

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»
(СПбГУТ)

В. А. Никамин

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕДАХ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

СПб ГУТ)))

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2018**

УДК 621.372(075.8)

ББК 22.336я73

Н 62

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент кафедры телевидения и видеотехники

О. В. Украинский,

доктор технических наук, профессор кафедры режиссуры мультимедиа

Санкт-Петербургского гуманитарного университета профсоюзов

И. А. Алдошина

Утверждено редакционно-издательским советом СПбГУТ

в качестве учебного пособия

Никамин, В. А.

Н 62 Волновые процессы в материальных средах : учебное пособие / В. А. Никамин ; СПбГУТ. – СПб., 2018. – 112 с.

Представлен материал, касающийся волновых процессов в материальных средах. Приводится также описание основ голографии.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 11.03.01 «Радиотехника» и 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».

УДК 621.372(075.8)

ББК 22.336я73

© Никамин В. А., 2018

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича», 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ	5
2. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛН	13
3. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ	16
3.1. Анализ процесса распространения звука	16
3.2. Вывод волнового уравнения	18
3.3. Решения волнового уравнения	23
4. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ТВЕРДОЙ СРЕДЕ	25
5. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ДИФРАКЦИЯ	29
6. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ	32
7. ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ. ДИСПЕРСИЯ	38
8. ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ	41
9. ЗВУКОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ	47
9.1. Скорость звука	47
9.2. Звуковое давление	50
9.3. Восприятие звуковых колебаний	53
9.4. Распространение и затухание звуковых волн	58
9.5. Отражение, поглощение и прохождение звуковых волн	59
9.6. Рефракция (преломление)	60
9.7. Дифракция звуковых волн	61
9.8. Рассеяние	63
10. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ	64
10.1. Природа электромагнитного излучения	64
10.2. Виды электромагнитного излучения	70
10.2.1. Радиоволны	71
10.2.2. Инфракрасное излучение	72
10.2.3. Видимый свет	72
10.2.4. Ультрафиолетовое излучение	76
10.2.5. Рентгеновское излучение	76
10.2.6. Гамма-излучение	77
11. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТОВЫХ ВОЛН. ПРИНЦИП ФЕРМА	79
11.1. Закон Снелла	79
11.2. Принцип наименьшего времени Ферма	80
11.3. Применение принципа Ферма	84
12. ПОЛЯРИЗАЦИЯ	87
12.1. Виды поляризации	87
12.2. Двойное лучепреломление	92
12.3. Поляризаторы	95
12.4. Аномальное преломление	99
13. ГОЛОГРАФИЯ	103
13.1. Физические основы голографии	104
13.2. Голограммы Лейта и Упатниекса	106
13.3. Голограммы Денисюка	109
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	112

ПРЕДИСЛОВИЕ

С колебаниями и волновыми процессами человеку в повседневной жизни приходится встречаться очень часто – гораздо чаще, чем может показаться на первый взгляд. Прежде всего, это биоритмы, сердечные ритмы, ритмы головного мозга, дыхание – без этих процессов жизнь человека невозможна. Причем все эти ритмы у здорового человека должны быть строго синхронны. Если синхронность нарушается, человек сразу чувствует недомогание. Звуки, которые мы слышим – это механические колебания частиц воздуха. Картины окружающего нас мира, которые мы воспринимаем с помощью органов зрения – это электромагнитные колебания очень высокой частоты. Тепло, которое мы ощущаем летом, или в теплом помещении, или в объятиях друг друга, – это тоже электромагнитные колебания, но чуть более низкой частоты в сравнении со светом – в диапазоне инфракрасного излучения. Когда мы говорим с кем-то по мобильному телефону, слушаем радио в автомобиле, определяем свое местоположение с помощью навигатора или просто смотрим дома телевизор, то передачу звука, изображения и прочей информации обеспечивают нам электромагнитные колебания радиодиапазона – еще более низкие, чем в случае световых или инфракрасных волн. Это все, в основном, полезные для человека виды электромагнитных колебаний, которые помогают ему в жизни. А есть и откровенно вредные – гамма-излучение, например. Или рентгеновское излучение в больших дозах.

Чтобы использовать колебательные и волновые процессы в своих интересах максимально эффективно, специалисту необходимо хорошо знать их природу и свойства. Полный курс физики волновых процессов весьма обширен и включает в себя не только звуковые и электромагнитные волны, но и волны на воде, сейсмические, волны де Бройля и многие другие. Даже небольшая часть волновых явлений может стать специальностью, которая поглотит все силы исследователя, а соответствующая литература заполнит не одну библиотечную полку. Тем не менее, «узкие» специалисты, исследующие те или иные, на первый взгляд не связанные друг с другом явления, смогут найти общий язык и понять друг друга. Этот язык основан на понятии волны.

Студентам телекоммуникационных специальностей необязательно в подробностях знать все разделы курса. Достаточно ознакомиться с идеями, общими для всех волновых явлений, в первую очередь с волновым уравнением и его решениями, и более углубленно рассмотреть акустические колебания (звук) и электромагнитные, в том числе световые, волны. К тому же малое время, отведенное на изучение данного курса, иного подхода и не обеспечивает.

1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

В общем случае *волновым процессом* называется любое изменение (возмущение) состояния сплошной среды, распространяющееся с конечной скоростью и несущее энергию.

Существует большое многообразие волновых процессов (типов волн): звуковые волны, сейсмические, волны на поверхности воды, волны механических колебаний в кристаллах, радиоволны, оптические волны. Среди всего многообразия волн выделяют некоторые их простейшие типы, которые возникают во многих физических ситуациях из-за сходства описывающих их физических законов. Законы эти выражаются так называемыми *волновыми уравнениями*. Для непрерывных систем это обычно дифференциальные уравнения в частных производных. Для материальных сред они часто сводятся к уравнениям, связывающим возмущения в соседних точках через пространственные и временные производные этих возмущений.

Выделим два наиболее интересных типа волн: упругие механические и электромагнитные.

Упругие волны (или *акустические* от греческого слова *acustikos* – слуховой) – это волны, связанные с колебаниями частиц при механической деформации упругой среды (жидкой, газообразной, твердой). При этом имеет место перенос энергии при отсутствии переноса вещества. В акустической волне частицы совершают колебания вокруг точки покоя. Среди упругих волн самые низкие частоты имеют *инфразвуковые волны*, лежащие ниже границы слышимости их человеком (ниже 20 Гц). Слышимые *звуковые колебания* занимают диапазон частот от 20 Гц до 20 кГц. Волны более высоких частот – *ультразвуковые* (от 20 кГц до 1 ГГц) и *гиперзвуковые* (от 1 ГГц до 1000 ГГц).

Электромагнитные волны – это распространяющиеся в пространстве переменные во времени электромагнитные поля. Электромагнитные волны всегда имеют поперечные к направлению распространения составляющие векторов напряженностей электрического и магнитного полей. Продольные составляющие этих векторов могут существовать лишь при определенных условиях (у границ раздела разных сред, вблизи возбуждающих источников, в линиях передачи). Чисто продольных электромагнитных волн не существует. Среди электромагнитных волн выделяют радиоволны с диапазоном частот от $3 \cdot 10^3$ Гц до $3 \cdot 10^{11}$ Гц. Далее по частоте расположен оптический диапазон от $3 \cdot 10^{11}$ Гц до $1,5 \cdot 10^{15}$ Гц, включающий инфракрасное, видимое и ультрафиолетовое излучения. Колебания более высоких частот – это рентгеновское и гамма-излучения.

Наука, занимающаяся изучением излучения, распространения и поглощения электромагнитных волн, называется *электродинамикой*.

Различные виды электромагнитных волн представлены на рис. 1.1.

До диапазона инфракрасных волн все среды можно рассматривать как сплошные без учета их внутренней микроструктуры, волновыми процессами в таких средах занимается *классическая электродинамика*.

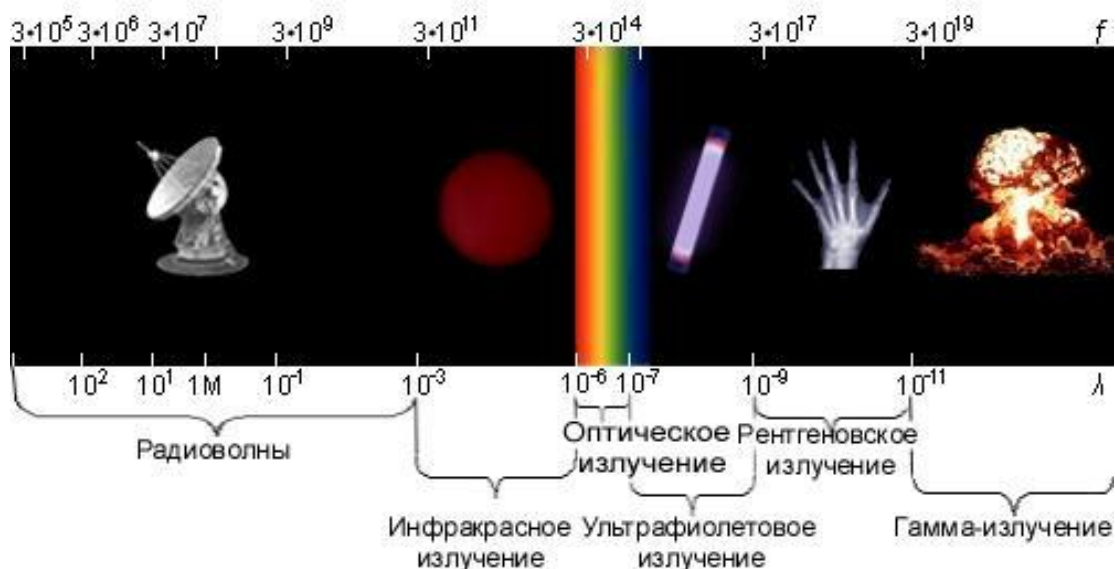


Рис. 1.1. Различные виды электромагнитных волн

На более высоких частотах следует учитывать микроструктуру среды и дискретность электромагнитного излучения (поток фотонов). В этом случае электромагнитное излучение описывается методами *квантовой электродинамики*.

Для более подробного ознакомления с механическими колебательными системами рассмотрим следующие примеры.

1. Поместим на поверхности воды в сосуде легкий поплавок. Осторожно добавим еще один. Появление второго поплавка никак не отражается на первом, и можно считать, что поплавки не взаимодействуют. Легкими нажатиями заставим один поплавок совершать колебания на поверхности воды. На этот раз механическое состояние второго поплавка не останется неизменным. Через некоторое время он также начнет колебаться. При этом можно заметить, что от первого поплавка, которому мы принудительно придали колебательное движение, по поверхности воды «пошли круги». В повседневной жизни такие круги называют волнами.

2. Возьмем длинный шнур и закрепим один из его концов. Другой конец встряхнув приведем в колебательное движение. При этом мы увидим, что вдоль шнура что-то «бежит», хотя концы шнура остаются на месте. То, что «бежит» по шнуру, тоже называют «волной».

Существуют еще множество явлений аналогичного характера, в основе которых лежит одна и та же физическая природа и которые объединены общим названием – *волновые процессы*.

Что же представляют собой волны?

Если колеблющееся тело (струна, камертон, мембрана громкоговорителя) находится в упругой среде, то оно приводит в колебательное движение соприкасающиеся с ним частицы среды, вследствие чего в прилегающих к этому телу элементах среды возникают периодические деформации (например, сжатия и растяжения). При этих растяжениях в среде появляются упругие силы, стремящиеся вернуть элементы среды к первоначальным со-

стояниям равновесия. Благодаря взаимодействию соседних элементов среды, упругие деформации будут передаваться от одних участков среды к другим, более удаленным от колеблющегося тела. Таким образом, периодические возмущения (возбуждения), которые имеют место в каком-либо месте упругой среды, не остаются локализованными в этом месте, а распространяются в среде с некоторой скоростью, зависящей от ее физических свойств. При этом частицы среды совершают колебательные движения около их положений равновесия; от одних участков среды к другим передается только состояние деформаций – *процесс распространения упругих волн не сопровождается поступательным перемещением вещества, а является лишь одним из механизмов передачи энергии от источника волн к частицам, составляющим упругую среду.*

Из вышесказанного следует, что механические волны возникают благодаря вынужденному движению некоторой части деформируемой среды. Возмущение, вызвавшее деформацию, передается от одной точки к другой, т. е. механическая волна распространяется внутри некоторой среды. При этом существует сопротивление среды, которое противодействует деформации так же, как при обычном механическом движении существует сопротивление движению из-за инертности движущегося тела, которое необходимо преодолеть.

Итак, с физической точки зрения для распространения волны в среде она должна обладать свойствами упругости и инертности, для того чтобы в ней распространялись волны. Действительно, опыты показывают, что скорость распространения волн всегда выражается как функция квадратного корня параметра, характеризующего сопротивление среды деформации, и параметра, который определяет ее инертность.

Например, для звука

$$c_s^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right),$$

где c_s – скорость звука, P – звуковое давление, ρ – плотность среды, в которой распространяется звук.

Если бы среда не была деформируемой (абсолютно твердое тело), локальное возмущение в какой-либо точке просто передалось бы в другую точку в форме силы или ускорения. Если бы среда была лишена инертности, не существовало бы запаздывания при перемещении частиц, и передача возмущения от одной частицы к другой во всей среде происходила бы мгновенно. На самом деле все среды являются деформируемыми и обладают массой (инертностью), поэтому во всех средах могут существовать механические волны.

В зависимости от характера возникающих при этом деформаций различают волны продольные и поперечные. В *продольных волнах* частицы среды колеблются вдоль линии, совпадающей с направлением распространения волны (рис. 1.2).

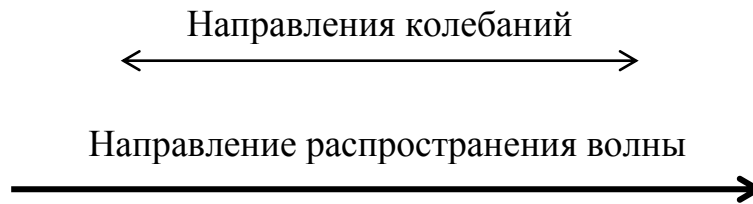


Рис. 1.2. Продольная волна

В **поперечных волнах** частицы среды колеблются перпендикулярно направлению распространения волны (рис. 1.3).

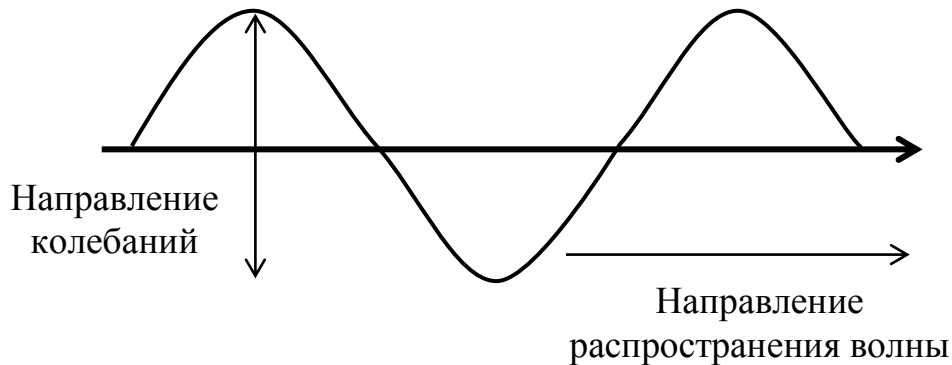


Рис. 1.3. Поперечная волна

Упругие поперечные волны могут возникать лишь в среде, обладающей сопротивлением деформации сдвига. Газообразные и жидкие среды не имеют упругости сдвига, и поэтому в них возбуждаются только продольные волны, распространяющиеся в виде чередующихся сжатий и разрежений среды. В твердых телах могут существовать и продольные и поперечные волны.

Рассмотрим процесс образования поперечных волн. Возьмем в качестве модели реального шнура цепочку шариков (материальных точек), связанных друг с другом упругими силами. На рис. 1.4 изображен процесс распространения поперечной волны и показаны положения шариков через последовательные промежутки времени, равные четверти периода.

В начальный момент времени ($t_0 = 0$) все точки находятся в состоянии равновесия (рис. 1.4, а). Затем вызываем возмущение, отклонив точку 1 от положения равновесия на величину A и 1-я точка начинает колебаться, 2-я точка, упруго связанная с 1-й, приходит в колебательное движение несколько позже, 3-я – еще позже и т. д. Через четверть периода колебания ($t_2 = T/4$) распространятся до 4-й точки, 1-я точка успеет отклониться от своего положения равновесия на максимальное расстояние, равное амплитуде колебаний A (рис. 1.4, б). Через полпериода 1-я точка, двигаясь вниз, возвратится в положение равновесия, 4-я отклонилась от положения равновесия на расстояние, равное амплитуде колебаний A (рис. 1.4, в), волна распространилась до 7-й точки и т. д.

К моменту времени $t_5 = T$ 1-я точка, совершив полное колебание, проходит через положение равновесия, а колебательное движение распространится до 13-й точки (рис. 1.4, д). Все точки от 1-й до 13-й расположены так, что образуют полную волну, состоящую из *впадины* и *горба*.

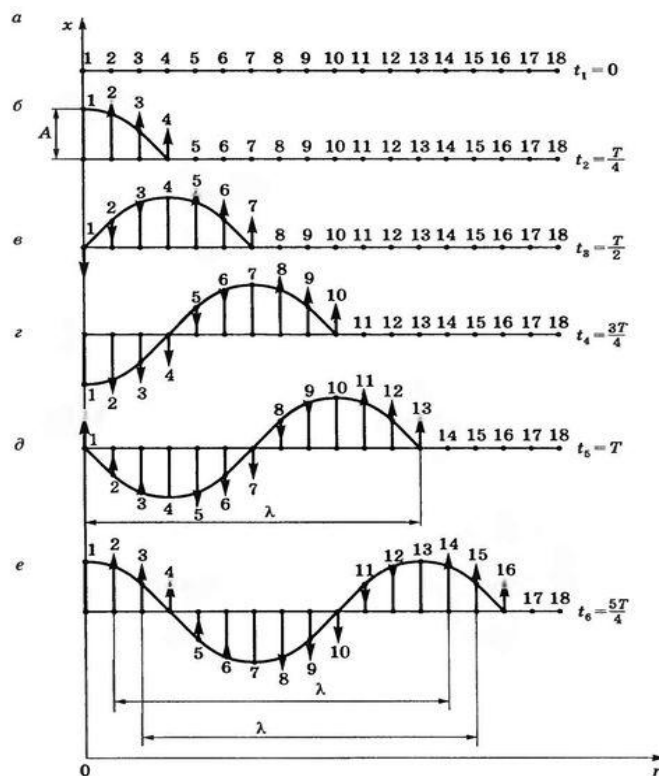


Рис. 1.4. Процесс распространения поперечной волны

Продольную волну можно наблюдать на длинной мягкой пружине большого диаметра. Ударив по одному из концов пружины, можно заметить, как по пружине будут распространяться последовательные сгущения и разрежения ее витков, бегущие друг за другом. Цепочка при этом остается прямой. На рис. 1.5 точками показано положение витков пружины в состоянии покоя, а затем положения витков пружины через последовательные промежутки времени, равные одной четверти периода.

Таким образом, продольная волна в рассматриваемом случае представляет собой чередующиеся сгущения (Сг) и разрежения (Раз) витков пружины.

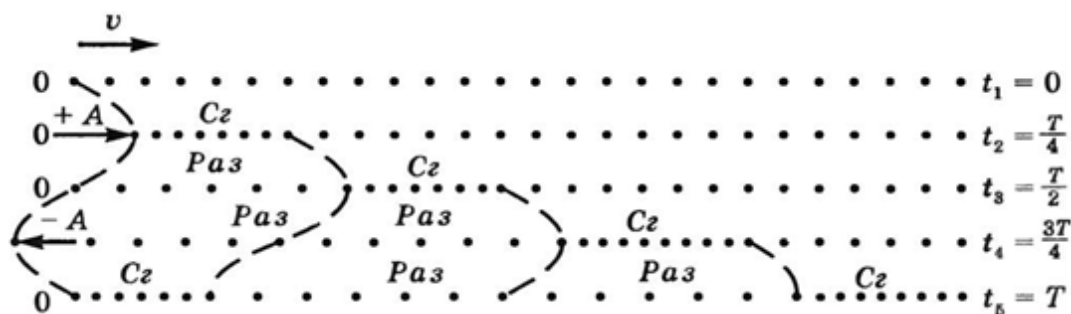


Рис. 1.5. Процесс распространения продольной волны

В рассмотренных выше примерах показаны колебания частиц, положения равновесия которых лежат на горизонтальной оси. В реальных условиях колеблются не только частицы, расположенные вдоль некоторой горизонтальной оси, а совокупность частиц, заключенных в некотором объеме. Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые частицы пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к некоторому моменту времени t , называется **фронтом волны**. Фронт волны представляет собой ту поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания еще не возникали. Форма фронта волны определяется конфигурацией источника колебаний и свойствами среды.

В **однородных средах** скорость распространения волны везде одинакова. Среда называется **изотропной**, если эта скорость одинакова по всем направлениям. Фронт волны от точечного источника колебаний в однородной и изотропной среде имеет вид сферы. Такие волны называются **сферическими**. В неоднородной и анизотропной среде, а также при неточечных источниках колебаний фронт волны имеет сложную форму.

При описании волновых процессов в среде выделяют поверхности, в которых все частицы колеблются в **одинаковой фазе**. Эти поверхности одинаковой фазы называются **волновыми**, или **фазовыми**. Они также могут быть сферическими, плоскими или иметь сложную форму в зависимости от формы источника колебаний и свойств среды. На рис. 1.6 показаны:

а) сферическая волна от точечного источника;

б) волна от колеблющейся пластинки;

в) эллиптическая волна от точечного источника в анизотропной среде, в которой скорость распространения волны плавно меняется по мере изменения угла φ , достигая максимума вдоль направления АА и минимума – вдоль направления ВВ. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченного волновым процессом. Следовательно, волновых поверхностей существует бесконечное множество, в то время как волновой фронт в каждый момент времени один. Волновые поверхности остаются неподвижными. Волновой фронт все время перемещается.

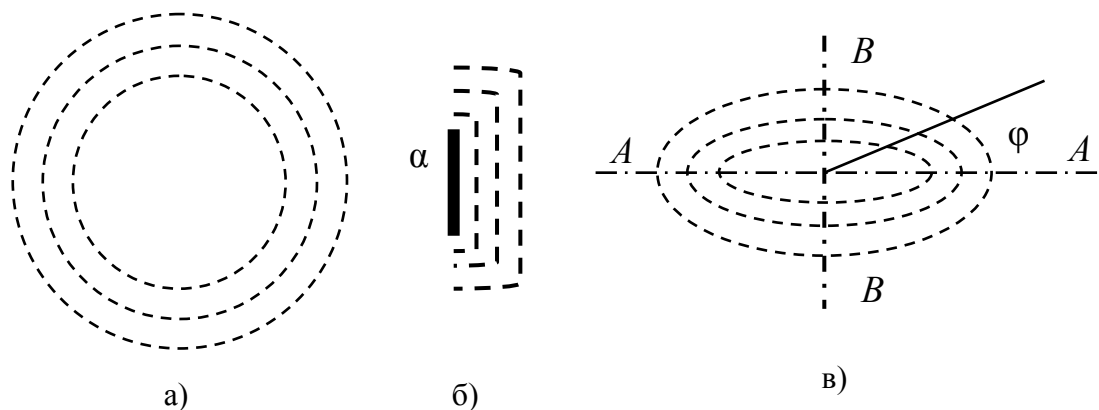


Рис. 1.6. Различные формы волны:
а) сферическая; б) плоская; в) эллиптическая

Рассмотрим случай, когда плоская волна распространяется вдоль оси Ox . Тогда все точки среды, положения равновесия которых имеют одинаковую координату x (но различные значения координат y и z), колеблются в одинаковой фазе (точки, лежащие в плоскости $x = \text{const}$) (рис. 1.7).

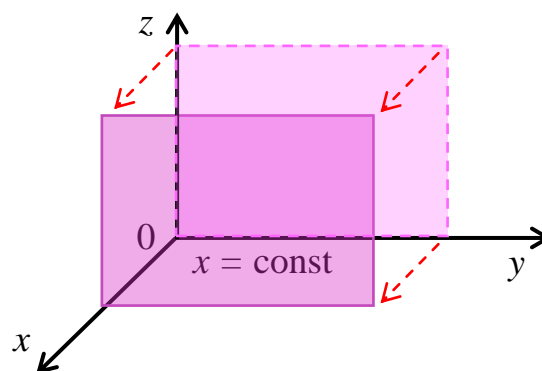


Рис. 1.7. Распространение плоской волны вдоль оси Ox

На рис. 1.8 изображена кривая, которая иллюстрирует смещение u точек с различными x из положения равновесия в некоторый момент времени (синусоидальная волна). Кривая отображает график функции $u(x, t)$ для некоторого фиксированного момента времени. С течением времени такая волна в однородной и изотропной среде смещается, сохраняя свою форму (пунктирная синусоида).

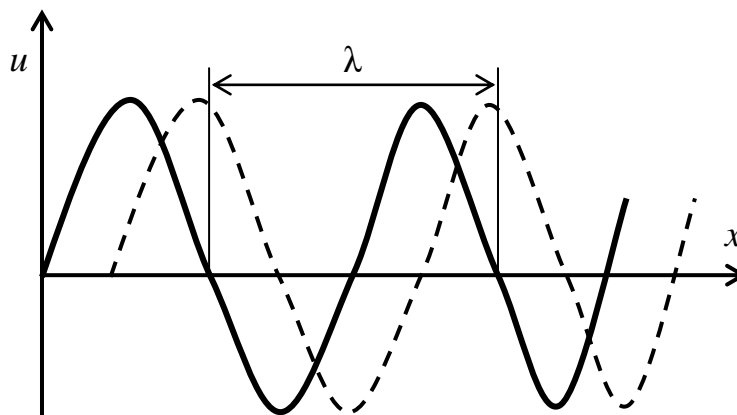


Рис. 1.8. Смещение волны с течением времени

Обратимся опять к рис. 1.4. Допустим, что к тому моменту времени, когда точка 1 пройдет путь от положения равновесия до крайнего верхнего положения (на это уйдет четверть периода колебаний точки 1), успеют начать колебаться точки 2 и 3. Точки правее третьей еще покоятся. До них не дошла «очередь». К моменту, когда точка 1 вернется в положение равновесия (вариант на рис. 1.4, соответствующий моменту времени $t = T/2$), начнут свои колебания точки 4–6 и т. д.).

Через промежуток времени, равный периоду колебаний шариков, шарик 1 завершит свое первое колебание. К этому времени соседняя точка 2 этого сделать не успеет, поскольку она начала двигаться позднее. Она и закончит свое первое колебание позже точки 1. Еще позднее это сделают точки 3, 4, 5 и т. д.

На некотором расстоянии от точки 1 находится точка, которая опаздывает с началом колебаний ровно на один период (точка 13). Это значит, что за время, равное одному периоду колебания T , колебание успело распространиться до точки 13. Эта точка начнет свое первое колебание, когда точка 1

начнет свое второе колебание. Обозначим расстояние, на которое колебание распространяется за время T , греческой буквой λ . Называется оно **длиной волны**. Ясно, что точка, расположенная на расстоянии 2λ от точки 1, начнет свое первое колебание в тот момент, когда точка 1 начнет свое третье колебание, а точка 13 – второе. Эти точки, следовательно, движутся одинаково: они одновременно начинают двигаться вверх, вместе проходят положение равновесия, одновременно движутся вниз, одновременно заканчивают очередное колебание и начинают следующее. И не только они, но и любые точки, отстоящие одна от другой на расстояниях λ , 2λ , 3λ и т. д. Поэтому можно сказать, что длина волны равна расстоянию между двумя ближайшими точками, движущимися одинаково и имеющими одинаковые отклонения от положения равновесия (рис. 1.4 и рис. 1.8).

Таким образом, мы имеем два эквивалентных определения длины волны:

а) **длина волны** – это расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися с разностью фаз 2π ;

б) **длина волны** – это расстояние λ , на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды.

Очевидно, что

$$\lambda = cT, \quad (1.1)$$

где c – скорость распространения волны, T – период колебаний.

Эти два с первого взгляда разных определения длины волны позволяют уточнить физический смысл скорости c , введенной в (1.1). С одной стороны, это скорость, с которой перемещается возмущение (фронт волны) в среде. С другой стороны, из определения волновой поверхности следует, что фаза волны в заданной точке среды меняется со временем, а в заданный момент времени является функцией координат. Если задать какое-либо определенное значение фазы, то с течением времени оно будет достигаться то в одной, то в другой точке среды. Поэтому можно говорить о перемещении фазы. Скорость этого перемещения называется **фазовой скоростью** и совпадает со скоростью распространения волны, поскольку за период T мы найдем точку среды, имеющую то же значение фазы колебаний, а из предыдущих рассуждений следует, что она отстоит от первой точки на расстояние λ . Несколько позже мы получим математическое обоснование этого утверждения, где первоначально введенная скорость распространения (рис. 1.7) совпадает с определением фазовой скорости волны c .

Часто T называют **временным периодом** волны, а λ – **пространственным периодом** волны.

Заменив в (1.1) T – величиной $1/\nu$ (ν – частота колебаний), получим

$$\lambda = c/\nu. \quad (1.2)$$

2. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛН

При описании волнового процесса требуется найти амплитуды и фазы колебательного движения в различных точках среды и изменение этих величин с течением времени. Эта задача может быть решена в том случае, если известно, по какому закону колеблется и как взаимодействует со средой тело, вызвавшее волновой процесс. Однако во многих случаях не существенно, каким телом возбуждена данная волна, а решается более простая задача. Задано состояние колебательного движения в некоторых точках среды в определенный момент времени и требуется определить состояние колебательного движения в других точках среды.

Для примера рассмотрим решение такой задачи в простом, но вместе с тем важном случае распространения в среде плоской или сферической гармонической волны. Обозначим колеблющуюся величину через u . Этой величиной могут быть: смещение частиц среды относительно их положения равновесия, отклонения давления в данном месте среды от равновесного значения и т. д. Тогда задача будет состоять в отыскании так называемого **уравнения волны** – выражения, которое задает колеблющуюся величину u как функцию координат точек среды x, y, z и времени t :

$$u = u(x, y, z, t). \quad (2.1)$$

Пусть для простоты u – это смещение точек в упругой среде, когда в ней распространяется плоская волна, а колебания точек имеют гармонический характер. Кроме того, направим оси координат так, чтобы ось Ox совпала с направлением распространения волны. Тогда волновые поверхности (семейство плоскостей) будут перпендикулярными к оси Ox (рис. 1.7), и поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение u будет зависеть только от x и t : $u = u(x, t)$. Для гармонических колебаний точек, лежащих в плоскости $x = 0$ (рис. 2.1), справедливо уравнение:

$$u(0, t) = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (2.2)$$

Найдем вид колебаний точек плоскости, соответствующей произвольному значению x . Для того чтобы пройти путь от плоскости $x = 0$ до этой плоскости, волне требуется время $\tau = x/c$ (c – скорость распространения волны). Следовательно, колебания частиц, лежащих в плоскости x , будут иметь вид

$$u(x, t) = A \cos[\omega(t - \tau) + \alpha] = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right].$$

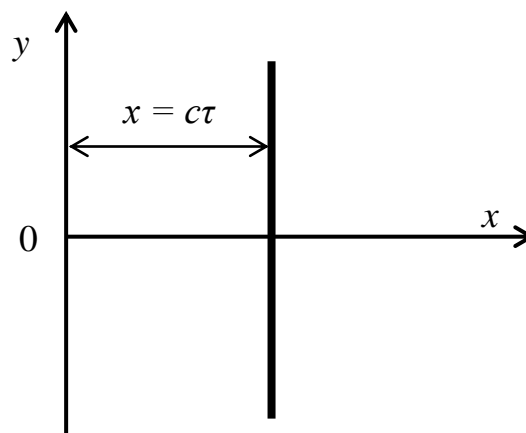


Рис. 2.1. Колеблющаяся плоскость

Итак, уравнение плоской волны (и продольной, и поперечной), распространяющейся в направлении оси Ox , выглядит следующим образом:

$$u = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right]. \quad (2.3)$$

Величина A представляет собой амплитуду волны. Начальная фаза волны α определяется выбором начала отсчета x и t .

Зафиксируем какое-либо значение фазы, стоящей в квадратных скобках (2.3), положив

$$\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha = \text{const}. \quad (2.4)$$

Продифференцируем это равенство по времени с учетом того, что циклическая частота ω и начальная фаза α являются постоянными:

$$\omega \left(\frac{dt}{dt} - \frac{1}{c} \cdot \frac{dx}{dt} \right) = 0,$$

откуда

$$c = \frac{dx}{dt}. \quad (2.5)$$

Таким образом, скорость распространения волны c в (2.3) есть скорость перемещения фазы, в связи с чем ее называют **фазовой скоростью**. В соответствии с (2.5) $dx/dt > 0$. Следовательно, (2.3) описывает волну, распространяющуюся в направлении возрастания x , так называемую **бегущую прогрессивную волну**. Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, описывается уравнением

$$u(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{c} \right) + \alpha \right] \quad (2.6)$$

и называется **бегущей регрессивной волной**. Действительно, приравняв константе фазу волны (2.6) и продифференцировав получившееся равенство, придем к соотношению

$$\frac{dx}{dt} = -c,$$

из которого следует, что волна (2.6) распространяется в сторону убывания значений x .

Введем величину

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (2.7)$$

которая называется **волновым числом** и равна количеству длин волн, укладываемых на интервале 2π метров. С помощью формул $\lambda = c/v$ и $\omega = 2\pi\nu$ волновое число можно представить в виде

$$k = 2\pi \frac{\nu}{c} = \frac{\omega}{c}. \quad (2.8)$$

Раскрыв скобки в (2.3) и (2.6) и приняв во внимание (2.8), приходим к следующему уравнению плоских волн, распространяющихся вдоль (знак «−») и против (знак «+») оси Ox :

$$u = A \cos(\omega t \pm kx + \alpha). \quad (2.9)$$

При выводе (2.3) и (2.6) предполагалось, что амплитуда колебаний не зависит от x . Для плоской волны это наблюдается в том случае, когда энергия волны не поглощается средой. Опыт показывает, что в поглощающей среде интенсивность волны по мере удаления от источника колебаний постепенно уменьшается – наблюдается затухание волны по экспоненциальному закону:

$$A = A_0 e^{-\gamma|x|}.$$

Соответственно, уравнение плоской затухающей волны имеет вид

$$u = A_0 e^{-\gamma|x|} \cos(\omega t \pm kx + \alpha), \quad (2.10)$$

где A_0 – амплитуда в точках плоскости $x = 0$, а γ – коэффициент затухания.

