4}}$, и формирует «1» на том выходе, который соответствует символу, в котором зарегистрирована ошибка, и который требуется исправить путем простого инвертирования.

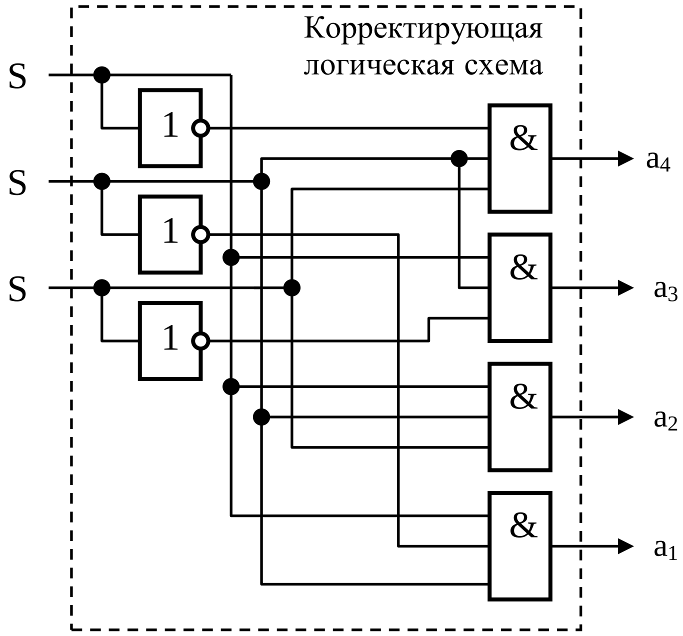


Рис. 2.4. Корректирующая логическая схема

Если код [7,4] рассматривать как циклический код, то схема для его кодирования будет выглядеть как показано на рис. 2.5. В отличие от кодера Хэмминга, который является параллельным (т.е. кодовые слова подаются на него в параллельном коде и кодируются за один такт), кодер циклического кода является последовательным, т.е. кодовые слова подаются на его вход в последовательном коде – побитно, и преобразование осуществляется за $\boldsymbol{n}$ тактов (в данном случае – за 7 тактов).

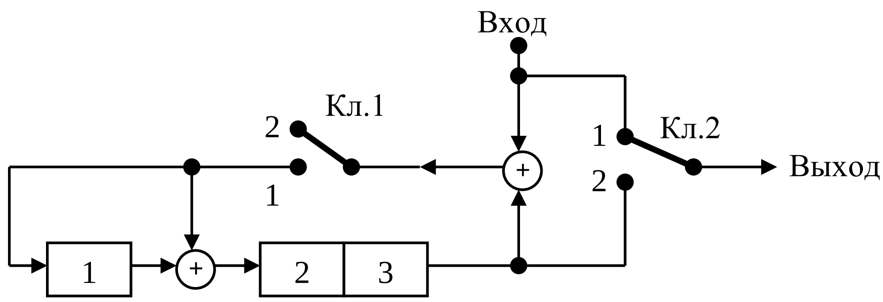


Рис. 2.5. Кодер циклического кода [7,4].

В течение первых $\boldsymbol{k}$ тактов (в рассматриваемом случае $\boldsymbol{k}$ = 4) ключи Кл.1 и Кл.2 находятся в положении 1 и $\boldsymbol{k}$ информационных символов поступают со входа на выход кодера и одновременно на регистр сдвига с обратными связями, осуществляющий деление последовательности символов на порождающий многочлен $\boldsymbol{g(x) = x^3 + x + 1}$. После того как информационные символы введены, ключи Кл.1 и Кл.2 переводятся в положение 2 и полученный в ячейках регистра остаток от деления выводится на выход за последние $\boldsymbol{n - k = r}$ тактов (в рассматриваемом случае $\boldsymbol{r}$ = 7 – 4 = 3).

Схема декодера циклического кода [7,4] приведена на рис. 2.6. Декодирование здесь также осуществляется в последовательном коде, т.е. побитно. Корректирующая схема соответствует той, что изображена на рис. 2.4, а устройство деления на порождающий многочлен g(x) показано на рис. 2.7.