Теперь найдем уравнение **сферической волны**. Всякий реальный источник волн обладает некоторой протяженностью. Однако если ограничиться рассмотрением волны на расстояниях от источника, много больших его размеров, то источник можно считать **точечным**. В изотропной и однородной среде волна, порождаемая точечным источником, будет сферической. Допустим, что фаза колебаний источника $\omega t + \alpha$. Тогда точки, лежащие на волновой поверхности радиуса r , будут колебаться с фазой:

$$\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \alpha = \omega t - kr + \alpha.$$

Амплитуда колебаний в этом случае, даже если энергия волны не поглощается средой, постоянной не останется – она убывает в зависимости от расстояния от источника по закону $1/r$. Следовательно, уравнение сферической волны имеет вид

$$u = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (2.11)$$

где A – постоянная величина, численно равная амплитуде колебаний на расстоянии от источника, равном единице.

Для поглощающей среды в (2.11) нужно добавить множитель $e^{-\gamma r}$. Напомним, что в силу сделанных предположений (2.11) справедливо только для r , значительно превышающих размеры источника колебаний. При стремлении r к нулю амплитуда обращается в бесконечность. Этот абсурдный результат объясняется неприменимостью (2.11) для малых r .

3. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Волновым уравнением называется линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, описывающее различные виды колебательных процессов. Поскольку колебания – процесс нестационарный, то одной из независимых переменных этого уравнения является время t . Кроме того, независимыми переменными в уравнении являются также пространственные координаты x , y , z . В зависимости от их количества различают одномерное, двумерное или трехмерное волновое уравнение.

Одномерное волновое уравнение – уравнение, описывающее продольные колебания стержня, сечения которого совершают плоскопараллельные колебательные движения, а также поперечные колебания тонкого стержня (струны) и другие задачи.

Двумерное волновое уравнение используют для исследования колебаний тонкой пластины (мембраны).

Трехмерное волновое уравнение описывает распространение волн в пространстве (например, звуковых волн в жидкости, упругих волн в сплошной среде и т. п.).

Волновые уравнения используются при исследовании электромагнетизма (в электродинамике). Также волновые уравнения находят применение в других областях теоретической физики, например при описании гравитационных волн.

Волновое уравнение является одним из основных уравнений математической физики.

3.1. Анализ процесса распространения звука

Для того чтобы вывести формулу волнового уравнения, попытаемся вначале проанализировать процесс распространения звука между источником и приемником, основываясь на законах Ньютона, но не учитывая при этом взаимодействия звука с источником и приемником.

Рассмотрим простейший пример – распространение звука в одномерном пространстве. Для вывода нам необходимо сначала понять, что же в действительности происходит. В основе явления лежит следующий факт: когда тело перемещается в воздухе, возникает возмущение, которое каким-то образом распространяется по воздуху. На вопрос, что это за возмущение, можно ответить: это такое движение тела, которое вызывает изменение давления. Конечно, если тело движется медленно, то воздух будет лишь обтекать его и никакой волны не получится. Но нас интересует быстрое движение, когда воздух не успевает обойти вокруг тела. При этих условиях воздух в процессе движения сжимается и возникает избыточное давление, толкающее окружающие слои воздуха. Эти слои в свою очередь сжимаются, снова возникает избыточное давление, и таким образом начинает распространяться волна.

Попробуем описать этот процесс на языке формул. Прежде всего, решим для себя, какие нам нужны переменные. В нашей задаче нам нужно знать, насколько переместился воздух, поэтому *смещение* воздуха в звуковой волне, несомненно, будет первой нашей переменной. Также хотелось бы знать, как меняется *плотность* воздуха при смещении. *Давление* воздуха тоже будет меняться, и это еще одна интересующая нас переменная. Кроме того, воздух движется с некоторой *скоростью*, и мы должны уметь определить скорость перемещения частиц воздуха. Частицы воздуха имеют еще и ускорение, но, записав все эти переменные, мы сразу поймем, что и скорость, и ускорение будут нам известны, если известно *смещение* воздуха как функция времени.

Как уже говорилось, мы для простоты рассуждений рассмотрим одномерную волну, т. е. волну, которая распространяется только в одном направлении. Так можно поступить, если мы находимся достаточно далеко от источника и так называемый *фронт волны* мало отличается от плоскости. В этом случае наше доказательство будет проще, поскольку можно сказать, что смещение u зависит только от x и t , а не от y и z . Поэтому поведение воздуха описывается функцией $u(x, t)$.

Насколько полным будет такое описание? Казалось бы, оно очень неполно, потому что нам неизвестны подробности движения молекул воздуха. Они движутся во всех направлениях, и этот факт не отражается функцией $u(x, t)$. С точки зрения кинетической теории, если в одном месте наблюдается большая плотность молекул, а в соседнем меньшая, то молекулы будут переходить из области с большей плотностью в область с меньшей плотностью так, чтобы уравнивать плотности. Очевидно, что при этом никаких колебаний не происходит и звук не возникает. Для получения звуковой волны нужно, чтобы молекулы, вылетая из области с большей плотностью и давлением, передавали импульс энергии другим молекулам, находящимся в области разрежения. Звук возникает в том случае, если размеры области изменения плотности и давления намного больше расстояния, проходимого молекулами до соударения с другими молекулами. Это расстояние есть длина свободного пробега, и оно должно быть много меньше расстояния между гребнями и впадинами давления. В противном случае молекулы перейдут из гребня во впадину, и волна моментально выровняется.

Мы, естественно, хотим описать поведение газа в масштабе большем, чем длина свободного пробега, так что свойства газа не будут определяться поведением отдельных молекул. Например, смещение есть смещение центра инерции небольшого объема газа, а давление или плотность относятся к этому же объему. Обозначим давление через P , а плотность через ρ , причем обе эти величины будут функциями от x и t . Необходимо помнить, что наше описание приближенное и справедливо лишь тогда, когда свойства газа не слишком быстро меняются с расстоянием.

3.2. Вывод волнового уравнения

Теперь можно перейти непосредственно к выводу *волнового уравнения*. Это можно сделать двумя способами. Один из них основан на анализе физических процессов, которые происходят в звуковой волне. Другой – на основе выполнения простых математических преобразований уравнения плоской волны (2.9).

Способ 1

Физические явления, происходящие в звуковой волне, обладают тремя свойствами.

1. Газ движется, и плотность его меняется.
2. При изменении плотности меняется и давление.
3. Неравномерное распределение давления вызывает движение газа.

Рассмотрим сначала свойство (2). Для любого газа, жидкости или твердого тела давление является функцией плотности. До прихода звуковой волны мы имели равновесное состояние с давлением P_0 и плотностью ρ_0 . Давление P зависит от плотности среды $P = f(\rho)$, и в частности равновесное давление $P_0 = f(\rho_0)$. Отклонения величины давления от равновесного в звуковой волне очень малы. Давление принято измерять в *барах* ($1 \text{ бар} = 10^5 \text{ н/м}^2$). Давление в одну атмосферу приблизительно равно 1 бар ($1 \text{ атм} = 1,0133 \text{ бар}$). Для звука обычно используется логарифмическая шкала интенсивности, так как слуховое восприятие, грубо говоря, растет по логарифмическому закону. В этой децибельной шкале уровень звукового давления I , дБ, связан с амплитудой звукового давления следующим образом:

$$I = 20 \log_{10} \left(\frac{P}{P_{\text{отн}}} \right), \quad (3.1)$$

где давление отнесено к некоторому стандартному давлению,

$$P_{\text{отн}} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ бар} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ н/м}^2,$$

которое соответствует абсолютному порогу слышимости человеческого уха. Звуковое давление $P = 10^3 P_{\text{отн}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ бар}$ соответствует довольно сильному звуку в 60 дБ. Таким образом, видно, что давление в звуковой волне меняется на очень малую величину в сравнении с равновесным или средним, равным 1 атм . Смещение и перепады плотности также очень малы. При взрывах, однако, изменения уже не столь малы; избыточное звуковое давление может превышать 1 атм . Такие большие перепады давления приводят к новым явлениям, которые мы рассмотрим позже. В звуковых волнах уровень силы звука выше 100 дБ встречается редко. Уровень силы звука в 120 дБ уже вызывает боль в ушах. Поэтому, написав для звуковой волны

$$P = P_0 + P_{\text{и}}, \quad \rho = \rho_0 + \rho_{\text{и}}, \quad (3.2)$$

можно считать, что изменение давления $P_{и}$ очень мало по сравнению с P_0 , а изменение плотности $\rho_{и}$ очень мало по сравнению с ρ_0 . Тогда

$$P_0 + P_{и} = f(\rho_0 + \rho_{и}) = f(\rho_0) + \rho_{и} f'(\rho_0), \quad (3.3)$$

где $P_0 = f(\rho_0)$ и $f'(\rho_0)$ – производная от $f(\rho_0)$, взятая при значении $\rho = \rho_0$.

Второе равенство здесь возможно только потому, что $\rho_{и}$ очень мало. Таким образом, мы находим, что избыточное давление $P_{и}$ пропорционально избыточной плотности $\rho_{и}$; коэффициент пропорциональности здесь можно обозначить через k :

$$P_{и} = k\rho_{и},$$

где

$$k = f'(\rho_0) = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0. \quad (3.4)$$

Это весьма простое соотношение и составляет точное содержание свойства 2.

Перейдем теперь к свойству 1. Предположим, что положение элемента объема воздуха, не возмущенного звуковой волной, есть x , а звук смещает его в момент времени t на величину $u(x, t)$, так что его новое положение есть $x + u(x, t)$, как показано на рис. 3.1. Первоначальный объем, приходящийся на единицу площади в плоской звуковой волне, есть Δx , а окончательный объем равен $\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)$.

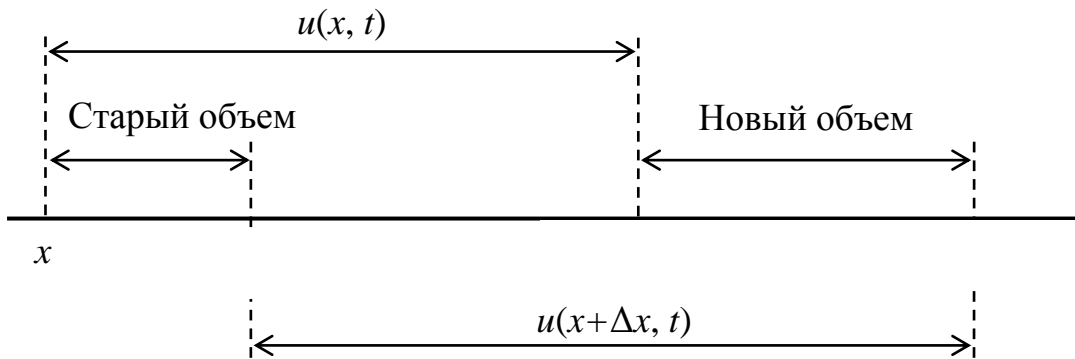


Рис. 3.1. Смещение воздуха в точке x

Далее, положение соседнего элемента объема есть $x + \Delta x$, и его смещенное положение есть $x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$. Теперь можно найти изменение плотности. Поскольку мы рассматриваем плоскую волну, удобно взять единичную площадку, перпендикулярную оси x , т. е. направлению распространения волны. Количество воздуха, приходящееся на единичную площадку в интервале Δx , есть $\rho_0 \Delta x$, где ρ_0 – невозмущенная, или равновесная, плотность воздуха. Эта порция воздуха, смещенная звуковой волной, будет находиться теперь между $x + u(x, t)$ и $x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$, причем количество

воздуха в этом интервале то же самое, что и в интервале Δx до прихода волны. Если через ρ обозначить новую плотность, то

$$\rho_0 \Delta x = \rho [x + \Delta x + u(x + \Delta x, t) - x - u(x, t)]. \quad (3.5)$$

Поскольку Δx мало, можно написать $u(x + \Delta x, t) - u(x, t) = (du/dx) \Delta x$. Здесь уже появляется частная производная, потому что u зависит и от x , и от времени. Наше уравнение принимает вид

$$\rho_0 \Delta x = \rho \left(\frac{du}{dx} \Delta x + \Delta x \right), \quad (3.6)$$

или

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho_u) \frac{du}{dx} + \rho_0 + \rho_u. \quad (3.7)$$

Но в звуковой волне все изменения очень малы, так что ρ_u мало, u мало и du/dx тоже мало. Поэтому в уравнении, которое мы только что написали,

$$\rho_u = -\rho_0 \frac{du}{dx} - \rho_u \frac{du}{dx}, \quad (3.8)$$

можно пренебречь $\rho_u (du/dx)$ по сравнению с $\rho_0 (du/dx)$. Так мы приходим к соотношению, которое требовалось согласно свойству (1):

$$\rho_u = -\rho_0 \frac{du}{dx}. \quad (3.9)$$

Именно такой вид уравнения можно было ожидать из чисто физических соображений. Если смещение различно для разных x , то плотность будет меняться. Знак тоже правильный: если смещение u растет с ростом x , так что воздух расширяется, плотность должна уменьшаться.

Теперь нам нужно найти третье уравнение – уравнение движения, производимого избытком давления. Зная соотношение между силой и давлением, можно получить уравнение движения. Возьмем объем воздуха толщиной Δx и с единичной площадью грани, перпендикулярной x , тогда масса воздуха в этом объеме есть $\rho_0 \Delta x$, а ускорение воздуха есть $d^2 u/dt^2$, так что масса, умноженная на ускорение для этого слоя, есть $\rho_0 \Delta x (d^2 u/dt^2)$. (Если Δx мало, то безразлично, где брать ускорение – на краю слоя или где-нибудь посередине). Сила, действующая на единичную площадку нашего слоя, перпендикулярную оси x , должна быть равна $\rho_0 \Delta x (d^2 u/dt^2)$. В точке x мы имеем силу $P(x, t)$, действующую на единицу площади в направлении $+x$, а в точке $x + \Delta x$ возникает сила, действующая в обратном направлении и по величине равная $P(x + \Delta x, t)$ (рис. 3.2):

$$P(x, t) - P(x + \Delta x, t) = -\frac{dP}{dx} \Delta x = -\frac{dP_u}{dx} \Delta x. \quad (3.10)$$

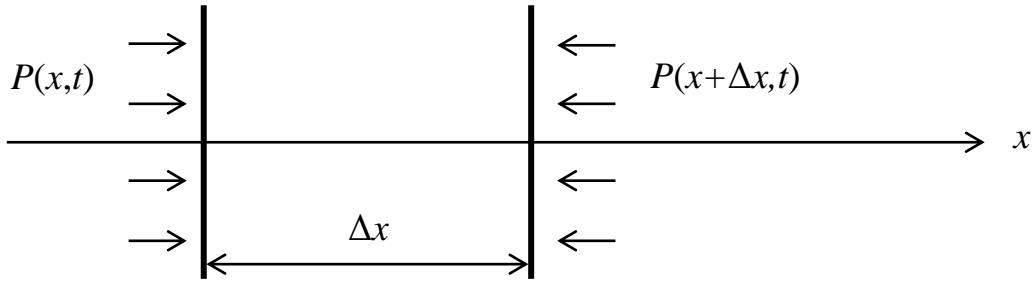


Рис. 3.2. Результирующая сила, действующая в направлении оси x и возникающая за счет давления на единичную площадку, перпендикулярную к оси x

Мы здесь учли, что Δx мало и что только избыточное давление $P_{и}$ меняется в зависимости от x . Итак, в соответствии со свойством (3) мы получаем

$$\rho_0 \frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{dP_{и}}{dx}. \quad (3.11)$$

Теперь уравнений уже достаточно, чтобы увязать все величины и привести к одной переменной, скажем, x . Можно выразить $P_{и}$ в (3.11) с помощью (3.4):

$$\rho_0 \frac{d^2 u}{dt^2} = -\kappa \frac{d\rho_{и}}{dx}, \quad (3.12)$$

а затем исключить $\rho_{и}$ с помощью (3.9). Тогда ρ_0 сократится и у нас останется

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \kappa \frac{d^2 u}{dx^2}. \quad (3.13)$$

Обозначим $c_s^2 = \kappa$, тогда можно написать

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{d^2 u}{dt^2}. \quad (3.14)$$

Это и есть волновое уравнение, которое описывает распространение звука в среде.

Способ 2

Уравнение любой волны является решением дифференциального уравнения, которое называется волновым. Чтобы установить вид волнового уравнения, определим вторые частные производные по координате x и времени t от функции $u = A \cos(\omega t \pm kx + \alpha)$, описывающей плоскую волну, распространяющуюся вдоль положительного направления оси Ox (плоская прогрессивная волна).

Первая производная функции u по времени t будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{du}{dt} = -A\omega \sin(\omega t - kx + \alpha),$$

а вторая производная –

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

Первая производная функции u по координате x будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{du}{dx} = Ak \sin(\omega t - kx + \alpha),$$

а вторая производная –

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -Ak^2 \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

Теперь в выражениях для вторых производных перенесем ω^2 и k^2 в левые части (разделив обе части на ω^2 и k^2 соответственно). Получим:

$$\frac{d^2u}{dt^2} \frac{1}{\omega^2} = -A \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad \text{и} \quad \frac{d^2u}{dx^2} \frac{1}{k^2} = -A \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

Следовательно,

$$\frac{d^2u}{dt^2} \frac{1}{\omega^2} = \frac{d^2u}{dx^2} \frac{1}{k^2}$$

или

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{d^2u}{dt^2}.$$

Поскольку $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi\nu = 2\pi c/\lambda$, то

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \left(\frac{2\pi\lambda}{2\pi\lambda c} \right)^2 = \frac{1}{c^2}.$$

Получаем:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2u}{dt^2}$$

или

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2u}{dt^2} = 0. \quad (3.15)$$

Это так же, как и (3.14), есть дифференциальное уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси Ox . Оно получено нами из уравнения плоской волны (2.9). С помощью аналогичных рассуждений его можно по-

лучить и для плоской волны, бегущей в отрицательном направлении оси Ox . Однако можно сделать и обратное заключение: если какая-нибудь физическая величина (не обязательно смещение u) зависит от времени t и координаты x такие, что ее частные производные удовлетворяют уравнению (3.15), то эта величина распространяется в среде в виде плоской волны со скоростью c .

Очевидно, что трехмерное волновое уравнение, которое описывает распространение волн в пространстве, будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2u}{dt^2}. \quad (3.16)$$

3.3. Решения волнового уравнения

Убедимся теперь, действительно ли волновое уравнение описывает основные свойства звуковых волн в среде. Прежде всего, мы хотим вывести, что звуковое колебание, или возмущение, движется с постоянной скоростью. Кроме того, нам нужно доказать, что два различных колебания могут свободно проходить друг через друга, т. е. принцип суперпозиции. Еще мы хотим доказать, что звук может распространяться и вправо и влево. Все эти свойства должны содержаться в одном нашем уравнении.

Нетрудно показать, что любое возмущение, имеющее вид плоской волны и движущееся с постоянной скоростью, описывается выражением вида $f(x - vt)$. Посмотрим теперь, является ли $f(x - vt)$ решением волнового уравнения. Вычисляя du/dx , получаем производную функцию $du/dx = f'(x - vt)$. Дифференцируя еще раз, находим

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f''(x - vt). \quad (3.17)$$

Дифференцируя эту же функцию u по t , получаем значение $-v$, умноженное на производную, или $du/dt = -vf'(x - vt)$; вторая производная по времени дает

$$\frac{d^2u}{dt^2} = v^2 f''(x - vt). \quad (3.18)$$

Очевидно, что $f(x - vt)$ удовлетворяет волновому уравнению, если v равно c_s .

Таким образом, согласно законам механики мы получаем, что любое звуковое возмущение распространяется со скоростью c_s и, кроме того,

$$c_s = \kappa^{1/2} = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0^{1/2}.$$

Тем самым *мы связали скорость звуковых волн со свойствами среды.*

Легко увидеть, что звуковая волна может распространяться и в направлении отрицательных x , т. е. звуковое возмущение вида $u(x, t) = g(x + vt)$ также удовлетворяет волновому уравнению. Единственное отличие этой волны от той, которая распространяется слева направо, заключается в знаке v , но знак d^2u/dt^2 не зависит от выбора $x + vt$ или $x - vt$, потому что в эту производную входит только v^2 . Отсюда следует, что решение уравнения описывает волны, бегущие в любом направлении со скоростью c_s .

Особый интерес представляет вопрос о суперпозиции решений. Допустим, что мы нашли одно решение, скажем u_1 . Это значит, что вторая производная u_1 по x равна второй производной u_1 по t , умноженной на $1/c_s^2$. И пусть есть второе решение u_2 , обладающее тем же свойством. Сложим эти два решения, тогда получается

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t). \quad (3.19)$$

Теперь мы хотим удостовериться, что $u(x, t)$ тоже представляет некую волну, т. е. u тоже удовлетворяет волновому уравнению. Это очень просто доказать, так как

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u_1}{dx^2} + \frac{d^2u_2}{dx^2} \quad (3.20)$$

и вдобавок

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{d^2u_2}{dt^2}. \quad (3.21)$$

Отсюда следует, что $d^2u/dx^2 = (1/c_s^2) d^2u/dt^2$, так что справедливость принципа суперпозиции проверена. Само существование принципа суперпозиции связано с тем, что полученное волновое уравнение *линейно* по u .

Теперь естественно было бы ожидать, что плоская световая волна, распространяющаяся вдоль оси x и поляризованная так, что электрическое поле направлено по оси y , тоже удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{d^2E_y}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2E_y}{dt^2}, \quad (3.22)$$

где c – скорость света.

Волновое уравнение для световой волны есть одно из следствий уравнений Максвелла. Уравнения электродинамики приводят к волновому уравнению для света точно так же, как уравнения механики приводят к уравнению для звука.

4. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ТВЕРДОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим теперь случай, когда волна распространяется не в газообразной, а в твердой среде. Пусть в однородной и изотропной упругой твердой среде в направлении оси Ox распространяется продольная плоская волна. Выделим в среде цилиндрический объем с площадью основания S и высотой Δx (рис. 4.1).

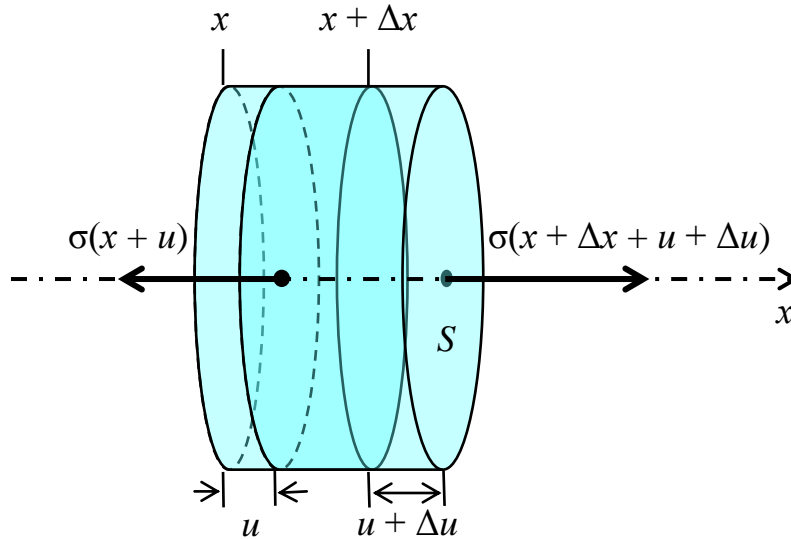


Рис. 4.1. Упругая волна в твердой среде

Смещения u частиц, как было показано ранее (рис. 1.8), являются функциями координаты x , поэтому смещения частиц на основаниях цилиндра с координатами x и $x + \Delta x$, соответственно, будут u и $u + \Delta u$. Выделенный объем цилиндра либо растягивается, либо сжимается в зависимости от знака абсолютной деформации Δu ($\Delta u > 0$ – деформация растяжения и $\Delta u < 0$ – деформация сжатия). Величина средней относительной деформации (растяжение или сжатие, приходящаяся на единицу длины цилиндра) равна $\Delta u / \Delta x$. Поскольку u не является линейной функцией x (рис. 4.2), она остается зависящей от x – истинная относительная деформация в разных сечениях цилиндра будет неодинаковой. Чтобы получить относительную деформацию ε в сечении x , нужно перейти к пределу $\Delta x \rightarrow 0$ и записать

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad (4.1)$$

где мы ввели символ частной производной, поскольку абсолютная деформация u является функцией двух переменных – координаты x и времени t $u = u(x, t)$

Процедура введения истинного значения относительной деформации ε в данной точке среды аналогична процедуре введения понятия мгновенной скорости, когда ставится задача определения скорости точки в данный момент времени

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

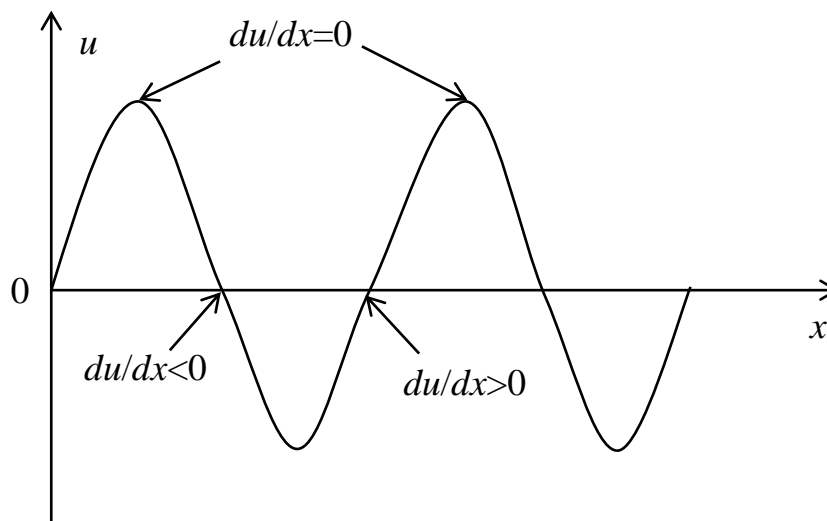


Рис. 4.2. Производная деформаций

Наличие продольных деформаций свидетельствует о существовании нормального напряжения σ , для малых деформаций, в соответствии с законом Гука, пропорционального величине относительной деформации du/dx :

$$\sigma = \varepsilon E = E \frac{du}{dx},$$

где E – модуль Юнга данной среды.

Закон Гука: деформация, возникающая в упругом теле (пружине, стержне, консоли, балке и т. п.), пропорциональна приложенной к этому телу силе.

Следует отметить, что закон Гука выполняется только при малых деформациях. При превышении некоторого предела пропорциональности связь между напряжениями и деформациями становится нелинейной. Для некоторых сред закон Гука неприменим даже при малых деформациях.

Модуль Юнга (модуль продольной упругости) – физическая величина, характеризующая свойства материала сопротивляться растяжению/сжатию при упругой деформации.

Назван в честь английского физика XIX в. Томаса Юнга. В Международной системе единиц (СИ) измеряется в ньютонах на метр в квадрате (н/м^2) или в паскалях (Па).

Модуль Юнга рассчитывается следующим образом:

$$E = \frac{F/S}{\Delta l/l} = \frac{Fl}{S\Delta l},$$

где F – нормальная составляющая силы, S – площадь поверхности, по которой распределено действие силы, l – длина деформируемого стержня, Δl – модуль изменения длины стержня в результате упругой деформации (измеренного в тех же единицах, что и длина l).

Значения модуля Юнга для некоторых твердых материалов приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Значения модуля Юнга для некоторых материалов

Материал	Модуль Юнга, Па·10 ⁹	Материал	Модуль Юнга, Па·10 ⁹
Алюминий	70	Манганин	124
Бронза	75–125	Медь	110
Вольфрам	350	Никель	210
Германий	83	Олово	35
Дюралюминий	74	Свинец	18
Иридий	520	Серебро	80
Кадмий	50	Сталь	210
Кобальт	210	Стекло	70
Кремний	109	Титан	112
Латунь	95	Фарфор	59
Лед	3	Цинк	120
Магний	45	Хром	300

Отметим, что относительная деформация du/dx , а следовательно, и напряжение σ в фиксированный момент времени зависят от x (рис. 4.2). Там, где отклонения частиц от положения равновесия максимальны, деформация и напряжения равны нулю (тангенс угла наклона касательной, которая представляет собой производную du/dx , равна нулю). В местах, где частицы проходят через положения равновесия, относительные деформации и напряжения достигают максимальных значений, причем положительные и отрицательные деформации (растяжения и сжатия) чередуются друг с другом (производная du/dx в этих точках меняет знак: касательные в этих точках составляют либо острый, либо тупой угол с осью Ox). В соответствии с этим продольная волна состоит из чередующихся разрежений и сжатий среды.

Обратимся вновь к элементарному цилиндрическому объему, изображенному на рис. 4.1, и напишем для него уравнение движения. До начала деформации левая поверхность (основание) этого объема располагается в точке с координатой x . При прохождении волны его точки сместятся в положение с координатой u , а правая поверхность (основание), имевшая до начала деформации координату $x + \Delta x$, окажется в положении $x + \Delta x + u + \Delta u$. Полагая Δx очень малой величиной, проекцию ускорения, которое получает элементарный цилиндр, на ось Ox можно считать для всех точек цилиндра одинаковой и равной d^2u/dt^2 . Масса цилиндра равна $\rho S \Delta x$, где ρ – плотность недеформированной среды. Проекция на ось Ox силы, действующей на цилиндр, равна произведению площади основания на разность нормальных напряжений в сечениях $(x + \Delta x + u + \Delta u)$ и $(x + u)$:

$$F_x = SE \left[\left(\frac{du}{dx} \right)_{x + \Delta x + u + \Delta u} - \left(\frac{du}{dx} \right)_{x + u} \right]. \quad (4.2)$$

Значение производной du/dx в сечении $x + \delta$ для δ малых можно представить с большой степенью точности в виде ряда Тейлора для производной du/dx , вычисленной в точке x и оборванной на втором члене:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x+\delta} = \left(\frac{du}{dx}\right)_x + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_x \delta. \quad (4.3)$$

Подставим (4.3) в (4.2), полагая δ равным в одном случае u , а в другом случае $\Delta x + u + \Delta u$:

$$F_x = SE \left\{ \left[\left(\frac{du}{dx}\right)_x + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_x (\Delta x + u + \Delta u) \right] - \left[\left(\frac{du}{dx}\right)_x + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_x u \right] \right\}.$$

Учтем, что в этом выражении величины Δx , u и Δu являются малыми и оставим главный по значению член:

$$F_x = SE \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_x (\Delta x + \Delta u) \approx SE \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_x \Delta x. \quad (4.4)$$

Относительное удлинение du/dx при упругих деформациях бывает много меньше единицы, поэтому $du \ll dx$, так что слагаемым Δu в сумме $\Delta x + \Delta u$ можно пренебречь.

Подставив найденные значения массы, ускорения и силы в уравнение второго закона Ньютона (*сила равна массе, умноженной на ускорение: $F = ma$*), получим:

$$\rho S \Delta x \frac{d^2u}{dt^2} = SE \frac{d^2u}{dx^2} \Delta x,$$

откуда после деления на $ES\Delta x$ придем к уравнению

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\rho}{E} \frac{d^2u}{dt^2}, \quad (4.5)$$

которое представляет собой волновое уравнение. Сопоставление уравнений (4.5) и (3.22) показывает, что

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (4.6)$$

Таким образом, фазовая скорость упругих продольных волн равна корню квадратному из модуля Юнга, деленного на плотность ρ (подтверждение сформулированных ранее основополагающих свойств, которыми должна обладать среда, чтобы в ней распространялась волна – упругость и инертность).

Приведем без вывода формулу для скорости распространения **поперечных волн** в твердых телах:

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (4.7)$$

где G – модуль сдвига вещества твердого тела.

5. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ДИФРАКЦИЯ

При изучении волновых процессов в самом общем виде ставится следующая задача. Задано колеблющееся тело некоторой формы и размеров. Известны амплитуды, фазы и направления колебаний всех точек этого тела, а также заданы свойства среды. Требуется определить форму и расположение фронта или волновой поверхности в среде в каждый момент времени, а также амплитуды колебаний в различных точках этой поверхности. Для этой цели сначала рассматривается взаимодействие колеблющегося тела со средой и определяется фронт волны в непосредственной близости от этого тела. Дальнейшее распространение волны в среде определяется при помощи *принципа Гюйгенса* и *принципа суперпозиции*.

Принцип рефракции, или принцип Гюйгенса, был введен голландским физиком (а также механиком, математиком, астрономом и изобретателем) Христианом Гюйгенсом в 1678 г. В основе его лежит утверждение, что все точки волнового фронта, заданного в некоторый момент времени t_0 , можно рассматривать как самостоятельные источники колебаний, начавшие излучать в момент времени t_0 . Эти волны называются элементарными или вторичными. Они могут быть сферическими (если среда изотропная), эллиптическими или иметь иную форму (рис. 5.1).

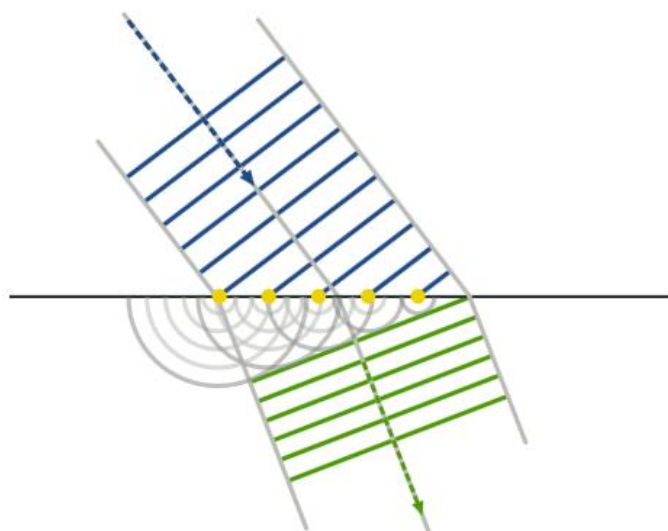


Рис. 5.1. Рефракция волн по Гюйгенсу:

синие линии и синяя стрелка – фронты падающей волны и направление вектора фазовой скорости в первой среде; желтые точки и серые окружности – вторичные источники на границе раздела двух сред и фронты порожденных ими сферических волн во второй среде; зеленые линии и зеленая стрелка – фронты преломленной волны и направление вектора фазовой скорости во второй среде

Принцип Гюйгенса утверждает, что для отыскания фронта волны в последующие моменты времени $t = t_0 + \Delta t$ необходимо построить фронты всех элементарных волн через время Δt и затем провести их огибающую. Эта огибающая есть геометрическое место точек, куда приходит волна в момент времени t . Таким образом, при помощи принципа Гюйгенса можно чисто геометрическими методами определить расположение фронта волны в последующие моменты времени, если это расположение задано в момент времени t_0 .

Принцип суперпозиции позволяет определить интенсивность колебательного движения (амплитуду колебаний) в различных точках нового фронта волны, если эта интенсивность была известна во всех точках фронта волны, заданного в момент времени t_0 .