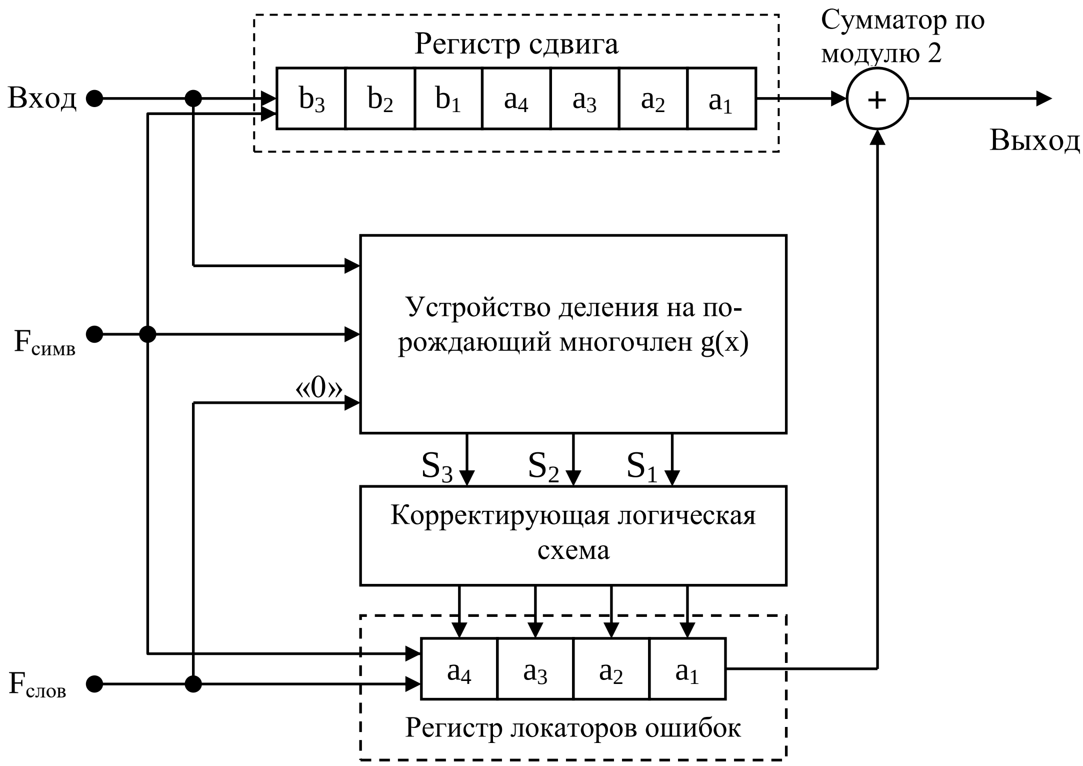


Рис. 2.6. Декодер циклического кода [7,4]

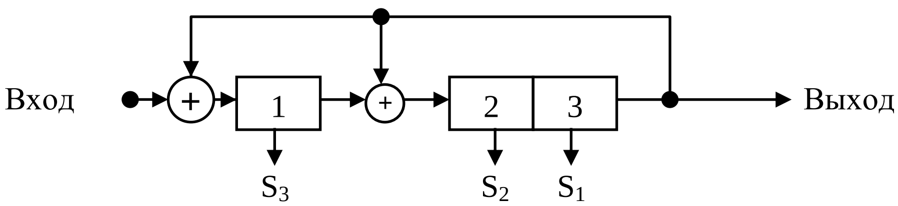


Рис.2.7. Схема устройства деления на порождающий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$.

Декодирование осуществляется следующим образом. Символы кодового слова последовательно бит за битом вводятся в регистр сдвига и одновременно подаются на вход устройства деления на порождающий многочлен g(x), ячейки которого перед этим должны быть обнулены. Ввод символов осуществляется тактовыми импульсами частоты $F_{симв}$ (рис. 2.8). После того как в регистр сдвига записан последний 7-й символ кодового слова, в ячейках устройства деления на порождающий многочлен окажется вычисленный остаток от деления этого слова на g(x), т.е. синдромы $\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{S_2}$ и $\boldsymbol{S_3}$. Если все они будут равны «0» (ошибок нет), то и на выходе корректирующей логической схемы также будут все «нули». Если в одном из символов присутствует ошибка, то часть синдромов или все они будут иметь значения «1». При этом на одном из четырех выходов корректирующей логической схемы, соответствующем ошибочному информационному символу, появится «единица». Импульсом сигнала $F_{слов}$, который должен располагаться между 7-м и 1-м импульсами частоты $F_{симв}$ (см. рис. 2.8), результат коррекции записывается в регистр локаторов ошибок, а ячейки схемы устройства деления на порождающий многочлен обнуляются, подготавливая ее для обработки следующего кодового слова.