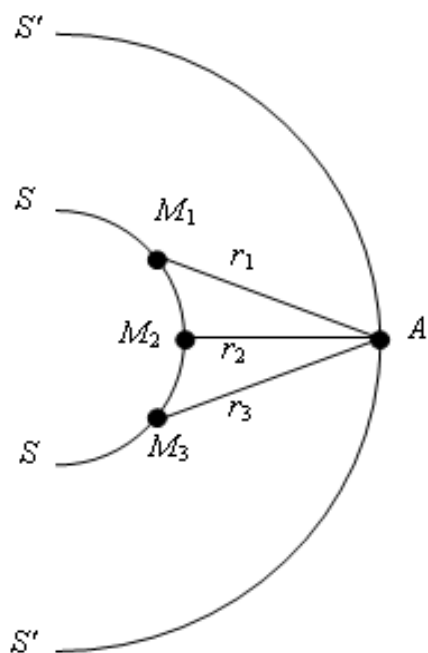


Рис. 5.2. Принцип суперпозиции

Содержание этого принципа заключается в следующем. Предположим, что S есть фронт волны (или волновая поверхность) в момент времени t_0 , а S' – в момент времени $t = t_0 + \Delta t$ (рис. 5.2). Каждую точку M поверхности S заменяем точечным источником элементарной волны. Эти волны будут сферическими, если среда однородная и изотропная.

Фазы колебаний в точках M_1, M_2, \dots одинаковые, хотя амплитуды могут быть различными. Обычно для простоты рассматривают поверхность S , все точки которой колеблются с одинаковыми амплитудами. В момент времени t элементарные волны от точек M_1, M_2, \dots дойдут до точки A , лежащей на поверхности S' , причем фазы и амплитуды колебаний, вызванных этими элементарными волнами в точке A , зависят от расстояний r_1, r_2, \dots согласно формуле (2.11) сферической волны

$$u = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha).$$

Принцип суперпозиции утверждает, что амплитуду колебаний в точке A можно найти, сложив все колебания, вызванные в этой точке элементарными волнами, исходящими от поверхности S . При этом обычно предполагается, что все колебания в среде – линейные, поэтому суммарное отклонение u от состояния равновесия равно сумме отклонений $u_1 + u_2 + \dots$, вызванных каждой элементарной волной в отдельности.

Сложение колебаний в различных точках среды, вызванных несколькими волнами, называется **интерференцией** этих волн. Суммарное колебание в каждой точке среды зависит от частоты, амплитуды, фазы и направления колебаний, вызванных каждой волной. В частности, если волны имеют оди-

наковые частоты и приходят в данную точку среды с постоянной разностью фаз (не изменяющейся со временем), то такие волны называют **когерентными**. Колеблющиеся тела, вызывающие появление в среде когерентных волн, называются **когерентными источниками**. Например, точки M_1, M_2, \dots поверхности S колеблются с одинаковыми частотами и фазами, а исходящие от них элементарные волны приходят в точку A с разностями фаз, которые зависят только от расстояний r_1, r_2, \dots и не изменяются со временем, поэтому все точки волновой поверхности являются когерентными источниками, а формируемые ими элементарные волны – когерентными волнами.

С помощью принципа Гюйгенса и принципа суперпозиции можно решить ряд важных задач по распространению волн в неоднородной и не изотропной среде. В частности, рассмотрим распространение волны в среде, в которой имеются тела, не пропускающие этой волны, поглощающие или отражающие ее. Допустим, плоская волна S , имеющая во всех точках одинаковую амплитуду колебаний, встречает непрозрачное для этой волны тело P , не пропускающее участок волны AB . Применим принцип Гюйгенса для момента времени, когда волновой фронт находится в положении S' (рис. 5.3). Построив фронты элементарных волн, исходящих из точек волны $M_1, M_2, \dots, N_1, N_2, \dots$ и проведя огибающие I, II и т. д., заметим, что волновой фронт заходит в область R , которую называю **областью геометрической тени** (из геометрических соображений можно было бы предполагать, что волна, отрезаемая телом, не должна заходить в эту область).

Это проникновение волны в область «геометрической тени» называется **дифракцией** волны.

Вообще говоря, между интерференцией и дифракцией нет существенного физического различия: оба явления заключаются в перераспределении энергии двух или большего числа волн в результате суперпозиции. Просто в силу исторических причин распределение интенсивности, возникающее в результате наложения волн, возбуждаемых конечным числом источников, принято называть интерференцией. В случае суперпозиции волн от источников, расположенных непрерывно, принято говорить о дифракции.

При помощи принципа Гюйгенса объясняются также законы отражения и преломления волн на границе раздела двух сред.

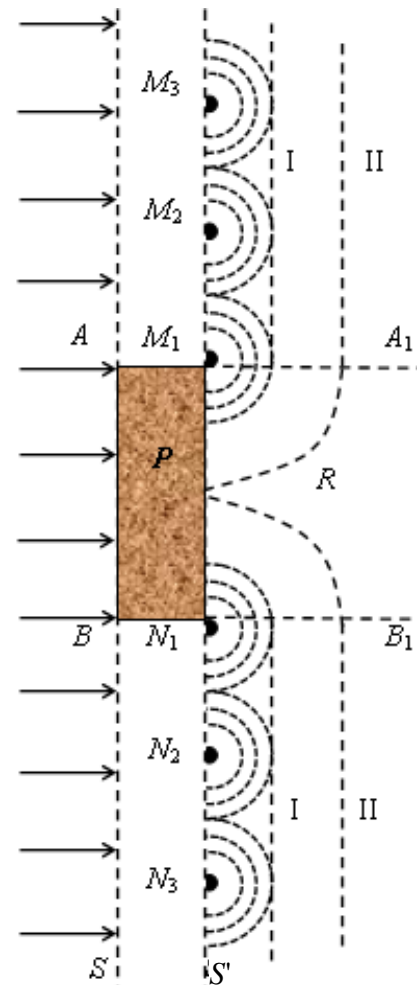


Рис. 5.3. Дифракция

6. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим практически важный случай интерференции двух гармонических плоских волн одинаковой амплитуды и частоты, распространяющихся в противоположных направлениях (так называемые прогрессивная и регрессивная волны, или прямая (u_1) и обратная (u_2) волны):

$$u_1 = A \cos(\omega t - kx + \alpha_1); \quad u_2 = A \cos(\omega t + kx + \alpha_2). \quad (6.1)$$

Суперпозиция этих волн дает:

$$u = u_1 + u_2 = A [\cos(\omega t - kx + \alpha_1) + \cos(\omega t + kx + \alpha_2)].$$

Преобразовав выражение в квадратных скобках по формуле для суммы косинусов ($\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$), получаем, что

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t - kx + \alpha_1) + \cos(\omega t + kx + \alpha_2) = \\ & = 2 \cos\left(\frac{\omega t - kx + \alpha_1 + \omega t + kx + \alpha_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t - kx + \alpha_1 - \omega t - kx - \alpha_2}{2}\right) = \\ & = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right) \cos\left(-kx - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right) \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом

$$u = 2A \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right). \quad (6.2)$$

Для упрощения (6.2) произведем сдвиг начал отсчета времени t и координаты x , а именно:

$$x \rightarrow x - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2k} \quad \text{и} \quad t \rightarrow t - \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2\omega}.$$

Тогда (6.2) примет более компактный вид:

$$u = 2A \cdot \cos kx \cdot \cos \omega t \quad (6.3)$$

или, учтя связь между волновым числом и длиной волны $k = 2\pi/\lambda$, получается

$$u = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \omega t. \quad (6.4)$$

Это и есть уравнение **стоячей волны** (смысл такого названия будет очевиден из дальнейших рассуждений). Из (6.4) видно, что в результате интерференции прямой и обратной волн (6.1) в каждой точке среды (с фиксированной координатой x) происходит гармоническое колебание с той же частотой ω , но с амплитудой

$$u_0 = \left| 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right|, \quad (6.5)$$

в отличие от бегущих волн (6.1) зависящей от значения координаты x .

В точках среды, в которых

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0, \text{ или } 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.6)$$

амплитуда колебаний обращается в нуль, т. е. в этих точках колебания отсутствуют вовсе. Эти точки называются **узлами стоячей волны**. Координаты узлов имеют значения

$$x_{\text{узел}} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.7)$$

В точках среды, в которых

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm 1, \text{ или } 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.8)$$

амплитуда колебаний имеет наибольшее значение, равное $2A$. Эти точки называются **пучностями стоячей волны**. Из (6.8) получаются значения координат пучностей:

$$x_{\text{пучн}} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.9)$$

Следует иметь в виду, что пучность, как и узел, представляет собой не одну точку, а плоскость, точки которой имеют значения координаты x , определяемой (6.7) и (6.9).

Легко показать, что расстояние между соседними узлами или соседними пучностями равно $\lambda/2$, а пучности и узлы сдвинуты относительно друг друга на четверть длины волны. При замене x на $\lambda/2$ знак косинуса в (2.6) меняется на обратный (его аргумент изменяется на π):

$$\begin{aligned} u \left(x + \frac{\lambda}{2} \right) &= 2A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(x + \frac{\lambda}{2} \right) \right] \cos \omega t = 2A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} x + \pi \right] \cos \omega t = \\ &= -2A \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) \cos \omega t = -u(\lambda). \end{aligned}$$

Поэтому, если в пределах одной полуволны – от одного узла до другого – частицы среды отклонились в одну сторону, то в пределах соседней полуволны частицы среды будут отклонены в противоположную сторону. Это означает, что точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе. Все точки, заключенные между двумя соседними узлами, колеблются синфазно (т. е. в одинаковой фазе). Узлы смещения u как бы разделяют среду на автономные области, в которых гармонические колебания

совершаются независимо. Никакой передачи движения из одной области к другой, а значит и перетекания энергии через узлы не происходит. Другими словами, нет никакого распространения возмущения вдоль оси Ox . Именно поэтому возмущения, описываемые (6.4), и называют стоячей волной. Графически стоячая волна может быть изображена как показано на рис. 6.1. На нем дан ряд «моментальных фотографий» отклонений точек от положения равновесия. Первая «фотография» соответствует моменту времени, когда отклонения достигают наибольшего абсолютного значения. Последующие фотографии сделаны с интервалами в четверть периода. Стрелками показаны скорости частиц.

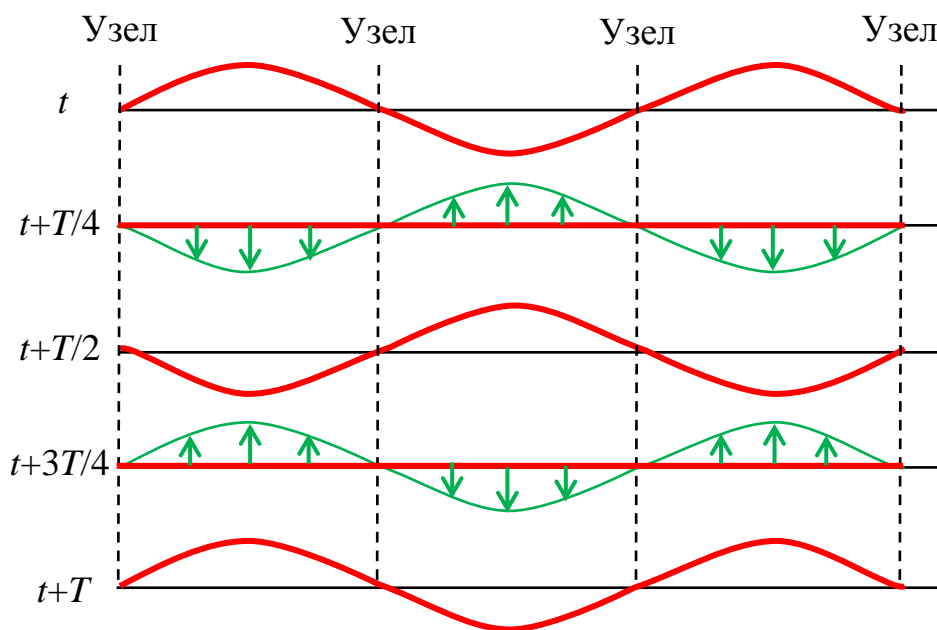


Рис. 6.1. Стоячая волна

● – отклонения частиц; ● – скорости частиц

Приведем характерные особенности стоячей волны в отличие от обычной бегущей волны (имеются в виду плоские волны при отсутствии затухания).

1. В стоячей волне амплитуды колебаний различны в различных местах среды распространения – в системе имеются пучности и узлы; в бегущей волне эти амплитуды везде одинаковы.

2. В пределах участка среды распространения от одного узла до соседнего все точки среды колеблются в одинаковой фазе. При переходе к соседнему такому участку фазы колебаний меняются на обратные. В бегущей волне фазы колебаний зависят от координат точек.

3. В стоячей волне нет одностороннего переноса энергии, как это имеет место в бегущей волне.

При описании колебательных процессов в упругих системах за колеблющуюся величину можно принять не только смещение u , но и скорость частиц v , величину относительной деформации ϵ , величину напряжения на сжатие σ , сдвига и т. д.

Продифференцировав (6.4) один раз по t , а другой раз по x , найдем выражение для скорости частиц v и для относительной деформации ε :

$$v = \frac{du}{dt} = -2\omega A \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \sin \omega t, \quad (6.10)$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = -2 \frac{2\pi}{\lambda} A \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega t. \quad (6.11)$$

Уравнение (6.10) описывает стоячую волну скорости, а (6.11) – стоячую волну относительной деформации, причем сдвинуты они относительно друг друга по фазе на $\pi/2$ – как в пространстве, так и во времени ($\cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$ в выражении для v меняется на $\sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$ в выражении для ε и, наоборот, $\sin \omega t$ заменен на $\cos \omega t$). Кроме того, узлы и пучности скорости v частиц среды совпадают с узлами и пучностями их смещения u . Узлы же и пучности деформации ε совпадают, соответственно, с пучностями и узлами смещения u (рис. 6.2).

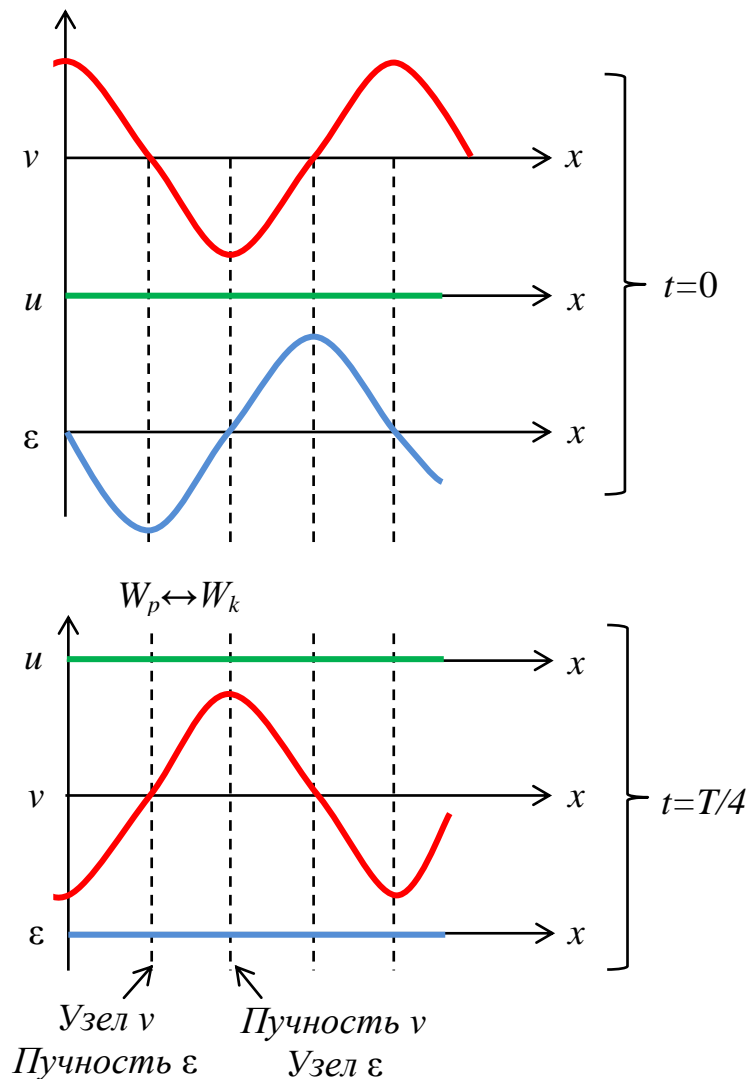


Рис. 6.2. Узлы и пучности u , v и ε

Соответственно, дважды за период происходят превращения энергии стоячей волны: то полностью в потенциальную (упругую), сосредоточенную в основном вблизи узлов (где находятся пучности деформации), то полностью в кинетическую, сосредоточенную в основном вблизи пучностей волны (где находятся пучности скорости). В результате происходит перетекание энергии от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. Средний по времени поток энергии в любом сечении волны равен нулю.

Рассматривая интерференцию прямой и обратной волн, ранее мы не интересовались происхождением этих волн. Допустим теперь, что среда, в которой происходит распространение колебаний, имеет ограниченные размеры. Например, колебания вызываются в каком-нибудь теле ограниченных размеров – в стержне или в струне, в столбе жидкости или газа конечной длины l . В общем случае при возбуждении какого-либо произвольного колебания в таком теле возникает довольно сложное нестационарное движение. Стационарное же движение в виде стоячей волны возможно лишь при вполне определенных частотах. Обратимся, например, к процессу образования стоячих волн в натянутой струне, оба конца которой закреплены. На закрепленных концах струны должны выполняться определенные *граничные условия*: в них смещение u все время должно равняться нулю. Значит, если в струне возбуждается стоячая волна, то концы струны должны быть ее узлами. Отсюда следует, что на длине струны l должно укладываться целое число n полуволн: $l = n\lambda/2$. Из этого условия находим возможные длины волн:

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.12)$$

которым соответствуют частоты

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{2l}n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.13)$$

Эти формулы автоматически следуют из уравнения стоячей волны (6.4) при учете граничного условия, а именно, конец l струны закреплен, т. е. смещение u в этой точке равно нулю в любой момент времени:

$$u = 0 \quad \text{при } x = l \quad (6.14)$$

формальная запись граничного условия, о котором говорилось выше.

При выводе (6.7) для положений узлов начало координат было выбрано так, что первый узел находится на расстоянии четверти длины волны $\lambda/4$ вправо от начала координат. Действительно, из (6.7) при $n = 0$ получается

$$x_{\text{уз}}(0) = \frac{\lambda}{4}.$$

Мы же требуем, чтобы начало оси $0x$, связанное со струной, находилось именно в первом узле. Таким образом, эти координаты связаны соотношением:

$$x = x' + \frac{\lambda}{4}.$$

Поэтому (6.14) на самом деле выглядит так:

$$u = 0 \quad \text{при } x = l + \frac{\lambda}{4}.$$

Обратимся к явному выражению для стоячей волны (6.4) и запишем

$$u = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(l + \frac{\lambda}{4} \right) \cos \omega t \quad \text{при } x = l + \frac{\lambda}{4}.$$

Поскольку время t может быть произвольным, то нулю равен множитель

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(l + \frac{\lambda}{4} \right) = 0,$$

откуда
$$\frac{2\pi}{\lambda} \left(l + \frac{\lambda}{4} \right) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(берем положительные целые числа, так как струна расположена вправо от начала координат).

И мы имеем допустимые длины волн

$$\frac{2l}{\lambda} + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2l}{n},$$

что совпадает с (6.12). Она показывает, что на удвоенной длине струны укладывается целое число собственных длин волн. Наименьшая длина волны равна $2l$ (рис. 6.3, на котором изображены собственные колебания).

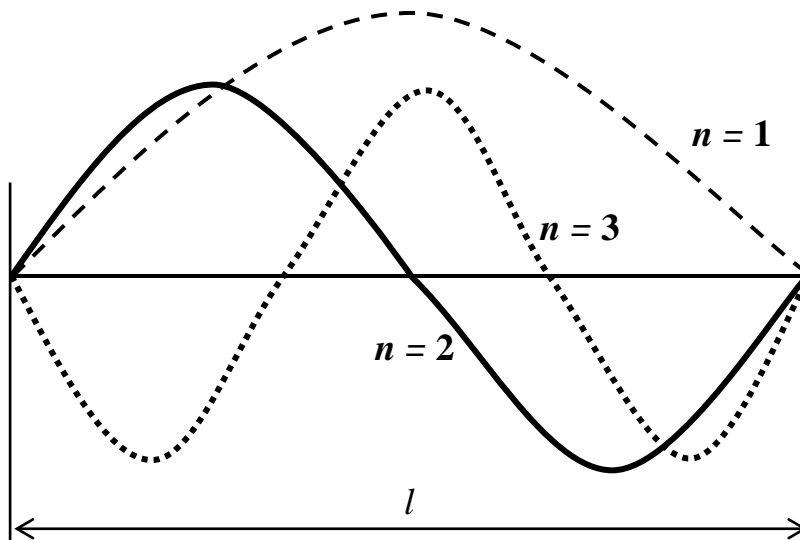


Рис. 6.3. Собственные колебания

Частоты ν_n (6.13) называют собственными частотами струны. Частоту ν_1 ($n = 1$) называют **основной частотой**, а остальные ν_2, ν_3, \dots — **обертонами**. Гармонические колебания с частотами (6.13) называются **собственными колебаниями**, или **гармониками**. В общем случае колебания струны представляют собой суперпозицию различных гармоник (спектр).

7. ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ. ДИСПЕРСИЯ

Ранее мы рассматривали только монохроматические волны, т. е. волны, имеющие одну частоту и длину волны. Значительно более общим является случай, когда волны существуют в виде набора или группы частотных гармоник. Анализ поведения таких *пакетов* приводит к понятию *групповой скорости*.

Наиболее важные свойства таких пакетов могут быть выявлены при рассмотрении пакета волн, который представляет собой результат суперпозиции двух волн с одинаковой амплитудой (но с разными частотами), распространяющихся в одном направлении (сложение двух волн противоположного направления мы рассмотрели в разд. 6). Их смещения описываются (2.9):

$$u_1 = A \cos(\omega_1 t - k_1 x), \quad u_2 = A \cos(\omega_2 t - k_2 x).$$

Для простоты подберем начальные условия такими, чтобы начальные фазы α_1 и α_2 в этих волнах были равными нулю.

Складывая эти смещения, мы получаем смещение результирующей волны аналогично тому, как получалось выражение для стоячей волны:

$$u = u_1 + u_2 = 2A \cos \left[\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} - \frac{(k_1 - k_2)x}{2} \right] \times \cos \left[\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} - \frac{(k_1 + k_2)x}{2} \right]. \quad (7.1)$$

Пусть частоты складываемых волн приблизительно одинаковы, так что величина $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ очень близка к частоте любой из двух компонент. Но разность $(\omega_1 - \omega_2)$ гораздо меньше, чем ω_1 и ω_2 , поскольку мы предположили, что ω_1 и ω_2 приблизительно равны друг другу. Это означает, что результат сложения можно истолковать так, как будто есть косинусоидальная волна с частотой, более или менее равной первоначальной, но что амплитуда ее, имеющая максимальное значение $2A$, модулирована в пространстве и времени очень медленно меняющейся огибающей с частотой $\omega_1 - \omega_2/2$ и волновым числом $k_1 - k_2/2$ (рис. 7.1).

Скорость новой волны равна

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = c \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_2} = c, \quad (7.2)$$

где мы использовали связь (2.8) между волновым числом, частотой и фазовой скоростью бегущей волны: $\omega_1 = ck_1$, $\omega_2 = ck_2$. Следовательно, частотные гармоники и их сумма, т. е. *пакет*, будут распространяться с одинаковой

скоростью, причем профиль пакета не изменяется. Интенсивность новой волны максимальна всегда, когда амплитуда имеет максимальное значение $2A$. Это происходит дважды за период, определяемый частотой $\nu_1 - \nu_2$ (здесь нетрудно усмотреть аналогию с явлением биений, наблюдающихся при сложении двух колебаний с почти одинаковыми частотами ν_1 и ν_2). Таким образом, частота биений интенсивности равна разности частот гармоник $\nu_1 - \nu_2$. В приведенном здесь примере, где амплитуды гармоник равны A , суммарная амплитуда будет меняться от 0 до $2A$. В этом случае говорят о полной, или 100 %-й, модуляции.

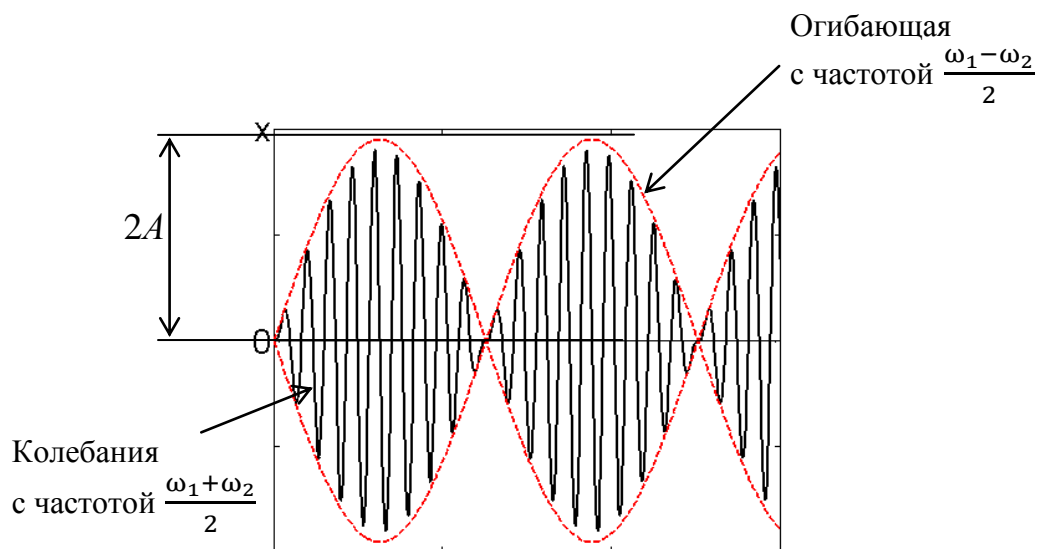


Рис. 7.1. Биения

Теперь предположим, что две гармоники, рассмотренные выше, имеют разные фазовые скорости и $\omega_1/k_1 \neq \omega_2/k_2$. Скорость перемещения максимума амплитуды пакета, т. е. так называемая **групповая скорость**

$$v_{\text{гр}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}, \quad (7.3)$$

теперь отличается от каждой из этих скоростей. Вид суперпозиции двух волн уже не будет сохраняться, и профиль пакета будет изменяться со временем (поскольку фазовые скорости волн различны, одна из них опережает другую, и результат их сложения для разных моментов времени будет различным), и, как принято говорить, пакет волн будет расплываться.

Среда, в которой фазовая скорость зависит от частоты (где отношение ω/k не является постоянным), называется **диспергирующей средой**. Зависимость ω от k выражается дисперсионной формулой. Если пакет состоит из гармоник с почти одинаковыми частотами, то исходное выражение для групповой скорости записывается следующим образом:

$$v_{\text{гр}} = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (7.4)$$

В простейшем случае механических волн, когда $\omega = kc$, фазовая скорость $v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = c$ и групповая скорость $v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = c$ совпадают, т. е. все фазы движутся с одинаковой скоростью, естественно, и групповая скорость будет той же самой.

Групповая скорость – это есть скорость перемещения максимальной амплитуды пакета, а потому это скорость, с которой переносится энергия пакета.

8. ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ

Процесс распространения волны в каком-нибудь направлении в среде сопровождается переносом энергии колебаний в этом направлении. Допустим, что ΔS – есть часть фронта волны в некоторый момент времени t (рис. 8.1).

По истечении времени Δt фронт волны переместится на расстояние $\Delta l = c\Delta t$, вследствие чего частицы среды в объеме $\Delta S\Delta l$ приводятся в колебательное движение. Обозначим через w энергию колебаний частиц среды, содержащихся в единице объема (*плотность энергии*). Допустим, что объем $\Delta S\Delta l$ очень мал. Тогда в пределах этого объема плотность энергии w можно считать одинаковой. Можно также утверждать, что за время Δt среда в объеме $\Delta S\Delta l$ получила энергию $w\Delta S\Delta l$. Таким образом, за единицу времени через площадку прошла энергия

$$\Delta\Phi = \frac{w\Delta S\Delta l}{\Delta t} = wc\Delta S. \quad (8.1)$$

Величина $\Delta\Phi$ есть *поток энергии* волны в единицу времени через площадку ΔS (ΔS ориентируют перпендикулярно направлению распространения волны). Поток энергии – скалярная величина, размерность которой равна размерности энергии $[w\Delta S\Delta l]$, деленной на размерность времени t , т. е. размерность этой величины совпадает с размерностью мощности. В соответствии с этим Φ измеряется в ваттах, эргах в секунду и т. п.

Поток энергии в разных точках волны может быть различной интенсивности. Для характеристики течения энергии в разных точках пространства вводится векторная величина, называемая *плотностью потока энергии*. Эта величина численно равна потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке, перпендикулярно к направлению, в котором переносится энергия. В соответствии с определением эта величина равна (8.1):

$$j = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S} = cw. \quad (8.2)$$

Так как скорость распространения волны есть вектор, то можно записать

$$\mathbf{j} = w\mathbf{c}. \quad (8.3)$$

Мы получили выражение для вектора плотности потока энергии. Этот вектор был введен в 1874 г. русским ученым-физиком Николаем Алексеевичем Умовым и называется *вектором Умова*. Следует отметить, что вектором Умова называется вектор плотности потока энергии *без конкретизации ее*

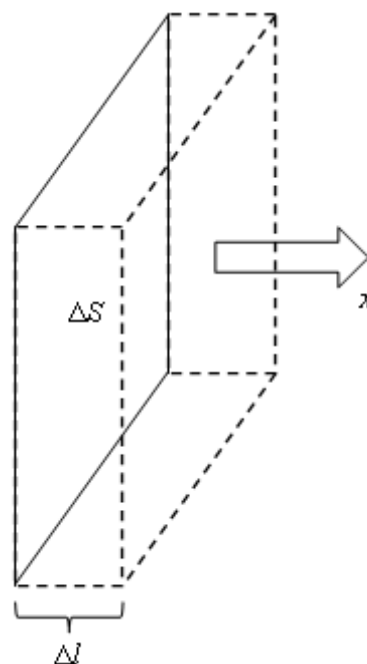


Рис. 8.1. Перемещение элемента фронта волны

физической природы. Выражения для этого вектора были получены Умовым только для упругих сред и вязких жидкостей. В 1884 г. идеи Умова были разработаны британским физиком Джоном Генри Пойнтингом применительно к электромагнитной энергии. Поэтому вектор плотности потока электромагнитной энергии называется **вектором Пойнтинга**, или **вектором Умова – Пойнтинга**.

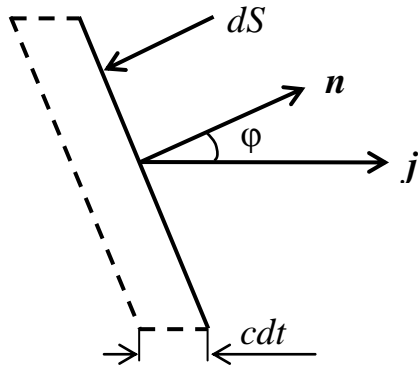


Рис. 8.2. К понятию вектора Умова

Зная величину вектора Умова \mathbf{j} во всех точках произвольной поверхности S , можно вычислить поток энергии Φ через всю поверхность. С этой целью разобьем поверхность на элементарные участки dS . За время dt через площадку dS пройдет энергия dW , заключенная в изображенном на рис. 8.2 косяке цилиндра. Объем этого цилиндра равен $dV = c \cdot dt \cdot dS \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между вектором \mathbf{j} и нормалью \mathbf{n} к элементарной площадке. В нем содержится энергия $dW = w \cdot dV = w \cdot c \cdot dt \cdot dS \cdot \cos\varphi$.

Примем во внимание, что

$$w \cdot c \cdot dS \cdot \cos\varphi = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \cdot \cos\varphi = (\mathbf{j}, d\mathbf{S}),$$

где $(\mathbf{j}, d\mathbf{S})$ – определение скалярного произведения двух векторов – \mathbf{j} и $d\mathbf{S} = ndS$, где \mathbf{n} – единичный вектор вдоль нормали к элементарной площадке (известное определение вектора $d\mathbf{S}$ элементарной площадки в дифференциальной геометрии). Отсюда для потока $d\Phi$ получается формула

$$d\Phi = \frac{dW}{dt} = (\mathbf{j}, d\mathbf{S}). \quad (8.4)$$

Полный поток энергии через поверхность равен сумме элементарных потоков $d\Phi$:

$$\Phi = \int_S (\mathbf{j}, d\mathbf{S}). \quad (8.5)$$

Найдем теперь формулу для расчета плотности энергии w , переносимой плоской волной, например, в твердой упругой среде.

Пусть в такой среде в направлении оси Ox распространяется плоская продольная волна

$$u = a \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (8.6)$$

Выделим в среде элементарный объем ΔV , настолько малый, чтобы скорость движения частиц и относительную деформацию во всех точках этого объема можно было считать одинаковыми и равными, соответственно, du/dt и du/dx .

Выделенный объем обладает кинетической энергией

$$\Delta W_k = \frac{\rho}{2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \Delta V,$$

где $\rho \Delta V$ – масса объема. Если объем дифференциально мал, то

$$\frac{dW_k}{dV} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = w_k \quad (8.7)$$

есть плотность кинетической энергии.

Рассматриваемый объем обладает также потенциальной энергией упругой деформации

$$\Delta W_n = \frac{kx^2}{2},$$

где x – абсолютное удлинение деформируемого объема, k – коэффициент пропорциональности, фигурирующий в законе Гука $F = kx$ (где F – внешняя деформирующая сила).

Исключим коэффициент k из (8.7) с помощью закона Гука:

$$\Delta W_n = \frac{Fx}{2}. \quad (8.8)$$

При выводе волнового уравнения для продольных волн в твердой среде мы выделяли элементарный объем в виде цилиндра с поперечным сечением S и высотой Δx и рассматривали продольное абсолютное смещение u торцов цилиндра. В этих обозначениях энергия упругой деформации запишется в виде

$$\Delta W_n = \frac{Fu}{2}.$$

Умножим и разделим правую часть этой формулы на элементарный объем $\Delta V = S\Delta x$:

$$\Delta W_n = \frac{Fu}{2S\Delta x} \Delta V.$$

В этой формуле отношение F/S есть так называемое напряжение σ , а из-за малости u и Δx отношение $u/\Delta x$ – есть относительная деформация среды в точке с координатой x . В пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ величины ΔV и ΔW_n можно считать дифференциально малыми и записать

$$\Delta W_n = \frac{1}{2} \sigma \frac{du}{dx} \Delta V,$$

или

$$\frac{\Delta W_n}{\Delta V} = \frac{1}{2} \sigma \frac{du}{dx}.$$

Если теперь воспользоваться законом Гука, записанным в виде

$$\sigma = \varepsilon E = E \frac{du}{dx},$$

то

$$\frac{dW_n}{dV} = \frac{1}{2} E \left(\frac{du}{dx} \right)^2,$$

т. е. получаем формулу для энергии упругодеформированной среды, приходящейся на единицу объема, или для плотности потенциальной энергии

$$w_n = \frac{1}{2} E \left(\frac{du}{dx} \right)^2. \quad (8.9)$$

Окончательно для плотности механической энергии упругой волны имеем выражение

$$w = w_k + w_n = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + c^2 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right]. \quad (8.10)$$

Из вывода следует, что эта формула справедлива для любого типа упругих возмущений, распространяющихся в среде, т. е. не только для бегущих волн типа $u(t \pm \frac{x}{c})$, но и более сложных зависимостей перемещения $u(x, t)$ от времени и координаты, хотя мы использовали формулу для скорости распространения волн $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. В этих случаях под c мы будем понимать формальный параметр, используемый для расчета плотности энергии, а не скорость волны.

Дифференцирование (8.6) один раз по t , другой раз по x дает для плоской монохроматической волны:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -a\omega \sin(\omega t - kx + \alpha), \\ \frac{du}{dx} &= ak \sin(\omega t - kx + \alpha). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (8.9) и приняв во внимание, что $k^2 c^2 = \omega^2$, получим

$$w = \rho a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha). \quad (8.11)$$

Из (8.10) следует, что плотность энергии в каждый момент времени в разных точках среды различна. В одной и той же точке плотность энергии зависит от времени по закону квадрата синуса. Среднее значение квадрата синуса за время, равное периоду T колебаний, равно $\frac{1}{2}$. Покажем это.

Средним значением некоторой физической величины x за некоторый отрезок времени $[t_0, t_0 + T]$ называется интеграл, взятый от этой величины в пределах от t_0 до $t_0 + T$, деленный на этот отрезок времени:

$$x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x dt.$$

Среднее значение плотности энергии w , следовательно, выразится как

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{T} \int_0^T w dt = \frac{\rho a^2 \omega^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - kx + \alpha) = \frac{\rho a^2 \omega^2}{2T} \int_0^T [1 - \cos 2(\omega t - kx + \alpha)] dt = \\ &= \frac{\rho a^2 \omega^2}{2T} \left\{ T - \frac{1}{2\omega} [\sin 2(\omega t - kx + \alpha) - \sin 2(-kx + \alpha)] \right\} = \\ &= \frac{\rho a^2 \omega^2}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\omega T} \cos(\omega t - 2kx + \alpha) \sin \omega T \right\}. \end{aligned}$$

Учтем, что $T = 2\pi/\omega$:

$$w = \frac{\rho a^2 \omega^2}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi - kx + \alpha) \sin 2\pi \right\} = \frac{\rho a^2 \omega^2}{2}.$$

Итак

$$w = \frac{\rho a^2 \omega^2}{2}. \quad (8.12)$$

Плотность энергии (8.10) и ее среднее значение (8.11) пропорциональны плотности среды, квадрату частоты и квадрату амплитуды плоской гармонической волны.

Среднее по времени значение плотности потока энергии называют **интенсивностью волны**:

$$I = j = cw. \quad (8.13)$$

Следует заметить, что полученные выражения справедливы и для других упругих волн в жидкостях и газах, а также других видов волн – плоской затухающей, сферической и т. д.

В случае плоской затухающей волны амплитуда уменьшается с расстоянием по закону $a = a_0 \exp(-\gamma x)$. Соответственно, средняя плотность потока энергии, т. е. интенсивность волны, убывает по закону

$$j = cw = c \frac{\rho a^2 \omega^2}{2} = c \frac{\rho a_0^2 \omega^2}{2} \exp(-2\gamma x) = j_0 \exp(-\gamma x). \quad (8.14)$$

Здесь $j_0 = \frac{\rho \alpha_0^2 \omega^2}{2}$ есть начальная интенсивность волны, а $k = 2\gamma$ – величина, называемая **коэффициентом поглощения волны**. Для воздуха и некоторых других газов он пропорционален квадрату частоты колебаний: $k \approx 2 \cdot 10^{-11} \text{ в}^2 \text{ с}^2/\text{м}$; для воды (до $\nu = 106$ Гц) $k \approx 3 \cdot 10^{-14} \text{ в}^2 \text{ с}^2/\text{м}$, т. е. почти в 700 раз меньше, чем в воздухе. Например, амплитуда колебаний с частотой $\nu = 10^6$ Гц уменьшается в $e = 2,71$ раз в воздухе на расстоянии 0,05 м, а в воде – на расстоянии 33,4 м. Этим объясняется широкое применение звуковых и ультразвуковых волн при исследовании морей, при гидролокации и т. д.

В сферической волне, вызванной точечным источником колебаний, плотность потока энергии убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от источника. Чтобы показать это, допустим, что источник колебаний каждую секунду отдает в окружающую среду одну и ту же энергию, равную W . Эта энергия равномерно распределяется по шаровой поверхности фронта волны $S = 4\pi R^2$, поэтому через единицу площади этой поверхности в единицу времени проходит энергия $j = \frac{W}{4\pi R^2}$, т. е. $j \sim 1/R^2$.

9. ЗВУКОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Звук – это особый вид механических колебаний упругой среды, способный вызвать слуховые ощущения. При нарушении стационарного состояния среды каким-либо источником механических колебаний происходит локальное сжатие частиц среды, которые с определенной скоростью передаются в пространство.

9.1. Скорость звука

При выводе волнового уравнения для звука мы получили формулу, которая связывает скорость движения волны и относительное изменение давления с плотностью при нормальном давлении:

$$c_s^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right). \quad (9.1)$$

Чтобы оценить скорость изменения давления, очень важно знать, как при этом меняется температура среды. Можно ожидать, что в местах сгущения звуковой волны температура повысится, а в местах разрежения – понизится. Ньютон первым вычислил скорость изменения давления с изменением плотности, предположив, что температура при этом не меняется. Он считал, что тепло передается из одной области звуковой волны в другую так быстро, что температура при этом измениться не успевает. Способ Ньютона определяет изотермическую скорость звука, что оказалось неправильным. Правильное вычисление было сделано позже Лапласом, считавшим вопреки Ньютону, что давление и температура в звуковой волне меняются адиабатически. Поток тепла из области сгущения в область разрежения пренебрежимо мал, если только длина волны велика по сравнению с длиной свободного пробега молекул среды. При этих условиях ничтожная утечка тепла в звуковой волне практически не оказывает влияния на скорость звука, хотя и приводит к небольшому поглощению звуковой энергии. Мы можем, естественно, ожидать, что поглощение тепла усилится, когда длина волны приблизится к длине свободного пробега молекул воздуха, но такие длины волн примерно в миллион раз меньше длины волны слышимого звука.

Итак, для звука истинная скорость изменения давления с плотностью должна вычисляться без учета отвода тепла. Это соответствует адиабатическому изменению давления, для которого $PV^\gamma = \text{const}$, где V – объем. Поскольку плотность ρ обратно пропорциональна объему, связь P и ρ для адиабатических процессов задается соотношением

$$P = \text{const} \cdot \rho^\gamma, \quad (9.2)$$

откуда мы получаем $dP/d\rho = \gamma P/\rho$. Тогда для скорости звука возникает соотношение

$$c_s^2 = \frac{\gamma P}{\rho}. \quad (9.3)$$

Можно также написать

$$c_s^2 = \frac{\gamma PV}{\rho V}$$

и использовать соотношение $PV = NkT$. Мы видим, кроме того, что ρV – есть масса газа, которую можно записать как Nm или μ , где m – масса молекулы, а μ – молекулярный вес. Таким образом, находим

$$c_s^2 = \frac{\gamma kT}{m} = \frac{\gamma RT}{\mu}, \quad (9.4)$$

откуда видно, что скорость звука зависит только от температуры газа и не зависит от давления или плотности.

Известно, что

$$kT = \frac{1}{3}mv^2, \quad (9.5)$$

где v^2 – среднеквадратичная скорость движения молекул. Отсюда следует, что

$$c_s^2 = \frac{\gamma}{3}v^2,$$

или

$$c_s = v_{\text{ср}} \sqrt{\frac{\gamma}{3}}. \quad (9.6)$$

Это равенство означает, что скорость звука есть среднеквадратичная скорость движения молекул воздуха, умноженная на некоторое число, грубо говоря, на $1/\sqrt{3}$. Другими словами, она того же порядка, что и скорость движения молекул, но на самом деле несколько меньше нее.

Это ожидаемо, потому что такое возмущение, как изменение плотности, передается, в конечном счете, движением молекул. Однако подобного рода соображения не подсказывают нам точного значения скорости. Может ведь оказаться, что звук переносится самыми быстрыми молекулами, а может оказаться, что самыми медленными. Тем не менее, нам стало понятно, что скорость звука оказалась равной приблизительно половине средней скорости движения молекул.

Сопоставить относительные скорости распространения звуковой волны в различных по плотности средах можно воспользовавшись (4.6):

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где E – модуль продольной упругости (модуль Юнга) той среды, в которой звуковая волна распространяется, и который определяет силу взаимодействия частиц друг с другом, а $\rho = m/V$ ($\text{кг}/\text{м}^3$) – плотность рассматриваемой среды.

Поскольку упругость твердых тел много больше, чем упругость жидкостей и газов, соотношение скоростей звука в этих средах, очевидно, будет следующим:

$$C_{\text{твердого тела}} > C_{\text{жидкости}} > C_{\text{газа}},$$

т. е. скорость звука в твердых телах больше, чем в жидкостях и газах, а в жидкостях больше, чем в газах.

Для того чтобы численно оценить скорость звука в воздухе, можно воспользоваться (9.3), записав ее в виде

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma P_{\text{атм}}}{\rho}}, \quad (9.7)$$

где $\gamma = c_p/c_v$ – **показатель адиабаты**, равный отношению удельной теплоемкости газа при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме (для воздуха при температуре $T = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ $\gamma = 1,402$); ρ – плотность воздуха; $P_{\text{атм}}$ – атмосферное давление, которое связано с температурой газообразной среды соотношением $P_{\text{атм}} = \rho RT/M$, где T – температура среды в градусах Кельвина, R – газовая постоянная (для сухого воздуха $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$), а M – масса одного моля газа (для воздуха $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$). Можно записать

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (9.8)$$

и, подставив в (9.7) соответствующие значения в т. ч. $T = 290 \text{ }^\circ\text{K}$ (температура воздуха $17 \text{ }^\circ\text{C}$, но выраженная в градусах Кельвина), вычислить скорость звука при этих условиях:

$$c_s = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,31 \cdot 290}{29 \cdot 10^{-3}}} \approx 340 \text{ м/с}.$$

Из (9.7) также видно, что в газообразной среде скорость звука сильно зависит от температуры (молекулы в горячем газе движутся быстрее, имеют большую энергию и быстрее передают механическое возбуждение).

Зависимость скорости звука в воздухе от его температуры (при нормальном атмосферном давлении) приближенно можно представить в виде

$$c_s = (331 + 0,6 T^\circ) \text{ м/с}, \quad (9.9)$$

где T° – градусы Цельсия.

При температуре $+20 \text{ }^\circ\text{C}$ скорость звука в воздухе равна

$$c_s = (331 + 0,6 \cdot 20^\circ) = 343 \text{ м/с}.$$

Можно подсчитать, что при 0°C скорость звука 331 м/с , а при $20 \text{ }^\circ\text{C}$ она равна 319 м/с . Такая сильная зависимость скорости звука от температуры создает проблемы при настройке духовых инструментов, поэтому перед исполнением их надо прогревать.

Из (1.2) следует, что

$$c_s = \lambda \cdot \nu,$$

т. е. скорость звука c_s должна зависеть от частоты. Однако при изменении частоты соответственно меняется и длина волны, поэтому в одной и той же среде скорость звука от частоты не зависит. Другими словами, в воздушной среде отсутствует **дисперсия** – зависимость скорости распространения звука от частоты. В этом легко убедиться на практике: если бы дисперсия имела место, то слушать музыку в концертном зале было бы практически невозможно: высокие и низкие звуки, сыгранные одновременно, приходили бы к слушателю в разное время.

9.2. Звуковое давление

Звуковая волна распространяется в воздушной среде в виде зон сжатия и разрежения (рис. 9.1). Плотность газа P и давление p связаны соотношением

$$P = \frac{\rho RT}{M},$$

где T – температура среды в градусах Кельвина, R – газовая постоянная среды, ρ – плотность, а M – масса одного моля газа. В зонах сжатия газовой среды давление будет выше статического атмосферного, а в зонах разрежения – ниже. Если разместить в области распространения волны измерительный прибор (например, микрофон), то он будет регистрировать изменение давления по мере прохождения через эту точку звуковой волны (зон сжатия – разрежения).

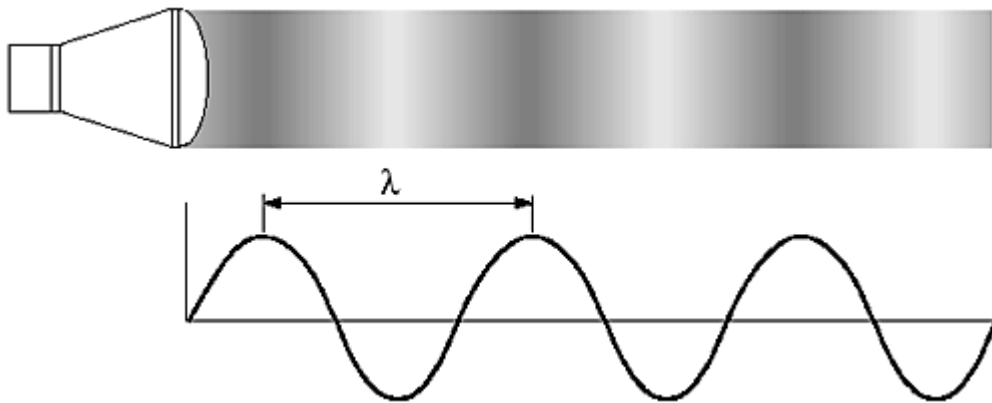


Рис. 9.1. Изменение звукового давления в продольной волне

Разность между мгновенным значением давления в данной точке среды $P_{\text{мгн}}$ и атмосферным давлением $P_{\text{атм}}$ называется **звуковым давлением**:

$$P_{\text{зв}} = P_{\text{мгн}} - P_{\text{атм}}.$$

Звуковое давление – величина знакопеременная: в зонах сгущения она положительна, в зонах разрежения – отрицательна. Звуковое давление измеряется в *паскалях* (Па):

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2.$$

Слуховая система человека способна воспринимать как звук огромный диапазон разностей между мгновенным значением звукового давления и атмосферным, которое равно в среднем 100 000 Па. Звуковое давление может оцениваться в пределах от $2 \cdot 10^{-5}$ Па до 20 Па. Таким образом, слуховая система ощущает изменения в атмосферном давлении от $2 \cdot 10^{-8}$ % до 0,02 %, что подтверждает ее необычайную чувствительность. В табл. 9.1 приведены значения звукового давления, создаваемого различными звуковыми источниками.

Таблица 9.1

Звуковое давление, создаваемое различными источниками

Источник звука	Расстояние до источника, м	Звуковое давление, Па	Уровень звукового давления, дБ
Шум самолета	5	20	120
Большой оркестр (<i>ff</i>)	10	2–4	100–106
Орган (<i>f</i>)	3,6	2	100
Тарелки	0,9	1,67	99
Камерный ансамбль	4	0,8–1	92–94
Труба	0,9	0,8	92
Кларнет	0,9	0,36	85
Флейта	1	0,063	70
Речь	1	0,02–0,05	60–68
Шепот	1	2×10^{-4}	20
Писк комара	0,5	2×10^{-5}	0

Как уже говорилось, скорость частиц в среде, где распространяется звуковая волна, зависит от частоты и амплитуды звукового давления (т. е. приложенной силы). Если под действием данного звукового давления частицы среды приобретают малую скорость, как например, в твердых телах, то можно сказать, что данное тело оказывает большое сопротивление приложенному звуковому давлению. Для оценки этого свойства вводится понятие удельного акустического сопротивления.

Скорость колебания частиц среды, в которой распространяется звуковая волна, зависит от плотности этой среды и от величины звукового давления. В твердых телах (с высокой плотностью) при воздействии одного и того же звукового давления частицы приобретут меньшую скорость, чем в газообразных (с небольшой плотностью). Другими словами, среда с высокой плотностью оказывает большее сопротивление приложенному звуковому давлению, чем среда с меньшей плотностью. Для оценки этого свойства существует понятие удельного акустического сопротивления.

Удельное акустическое сопротивление упругой среды (**импеданс**) – это величина, равная отношению звукового давления в среде к колебательной скорости ее частиц при прохождении через данную среду звуковой волны:

$$Z_s = \frac{P_{зв}}{v}. \quad (9.10)$$

Удельное акустическое сопротивление измеряется в Па · с/м или $\frac{\text{кГ}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}$.

Удельное акустическое сопротивление можно рассчитать через плотность среды ρ и скорость звука c_s в ней:

$$Z_s = \rho c_s. \quad (9.11)$$

Приведем в качестве примера значения удельного акустического сопротивления для некоторых сред:

- $Z_s = 417 \text{ Па} \cdot \text{с/м}$ для *сухого воздуха* при $15 \text{ }^\circ\text{C}$ и стандартном атмосферном давлении, $\rho = 1,225 \text{ кг/м}^3$, $c = 340,3 \text{ м/с}$.
- $Z_s = 600 \text{ Па} \cdot \text{с/м}$ для *резины*.
- $Z_s = 150 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{с/м}$ для *воды*.
- $Z_s = 4180 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{с/м}$ для *меди*.
- $Z_s = 4600 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{с/м}$ для *стали*.

В общем случае удельное акустическое сопротивление (импеданс) является величиной комплексной, т. е. у него есть активная и реактивная часть:

$$Z = R + iX.$$

Активная составляющая R определяет величину полезной акустической энергии, излучаемой источником звука в окружающую среду. Реактивная составляющая X характеризует потери звуковой энергии.

Поскольку удельное акустическое сопротивление для воздуха достаточно мало, то полезная излучаемая энергия в воздушной среде также мала.

Следовательно, и **коэффициент полезного действия**

$$\text{КПД} = P_a / P_{\text{под}},$$

где P_a – излучаемая акустическая энергия, $P_{\text{под}}$ – подводимая энергия (механическая или электрическая), у всех излучателей, работающих на воздухе, очень мал. Например, музыкальные инструменты, голосовой аппарат, громкоговорители и прочие имеют КПД в пределах 0,2–1 %.

Поскольку звуковая волна переносит энергию механических колебаний, она может характеризоваться **энергетическими параметрами**, к числу которых относятся: **общая акустическая энергия** P_a (Дж); **мощность** W – энергия, переносимая в единицу времени (Вт); **интенсивность** I , т. е. количество энергии, проходящее в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной к направлению распространения звуковой волны (Вт/м^2); **плотность** ε – количество звуковой энергии в единице объема (Дж/м^3).

9.3. Восприятие звуковых колебаний

При оценке восприятия звуковых колебаний необходимо учитывать, что чувствительность человеческого слуха на различных частотах очень сильно отличается. Поскольку разница между самым тихим звуком $2 \cdot 10^{-5}$ Па и самым громким звуком 20 Па очень велика, использовать при оценке громкости такую большую шкалу звуковых давлений было бы весьма неудобно. Чтобы сжать масштаб шкалы измерений, во всех измерительных приборах решили использовать логарифмическую шкалу, а для количественной оценки ввели специальную величину, которая называется **уровнем звукового давления**. Определяется уровень звукового давления по формуле

$$L_p = 20 \lg P/P_0, \quad (9.12)$$

где $P_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па – минимальное звуковое давление, которое способен ощущать человеческий слух.

Измеряется уровень звукового давления в децибелах (дБ). Например, если звуковое давление равно 2 Па, то уровень звукового давления равен

$$L_p = 20 \lg P/P_0 = 20 \lg (2 \text{ Па} / (2 \cdot 10^{-5}) \text{ Па}) = 20 \lg (1 \cdot 10^{+5}) = 20 \cdot 5 = 100 \text{ дБ.}$$

И наоборот, если задан уровень звукового давления $L_p = 80$ дБ, то величина звукового давления определяется следующим образом:

$$L_p = 20 \lg P/P_0,$$

отсюда

$$80 \text{ дБ} = 20 \lg P / (2 \cdot 10^{-5}),$$

значит,

$$\lg P/(2 \cdot 10^{-5}) = 4.$$

Следовательно, $10^4 = P/(2 \cdot 10^{-5})$, отсюда значение звукового давления будет равно $P = 0,2$ Па.

Увеличение звукового давления в два раза соответствует изменению уровня звукового давления на 6 дБ. Например, звуковое давление 2 Па соответствует уровню звукового давления 100 дБ, а звуковое давление 1 Па соответствует уровню 94 дБ, звуковое давление 4 Па – уровню 106 дБ, звуковое давление 8 Па – уровню 112 дБ и т. д.

Кроме того, следует обратить внимание на то, что уровни звукового давления нескольких одновременно работающих различных источников никогда не складываются. Для определения суммарного уровня необходимо вначале рассчитать значения звукового давления, создаваемого каждым из источников P_1 и P_2 . Затем определить суммарное звуковое давление $P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$. После этого по (9.12) определить суммарный уровень звукового давления L_p .

Например, если играют скрипка с уровнем 80 дБ и рояль с уровнем 86 дБ, то их суммарный уровень звукового давления определяется следующим образом. Уровню 80 дБ соответствует звуковое давление 0,2 Па, уровню 86 дБ – звуковое давление 0,4 Па. Суммарное давление равно $P = 0,447$ Па, отсюда скрипка и рояль вместе создают уровень звукового давления $L_p = 86,98$ дБ.

При оценке слухового восприятия звуковых колебаний кроме звукового давления нередко используют и другую величину – **интенсивность** или **силу звука**. Громкость звука зависит от его **интенсивности**, которая, в свою очередь, зависит от звукового давления, создаваемого источником звука в точке прослушивания.

Интенсивность I и звуковое давление P связаны соотношением

$$I = \frac{P^2}{\rho c_s}, \quad (9.13)$$

где ρ – плотность воздуха, равная $1,2 \text{ кг/м}^3$; c_s – скорость распространения звуковых колебаний в воздухе, равная при температуре 20°C 343 м/с .

Из практики хорошо известно, что чем больший уровень звукового давления создает источник звука, тем громче он звучит. Однако одного только уровня звукового давления для характеристики громкости звучания недостаточно, поскольку чувствительность человеческого слуха различна для различных частот. По этой причине для его определения пользуются графиком, который наглядно показывает, как изменяется минимальное значение звукового давления, воспринимаемого человеческими органами слуха как звук, в зависимости от частоты акустических колебаний. Такой график называется **кривой абсолютного порога слышимости** (рис. 9.2). Определяется он в полосе частот от 20 до 20 000 Гц – именно в этом диапазоне человеческий слух способен воспринимать акустические колебания как звук. Однако следует иметь в виду, что такая широкая полоса слышимых частот скорее физиологический предел возможностей человеческого слуха – в действительности подавляющее большинство людей даже в молодом возрасте (18–25 лет), когда острота слуха наивысшая, способно слышать звуки только в диапазоне 30–35 ... 16000–18 000 Гц. Тем не менее, есть данные, что отдельные люди способны слышать звуки даже с частотой 22 000 Гц.

Порог слышимости – это то самое минимальное значение звукового давления $P_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па, при котором еще наблюдается слуховое ощущение. Он характеризует чувствительность слуха к интенсивности звуковой энергии.

Абсолютный порог слышимости на заданной частоте принято выражать в децибелах по отношению к величине порога слышимости $P_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па, которая в таких оценках условно принимается за точку отсчета (0 дБ). Как видно из рис. 9.2, наибольшей чувствительностью человеческий слух обладает на средних частотах – в диапазоне от 2000 до 5000 Гц. Здесь абсолютный порог слышимости даже меньше $2 \cdot 10^{-5}$ Па ($\sim 1 \cdot 10^{-5}$ Па).

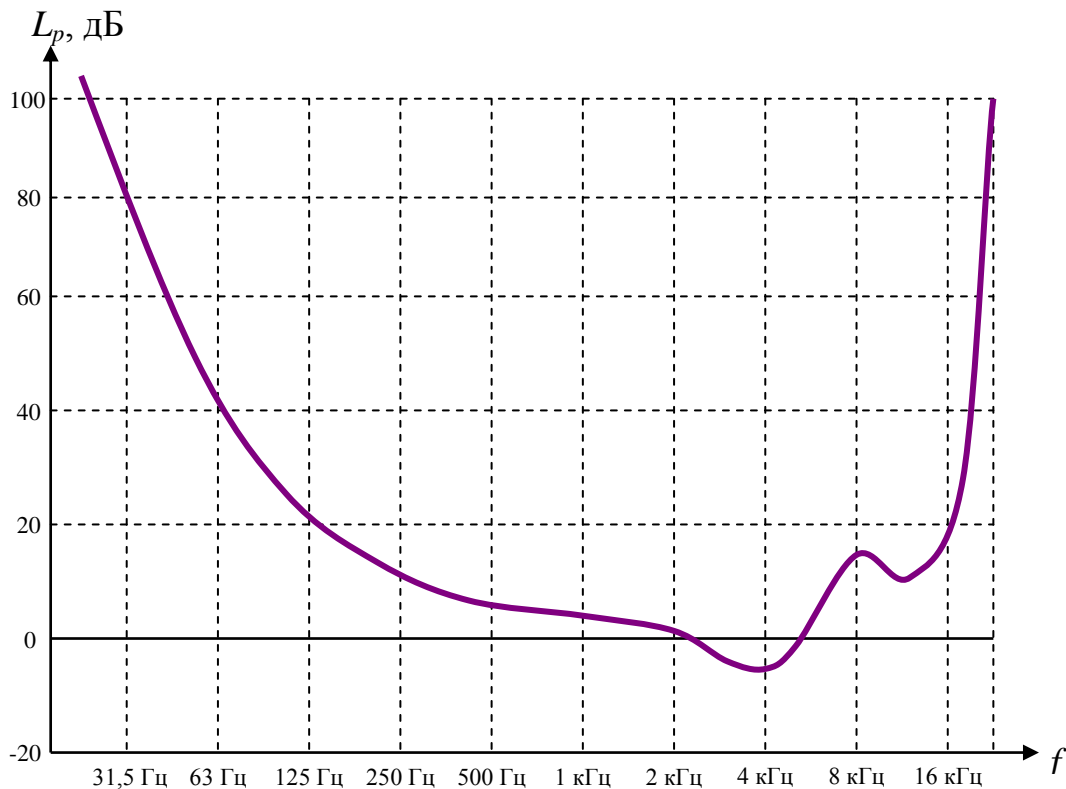


Рис. 9.2. Кривая абсолютного порога слышимости, построенная по результатам измерений в условиях свободного поля

Если создать три тональных звуковых сигнала с одним и тем же уровнем звукового давления $p = 40$ дБ: один – с частотой 50 Гц, другой – с частотой 100 Гц, третий – с частотой 4 кГц и попытаться сравнить их громкости, то окажется, что сигнал с частотой 4 кГц будет звучать достаточно громко, сигнал с частотой 100 Гц – едва слышно, а вот сигнала с частотой 50 Гц не удастся услышать вовсе. Если обратиться к рис. 9.2, то причина будет ясна – сигнал с частотой 50 Гц при уровне звукового давления 40 дБ будет находиться ниже кривой абсолютного порога слышимости, сигнал с частотой 100 Гц лишь немного выше нее, и только сигнал с частотой 4 кГц будет более чем на 40 дБ превышать абсолютный порог слышимости. Этот эксперимент доказывает, что громкость зависит не только от интенсивности звука, но и от его частоты. На краях диапазона слышимых частот можно сформировать звуковые сигналы очень высокой интенсивности, но никакого ощущения громкости при этом не возникнет, хотя слуховая система при этом может быть даже повреждена.

Построение шкалы звуков по громкости и исследование влияния на нее основных параметров звукового сигнала было выполнено прежде всего на тональных сигналах различной интенсивности, частоты и длительности. Для того чтобы устранить зависимость субъективно воспринимаемой громкости звука от частоты и обеспечить возможность количественной ее оценки, используют метод сравнения громкости исследуемого звука с громкостью

некоторого эталонного звука. Для того чтобы такие оценки можно было сравнивать между собой, на международном уровне договорились использовать в качестве эталона громкость звукового сигнала с частотой 1000 Гц.

Определяется громкость следующим образом. На эталонной частоте 1000 Гц устанавливается некоторый вполне определенный уровень звукового давления, например 40 дБ. После этого эксперту предлагается прослушать сигнал на какой-то другой частоте, например 63 Гц, и отрегулировать его уровень таким образом, чтобы он казался равногромким эталонному. Значение уровня звукового давления эталонного сигнала в децибелах при этом квалифицируется как **уровень громкости** исследуемого сигнала и оценивается в специальных единицах, которые называются **фонами**.

Под уровнем громкости данного звука понимается уровень звукового давления эталонного звука на частоте 1000 Гц, равногромкого данному.

В приведенном примере уровень громкости звукового сигнала с частотой 63 Гц будет равен 40 фонам, хотя уровень звукового давления этого сигнала будет при этом значительно выше – более 60 дБ.

Если проделать тот же эксперимент на разных частотах в пределах диапазона слышимости, то получится ряд значений уровня звукового давления испытуемых сигналов, при которых эти сигналы имеют одинаковую громкость с эталонным сигналом 1000 Гц. Если отложить полученные значения на диаграмме (рис. 9.3) и соединить их кривой линией, то получится кривая равной громкости, которая называется **изофоной**.

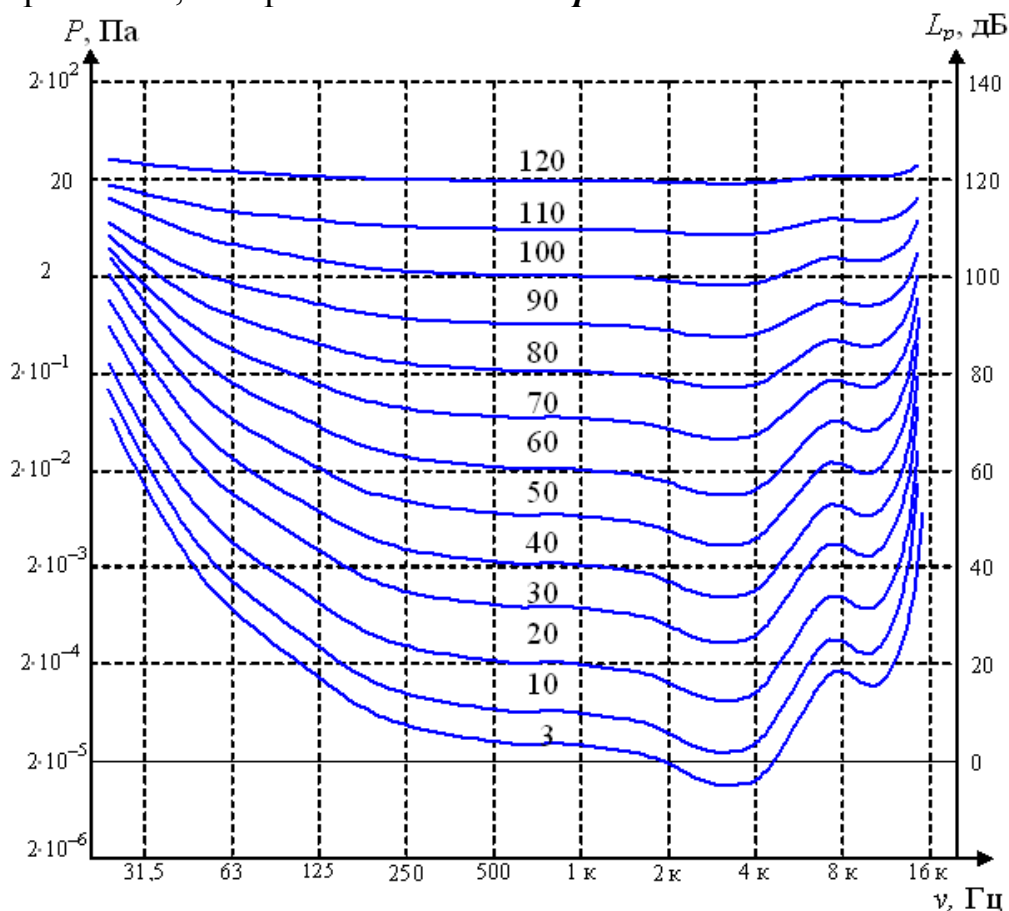


Рис. 9.3. Кривые равной громкости для различных значений уровня сигнала

Повторяя эксперимент при разных уровнях эталонного звука с шагом в 10 дБ, получим семейство кривых равной громкости, или изофон, которые показаны на рис. 9.3.

Из рис. 9.3 видно, что при малых уровнях звукового давления оценка уровня громкости очень сильно зависит от частоты – кривизна изофон здесь максимальна и форма их практически повторяет форму кривой абсолютного порога слышимости, которая, как принято считать на международном уровне, соответствует уровню громкости 3-го фона. По мере увеличения звукового давления изофоны выравниваются, а подъемы на верхних и нижних частотах становятся менее крутыми, т. е. при больших уровнях низкие, средние и высокие звуки оцениваются по уровню громкости более равномерно.

Понимание механизмов ощущения громкости и ее зависимости от основных объективных параметров звукового сигнала имеет чрезвычайно важное значение для практики работы звукорежиссеров – так например, если запись музыкального произведения и его прослушивание происходят на разных уровнях интенсивности, то ощущение баланса громкости и, следовательно, тембра звучания будет совершенно разным у звукорежиссера и у слушателя, что следует учитывать при записи и при воспроизведении.

Таким образом, звукорежиссеру следует помнить, что относительная громкость звуков разной частоты изменяется при изменении общего уровня записи. Естественный баланс по громкости сохраняется в ней только в том случае, если запись воспроизводится на том же уровне, который был во время записи оригинального источника. Если же запись воспроизводится при более низких уровнях, низкие и высокие частоты как бы пропадают, естественный баланс нарушается. Это одна из причин того, почему пение и речь кажутся бубнящими при воспроизведении на высоких уровнях через громкоговорители: слушатель воспринимает в них низкие частоты значительно более громкими, чем во время прослушивания естественного источника при более низких уровнях.

Для оценки громкости можно использовать уровень интенсивности L_I , равный отношению интенсивности данного звука I к пороговой интенсивности I_0 , равной 10^{-12} Вт/м² (также в децибелах):

$$L_I = 10 \lg I/I_0. \quad (9.14)$$

Отношение интенсивностей двух звуков также можно выразить в децибелах:

$$L_{12} = 10 \lg I_1/I_2. \quad (9.15)$$

С помощью (9.15) может быть выражено в децибелах уменьшение интенсивности (затухание) звуковой волны на некотором пути. Например,

затухание 20 дБ означает, что интенсивность уменьшилась в 100 раз. Действительно, подставив в формулу (9.15) значение $L_{12} = 20$, получаем

$$20 = 10 \lg I_1/I_2 \quad \text{или} \quad \lg I_1/I_2 = 2.$$

Поскольку мы здесь имеем логарифм по основанию 10, интерполяция последней формулы дает

$$I_1/I_2 = 10^2 = 100.$$

9.4. Распространение и затухание звуковых волн

Как уже было установлено ранее, при больших расстояниях до источника звуковую волну можно считать плоской, а в плоской волне звуковое давление и интенсивность не должны меняться с расстоянием.