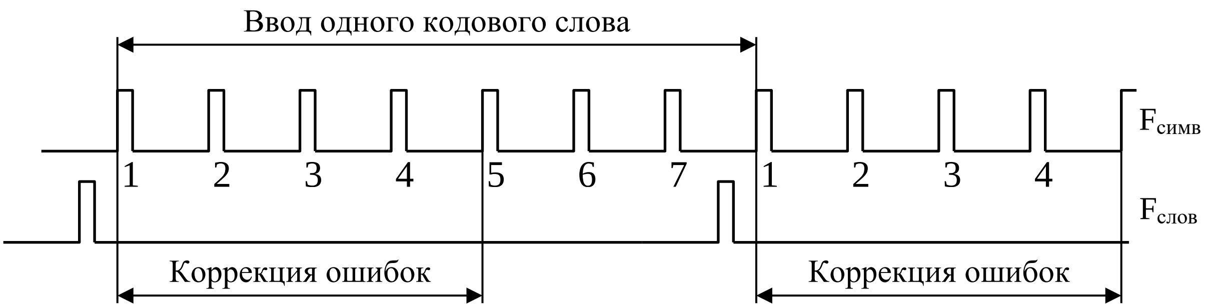


Рис. 2.8. Временные диаграммы работы декодера циклического кода [7,4]

После этого в течение четырех тактов производится коррекция обнаруженных ошибок: информационные символы из регистра сдвига и локаторы ошибок из регистра локаторов ошибок последовательно поступают на входы сумматора по модулю 2 и ошибочные символы инвертируются, что и будет означать их коррекцию. Одновременно с этим ячейки регистра сдвига будут заполняться символами следующего кодового слова, а схема деления на порождающий многочлен – производить их деление на g(x), т.е. начнется процесс декодирования очередного кодового слова.

6. Вероятность отказа от декодирования рассчитывается по формуле:

$$P_{отк} = 1 - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p^i (1-p)^{n-i},$$

где p – вероятность ошибки в канале, а $\alpha_i = C_i^n$ - число картин ошибок кратности i в кодовом слове из n символов.

Для заданного кода длины $n = 7$, исправляющего одну ошибку, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 7$. При заданной вероятности ошибки в канале $p = 10^{-5}$, вероятность отказа от декодирования $P_{отк}$ составит:

$P_{отк} = 1 - (1 - p)^7 - 7p(1 - p)^6 = 1 - 0{,}99993 - 0{,}00006999 = 0{,}00000001 = 10^{-8}$

Таким образом, в результате применения кода Хэмминга, исправляющего одну ошибку, вероятность появления ошибки в принятых данных уменьшилась ровно на три порядка.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *В.А. Никамин*. Цифровая звукозапись. Технологии и стандарты.- СПб-Киев.: Наука и техника, 2001, 256 с.
2. *В.А. Никамин*. Стандарты и системы цифровой звукозаписи. Форматы цифровой магнитной записи звука. Учебное пособие**.** - Издательство СПбГУТ, 2012, 163 с.
3. *В.А. Никамин*. Канальная модуляция в системах записи цифровых данных: Монография. – 2-е изд. перераб. и доп. – СПбГУТ. – СПб., 2014. – 160 с.
(или вместо нее - *В.А. Никамин*. Канальная модуляция в системах записи цифровых данных. Учебное пособие. – Издательство СПбГУТ, 2009, 68 с.)
4. *В.А. Никамин*. Формат BluRay. Учебное пособие. - Издательство СПбГУТ, 2010, 72 с.

Дополнительная

5. *В.А. Никамин.* Стандарты и системы цифровой звукозаписи: методические указания к выполнению практических работ (специальность 210312 «Аудиовизуальная техника») / 2-е изд. перераб. и доп. – СПбГУТ. – СПб., 2014. – 80 с.
6. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки – М.: Мир, 1976.
7. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки – М.: Связь, 1979.
8. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки – М.: Мир, 1986.
9. Кларк Дж., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи – М.: Радио и связь, 1987.