Однако в реальной среде происходит постепенное уменьшение уровня звукового давления (интенсивности) с расстоянием, т. е. происходит постепенное затухание звука из-за поглощения его энергии за счет вязкости и теплопроводности воздуха. При сжатии частиц воздуха часть энергии расходуется на преодоление внутреннего трения между молекулами («вязкое» трение). Кроме того, в области сжатия частиц воздуха в звуковой волне повышается давление и, следовательно, температура, а в области разрежения давление и температура понижаются, между слоями воздуха происходит теплообмен, и часть энергии необратимо затрачивается на нагревание воздуха.

Уменьшение давления в распространяющейся волне происходит по экспоненциальному закону

$$P_l = P e^{-\delta l}, \quad (9.16)$$

где δ – коэффициент поглощения в среде; коэффициент определяется как $\delta = 1/l_e$, где l_e – расстояние, на котором амплитудное значение звукового давления p уменьшается в e раз ($e = 2,71828\dots$).

Коэффициент поглощения зависит от частоты $\delta \sim 1/\nu$, т. е. высокочастотные составляющие звука затухают быстрее, чем низкочастотные. Поэтому для слушателя в дальнем конце зала тембр звука отличается от того, который слышит слушатель у сцены. Для него звучание приобретает глуховатый характер.

При распространении звука на очень большие расстояния начинает играть роль турбулентность воздуха (потoki воздуха, ветер и пр.). Звуковые волны сильнее затухают при распространении вдоль поглощающей поверхности, при этом высокие частоты поглощаются быстрее.

Например, при распространении звуковой волны над публикой, сидящей в концертном зале, на частоте 6400 Гц при десятикратном увеличении расстояния вносится дополнительное затухание ~ 8 дБ, что является одной из причин изменения тембра музыки в пустом или заполненном зале. При этом изменяются и параметры реверберационного процесса.

9.5. Отражение, поглощение и прохождение звуковых волн

Когда звуковая волна достигает границы раздела среды, в которой она распространяется (например, падает на стену помещения или из воздуха переходит в воду), происходят следующие процессы. Часть звуковой энергии отражается, при этом угол отражения равен углу падения волны; часть звуковой энергии теряется из-за поглощения; часть проходит через границу раздела в другую среду (рис. 9.4).

Для количественного описания этих процессов вводятся следующие коэффициенты:

- коэффициент отражения $\beta = I_{\text{отр}}/I_{\text{пад}}$;
- коэффициент поглощения $\alpha = I_{\text{погл}}/I_{\text{пад}}$;
- коэффициент прохождения $\gamma = I_{\text{пр}}/I_{\text{пад}}$,

где $I_{\text{пад}}$, $I_{\text{отр}}$, $I_{\text{погл}}$, $I_{\text{пр}}$ – интенсивности падающей, отраженной, поглощенной и прошедшей волны.

Общая сумма коэффициентов всегда равна единице: $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Каждый из коэффициентов меньше единицы, поскольку отраженная, поглощенная и прошедшая волна имеют меньшую интенсивность, чем волна падающая.

Коэффициенты β и γ – величины безразмерные, однако для коэффициента α используется размерность «сэбин». Коэффициент поглощения в 1 сэбин равен поглощению звука открытым окном площадью в 1 м^2 .

Величина коэффициента поглощения приводится обычно в справочниках для различных материалов. Например, на частоте 500 Гц коэффициент поглощения дерева равен 0,1, мрамора – 0,01, ковра – 0,23. Следует заметить, что величина коэффициента поглощения зависит от частоты: с повышением частоты она увеличивается, например, для ковра 0,23 на 500 Гц и 0,43 на 4000 Гц. Кроме того, коэффициент поглощения зависит от величины угла падения звуковой волны – максимальное значение он имеет при угле падения 90° , поэтому в таблицах обычно приводится значение, усредненное для различных углов падения.

Таким образом, при падении звуковой волны на препятствие (например, стену) отраженная волна имеет меньшую амплитуду и некоторый сдвиг по фазе по отношению к падающей волне. Величина этого сдвига зависит от отношения акустических сопротивлений отражающей среды и среды, где волна распространяется.

Структура звуковых волн, отраженных от стен и других предметов в помещении, определяет акустику концертных залов, студий, помещений

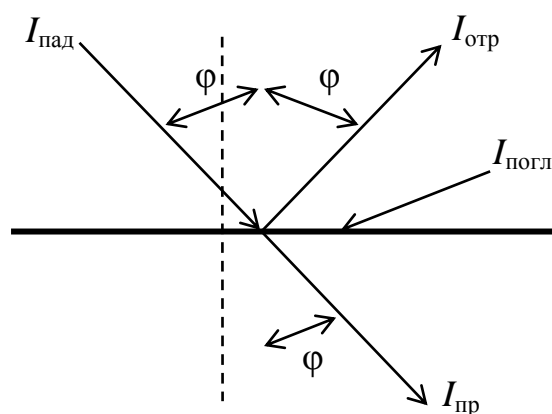


Рис. 9.4. Отражение, поглощение и прохождение звуковой волны на плоской поверхности

прослушивания и др. Подбирая различные соотношения коэффициентов, можно менять структуру отраженных волн и тем самым влиять на качество звучания музыки и речи в помещении.

Общий закон отражения звуковой волны (угол падения равен углу отражения) приводит к тому, что если отражения происходят от негладких (шероховатых) поверхностей, то отраженные волны распространяются в разных направлениях, и в помещении создается диффузное рассеянное звуковое поле, что нередко улучшает общее качество звучания.

Направление отраженных волн зависит от формы отражающей поверхности. Если выбрать поверхность в виде вогнутой или выпуклой чаши, то можно концентрировать (усиливать) или рассеивать звук в определенной точке или направлении («шепчущие» галереи, открытые эстрады, архитектурные формы – эркеры, ниши, купола и пр.) (рис. 9.5).

Интересно отметить, что при падении сферической волны на отражающую плоскую поверхность появляется отраженная сферическая волна с центром, находящимся как бы за барьером. Этот центр называется «мнимый источник» (рис. 9.6). Метод мнимых источников используется при расчетах структуры звукового поля в архитектурной акустике.

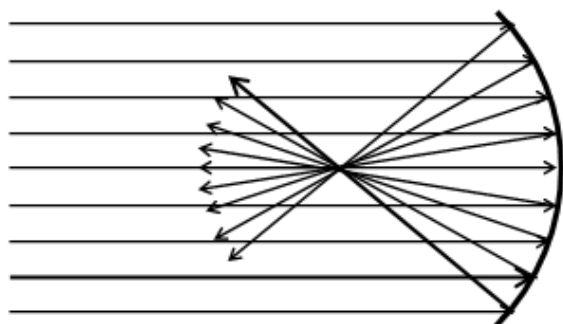


Рис. 9.5. Фокусировка звуковых волн

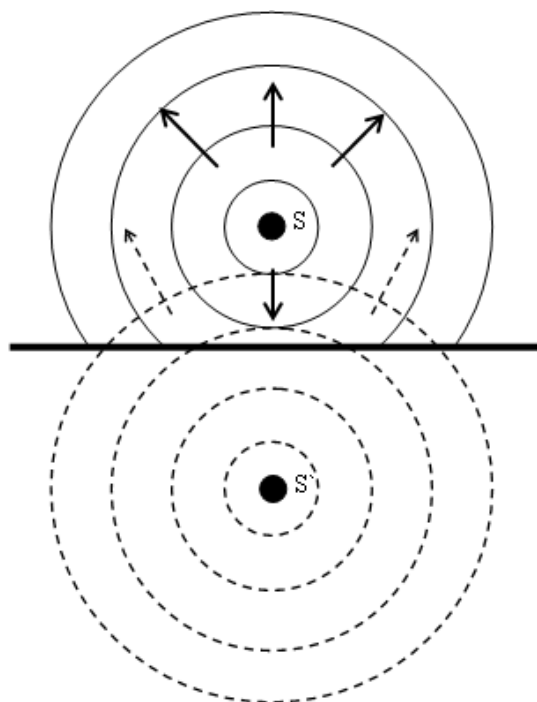


Рис. 9.6. Мнимый источник звука

9.6. Рефракция (преломление)

Рефракция – это изменение направления распространения звуковой волны при переходе из одной среды в другую. Как уже отмечалось, звуковая волна, падая на границу раздела двух сред, частично отражается от нее, частично переходит в другую среду. Если эта среда имеет другие физические

свойства, значительно отличающиеся от свойств первой (плотность, температура и пр.), то скорость звука в ней меняется, и звуковая волна вследствие этого меняет направление своего распространения (рис. 9.7). Эффект рефракции имеет место и тогда, когда звуковая волна распространяется в одной среде (например, в атмосфере), физические свойства которой постепенно меняются. Примером может служить звуковая волна, распространяющаяся над поверхностью воды. Поскольку воздух над водой имеет более низкую температуру, чем в более высоких слоях, скорость звуковой волны в более холодных слоях становится меньше и направление распространения волны изменяется вниз (звуковые лучи изгибаются в сторону той среды, где скорость звука меньше) (рис. 9.8).

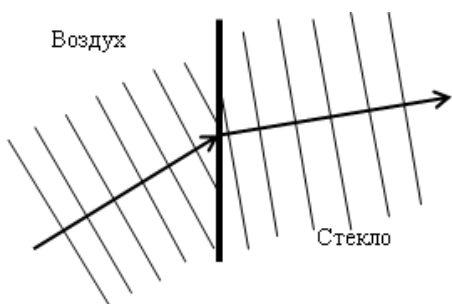


Рис. 9.7. Рефракция звуковых волн при вхождении в стекло

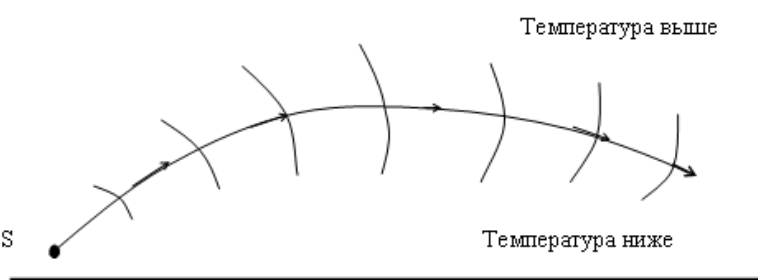


Рис. 9.8. Рефракция звуковых волн над прохладной поверхностью

Соотношение изменения углов распространения звуковой волны (a_1 и a_2) и ее скоростей (c_1 и c_2) выражается формулой

$$\sin a_1 / \sin a_2 = c_1 / c_2.$$

Явление рефракции может приводить к различным звуковым эффектам (звуковым миражам, т. е. слышимости на больших расстояниях над морем, пустыней и пр.).

9.7. Дифракция звуковых волн

Звуковые волны обладают способностью огибать встретившиеся на их пути препятствия и проникать в область за ними. Эта способность к огибанию препятствий называется *дифракцией*. Благодаря этому явлению звуковые волны могут огибать углы, проникать через щели и отверстия и распространяться за ними. В противном случае звук можно было бы услышать только в пределах прямой видимости источника (рис. 9.9).

Способность к дифракции зависит от соотношения длины волны (т. е. частоты колебаний) и размера препятствия:

– если длина волны много больше размеров препятствия ($\lambda \gg d$), то звуковая волна огибает его и проходит дальше, почти не меняя своей структуры и интенсивности. Так же она проходит и через отверстие, которое в этом случае становится как бы новым источником сферической волны (рис. 9.10);



Рис. 9.9. Дифракция звуковых волн

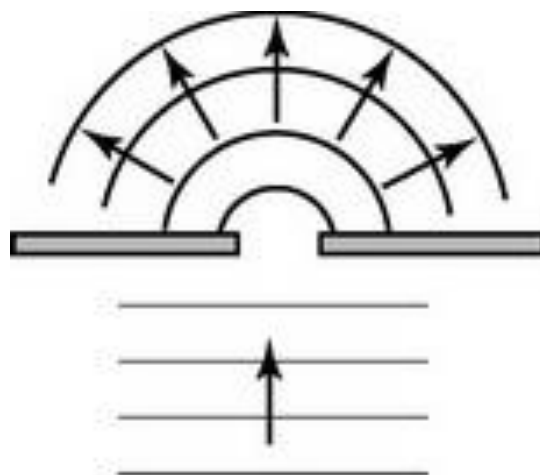


Рис. 9.10. Дифракция звуковых волн на отверстии

– если длина волны сопоставима с размерами препятствия ($\lambda \sim d$), то звуковая волна огибает его частично (рис. 9.9), за препятствием ее интенсивность становится меньше, появляются области «акустической тени», в случае отверстия звуковая волна начинает концентрироваться вперед, при этом края ее становятся «размытыми»;

– если длина волны меньше размеров препятствия ($\lambda \ll d$), то звуковая волна отражается от него, и за препятствием образуется «акустическая тень», а через отверстие проходит только узкий звуковой пучок. Поэтому за балконом или колонной тембр звука меняется (низкие и средние частоты огибают их, а высокочастотные – нет).

Явление дифракции лежит в основе бинауральной локализации звука. Вся современная пространственная стереофония построена на использовании этого явления. Звуки разной частоты огибают голову и ушные раковины по-разному. В то время как низкочастотные звуки проходят без изменения интенсивности, среднечастотные и высокочастотные образуют «акустическую тень» (за счет дифракции), граница между ними находится примерно в области 2 кГц. В связи с этим интенсивность звука и тембр меняются в зависимости от расположения источника по отношению к голове, что и позволяет локализовать его в пространстве. Дифракция звука на корпусе микрофонов, на углах корпусов акустических и прочих систем также имеет существенное значение для качества воспроизведения звука и учитывается при их проектировании.

9.8. Рассеяние

Рассеяние – это процесс отражения части звуковой волны от препятствия, в то время как остальная ее часть это препятствие огибает. Например, для сферы радиуса a мощность рассеянной волны в области высоких частот равна

$$P_a = 2\pi a^2 I_0, \quad (9.17)$$

где I_0 интенсивность падающей плоской волны, a – ее радиус.

В общем случае под рассеянием звука понимается возникновение дополнительных звуковых полей на препятствиях, границах и неоднородностях среды.

Именно эти процессы, т. е. дифракция и рассеяние волны на поверхности микрофона, приводят к значительному искажению структуры звукового поля вокруг него и изменению его чувствительности.

10. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

10.1. Природа электромагнитного излучения

Существование электромагнитных волн было теоретически предсказано великим английским физиком – создателем классической электродинамики – Джеймсом Максвеллом (одним из основоположников статистической физики) в 1864 г. Максвелл проанализировал все известные к тому времени законы электродинамики и сделал попытку применить их к изменяющимся во времени электрическому и магнитному полям. Он обратил внимание на асимметрию взаимосвязи между электрическими и магнитными явлениями. Максвелл ввел в физику понятие *вихревого электрического поля* (т. е. электрического поля, порожденного изменяющимся магнитным полем) и предложил новую трактовку закона электромагнитной индукции, открытой выдающимся английским физиком Майклом Фарадеем в 1831 г.

Явление *электромагнитной индукции* состоит в возникновении электрического тока в замкнутом проводящем контуре при изменении во времени магнитного потока, пронизывающего контур.

Магнитным потоком Φ через площадь S контура называют величину

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha,$$

где B – модуль вектора магнитной индукции, α – угол между вектором и нормалью n к плоскости контура при этом направление нормали и выбранное положительное направление обхода контура связаны правилом правого буравчика (рис. 10.1).

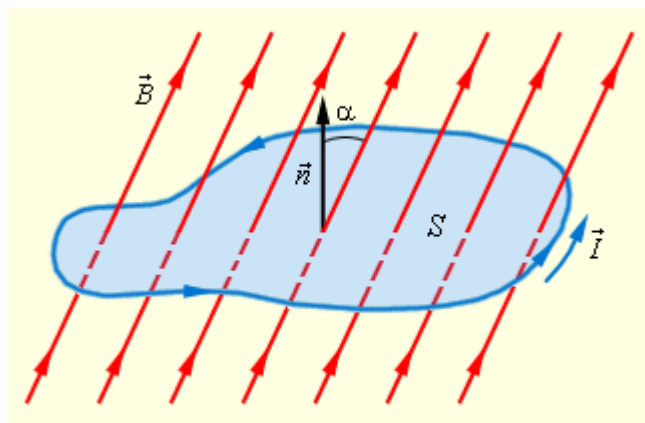


Рис. 10.1. Магнитный поток через замкнутый контур

Всякое изменение магнитного поля порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, силовые линии которого замкнуты.

Максвелл высказал гипотезу о существовании и обратного процесса: изменяющееся во времени электрическое поле порождает в окружающем пространстве магнитное поле.

Рис. 10.2 и 10.3 иллюстрируют взаимное превращение электрического и магнитного полей.

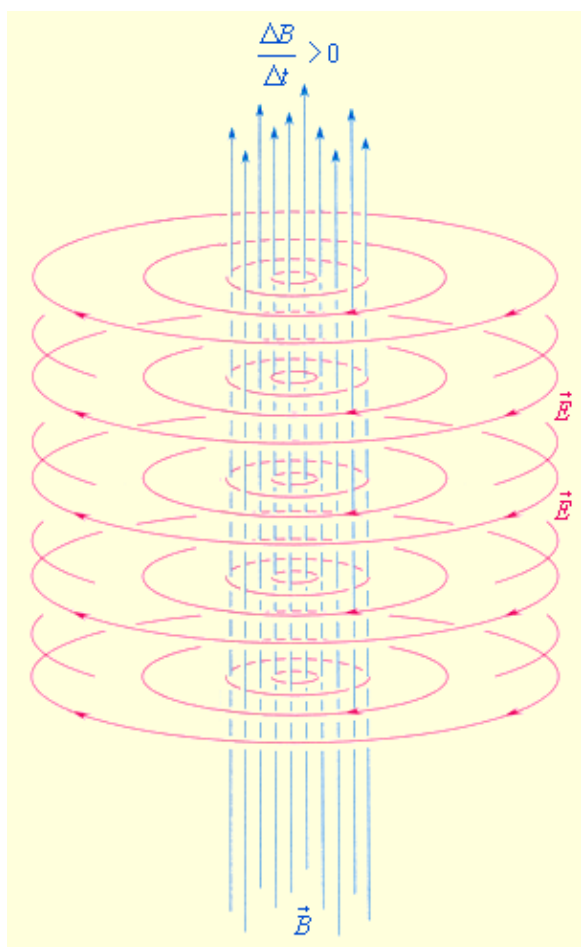


Рис. 10.2. Закон электромагнитной индукции в трактовке Максвелла

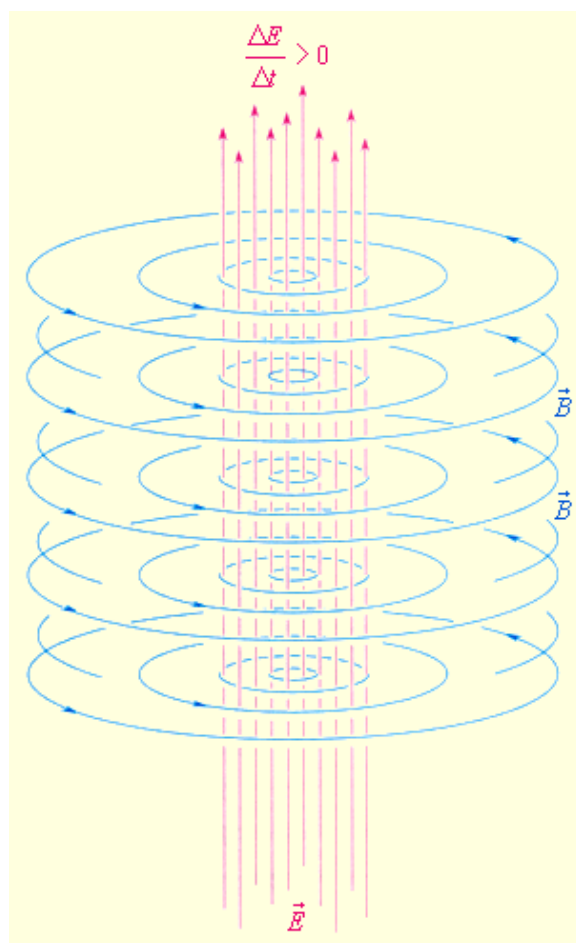


Рис. 10.3. Гипотеза Максвелла

Эта гипотеза была лишь теоретическим предположением, не имеющим экспериментального подтверждения, однако на ее основе Максвеллу удалось записать непротиворечивую систему уравнений, описывающих взаимные превращения электрического и магнитного полей, т. е. систему уравнений **электромагнитного поля** (уравнений Максвелла).

Из теории Максвелла вытекает ряд важных выводов.

1. Существуют электромагнитные волны, т. е. распространяющееся в пространстве и во времени электромагнитное поле. **Электромагнитные волны являются поперечными** – векторы **E** и **B** перпендикулярны друг другу и лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (рис. 10.4).

2. Электромагнитные волны распространяются в веществе с конечной скоростью c , которую можно найти, зная диэлектрическую и магнитную проницаемости этого вещества:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}. \quad (10.1)$$

Здесь ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости вещества, ϵ_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные: $\epsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 1,25664 \cdot 10^{-6}$ Гн/м.

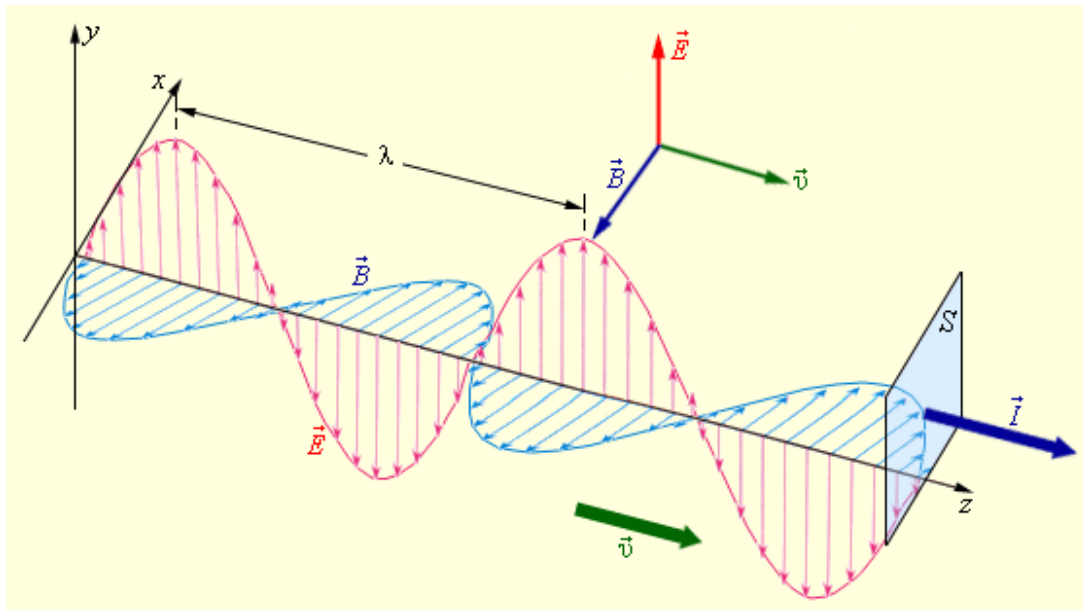


Рис. 10.4. Синусоидальная (гармоническая) электромагнитная волна (векторы \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{v} взаимно перпендикулярны)

Диэлектрическая проницаемость среды – это физическая величина, характеризующая свойства изолирующей (диэлектрической) среды и показывающая зависимость электрической индукции внутри этой среды от напряженности приложенного к ней внешнего электрического поля.

Различают относительную и абсолютную диэлектрические проницаемости.

Относительная диэлектрическая проницаемость ϵ является величиной безразмерной и показывает, во сколько раз сила взаимодействия двух электрических зарядов в среде больше или меньше, чем в вакууме. Эта величина для воздуха и большинства других газов в нормальных условиях близка к единице (в силу их низкой плотности). Для большинства твердых или жидких диэлектриков относительная диэлектрическая проницаемость лежит в диапазоне от 2 до 8 (для статического поля). Диэлектрическая постоянная воды в статическом поле достаточно высока – около 80. Велики ее значения для веществ с молекулами, обладающими большим электрическим дипольным моментом. Относительная диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков составляет десятки и сотни тысяч.

Абсолютная диэлектрическая проницаемость в зарубежной литературе обозначается буквой ϵ , в отечественной литературе преимущественно используется сочетание $\epsilon\epsilon_0$, где ϵ_0 – электрическая постоянная ($\epsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12}$ Ф/м).

Магнитная проницаемость μ – это физическая величина, характеризующая связь между величиной магнитной индукции B в веществе и напряженностью приложенного к нему внешнего магнитного поля H .

Также как и диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость бывает относительная и абсолютная.

Относительная магнитная проницаемость μ_r – величина безразмерная, она показывает, во сколько раз магнитная индукция B в веществе больше (или меньше) напряженности приложенного к нему внешнего магнитного поля H .

Абсолютная магнитная проницаемость μ равна произведению относительной магнитной проницаемости μ_r на магнитную постоянную μ_0 , которая численно равна магнитной проницаемости вакуума ($\mu_0 = 1,25664 \cdot 10^{-6}$ Гн/м).

Длина синусоидальной волны λ связана со скоростью c распространения волны известным соотношением $\lambda = cT = c/f$, где f – частота колебаний электромагнитного поля, $T = 1/f$.

Скорость распространения электромагнитной волны в вакууме (где $\varepsilon = \mu = 1$)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Скорость c распространения электромагнитной волны в вакууме является одной из фундаментальных физических постоянных.

3. Физическая величина

$$w_M = \frac{B^2}{2\mu\mu_0},$$

равная энергии магнитного поля в единице объема, называется **объемной плотностью магнитной энергии**.

Физическая величина

$$w_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2},$$

равная энергии электрического поля в единице объема, называется **объемной плотностью электрической энергии**.

В электромагнитной волне происходят взаимные превращения электрического и магнитного полей. Эти процессы идут одновременно, и электрическое и магнитное поля выступают как равноправные «партнеры». Поэтому объемные плотности электрической и магнитной энергии равны друг другу: $w_E = w_M$, т. е.

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (10.2)$$

Отсюда следует, что в электромагнитной волне модули индукции магнитного поля B и напряженности электрического поля E в каждой точке пространства связаны соотношением

$$B = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} E. \quad (10.3)$$

4. Электромагнитные волны переносят энергию. При распространении волны возникает поток электромагнитной энергии. Если выделить площадку S , ориентированную перпендикулярно направлению распространения волны, то за малое время Δt через площадку пройдет энергия $\Delta W_{\text{эм}}$, равная

$$\Delta W_{\text{эм}} = (w_{\text{э}} + w_{\text{м}})cS\Delta t.$$

Плотностью потока энергии электромагнитной волны или **интенсивностью** I называют электромагнитную энергию, переносимую волной за единицу времени через поверхность единичной площади:

$$I = \frac{1}{S} \frac{\Delta W_{\text{эм}}}{\Delta t} = (w_{\text{э}} + w_{\text{м}})c. \quad (10.4)$$

Подставляя сюда выражения для $w_{\text{э}}$, $w_{\text{м}}$ и c , можно получить

$$I = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \cdot E^2 = \frac{EB}{\mu\mu_0}. \quad (10.5)$$

Поток энергии в электромагнитной волне можно задавать с помощью вектора I , направление которого совпадает с направлением распространения волны, а модуль равен $EB / \mu\mu_0$. Этот вектор называют **вектором Пойнтинга**.

В синусоидальной (гармонической) волне в вакууме среднее значение $I_{\text{ср}}$ плотности потока электромагнитной энергии равно

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2, \quad (10.6)$$

где E_0 – амплитуда колебаний напряженности электрического поля.

Плотность потока энергии в СИ измеряется в ваттах на квадратный метр ($\text{Вт}/\text{м}^2$).

5. Из теории Максвелла следует, что электромагнитные волны должны оказывать давление на поглощающее или отражающее тело. Давление электромагнитного излучения объясняется тем, что под действием электрического поля волны в веществе возникают слабые токи, т. е. упорядоченное движение заряженных частиц. На эти токи действует сила Ампера со стороны магнитного поля волны, направленная в толщу вещества. Эта сила и создает результирующее давление. Обычно давление электромагнитного излучения ничтожно мало. Так, например, давление солнечного излучения, приходящего на Землю, на абсолютно поглощающую поверхность составляет примерно 5 мкПа. Первые эксперименты по определению давления излучения на отражающие и поглощающие тела, подтвердившие вывод теории Максвелла, были выполнены П. Н. Лебедевым в 1900 г. Опыты Лебедева имели огромное значение для утверждения электромагнитной теории Максвелла.

Существование давления электромагнитных волн позволяет сделать вывод о том, что электромагнитному полю присущ *механический импульс*. Импульс электромагнитного поля в единичном объеме выражается соотношением

$$g = \frac{w_{\text{эм}}}{c},$$

где $w_{\text{эм}}$ – объемная плотность электромагнитной энергии, c – скорость распространения волн в вакууме.

Наличие электромагнитного импульса позволяет ввести понятие электромагнитной массы.

Для поля в единичном объеме

$$\rho_{\text{эм}} = \frac{g}{c} = \frac{w_{\text{эм}}}{c^2}. \quad (10.7)$$

Отсюда следует, что

$$w_{\text{эм}} = \rho_{\text{эм}} c^2. \quad (10.8)$$

Это соотношение между массой и энергией электромагнитного поля в единичном объеме является универсальным законом природы. Согласно специальной теории относительности оно справедливо для любых тел независимо от их природы и внутреннего строения.

Таким образом, электромагнитное поле обладает всеми признаками материальных тел – энергией, конечной скоростью распространения, импульсом, массой. Это говорит о том, что электромагнитное поле является одной из форм существования материи.

6. Первое экспериментальное подтверждение электромагнитной теории Максвелла было дано примерно через 15 лет после создания теории в опытах Генриха Герца (1888 г.). Герц не только экспериментально доказал существование электромагнитных волн, но впервые начал изучать их свойства – поглощение и преломление в разных средах, отражение от металлических поверхностей и т. п. Ему удалось измерить на опыте длину волны и скорость распространения электромагнитных волн, которая оказалась равной скорости света.

Опыты Герца сыграли решающую роль для доказательства и признания электромагнитной теории Максвелла. Через семь лет после этих опытов электромагнитные волны нашли применение в беспроводной связи (А. С. Попов, 1895 г.).

7. Электромагнитные волны могут возбуждаться только ускоренно движущимися зарядами. Цепи постоянного тока, в которых носители заряда движутся с неизменной скоростью, не являются источником электромагнитных волн. В современной радиотехнике излучение электромагнитных волн производится с помощью антенн различных конструкций, в которых возбуждаются быстропеременные токи.

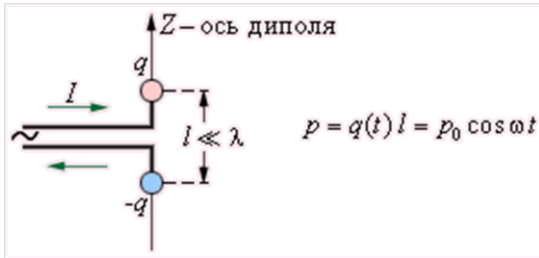


Рис. 10.5. Элементарный диполь, совершающий гармонические колебания

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является небольшой по размерам электрический диполь, дипольный момент $p(t) = q(t)l$ которого быстро изменяется во времени.

Такой элементарный диполь называют *диполем Герца*. В радиотехнике диполь Герца эквивалентен небольшой антенне, размер которой много меньше длины волны λ (рис. 10.5).

Представление о структуре электромагнитной волны, излучаемой таким диполем, дает рис. 10.6.

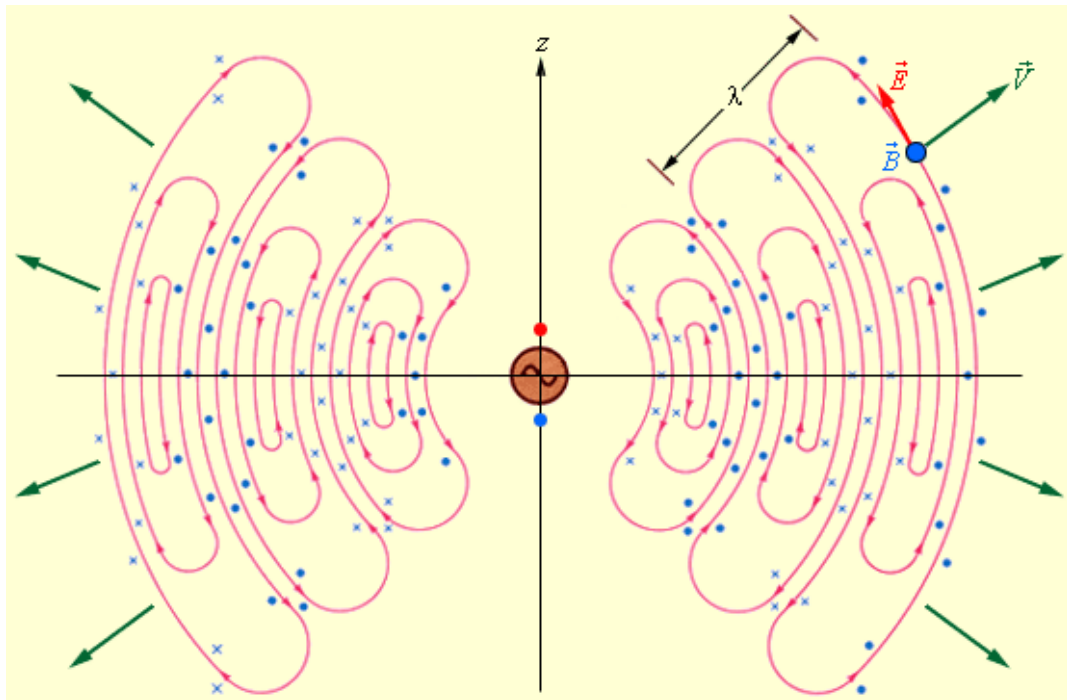


Рис. 10.6. Излучение элементарного диполя

Следует обратить внимание на то, что максимальный поток электромагнитной энергии излучается в плоскости, перпендикулярной оси диполя. Вдоль своей оси диполь не излучает энергии. Герц использовал элементарный диполь в качестве излучающей и приемной антенн при экспериментальном доказательстве существования электромагнитных волн.

10.2. Виды электромагнитного излучения

Спектр электромагнитных волн необычайно широк: длина волны может измеряться тысячами километров, а может быть меньше пикометра. Тем не менее, весь этот спектр можно разделить на несколько характерных диапазонов волн; внутри каждого диапазона электромагнитные волны обладают более-менее схожими свойствами и способами излучения.

Рассмотрим эти диапазоны в порядке убывания длины волны. Диапазоны плавно переходят друг в друга и четкой границы между ними нет. Поэтому граничные значения длин волн порой весьма условны.

10.2.1. Радиоволны

К диапазону радиоволн относится излучение с длиной волны более 1 мм ($\lambda > 1$ мм). Источниками радиоволн являются колебания зарядов в проводах, антеннах, колебательных контурах. Радиоволны излучаются также во время гроз.

- **Сверхдлинные волны** ($\lambda > 10$ км). Хорошо распространяются в воде, поэтому используются для связи с подводными лодками.

- **Длинные волны** ($1 \text{ км} < \lambda < 10 \text{ км}$). Используются в радиосвязи, радиовещании, радионавигации.

- **Средние волны** ($100 \text{ м} < \lambda < 1 \text{ км}$). Радиовещание. Радиосвязь на расстоянии не более 1500 км.

- **Короткие волны** ($10 \text{ м} < \lambda < 100 \text{ м}$). Радиовещание. Хорошо отражаются от ионосферы; в результате многократных отражений от ионосферы и от поверхности Земли могут распространяться вокруг земного шара. Поэтому на коротких волнах можно принимать передачи радиостанций, расположенных в различных странах мира.

- **Метровые волны** ($1 \text{ м} < \lambda < 10 \text{ м}$). Местное радиовещание в УКВ-диапазоне. Например, длина волны радиостанции «Эхо Москвы» составляет 4 м. Используются также в телевидении (федеральные каналы). Например, длина волны, используемой в передачах телеканала «Россия 1», равна примерно 5 м.

- **Дециметровые волны** ($10 \text{ см} < \lambda < 1 \text{ м}$). Телевидение (дециметровые каналы). Например, длина волны, используемой телеканалом «Animal Planet», равна приблизительно 42 см.

Это также диапазон, используемый в *мобильной связи*, так стандарт GSM 1800 использует радиоволны с частотой примерно 1800 МГц, т. е. с длиной волны около 17 см.

Есть еще одно хорошо известное применение дециметровых волн – это *микроволновые печи*. Стандартная частота микроволновой печи равна 2450 МГц (это частота, на которой происходит резонансное поглощение электромагнитного излучения молекулами воды). Она соответствует длине волны примерно 12 см.

Наконец, этот диапазон используется в технологиях беспроводной связи *Wi-Fi* и *Bluetooth* – длина волны здесь также около 12 см (частота 2400 МГц).

- **Сантиметровые волны** ($1 \text{ см} < \lambda < 10 \text{ см}$). Это область радиолокации и спутниковых телеканалов. Например, канал НТВ+ осуществляет телевидение на волнах длиной около 2 см.

- **Миллиметровые волны** ($1 \text{ мм} < \lambda < 1 \text{ см}$). Радиолокация, космические линии связи. Здесь мы подходим к длинноволновой границе инфракрасного излучения.

10.2.2. Инфракрасное излучение

К диапазону инфракрасных волн относится излучение с длинами волн в диапазоне $780 \text{ нм} < \lambda < 1 \text{ мм}$. Такое излучение формируется молекулами и атомами нагретых тел. Инфракрасное излучение еще называют тепловым, потому что, когда оно попадает на наше тело, мы ощущаем тепло. Человеческими органами зрения инфракрасное излучение не воспринимается, в то время как некоторые животные, например змеи, способны видеть в этом диапазоне.

Мощнейшим источником инфракрасного излучения служит Солнце. Лампы накаливания излучают наибольшее количество энергии (до 80 %) как раз в инфракрасной области спектра.

Инфракрасное излучение имеет широкую область применения: инфракрасные обогреватели, пульты дистанционного управления, приборы ночного видения, сушка лакокрасочных покрытий, жарка шашлыка на костре и многое другое.

При повышении температуры тела длина волны инфракрасного излучения уменьшается смещаясь в сторону видимого света. Это можно увидеть своими глазами, поместив гвоздь в пламя горелки: в какой-то момент гвоздь раскаляется докрасна, начиная излучать в видимом диапазоне.

10.2.3. Видимый свет

К диапазону видимого света относится излучение с длинами волн в диапазоне $380 \text{ нм} < \lambda < 780 \text{ нм}$. Излучение в этом диапазоне длин волн воспринимается человеческим зрением. Диапазон видимого света принято делить на семь поддиапазонов, отождествляемых с определенными *спектральными цветами*. Следует, однако, заметить, что такое деление условно и имеет исторические корни.

Одним из первых исследованиями спектра видимого излучения занялся Исаак Ньютон. Результаты этих исследований были изложены им в классической монографии «Оптика» (1704). Именно он еще в 1671 г., описывая в печати свои оптические эксперименты, ввел в обиход термин *спектр* (от латинского слова *spectrum* – видение, появление). Ньютону же принадлежит идея деления света на семь цветов. Проводя опыты по разложению солнечного света в спектр с помощью призмы, Ньютон убедился, что белый свет представляет собой смесь излучения различных цветов, при этом спектральные цвета плавно переходят друг в друга, пробегая всю гамму всевозможных оттенков – от красного до фиолетового. Однако все это многообразие цветов, по его мнению, можно свести к нескольким первичным цветам. Первоначально в качестве первичных он выделил только пять цветов – красный, желтый, зеленый, голубой и фиолетовый. Но поскольку Ньютон искренне считал, что между оттенками цвета, нотами в музыке и днями недели существует связь, впоследствии он добавил к вышеперечисленным цветам оранжевый и индиго. Поэтому в дальнейшем в качестве первичных (или ос-

новных) цветов он уже называл красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, индиго и фиолетовый. Однако человеческий глаз плохо различает оттенки синего цвета и цвет индиго многие путают с голубым или фиолетовым. Поэтому впоследствии в некоторых странах, в том числе в России, индиго был заменен на синий, хотя в западной классификации цветов он присутствует до сих пор. Как бы там ни было, а ньютоновский способ деления спектра на семь цветов прижился и благополучно используется до сих пор. Тем не менее, зная историю его появления, следует понимать, что такое деление весьма условно.

- **Красный:** 625...780 нм.
- **Оранжевый:** 590...625 нм.
- **Желтый:** 565...590 нм.
- **Зеленый:** 500...565 нм.
- **Голубой:** 485...500 нм.
- **Синий:** 440...485 нм.
- **Фиолетовый:** 380...440 нм.

Способность видеть обеспечивается наличием в структуре человеческого глаза светочувствительных рецепторов – палочек и колбочек, которые обладают неодинаковой чувствительностью: колбочки приблизительно в 100 раз менее чувствительны к свету, чем палочки.

Колбочки, в зависимости от того, к излучению какого спектрального состава они чувствительны, подразделяются на три типа и обозначаются греческими буквами β (бета), γ (гамма) и ρ (ро). Первый тип (β) имеет максимум чувствительности к световым волнам с длиной примерно от 400 до 500 нм (условно «синяя» составляющая спектра), второй (γ) – к световым волнам от 500 до 600 нм (условно «зеленая» составляющая спектра) и третий (ρ) – к световым волнам от 600 до 700 нм (условно «красная» составляющая спектра). Чувствительность их также различна (рис. 10.7).

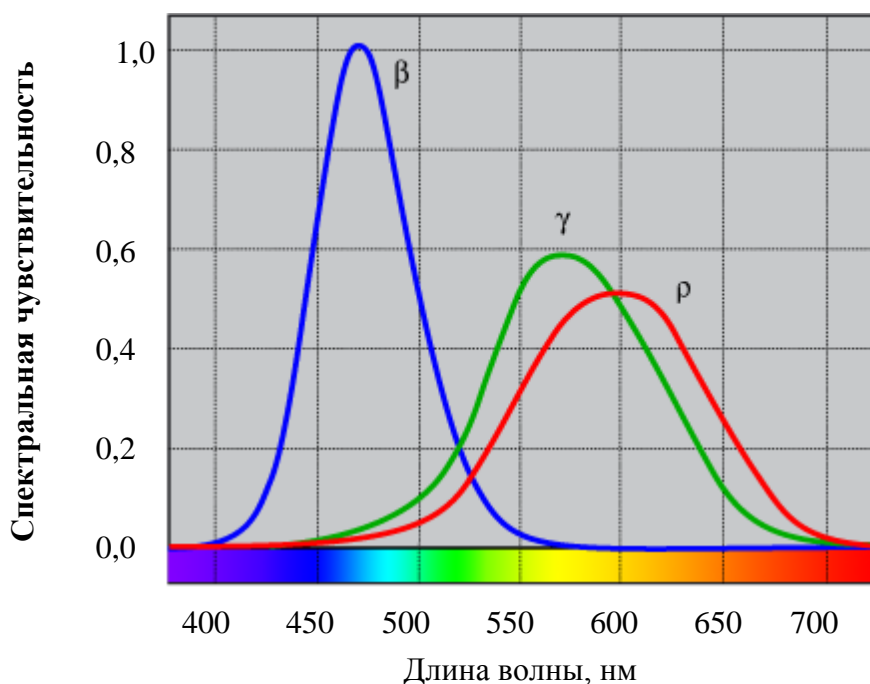


Рис. 10.7. Кривые спектральной чувствительности колбочек

Наибольшей чувствительностью обладают «красные» колбочки, наименьшей – «синие».

В природе излучение различных источников света редко бывает монохроматичным, т. е. представленным излучением только одной длины волны. Почти всегда оно имеет довольно сложный спектральный состав. В зависимости от того, световые волны какой длины и интенсивности присутствуют в спектре света, те или иные группы колбочек возбуждаются сильнее или слабее. От этого и зависит воспринимаемая человеческими органами зрения цветовая окраска освещения или цвет отражающей поверхности.

Если по оси абсцисс отложить длину волны λ излучения источника света, а по оси ординат – энергию лучистого потока Φ , то на графике получатся кривые, характеризующие распределение энергии света в спектрах излучения различных источников (рис. 10.8).

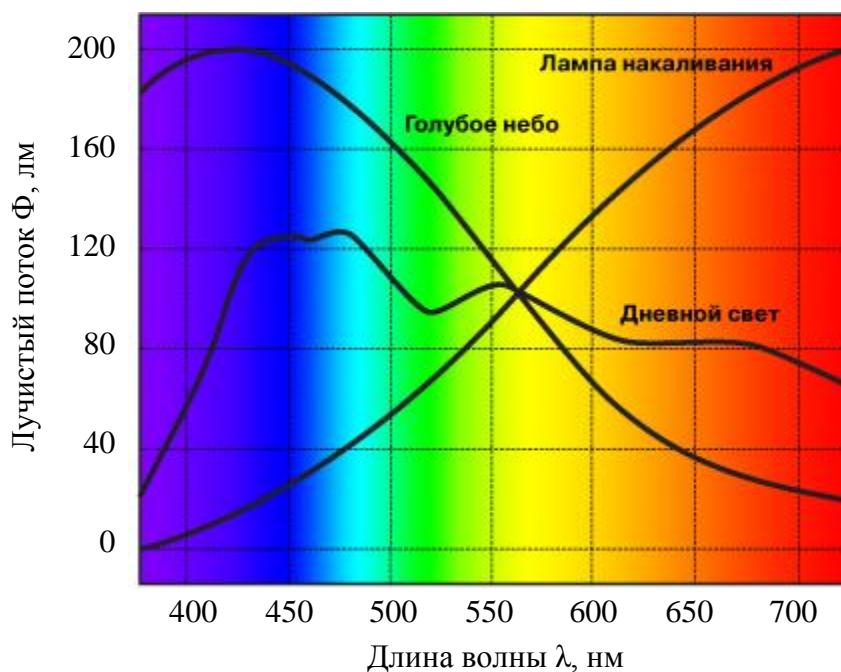


Рис. 10.8. Примеры распределения энергии света в спектрах излучения различных источников: свет от ясного голубого неба, среднедневной солнечный свет, свет лампы накаливания

То же самое относится и к свету, отраженному от различных поверхностей. Цвет любой поверхности (в том числе – окрашенной) определяется как зависимость коэффициента отражения C этой поверхности от длины волны λ падающего на нее света (рис. 10.9).

В сумерках или ночью, когда интенсивность попадающего в глаз излучения становится очень низкой, колбочки работать перестают и человек видит только за счет палочек, чувствительность которых намного выше чувствительности колбочек. Но палочки не воспринимают цвета. Поэтому в темное время суток, а также в других условиях, характеризующихся низкой освещенностью, человек перестает различать цвета и мир предстает пе-

ред ним в черно-белых (сумеречных) тонах. Однако световая чувствительность человеческого глаза в этих условиях чрезвычайно высока и намного превосходит чувствительность большинства существующих технических систем регистрации изображения.

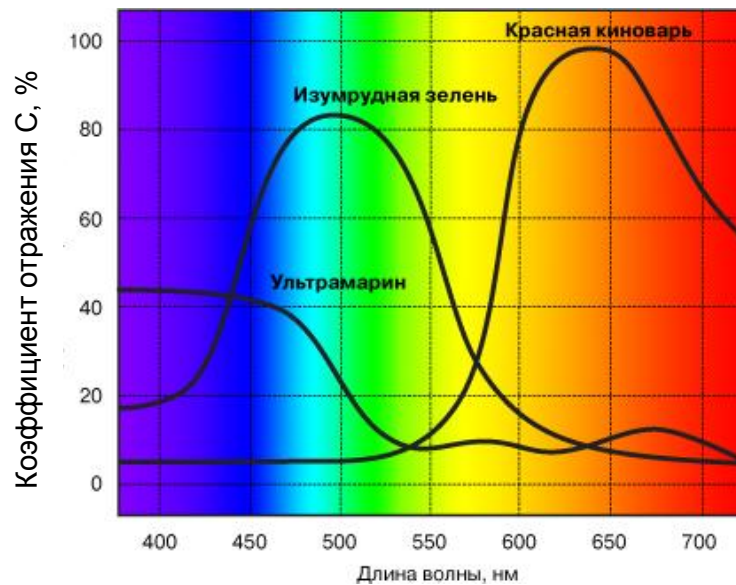


Рис. 10.9. Кривые спектра отражения поверхностей, окрашенных различными красками: изумрудной зеленью, красной киноварью, ультрамарином

Для характеристики общей спектральной чувствительности человеческого глаза к потоку светового излучения используются *кривые относительной световой эффективности*, определяющие общую чувствительность человеческого глаза к свету с учетом как цветового (колбочки), так и светового (палочки) зрения (рис. 10.10). Эти зависимости представляют большой интерес для специалистов, поскольку позволяют объяснить ряд известных феноменов человеческого зрения.

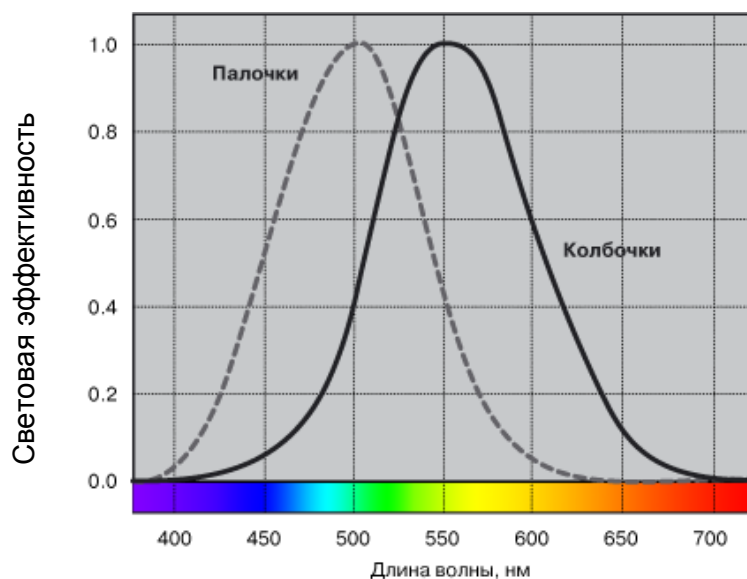


Рис. 10.10. Нормализованные кривые относительной световой эффективности палочек (пунктирная линия) и колбочек (сплошная линия)

Из приведенных кривых видно, что в дневное время, когда яркость освещения велика, человек лучше всего воспринимает зеленые и зелено-желтые цвета, в то время как его чувствительность к синим цветам заметно ниже.

Ситуация несколько меняется в сумерках, когда чувствительные к яркому световому излучению колбочки начинают терять свою эффективность и соотношение между палочками и колбочками изменяется – максимум спектральной световой эффективности смещается в сторону синих излучений (палочковое зрение).

10.2.4. Ультрафиолетовое излучение

К диапазону ультрафиолетового излучения относится излучение с длинами волн в диапазоне $10 \text{ нм} < \lambda < 380 \text{ нм}$. Главным источником его является Солнце. Именно ультрафиолетовое излучение приводит к появлению загара на коже. Человеческим зрением ультрафиолетовое излучение не воспринимается.

В небольших дозах ультрафиолетовое излучение полезно для человека: оно повышает иммунитет, улучшает обмен веществ, имеет целый ряд других целебных свойств и поэтому применяется в физиотерапии.

Ультрафиолетовое излучение обладает бактерицидными свойствами. Поэтому в больницах и клиниках для дезинфекции в операционных включаются специальные ультрафиолетовые лампы.

Очень опасным является воздействие УФ излучения на сетчатку глаза – при больших дозах можно получить ожог сетчатки. Поэтому для защиты глаз (например, высоко в горах, где интенсивность ультрафиолетового излучения очень велика) нужно надевать темные очки, стекла которых поглощают ультрафиолет.

10.2.5. Рентгеновское излучение

К диапазону рентгеновского излучения относится излучение с длинами волн в диапазоне $5 \text{ пм} < \lambda < 10 \text{ нм}$. Рентгеновские лучи возникают при торможении сильно ускоренных заряженных частиц (*тормозное излучение*), либо при высокоэнергетических переходах в электронных оболочках атомов или молекул. Оба эффекта используются в рентгеновских трубках. Основными конструктивными элементами таких трубок являются металлические катод и анод (ранее называвшийся также *антикатодом*). В рентгеновских трубках электроны, испускаемые катодом, ускоряются под действием разности электрических потенциалов между анодом и катодом (при этом рентгеновские лучи не испускаются, так как ускорение слишком мало) и ударяются об анод, где происходит их резкое торможение. При этом за счет тормозного излучения происходит генерация излучения рентгеновского диапазона и одновременно выбиваются электроны из внутренних электронных оболочек атомов анода. Пустые места в оболочках занимают другими электронами атома. При этом испускается рентгеновское излучение с характерным для

материала анода спектром энергий (*характеристическое излучение*), частоты которого определяются *законом Мозли*: $\sqrt{\nu} = A(Z - B)$, где Z – атомный номер элемента анода, A и B – константы для определенного значения главного квантового числа n электронной оболочки. В настоящее время аноды изготавливаются главным образом из керамики, причем та их часть, куда ударяют электроны, – из молибдена или меди.

В процессе ускорения-торможения лишь около 1 % кинетической энергии электрона идет на рентгеновское излучение, 99 % энергии превращается в тепло.

Рентгеновское излучение можно получать также и на *ускорителях заряженных частиц*. Так называемое *синхротронное излучение* возникает при отклонении пучка частиц в магнитном поле, в результате чего они испытывают ускорение в направлении, перпендикулярном их движению. Синхротронное излучение имеет сплошной спектр с верхней границей. При соответствующим образом выбранных параметрах (величина магнитного поля и энергия частиц) в спектре синхротронного излучения можно получить и рентгеновские лучи.

Рентгеновское излучение легко проникает сквозь мягкие ткани человеческого тела, но поглощается кальцием, входящим в состав костей. Это дает возможность делать хорошо известные всем *рентгеновские снимки (рентгенограммы)*.

В аэропортах устанавливаются *рентгенотелевизионные интроскопы* – приборы, которые просвечивают рентгеновскими лучами ручную кладь и багаж пассажиров.

Длина волны рентгеновского излучения сравнима с размерами атомов и межатомных расстояний в кристаллах, поэтому кристаллы являются естественными дифракционными решетками для рентгеновских лучей. Наблюдая дифракционные картины, получаемые при прохождении рентгеновских лучей сквозь различные кристаллы, можно изучать порядок расположения атомов в кристаллических решетках и сложных молекулах.

Так, именно с помощью *рентгеноструктурного анализа* было определено устройство ряда сложных органических молекул – например, ДНК и гемоглобина.

В больших дозах рентгеновское излучение опасно для человека – оно может вызвать раковые заболевания и лучевую болезнь.

10.2.6. Гамма-излучение

К диапазону гамма-излучения относится излучение с длинами волн в диапазоне менее 5 пм ($\lambda < 5$ пм). Это излучение наиболее высокой энергии. Его проникающая способность намного выше, чем у рентгеновских лучей.

Гамма-излучение возникает при переходах атомных ядер из одного состояния в другое, а также при некоторых ядерных реакциях.

Источниками гамма-лучей могут быть заряженные частицы, движущиеся со скоростями, близкими к скорости света (так называемое *синхронное излучение*).

В больших дозах гамма-излучение очень опасно для человека: оно вызывает лучевую болезнь и онкологические заболевания. Но в малых дозах оно может подавлять рост раковых опухолей и поэтому применяется в *лучевой терапии*.

Бактерицидное действие гамма-излучения используется в сельском хозяйстве (гамма-стерилизация сельхозпродукции перед длительным хранением), в пищевой промышленности (консервирование продуктов), а также в медицине (стерилизация материалов).

11. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТОВЫХ ВОЛН. ПРИНЦИП ФЕРМА

Известно, что свет распространяется по прямой линии. Посмотрим, что происходит, если свет на своем пути встречает какой-либо объект (рис. 11.1). Простейший объект – это зеркало, и для этого случая известен закон: свет, попадая на зеркало, не проходит через него, а отражается и снова уходит по прямой линии, причем направление прямой меняется при изменении наклона зеркала.

Еще в древности людей занимал вопрос: каково соотношение между этими двумя углами? Это очень простое соотношение, и найдено оно было давным-давно. Падающий на зеркало луч после отражения движется по такому пути, что углы между каждым лучом и зеркалом равны. По ряду соображений углы удобно отсчитывать от нормали к поверхности зеркала. Тогда так называемый закон отражения гласит: *угол падения равен углу отражения*:

$$\theta_i = \theta_r \quad (11.1)$$

11.1. Закон Снелла

В отличие от простого закона отражения более сложный закон возникает при переходе света из одной среды в другую, например, из воздуха в воду. Хотя в воде свет тоже движется по прямой. Траектория луча в воде образует некоторый угол с траекторией в воздухе. Когда луч падает почти вертикально, угол отклонения θ_i невелик. Если же луч направить под большим углом, отклонение становится значительным (рис. 11.2). Возникает вопрос: каково соотношение между двумя углами? В древности эта проблема долго ставила людей в тупик, но ответ тогда так и не был найден. Тем не менее, именно по этому вопросу можно найти очень редкую в древнегреческой физике сводку экспериментальных данных!

Клавдий Птолемей составил таблицу углов отклонения света в воде для целого ряда углов падения из воздуха. В табл. 11.1 приведены углы в воздухе в градусах и соответствующие им углы для воды. Принято считать, что древние греки никогда не ставили опытов.

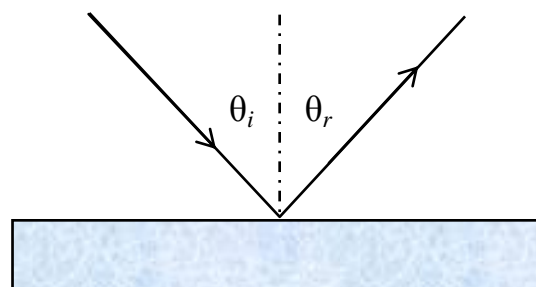


Рис. 11.1. Иллюстрация закона отражения

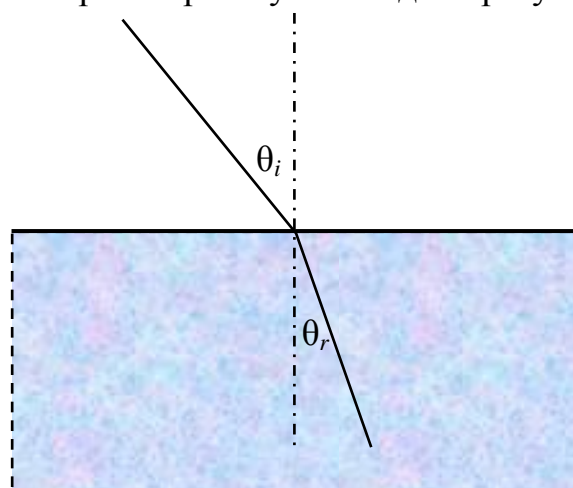


Рис. 11.2. Иллюстрация закона преломления

Таблица 11.1

Преломление света по Птолемею

Угол в воздухе, град	Угол в воде, град
10	8
20	15,5
30	22,5
40	28
50	35
60	40,5
70	45
80	50

Однако, не зная закона, такую таблицу можно составить только на основании эксперимента, а не в результате независимых измерений. Так что опыты все-таки ставились.

Это был очень важный шаг в становлении физического закона: сначала мы наблюдаем эффект, затем проводим измерения и сводим результаты в таблицу, после чего пытаемся найти **закон**, по которому одни величины сопоставляются другим. Приведенная таблица была составлена еще в 140 г. н. э., и вплоть до 1621 г. никто не смог найти такого закона, который связал бы эти два угла! Закон

был установлен голландским математиком Виллебрордом Снеллом и читается так: *пусть θ_i есть угол в воздухе и θ_r есть угол в воде, тогда синус θ_i равен синусу θ_r , умноженному на некоторую константу*

Таблица 11.2

Преломление света по закону Снелла

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_r. \quad (11.2)$$

Для воды число n равно примерно 1,33. Равенство (11.2) называется **законом Снелла**. Он позволяет предсказать отклонение света при переходе из воздуха в воду. В табл. 11.2 указаны углы в воде и в воздухе, полученные с помощью закона Снелла. Видно удивительное соответствие с таблицей Птолемея.

Угол в воздухе, град	Угол в воде, град
10	7,5
20	15
30	22
40	29
50	35
60	40
70	48
80	49,5

11.2. Принцип наименьшего времени Ферма

По мере развития науки нам хочется получить нечто большее, чем просто формулу. Сначала мы наблюдаем явления, затем с помощью измерений получаем числа и, наконец, находим закон, связывающий эти числа. Но истинное величие науки состоит в том, что мы *можем найти такой способ рассуждения*, при котором закон становится *очевидным*.

Впервые общий принцип, наглядно объясняющий закон поведения света, был предложен французским математиком Пьером де Ферма примерно в 1650 г. и получил название **принципа наименьшего времени**, или **принципа Ферма**. Идея его состоит в следующем: свет выбирает из всех возможных путей, соединяющих две точки, тот путь, который требует *наименьшего времени* для его прохождения.

Покажем вначале, что это верно для случая с зеркалом, что этот простой принцип объясняет и прямолинейность распространения света, и закон отражения света от зеркала.

Попытаемся решить следующую задачу. На рис. 11.3 изображены две точки A и B и плоское зеркало MM' . Каким путем можно за кратчайшее время попасть из точки A в точку B ? Ответ: по прямой, проведенной из A в B . Но если мы добавим дополнительное условие, что свет должен попасть на зеркало, отразиться от него и вернуться снова в точку B опять таки за кратчайшее время, то ответить не так уж просто. Один путь – как можно скорее добраться до зеркала, а оттуда в точку B , т. е. по пути ADB . Путь DB , конечно, длинен. Если сдвинуться чуть-чуть вправо в точку E , то первый отрезок пути немного увеличится, но зато сильно уменьшится второй, и время прохождения поэтому станет меньше. Как найти точку C , для которой время прохождения наименьшее? Воспользуемся для этого хитроумным геометрическим приемом.

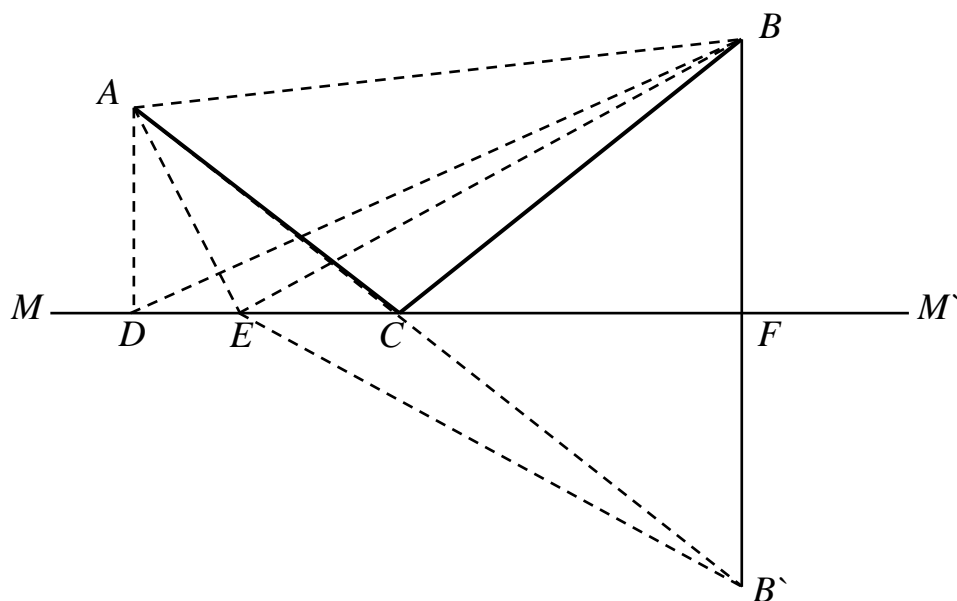


Рис. 11.3. Иллюстрация принципа наименьшего времени

По другую сторону зеркала MM' , на таком же расстоянии от него, что и точка B , строим искусственную точку B' . Затем проведем линию EB' . Поскольку угол BFM прямой и $BF = FB'$, то $EB = EB'$. Следовательно, сумма длин двух отрезков $AE + EB$, пропорциональная времени их прохождения (если свет идет с постоянной скоростью), равна сумме длин $AE + EB'$. Теперь нужно выяснить, когда сумма длин будет наименьшей. *Ответ:* когда точка C будет лежать на прямой, соединяющей A и B' ! Другими словами, нужно идти к мнимой точке B' (мнимому изображению точки B) и тогда мы найдем точку C . Далее, если ACB' – прямая линия, угол BCF равен углу $B'CF$ и, следовательно, углу ACM . Таким образом, утверждение о равенстве углов падения и отражения равносильно утверждению, что свет при отражении от зеркала в точку B выбирает путь, требующий *наименьшего времени*. Еще Герон Александрийский высказывал утверждение, что свет при отражении идет от одной точки в другую по *кратчайшему пути*. Так что идея принципа, как видим, не нова. Именно это вдохновило Ферма, и он попробовал

применить этот принцип к явлению преломления. Но свет, преломляясь, очевидным образом идет не по кратчайшему пути, и тогда Ферма предложил другой принцип – свет выбирает путь, *время* прохождения по которому *наименьшее*.

Прежде чем перейти к вопросу о преломлении света, сделаем еще одно замечание об отражении от зеркала. Если поместить источник света в точку B и направить луч на зеркало, то свет, отражаясь от зеркала, пройдет из B в A так, как будто бы источник находится в B' , а зеркала *нет вообще*. Наш глаз видит только тот свет, который действительно входит в него. И хотя источник расположен в точке B , зеркало направляет свет в глаз точно так, *как будто* источник находится в B' , и система «глаза–мозг» интерпретирует это явление именно так. Поэтому иллюзия, что источник или предмет находится за зеркалом, вызывается только тем фактом, что свет попадает в глаза физически именно так, как если бы предмет действительно находился *позади* зеркала (если не принимать во внимание пыль на зеркале и реальное существование зеркала и другие сведения, которые учитывает наш мозг).

Покажем теперь, что из принципа наименьшего времени вытекает закон Снелла для преломления. При этом мы должны, конечно, что-то предположить относительно скорости света в воде. Будем считать, что скорость света в воде меньше скорости света в воздухе, и отношение второй скорости к первой обозначим через n .

Наша задача, иллюстрируемая рис. 11.4, по-прежнему состоит в том, чтобы попасть из точки A в точку B за наименьшее время.

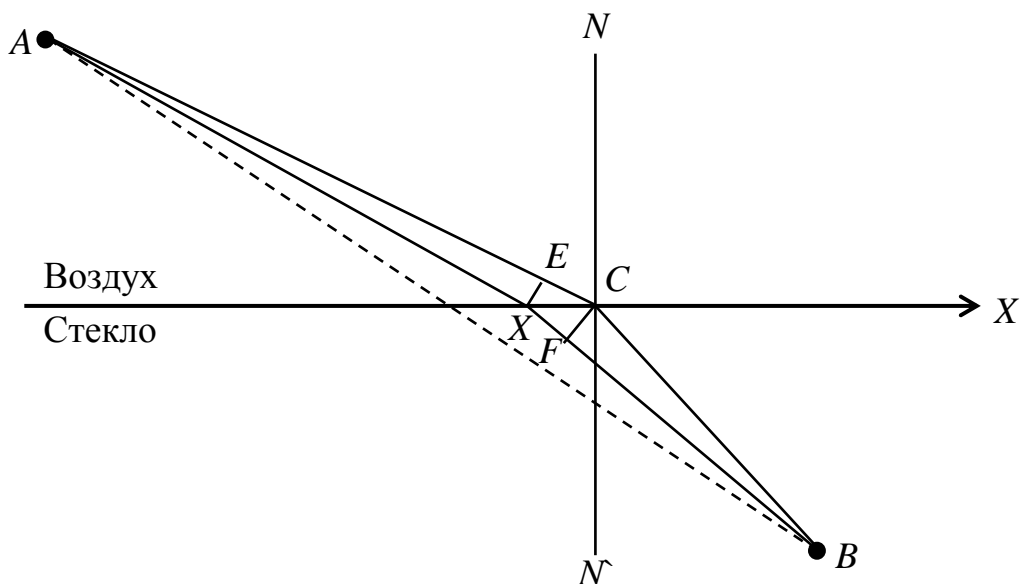


Рис. 11.4. Иллюстрация принципа Ферма для случая преломления

Чтобы убедиться, что путь по прямой здесь не самый быстрый, представим себе следующую ситуацию. Хорошенькая девушка падает из лодки в воду в точке B и кричит, что не умеет плавать, и просит спасти ее. Линия X – это берег. Вы находитесь на суше в точке A и видите, что произошло, вы

умеете плавать и умеете бегать. Но бегаеы вы быстрее, чем плаваеы. Что вам делать? Бежать по прямой к берегу и плыть к девушке? Надо бы! Но, немного поразмыслив, вы поймете, что выгоднее пробежать несколько дальше по берегу, чтобы уменьшить ваш путь в воде, потому что в воде вы будете двигаться гораздо медленнее. Рассуждая таким образом, лучше всего было бы заранее тщательно *вычислить* путь! Попытаемся показать, что окончательное решение задачи – это путь ACB , который занимает из всех возможных наименьшее время. Если этот путь кратчайший по времени, то любой другой окажется длиннее. Поэтому, если отложить на графике зависимость времени от положения точки X , получится кривая, похожая на изображенную на рис. 11.5, где точка C соответствует наименьшему времени. Это означает, что для точек X *вблизи* C в первом приближении время прохождения практически одинаковое, так как в точке C наклон кривой равен нулю.

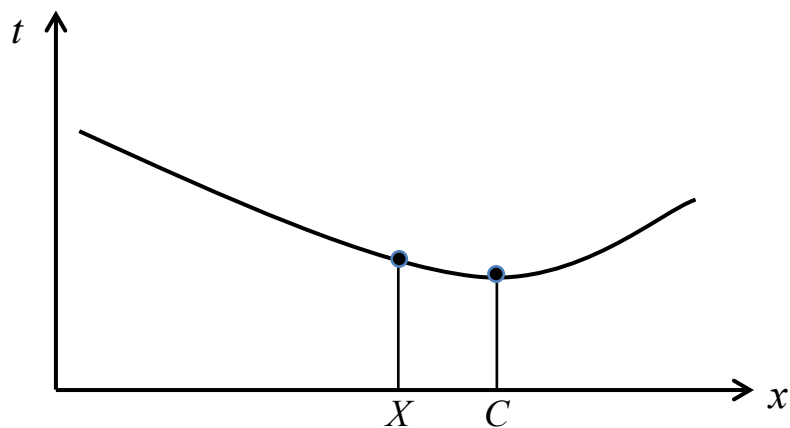


Рис. 11.5. Выбор точки C , соответствующей наименьшему времени прохождения

Итак, при небольшом изменении положения точки время прохождения не менялось. Конечно, возникнут бесконечно малые изменения времени *второго* порядка, и они должны быть положительными при смещении в обе стороны от точки C . Возьмем близкую точку X , вычислим время прохождения на пути AXB и сравним его со старым путем ACB . Сделать это очень просто. Конечно, еще нужно, чтобы разность времен стремилась к нулю для малых расстояний XC . Обратимся сначала к пути по суше. С одной стороны, если мы опустим перпендикуляр EX , то легко увидим, что наш путь стал короче на длину EC . Можно сказать, что это расстояние мы выиграли. С другой стороны, опустив перпендикуляр CF , мы увидим, что в воде придется проплыть дополнительное расстояние XF . В этом мы проиграли. С точки зрения экономии *времени* выигрывается время на отрезке EC , но теряется на отрезке XF . Эти два интервала времени должны быть равны, так как в первом приближении полное время прохождения не меняется. Предположив, что скорость в воде равна скорости в воздухе, умноженной на $1/n$, получим

$$EC = nXF. \tag{11.3}$$

Поэтому мы видим, что если нам удалось правильно выбрать точку C ($XC \sin EXC = nXC \sin XCF$) или мы сократили путь на длину общей гипотенузы XC и заметили, что

$$EXC = ECN = \theta_i \text{ и } XCF = BCN = \theta_r,$$

то мы получим

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_r. \quad (11.4)$$

Отсюда видно, что при отношении скоростей, равном n , свет должен двигаться из одной точки в другую по такому пути, чтобы отношение синусов θ_i и θ_r было равно отношению скоростей в двух средах.

11.3. Применение принципа Ферма

Рассмотрим теперь некоторые интересные следствия принципа наименьшего времени.

Первое из них – **принцип обратимости**. Мы уже нашли путь из A в B , требующий наименьшего времени, пойдём теперь в обратном направлении, считая, что скорость света не зависит от направления. Наименьшему времени отвечает та же траектория, и, следовательно, *если свет распространяется по некоторому пути в одном направлении, то он будет двигаться по этому же пути и в обратном направлении*.

Другой интересный пример. На пути света под некоторым углом поставлена четырехгранная стеклянная призма с параллельными гранями (рис. 11.6). Свет проходит из точки A в B и, встретив на своем пути призму, отклоняется, причем длительность пути в призме уменьшается за счет изменения наклона траектории, а путь в воздухе немного удлиняется. Участки траектории вне призмы оказываются параллельными друг другу, потому что углы входа и выхода из призмы одинаковы.

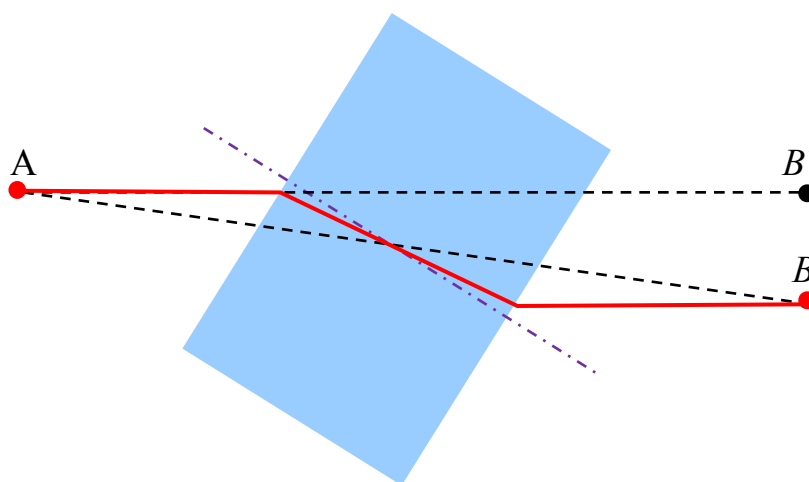


Рис. 11.6. Прохождение луча света через прозрачную пластину

Третье интересное явление состоит в том, что, когда мы смотрим на заходящее солнце, оно на самом деле находится уже ниже линии горизонта! Нам *кажется*, что солнце еще над горизонтом, а оно фактически уже зашло (рис. 11.7). Дело здесь в следующем. Земная атмосфера вверху разрежена, а в нижних слоях более плотная. Свет распространяется в воздухе медленнее, чем в вакууме, и поэтому солнечные лучи достигнут какой-то точки за горизонтом быстрее, если будут двигаться не по прямой линии, а по траектории с более крутым наклоном в плотных слоях атмосферы, сокращая, таким образом, свой путь в этих слоях.

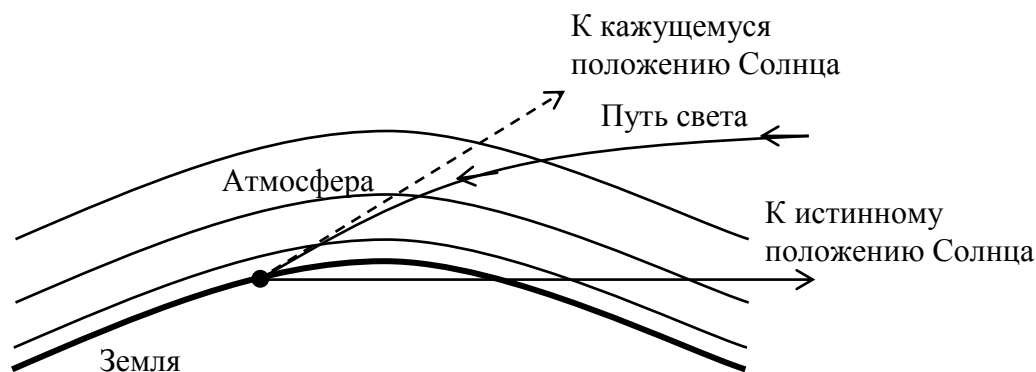


Рис. 11.7. Солнце у горизонта кажется на $\frac{1}{2}$ градуса выше, чем на самом деле

Еще пример такого же рода – мираж, который часто наблюдают путешественники на раскаленных солнцем дорогах. Они видят на дороге «воду», а когда подъезжают туда, то кругом оказывается все сухо, как в пустыне! Сущность явления в следующем. То, что мы видим в этом случае, это «отраженный» дорогой свет. На рис. 11.8 показано, как падающий на дорогу луч света попадает нам в глаза. Почему? Воздух сильно раскален над самой дорогой, а в верхних слоях он холоднее. Горячий воздух, расширяясь, становится более разреженным, а потому и скорость света в нем больше, чем в более прохладном. Другими словами, свет быстрее проходит в теплых слоях, чем в прохладных. Поэтому свет проходит не по прямой, а идет по траектории с наименьшим временем, заворачивая для этого в теплые слои воздуха, чтобы сократить время. Таким образом, свет идет по кривой.



Рис. 11.8. Мираж

Легко показать, что принцип Ферма предсказывает ряд новых фактов. Прежде всего, принцип наименьшего действия совпадает с законом равенства углов при отражении и пропорциональности синусов углов при преломлении.

Предположим, что имеются три среды – стекло, вода и воздух и мы наблюдаем явление преломления и измеряем показатель n для перехода из одной среды в другую. Обозначим через n_{12} показатель преломления для перехода из воздуха (1) в воду (2), а через n_{13} – для перехода из воздуха (1) в стекло (3). Измерив преломление в системе вода–стекло, найдем еще один показатель преломления и обозначим его n_{23} . Здесь заранее нет оснований считать, что n_{12} , n_{13} и n_{23} связаны между собой. Если же исходить из принципа наименьшего времени, то такую связь можно установить. Показатель n_{12} есть отношение двух величин – скорости света в воздухе к скорости света в воде; показатель n_{13} есть отношение скорости света в воздухе к скорости света в стекле, а n_{23} есть отношение скорости света в воде к скорости света в стекле. Поэтому, сокращая скорость света в воздухе, получаем

$$n_{23} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1/v_3}{v_1/v_2} = \frac{n_{13}}{n_{12}}. \quad (11.5)$$

Другими словами, мы предсказываем, что показатель преломления для перехода из одного материала в другой можно получить из показателей преломления каждого материала по отношению к некоторой среде, скажем, воздуху или вакууму. Таким образом, измерив скорость света во всех средах, мы образуем одно число для каждой среды – показатель преломления для перехода из вакуума в среду – и называем его n_i (например, n_i для воздуха есть отношение скорости в воздухе к скорости в вакууме и т. д.), после чего легко написать нужную формулу. Показатель преломления для любых двух материалов i и j равен

$$n_{ij} = \frac{v_i}{v_j} = \frac{n_j}{n_i}. \quad (11.6)$$

Используя только закон Снелла, подобное соотношение предсказать невозможно. Но связь эта существует. Соотношение (11.6) известно давно и послужило сильным аргументом в пользу принципа наименьшего времени.

12. ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Свет – это электромагнитная волна, которая представляет собой периодическое изменение в пространстве и во времени электрического и магнитного полей. Любая электромагнитная волна является *поперечной*, т. е. направление колебаний характеризующих ее векторов напряженности электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей перпендикулярно направлению распространения волны. Кроме того, колебания векторов \vec{E} и \vec{H} происходит строго синхронно и во взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 12.1).

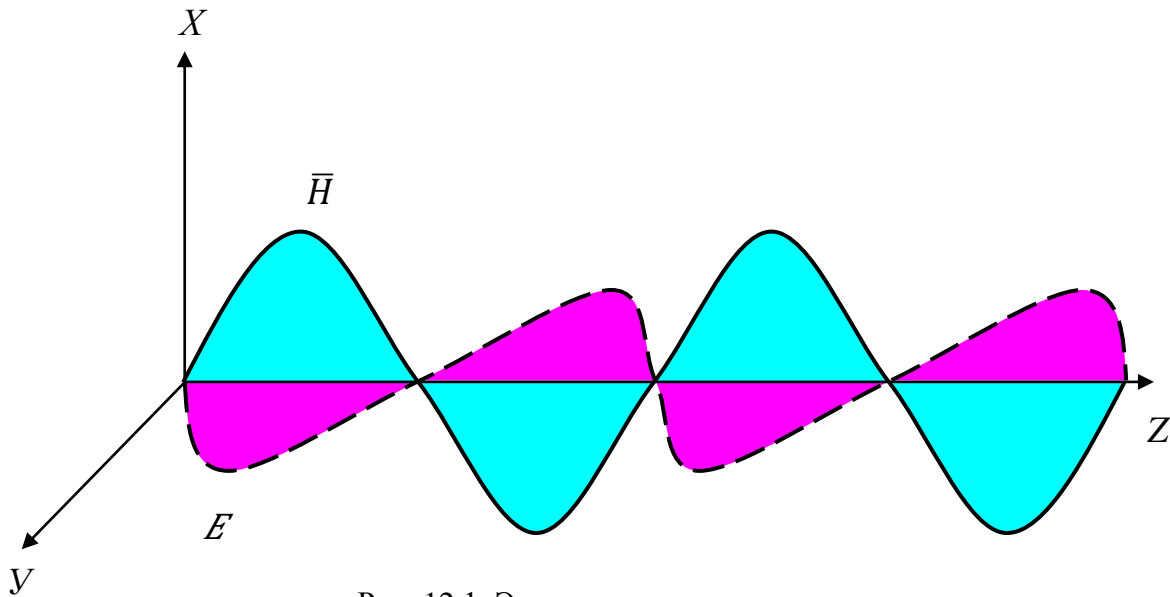


Рис. 12.1. Электромагнитная волна

Таким образом, можно выделить два важных обстоятельства. Во-первых, электромагнитная волна является поперечной. Во-вторых, существует однозначная пространственная связь между векторами \vec{E} и \vec{H} – положение одного из них полностью определяет положение другого. Поэтому условно принято рассматривать только электрический вектор \vec{E} , что имеет и определенный физический смысл, так как взаимодействие излучения с веществом определяется, в основном, электрическим, а не магнитным полем.

Пространственное соотношение между направлением распространения поперечной электромагнитной волны и направлением колебаний ее электрического вектора называется *поляризацией*. По отношению к световым волнам применяется термин «*поляризация света*».

12.1. Виды поляризации

В произвольно выбранной системе координат XYZ поперечное электрическое поле волны, распространяющейся вдоль оси Z , всегда можно разложить на две независимые составляющие \vec{E}_x и \vec{E}_y , параллельные осям X и Y . Амплитуды и фазы этих составляющих в общем случае будут различны.

Состояние поляризации гармонической бегущей волны определяется соотношением амплитуд и фаз независимых составляющих \vec{E}_x и \vec{E}_y .

Взаимодействие электромагнитной волны с веществом зависит от ее состояния поляризации. Например, если мы найдем вещество, в котором заряженные частицы могут свободно перемещаться в направлении оси X и неподвижны в направлении оси Y , то в таком веществе компонента \vec{E}_x падающей волны будет совершать работу над заряженной частицей, а компонента \vec{E}_y работу не совершит. Энергия электромагнитного излучения, связанная с \vec{E}_x , уменьшится (часть ее превратится в кинетическую энергию заряженных частиц и, в конечном счете, из-за столкновений между частицами – в тепло), в то время как амплитуда компоненты \vec{E}_y от прохождения волны через вещество не изменится.

Существуют вещества, которые могут менять разность фаз компонент \vec{E}_x и \vec{E}_y (но не вызывают заметного затухания этих компонент). В результате таких асимметричных (относительно компонент \vec{E}_x и \vec{E}_y) взаимодействий состояние поляризации электромагнитного поля изменяется. Этот факт имеет много важных последствий. Зная, как вещество взаимодействует с излучением, мы можем определить состояние поляризации излучения, и, наоборот, наблюдая, как вещество меняет состояние поляризации, мы получаем возможность судить о его свойствах. Например, направление магнитного поля в «нашем» спиральном плече галактики стало известно благодаря изучению зависимости поляризации радиоволн, излучаемых внегалактическими источниками, от направления на источники и от длины волны излучения.

В идеально монохроматической световой волне электрическое поле колеблется с определенной частотой, но X - и Y -компоненты поля могут колебаться хотя и с одной и той же частотой, но независимо друг от друга. Результат сложения таких колебаний зависит от фаз колебаний компонент X и Y . Если сложить колебание в направлении X и колебание с той же фазой в направлении Y , то получим в плоскости XOY колебание в новом направлении.

Проиллюстрируем это следующим примером. Пусть к потолку на длинном шнуре подвешен шарик. Этот шарик может свободно колебаться в горизонтальной плоскости, и колебания эти будут носить синусоидальный характер. Представим себе мысленно оси X и Y в горизонтальной плоскости колебаний шарика с началом координат в точке покоя шарика. Выбирая соответствующее начальное смещение и начальную скорость шарика, можно заставить его колебаться по оси X , по оси Y или по любому другому направлению в плоскости XOY с одной и той же частотой, равной частоте колебаний маятника. Эти колебания шарика аналогичны колебаниям электрического вектора, приведенным на рис. 12.2. В каждом случае колебания в направлениях X и Y достигают максимума одновременно и, следовательно, оба колебания находятся в фазе. Применительно к вектору электрического поля \vec{E} такой случай показан на рис. 12.3, а.

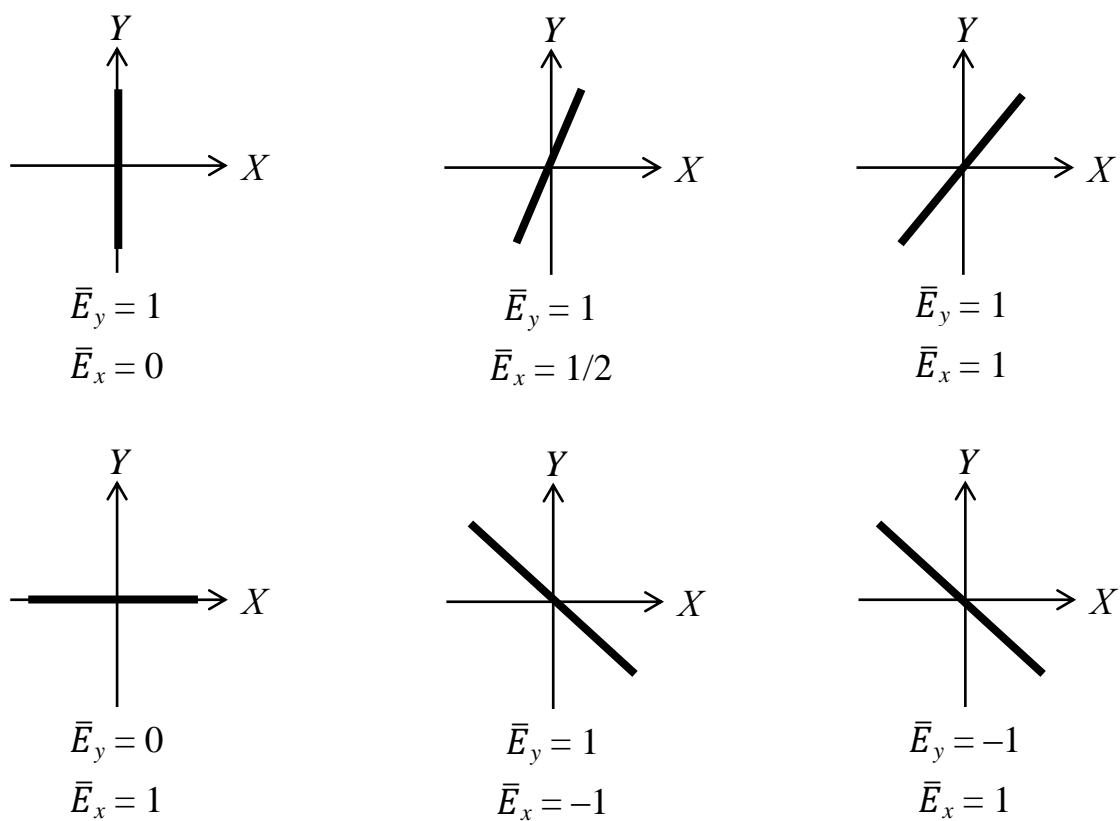


Рис. 12.2. Сложение колебаний в направлениях X и Y , когда разность фаз между ними равна нулю

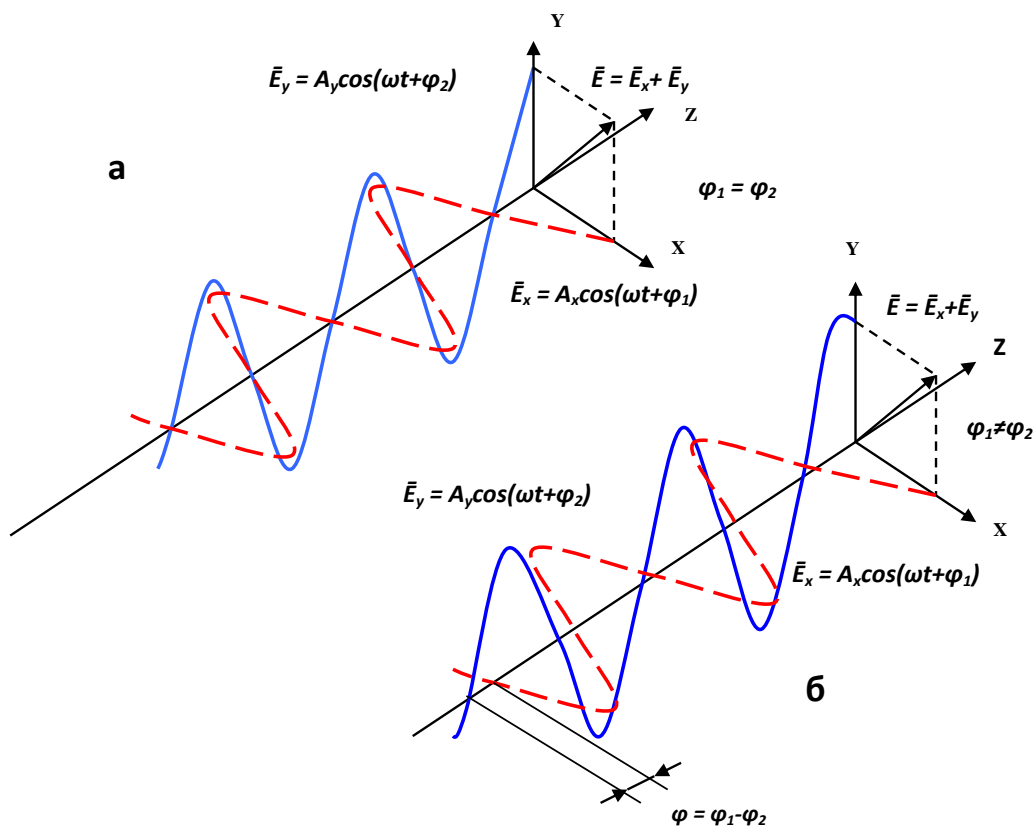


Рис. 12.3. Разложение электрического вектора \bar{E} световой волны:
а) при $\varphi = 0$; б) $\varphi \neq 0$

Если колебания электрического вектора \vec{E} световой волны фиксированы строго в одном направлении, то свет называют *линейно поляризованным*. Он может быть вертикально линейно поляризован, горизонтально линейно поляризован или линейно поляризован по любому другому направлению.

Но можно догадаться, что самый общий тип движения шарика – движение по эллипсу – получится тогда, когда колебания в направлениях X и Y будут происходить с разными фазами. Этот случай для электрического вектора \vec{E} показан на рис. 12.3, б.

На рис. 12.4 показана зависимость характера поляризации электрического вектора от разности фаз составляющих E_x и E_y .

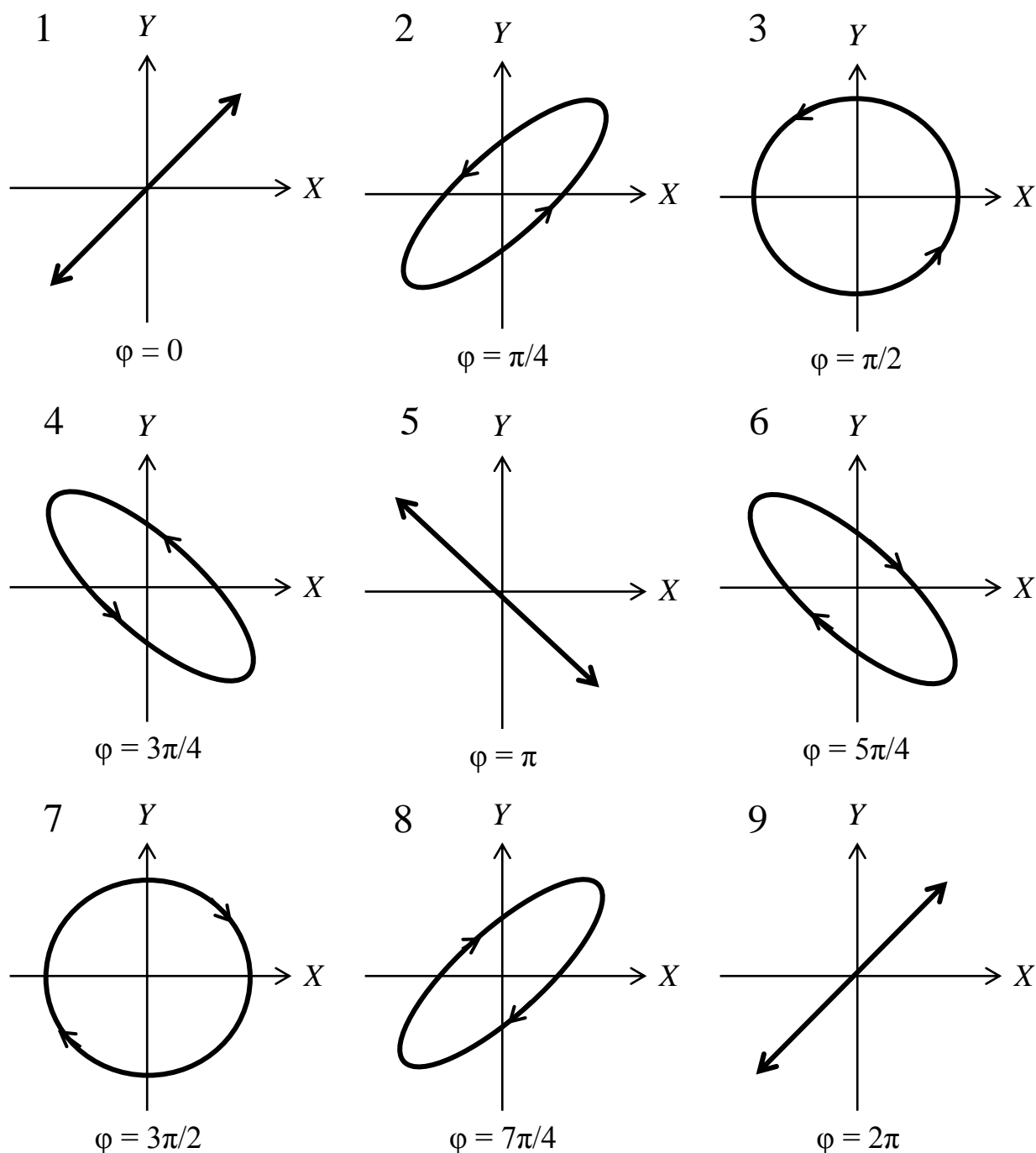


Рис. 12.4. Зависимость поляризации излучения от разности фаз составляющих X и Y :
1, 5, 9 – линейная; 2, 4, 6, 8 – эллиптическая; 3, 7 – круговая

Линейная поляризация – свойство монохроматической волны, т. е. волны, длина, период и начальная фаза которой не изменяются со временем. Однако линейная поляризация монохроматической волны наблюдается не только тогда, когда разность фаз φ между составляющими X и Y суммарного вектора равна нулю (рис. 12.3, а). Аналогичная картина будет иметь место при разности фаз равной $n\pi$, где n – целое число (рис. 12.4). Во всех других случаях конец вектора электрического поля по мере распространения волны вдоль оси Z будет описывать поверхность эллиптического цилиндра (рис. 12.3, б). Такой случай называется *эллиптической поляризацией*.

Если же разность фаз при одинаковых амплитудах составит $\pi/2$ или $(2n-1)\pi/2$, где n – целое число, то эллиптический цилиндр станет круговым, а поляризация – *круговой поляризацией* (рис. 12.4). Различают правую и левую поляризацию.

Поляризация называется *правой*, если наблюдателю, смотрящему навстречу световому лучу, кажется, что конец электрического вектора вращается по часовой стрелке, и *левой* – если в противоположном направлении. Такое определение левой и правой поляризаций согласуется с подобными определениями для всех других частиц в современной физике, для которых можно ввести понятие поляризации (например, для электронов). Однако в курсах оптики иногда используются прямо противоположные определения, поэтому следует с осторожностью относиться к терминам левая и правая поляризация.

Если при распространении световой волны направление колебаний электрического вектора бессистемно, хаотически изменяется и, следовательно, любые его направления в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны равновероятны, то такой свет называют *неполяризованным* или *естественным*. Каким же образом может получаться неполяризованный свет, если известно, что колебания электрического вектора непременно происходят по тому или иному эллипсу?

Возьмем, к примеру, не совсем монохроматический свет, когда сдвиг фаз между X - и Y -компонентами непостоянен и электрический вектор колеблется произвольным образом. Тогда поляризация света будет все время меняться. Известно, что один атом излучает свет за 10^{-8} с, и, если все атомы будут излучать свет с разной поляризацией, то поляризация пучка света будет меняться через каждые 10^{-8} с. Когда поляризация света изменяется столь быстро, что ее невозможно измерить, говорят о неполяризованном свете, потому что все эффекты поляризации усредняются и сводятся к нулю. Ни один из интерференционных эффектов при сложении поляризаций не проявляется для неполяризованного света. В то же время само определение неполяризованного света подразумевает, что экспериментально невозможно установить, поляризован свет или нет.

12.2. Двойное лучепреломление

Встречаются среды, показатель преломления которых различен для света, линейно поляризованного в том или другом направлении. Предположим, например, что имеется некий материал, состоящий из вытянутых несферических молекул, длина которых больше их ширины. Предположим также, что молекулы в веществе выстроены так, чтобы их большие оси оказались параллельными. Что произойдет, если на тело подействует осциллирующее поле? Предположим, что такая структура молекул способствует тому, что электроны в материале легче поддаются колебаниям вдоль оси молекулы, чем поперек нее. При таких условиях следует ожидать, что поляризация света в одном направлении будет вызывать один эффект, а поляризация, направленная под прямым углом к первой, – совсем другой. Назовем направление осей молекул *оптической осью*. Показатель преломления принимает разные значения в зависимости от того, направлена ли поляризация вдоль оптической оси или перпендикулярна ей. Среда с такими свойствами называется *двоякопреломляющей*. Она обладает двумя разными способами преломления, т. е. двумя показателями преломления в зависимости от поляризации света в среде. Какие материалы обладают этим свойством? Из разных соображений вытекает, что двоякопреломляющая среда должна иметь некоторое количество ориентированных несферических молекул. Ясно, что кубический кристалл, имеющий симметрию куба, не может быть двоякопреломляющим. А вот длинные игловидные кристаллы, безусловно, содержат несимметричные молекулы, и в них легко наблюдать эффект двойного лучепреломления.

Что получится, если направить поляризованный луч на пластинку из двоякопреломляющего материала? Если поляризация параллельна оптической оси, свет пройдет через пластинку с одной скоростью, а если поляризация перпендикулярна, то с другой скоростью. Интересная ситуация возникает, если луч света поляризован, например, под углом 45° к направлению оптической оси. Тогда поляризация, как известно, представляется в виде суммы поляризаций в направлении X и Y с равными амплитудами и фазами (рис. 12.2). Поскольку лучи с поляризациями вдоль осей X и Y движутся в среде с разными скоростями, фазы обеих компонент поля будут расти по-разному.

Таким образом, несмотря на первоначальное совпадение фаз X - и Y -компонент, внутри среды между ними образуется разность фаз, пропорциональная глубине проникновения света в среду. Изменение поляризации света по мере прохождения через среду можно проследить по серии диаграмм на рис. 12.4. Если пластинка имеет такую толщину, что разность фаз между X - и Y -компонентами на выходе равна 90° , то свет выйдет из пластинки поляризованным по кругу (рис. 12.4, диагр. 3). Пластинки такой толщины называются *четвертьволновыми пластинками*, поскольку после прохождения через них света между X - и Y -компонентами появляется разность фаз в одну четверть длины волны. Пропуская линейно поляризованный свет через две четвертьволновые пластинки, снова получим линейно поляризован-

ный свет, но направление поляризации при этом окажется повернутым на 90° по отношению к исходному. Это также легко понять из рис. 12.4.

Явление поляризации можно наблюдать при прохождении света через обычный целлофан. Целлофан состоит из длинных молекул – волокон, и его структура не является изотропной, поскольку волокна по большей части вытянуты в одном направлении. Для наблюдения двойного лучепреломления необходим пучок линейно поляризованного света, который нетрудно получить, пропуская неполяризованный свет через пластинку поляроида. Поляроид – это пластинка из материала, который почти свободно пропускает свет, направление поляризации которого параллельно оси поляроида, а свет, направление поляризации которого перпендикулярно оси поляроида, почти целиком им поглощается. Когда неполяризованный свет пропускается через пластинку поляроида, то проходит через него только та часть света, колебания вектора поляризации которого параллельны оси поляроида, поэтому прошедший через пластинку луч оказывается линейно поляризованным.

Это свойство поляроида используют также для определения направления поляризации линейно поляризованного света. Кроме того, с помощью поляроида можно определить, есть ли у света вообще линейная поляризация или нет. Для этого достаточно пропустить свет через пластинку поляроида и поворачивать ее в плоскости, перпендикулярной лучу. Линейно поляризованный свет не может пройти через поляроид, когда ось поляроида перпендикулярна направлению поляризации луча. Повернув пластинку на 90° , мы увидим прошедший через нее луч чуть-чуть менее ярким, чем падающий пучок света. Если яркость луча, прошедшего через поляроид, не зависит от его ориентации, то падающий пучок не имеет линейно поляризованной составляющей.

Для демонстрации двойного преломления в целлофане возьмем два поляроида и расположим их как показано на рис. 12.5. Из первого поляроида выходит линейно поляризованный пучок света. Мы пропускаем его через целлофан, а затем через другой поляроид, чтобы учесть действие целлофана на линейно поляризованный свет. Сначала расположим оси поляроидов перпендикулярно друг другу и уберем листок целлофана. Через второй поляроид свет не пройдет совсем. Теперь поставим между поляроидами листок целлофана и будем поворачивать его вокруг оси пучка света. При этом, вообще говоря, некоторая часть света будет все время проходить через второй поляроид. Имеются, однако, две ориентации листка целлофана, перпендикулярные друг другу, при которых свет через второй поляроид не проходит. Ясно, что эти две ориентации целлофана не влияют на линейную поляризацию проходящего через него света и поэтому должны совпадать с направлениями оптических осей одного и другого поляроидов.

Здесь мы предполагаем, что скорость света, проходящего через целлофан, различна для указанных двух направлений поляризации, но само направление поляризации при прохождении света через целлофан не меняется.

Если выбрать промежуточную ориентацию целлофана где-то между двумя главными направлениями, как на рис. 12.5, то через второй поляроид пройдет яркий пучок света.

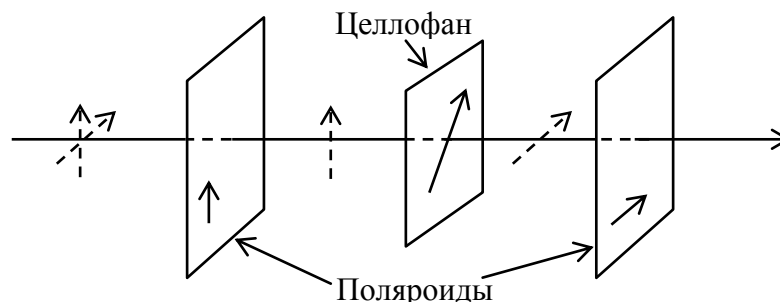


Рис. 12.5. Схема эксперимента по двойному лучепреломлению в целлофане (векторы электрического поля световой волны изображены пунктирными линиями. Направления поляризации, пропускаемые поляроидами, и оптические оси целлофана изображены сплошными стрелками. Падающий луч света неполяризован)

Оказывается, что толщина обычного целлофана, используемого в магазинах для упаковки, равна почти точно половине длины волны для большинства цветов в спектральном разложении белого цвета. Целлофан такой толщины поворачивает направление поляризации линейно поляризованного света на 90° , если это направление в падающем пучке образует угол 45° с оптической осью целлофана. Таким образом, выходящий из целлофана луч обладает как раз такой поляризацией, что может пройти вторым поляроидом.

Если в нашем опыте использовать пучок белого света, то только для одной компоненты его спектрального разложения толщина целлофана совпадет с половиной длины волны, и пучок, пропущенный вторым поляроидом, будет иметь цвет именно этой компоненты. Цвет пучка, прошедшего через наше устройство, будет зависеть от толщины листа целлофана, а эффективную толщину целлофана мы можем менять, наклоняя листок под некоторым углом и таким образом заставляя свет проходить больший путь внутри целлофана. При наклоне листка целлофана цвет пропущенного пучка меняется. Используя целлофан разной толщины, можно сконструировать фильтры, пропускающие лучи вполне определенного цвета. Эти фильтры обладают тем замечательным свойством, что они пропускают один цвет, когда оси поляроидов перпендикулярны, и дополнительный к нему цвет, когда оси поляроидов параллельны.

Системы ориентированных молекул имеют еще одно, на этот раз вполне практическое применение. Некоторые пластики состоят из очень длинных и сложных молекул, скрученных между собой. При очень тщательном проведении процесса затвердевания пластика молекулы, скручиваясь, образуют сплошную массу и ориентируются равномерно в самых разных направлениях, так что пластик обычно не проявляет свойства двойного лучепреломления.

Но при затвердевании часто образуются дефекты и напряжения, которые приводят к некоторой неоднородности материала. Напряжения, возникающие в пластике, как бы вытягивают целую связку молекул, и молекулярные нити ориентируются преимущественно вдоль направления натяжения. Благодаря внутренним напряжениям пластик становится двоякопреломляющим, и эффект двойного лучепреломления можно наблюдать, пропуская через него поляризованный свет. Анализируя пропущенный пластиком пучок с помощью поляроида, мы заметим темные и светлые полосы (окрашенные в разные цвета, если берется пучок белого света). Если образец подвергнуть растяжению, то вся совокупность полос начнет сдвигаться, а подсчитав полосы и определив место их наибольшего скопления, можно найти внутренние напряжения, возникающие в образце. Инженеры обычно используют это явление как способ определения напряжений в деталях, форма которых трудно поддается расчету.

Еще один интересный пример – двойное лучепреломление в жидкостях. Рассмотрим жидкость, состоящую из длинных асимметричных молекул, которые несут вблизи своих концов распределенный положительный или отрицательный заряд, т. е. молекулы являются электрическими диполями. Сталкиваясь, молекулы в жидкости могут перемещаться в любом направлении, причем какого-либо преимущественного направления движения не существует. Но если воздействовать электрическим полем, то молекулы начнут выстраиваться вдоль поля и в этот самый момент жидкость становится двоякопреломляющей средой. Взяв два поляроида и прозрачную ячейку с жидкостью такого сорта, можно создать устройство, которое пропускает свет только при включении электрического поля. В результате мы получим электрический переключатель для света, который называют *ячейкой Керра*. А сам эффект, когда в жидкости возникает двойное лучепреломление под действием электрического поля, называется *эффектом Керра*.

12.3. Поляризаторы

До сих пор мы говорили о средах, показатель преломления которых различен для разных направлений поляризации падающего светового пучка. Большое значение для практических применений имеют и другие среды, у которых в зависимости от поляризации света меняется не только показатель преломления, но и коэффициент поглощения. Как и в случае двойного лучепреломления, легко понять, что поглощение может зависеть от направления вынужденных колебаний зарядов только в анизотропных средах. Первый старый, ставший уже знаменитым пример – это турмалин, а другой – поляроид. Поляроид состоит из тонкого слоя маленьких кристаллов герпатита (соль йода и хинина), выстроенных своими осями параллельно друг другу. Эти кристаллы поглощают свет, когда колебания происходят в одном каком-то направлении, и почти не поглощают света, когда колебания совершаются в другом направлении.

Направим на поляроид пучок света, поляризованный под углом θ к его оси. Какая интенсивность будет у пучка, прошедшего через поляроид? Разложим пучок света на две компоненты: одну с поляризацией, перпендикулярной той, которая проходит без ослабления (она пропорциональна $\sin \theta$), и вторую – продольную компоненту, пропорциональную $\cos \theta$. Через поляроид пройдет только часть, пропорциональная $\cos \theta$. Компонента, пропорциональная $\sin \theta$, поглотится. Амплитуда света, прошедшего через поляроид, меньше амплитуды падающего света и получается из нее умножением на $\cos \theta$. Интенсивность света пропорциональна квадрату $\cos \theta$. Таким образом, если падающий свет поляризован под углом θ к оси поляроида, то пропускаемая поляризатором доля интенсивности составляет $\cos^2 \theta$ от полной. Доля интенсивности, поглощаемая в поляроиде, $\sin^2 \theta$.

Интересный парадокс возникает в следующем опыте. Известно, что два поляроида с осями, расположенными перпендикулярно друг другу, не пропускают света. Но если *между* такими поляроидами поместить третий, ось которого направлена под углом 45° к осям двух других, часть света пройдет через такую систему. Как известно, поляроид только поглощает свет, создать свет он не может. Тем не менее, поставив третий поляроид под углом 45° , мы увеличиваем количество прошедшего света. Это можно проанализировать с помощью простого опыта.

Одно из интереснейших поляризационных явлений, возникающее не в сложных кристаллах и всяких специальных материалах, а в простом и очень знакомом случае, – это отражение от поверхности. Кажется невероятным, но при отражении от стекла свет может поляризоваться, и объяснить физически этот факт весьма просто. На опыте шотландский физик Дэвид Брюстер (1681–1868) показал, что отраженный от поверхности свет полностью поляризован, если отраженный и преломленный в среде лучи образуют прямой угол (рис. 12.6). Угол i при этом называется *углом Брюстера*.

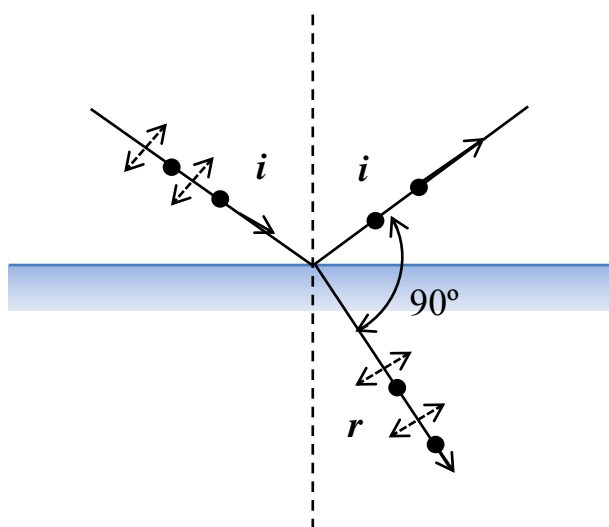


Рис. 12.6. Отражение линейно поляризованного света под углом Брюстера

Величину угла Брюстера можно определить по формуле

$$\operatorname{tg} i = \frac{n_2}{n_1}, \quad (12.3)$$

где n_1 и n_2 – показатели преломления сред, в которых распространяются падающий и преломленный лучи, соответственно.

Если падающий луч поляризован в плоскости падения, отраженного луча не будет совсем. Отраженный луч возникает только при условии, что падающий луч поляризован перпендикулярно плоскости падения. Причину этого явления легко понять. В отражающей среде свет поляризован перпендикулярно направлению движения луча, а мы знаем, что именно движение зарядов в отражающей среде генерирует исходящий от нее луч, который называют отраженным. Появление этого так называемого отраженного луча объясняется не просто тем, что падающий луч отражается; мы теперь знаем, что падающий луч приводит в движение заряды в среде, а оно в свою очередь генерирует отраженный луч. Из рис. 12.6 ясно, что только колебания, перпендикулярные плоскости чертежа, дают излучение в направлении отраженного луча, а, следовательно, отраженный луч поляризован перпендикулярно плоскости падения. Если же падающий луч поляризован в плоскости падения, то отраженного луча не будет совсем.

Это явление легко продемонстрировать при отражении линейно поляризованного луча от плоской стеклянной пластинки. Поворачивая пластинку под разными углами к направлению падающего поляризованного луча, можно заметить резкий спад интенсивности при значении угла, равному углу Брюстера. Это падение интенсивности наблюдается только в том случае, когда плоскость поляризации совпадает с плоскостью падения. Если же плоскость поляризации перпендикулярна плоскости падения, заметного спада интенсивности отраженного света не наблюдается.

Обычно источники света (солнце, звезды, электрические лампочки и др.) излучают свет, в котором векторы напряженности электрических (и магнитных) полей ориентированы в пространстве различным образом. Такой свет, как уже говорилось, называется естественным. В естественном луче все направления колебаний перпендикулярны к лучу и равновероятны, все амплитуды одинаковы. Если в некоторых направлениях колебания каким-либо образом ослаблены, то такой свет называют **частично поляризованным**. Частично поляризованным свет может оказаться из-за того, что вблизи точки наблюдения присутствуют отражающие и/или преломляющие поверхности (зеркала, стекла, поверхность водоема и пр.). В этом случае наличие поляризации является следствием того, что коэффициент отражения света зависит от направления вектора напряженности электрического поля световой волны относительно плоскости отражения. В большей степени отражаются те волны, у которых этот вектор параллелен отражающей плоскости. Таким образом, отраженные и преломленные лучи оказываются частично поляризованными.

Степень поляризации отраженных лучей зависит также от материала отраженных поверхностей и угла падения.

Степень поляризации P определяется соотношением

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (12.4)$$

где I_{\max} и I_{\min} – максимальная и минимальная интенсивности света, прошедшего через пластинку-поляризатор, которая в данном случае будет выполнять роль анализатора.

Рассмотрим, как изменится интенсивность поляризованного света после прохождения через поляризатор, оптическая ось которого не совпадает с плоскостью поляризации светового луча. Расположим последовательно пластинку-поляризатор P и пластинку-анализатор A , как показано на рис. 12.7. Пунктирными линиями обозначим направления их оптических осей.

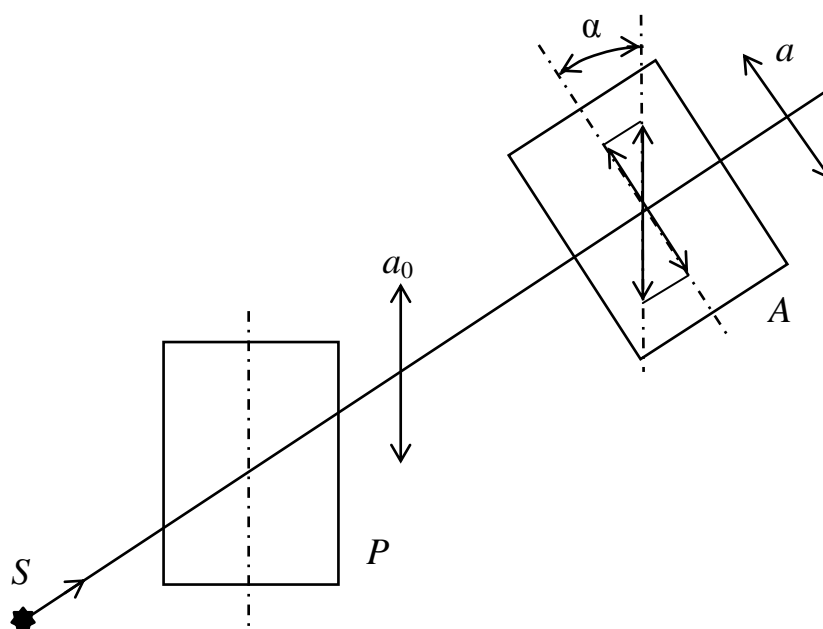


Рис. 12.7. Прохождение света через поляризатор и анализатор

Направим свет от источника S сначала через поляризатор P , после чего он станет поляризованным, т. е. колебания электрического вектора E прошедшего через поляризатор света будут происходить только в одной плоскости, параллельной его оптической оси. Пусть амплитуда колебаний вектора E будет равна некоторой величине a_0 . Полученный таким образом поляризованный свет доходит до второго поляризатора – анализатора A , направление оптической оси которого составляет некоторый угол α с направлением оптической оси поляризатора P . После прохождения через анализатор амплитуда колебаний светового вектора a будет равна проекции величины колебаний исходного вектора a_0 на направление оптической оси анализатора:

$$a = a_0 \cos \alpha$$

Интенсивность I света, как известно, пропорциональна квадрату амплитуды колебаний светового вектора, следовательно, между интенсивностями падающего на анализатор и прошедшего через него света должно выполняться соотношение:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha. \quad (12.5)$$

Соотношение (12.5) выражает известный **закон Малюса**: *интенсивность I света, прошедшего через анализатор, прямо пропорциональна интенсивности света I_0 , вышедшего из поляризатора, и квадрату косинуса угла α между оптическими осями поляризатора и анализатора*. Сама формула (12.5) называется **формулой Малюса**.

12.4. Аномальное преломление

Рассмотрим еще одно поляризационное явление, которое исторически было обнаружено самым первым – аномальное преломление света. Моряки, побывавшие в Исландии, привозили в Европу кристаллы исландского шпата (CaCO_3), которые обладали тем забавным свойством, что рассматриваемые сквозь них предметы как бы раздваивались, т. е. получалось два изображения предмета. Это явление привлекло внимание Гюйгенса и сыграло важную роль в открытии поляризации света. Как часто бывает, найденные раньше других явления оказываются, в конечном счете, наиболее трудными для объяснения. Обычно лишь после того, как физическая идея становится понятной в мельчайших подробностях, можно подобрать явления, иллюстрирующие эту идею наиболее просто и наглядно.

Аномальное преломление представляет собой частный случай уже изученного нами явления двойного лучепреломления. Аномальное преломление возникает тогда, когда оптическая ось, т. е. большая ось асимметричных молекул, не параллельна поверхности кристалла.

На рис. 12.8 изображены два двоякопреломляющих кристалла и показано направление оптической оси. На рис. 12.8, а падающий луч линейно поляризован в направлении, перпендикулярном оптической оси кристалла. Когда луч попадает на поверхность кристалла, каждая точка поверхности служит источником новой волны, распространяющейся внутрь кристалла со скоростью v_{\perp} (скоростью света в кристалле, поляризация которого перпендикулярна направлению оптической оси). Волновой фронт представляется просто огибающей всех этих маленьких сферических волн, он движется прямо сквозь кристалл. Такое поведение света считается обычным, а соответствующий луч называется **обыкновенным лучом**.

На рис. 12.8, б поляризация падающего луча повернута на 90° , так что оптическая ось лежит в плоскости поляризации. Рассмотрим теперь маленькие волны, идущие от поверхности кристалла. Они уже не сферические, как в предыдущем случае. Свет вдоль оптической оси движется со скоростью v_{\parallel} , потому что поляризация его перпендикулярна оптической оси, а свет,

движущийся перпендикулярно оси, распространяется со скоростью v_{\parallel} , поскольку поляризация и оптическая ось параллельны. В двоякопреломляющем кристалле $v_{\parallel} \neq v_{\perp}$, и на нашем рисунке выбран случай $v_{\parallel} > v_{\perp}$. Более подробный анализ показывает, что волны у поверхности кристалла имеют форму эллипсоидов, большая ось которых совпадает с оптической осью кристалла. Огибающая этих эллиптических волн – волновой фронт – движется через кристалл, как показано на рис. 12.8, б. У задней поверхности кристалла луч отклоняется на тот же угол, что и у передней, и выходит параллельно падающему пучку, сместившись на некоторое расстояние. Совершенно очевидно, что этот луч не подчиняется закону Снелла и движется довольно необычно. Поэтому его называют **необыкновенным лучом**.

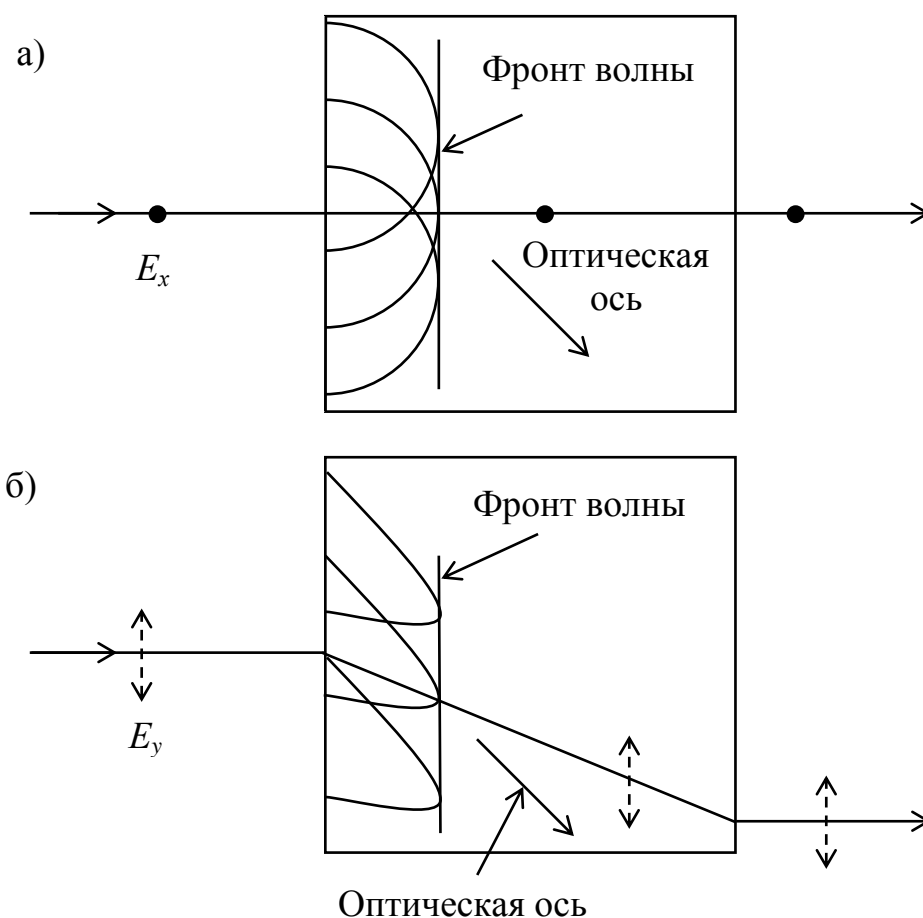


Рис. 12.8. Путь обыкновенного (а) и путь необыкновенного луча (б) в двоякопреломляющем кристалле (оптическая ось лежит в плоскости рисунка)

Если на аномально преломляющий кристалл направить неполяризованный пучок света, он разделится на два луча: обыкновенный, движущийся прямо через кристалл по обычным законам, и необыкновенный, который, пройдя через кристалл, смещается относительно падающего луча. Оба прошедших через кристалл луча линейно поляризованы перпендикулярно друг другу. Этот факт легко установить опытным путем, используя поляризатор для определения поляризации вышедших из кристалла лучей света. Можно также

подтвердить правильность нашей интерпретации, посылая на кристалл линейно поляризованный луч. Выбирая нужную ориентацию поляризации падающего пучка, мы в одном случае увидим луч, прошедший прямо сквозь кристалл, а в другом – единственный сместившийся луч.

На рис. 12.2 и 12.4 были представлены самые разные виды поляризации в виде суперпозиции двух основных, а именно поляризаций по осям X и Y с разными амплитудами и фазами. Вместо них можно выбрать и другие пары основных поляризаций. Один из возможных примеров представляет собой поляризации по двум перпендикулярным осям X' и Y' , повернутым относительно X и Y (можно также любую поляризацию представить как суперпозицию случаев 1 и 5 на рис. 12.4). Оказывается, эту мысль можно еще продолжить. Например, любую *линейную* поляризацию можно представить в виде суперпозиции *правой* и *левой круговой* поляризации с соответствующими амплитудами и фазами (случаи 3 и 7 на рис. 12.4), поскольку два равных вектора, вращающихся в разные стороны, при сложении дают вектор, осциллирующий вдоль прямой линии (рис. 12.9).

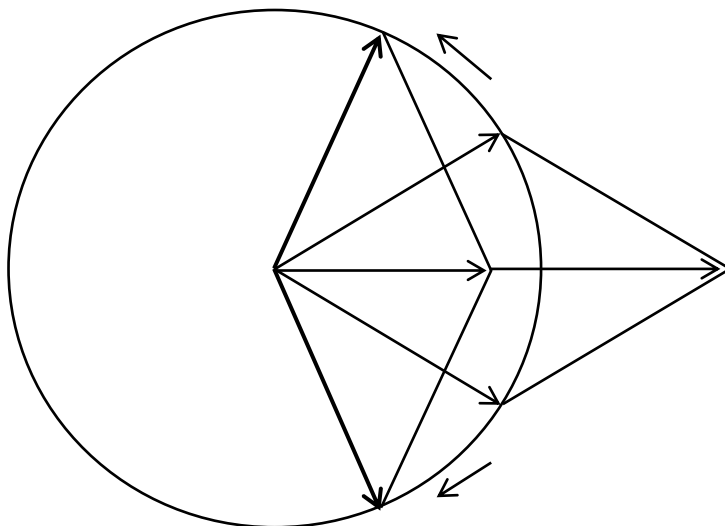


Рис. 12.9. Сложение двух векторов одной длины, вращающихся в противоположные стороны

Если фазы вращающихся векторов разные, прямая будет наклонена. Таким образом, все графики на рис. 12.2 можно назвать «суперпозициями равного количества право- и левополяризованного света при разных сдвигах фаз». Когда левополяризованный свет отстает по фазе от правополяризованного, направление линейной поляризации меняется. Поэтому оптически активные среды можно в некотором смысле назвать двойкопреломляющими. Свойство оптической активности можно характеризовать и по-другому, говоря, что такие среды имеют разные показатели преломления для света с правой и левой круговой поляризацией. Суперпозиция право- и левополяризованного света с разными амплитудами дает эллиптически поляризованный свет.

Свет с круговой поляризацией обладает интересным свойством – он переносит *момент количества движения* (взятый относительно направления луча). Чтобы пояснить это утверждение, предположим, что поляризованный по кругу свет падает на атом, который представляет собой гармонический осциллятор, способный колебаться в любом направлении в плоскости XOY .

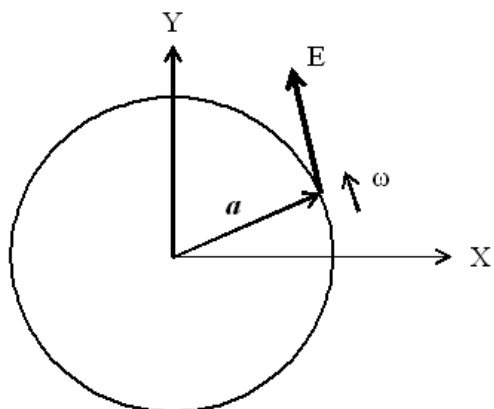


Рис. 12.10. Действие света с круговой поляризацией на вращающийся заряд

Тогда смещение электрона по оси X отвечает компоненте поля E_x , а смещение по оси Y отвечает компоненте E_y , равной по величине E_x , но отстающей от нее по фазе на 90° . Это означает, что электрон под действием вращающегося электрического поля световой волны (рис. 12.10) будет двигаться по окружности с угловой скоростью ω .

Направление вектора смещения электрона \mathbf{a} в зависимости от восприимчивости осциллятора к действующей на него силе не обязательно совпадает с направлением силы $q_e \mathbf{E}$, но тем не менее оба вектора вращаются одновременно друг с другом. Напряженность поля \mathbf{E} , вообще говоря, имеет компоненту, перпендикулярную смещению электрона \mathbf{a} , так что над системой совершается работа, а кроме того, на нее действует крутящий момент τ . Работа, которую он совершает за 1 с, равна $\tau\omega$. За период T системе передается энергия $\tau\omega T$, причем τT есть момент количества движения, поглощаемый вместе с энергией излучения. Таким образом, мы видим, что *луч света с правой круговой поляризацией, энергия которого равна E , переносит момент количества движения (вектор которого лежит вдоль направления распространения луча), равный по величине E/ω* . Действительно, если луч правополяризованного света поглощается веществом, поглотителю передается порция момента количества движения, равная E/ω . Лепополяризованный свет несет момент противоположного знака, т. е. E/ω .

13. ГОЛОГРАФИЯ

Голография (др.-греч. γῶλος – полный + γραφω – запись, изображение) – это набор технологий для точной записи, воспроизведения и перестроения волновых полей.

Основателем голографии считается профессор государственного колледжа в Лондоне Деннис Габор, получивший в 1947 г. первую голограмму. Открытие голографии было сделано им в ходе экспериментов по увеличению разрешающей способности электронного микроскопа. Названием «голография» Д. Габор подчеркнул, что метод позволяет зарегистрировать полную информацию об исследуемом объекте. В 1971 г. он получил Нобелевскую премию по физике «за изобретение и развитие голографического принципа».

Голография начала бурно развиваться и приобрела большое практическое значение после того, как советскими физиками – академиками Н. Г. Басовым и А. М. Прохоровым и американским ученым Чарльзом Таунсом в 1960 г. был создан первый лазер. В том же году профессором Т. Маймамом был сконструирован импульсный лазер на рубине. Эта система дает мощные и короткие, длительностью в несколько наносекунд (10^{-9} с), лазерные импульсы, позволяющие фиксировать на голограмме подвижные объекты.

Первый портрет человека был снят с помощью рубинового лазера в 1967 г.

Решающее значение для развития изобразительной голографии имели работы советского академика Ю. Н. Денисюка, выполненные в 60–70-х гг. Он впервые получил отражательные голограммы, позволяющие воспроизводить объемные изображения в обычном, белом свете. Практически вся современная изобразительная голография базируется на методах, предложенных Ю. Н. Денисюком. Первые высококачественные голограммы по его методу были выполнены в 1968 г.

В 1969 г. Стивен Бентон из Polaroid Research Laboratories (США) изготовил пропускающую голограмму, видимую в обычном белом свете. Голограммы, изобретенные Бентоном, были названы радужными, так как они переливаются всеми цветами радуги, из которых состоит белый свет. Открытие Бентона позволило начать массовое производство недорогих голограмм путем «штамповки» интерференционных картин на пластик. Голограммы именно такого типа применяются сегодня для защиты от подделок документов, банковских карточек и т. д. Благодаря Стивену Бентону голография стала применяться в разных сферах деятельности.

В 1977 г. Ллойд Кросс получил мультиплексную голограмму, состоящую из множества обычных фотографий объекта, снятых с множества точек зрения, лежащих в горизонтальной плоскости. При перемещении такой голограммы в поле зрения можно увидеть все запечатленные кадры.

Голография заинтересовала и живописцев, первым из которых стал Сальвадор Дали. В 1960-х гг. художник активно увлекался стереоскопией, а в 1972-м, воспользовавшись советами Д. Габора, он создал три композиции, которые вскоре были выставлены в Нью-Йорке.

С 1970-х гг. на основе голографического метода научились снимать кино. Сотрудники научно-исследовательского кино-фото-института (НИКФИ) в Москве под руководством профессора Виктора Комара создали и показали первый в мире голографический одноцветный 20-секундный фильм на специальном голографическом экране в конце 1976 г. в Москве. Голографический экран размером 60×80 см формировал четыре зрительские зоны, из которых можно было наблюдать одноцветное объемное изображение движущегося человека.

В 2000 г. на рынке технологий хранения данных возникла новая компания InPhase Technologies, приступившая к созданию устройств записи данных принципиально нового типа. InPhase занялась созданием голографических систем хранения на основе технологии, разработанной в бюро Bell Labs. В отличие от существующих методов записи информации на поверхность диска новая технология позволяет использовать всю толщину материала, т. е. запись ведется не по поверхности, а по объему. Помимо многократного увеличения плотности записи данная разработка предоставляет возможность повысить скорость считывания информации – за один «машинный отсчет» с носителя можно скачать до 1 млн бит информации.

13.1. Физические основы голографии

Голография основывается на двух физических явлениях – дифракции и интерференции световых волн. Физическая идея состоит в том, что при наложении двух световых пучков при определенных условиях возникает интерференционная картина, т. е. в пространстве возникают максимумы и минимумы интенсивности света.

Для того чтобы эта интерференционная картина была устойчивой в течение времени, необходимого для наблюдения, и ее можно было записать, эти две световых волны должны быть согласованы в пространстве и во времени. Такие согласованные волны называются *когерентными*. Если волны встречаются в фазе, то они складываются друг с другом и дают результирующую волну с амплитудой, равной сумме их амплитуд. Если же они встречаются в противофазе, то будут гасить одна другую. Результирующая сложения двух когерентных волн будет всегда стоячей волной. То есть интерференционная картина будет устойчива во времени. Это явление лежит в основе получения и восстановления голограмм (рис. 13.1).

Профессор Деннис Габор, изучая проблему записи изображения, выдвинул идею, сущность реализации которой заключается в следующем. Если пучок когерентного света разделить на два и осветить регистрируемый объект только одной частью пучка, направив вторую часть на фотографическую пластинку, то лучи, отраженные от объекта, будут интерферировать с лучами, попадающими непосредственно на пластину от источника света. Пучок света, падающий на пластину, назвали *опорным*, а пучок, отраженный или прошедший через объект, *предметным*. Учитывая, что эти пучки получены

из одного источника излучения, можно быть уверенным в том, что они когерентны. В данном случае интерференционная картина, образуемая на пластинке, будет устойчива во времени, т. е. образуется изображение стоячей волны. Трудность в получении голограмм во времена Габора состояла в том, что необходим был источник когерентного излучения, а лазер в это время еще не был изобретен. Обычные же источники света не обладают достаточной степенью когерентности для использования в голографии. Поэтому для получения высокого контраста интерференционной картины Д. Габор использовал одну из ярких линий спектра излучения ртутной лампы, выделяя ее с помощью специального светофильтра (рис. 13.2). Формируемые таким способом голограммы называют *осевыми* или *голограммами Габора*, поскольку главные лучи опорного и объектного лучей распространяются по одному направлению.

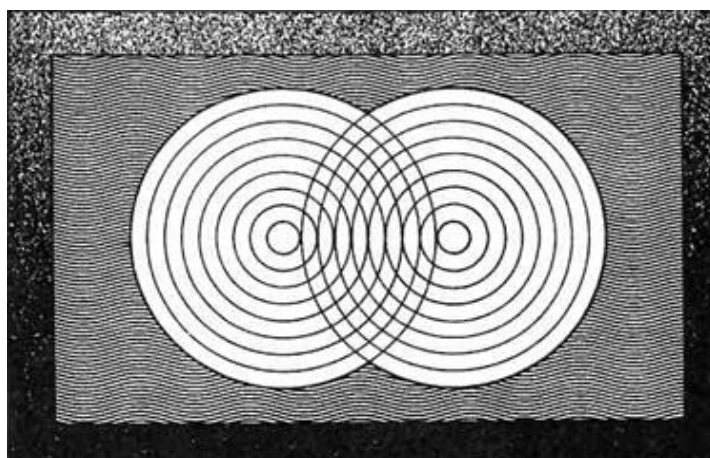


Рис 13.1. Интерференционная картина

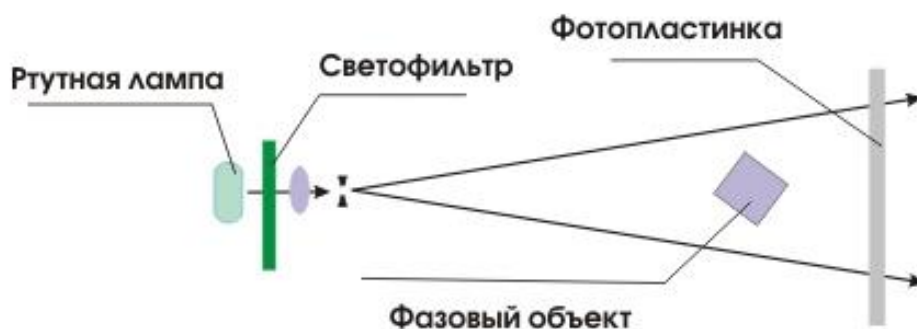


Рис. 13.2. Запись голограммы методом Д. Габора

Решающее значение для развития голографии имело изобретение в 1960 г. оптического квантового генератора (лазера), обладающего необходимой степенью когерентности и излучающего строго одну длину волны.

В отличие от фотографии голограмма сохраняет не только информацию об интенсивности волн, пришедших от источника, но и о фазе этих волн. Если осветить голограмму когерентным светом, то изображение источника восстанавливается в том же месте, где он находился при записи голограммы

(рис. 13.3). Причем восстановленное изображение трехмерное. Помимо мнимого восстановленного изображения предмета P_1 имеется его действительное изображение P_2 , расположенное симметрично с противоположной стороны фотопластины, а также часть прошедшей плоской волны, освещающей голограмму.

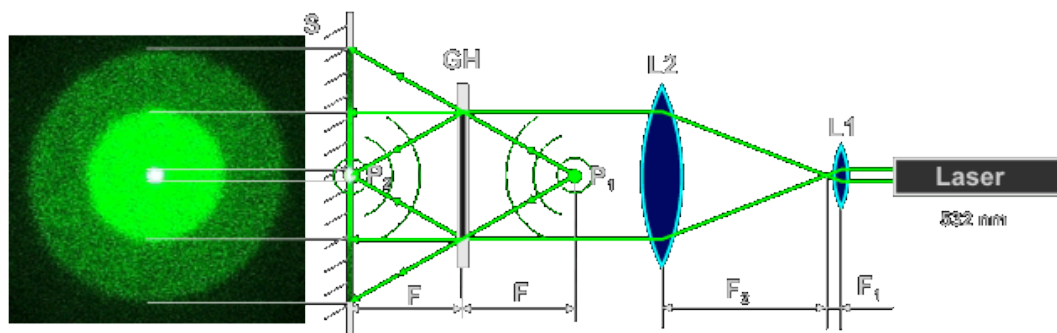


Рис. 13.3. Голограмма Габора, полученная с помощью лазера

Если разглядывать восстанавливающий источник сквозь голограмму, то будут видны источник, мнимое изображение объекта и сопряженное действительное изображение. Если наблюдатель сфокусирует глаз на мнимом изображении, то действительное окажется расфокусированным. Наоборот, если разместить экран в той плоскости, где дифрагированные на структуре голограммы лучи создают действительное изображение, то на нем будет присутствовать паразитная засветка от расфокусированного мнимого изображения объекта. Эти взаимные световые помехи на изображении двойника в направлении наблюдения являются основным, наиболее значимым, недостатком голограмм, получаемых по осевой схеме Габора.

13.2. Голограммы Лейта и Упатниекса

В 1962 г. американские ученые-физики Мичиганского университета Эммет Лейт и Юрис Упатниекс получили первые пропускающие голограммы объемных объектов, выполненные с помощью лазера. Схема, предложенная ими, показана на рис. 13.4. Полученные таким способом голограммы называются *внеосевыми*.

Внеосевые голограммы характеризуются значительно более высокими, по сравнению с осевыми, требованиями к разрешающей способности регистрирующих сред и степени когерентности излучения, используемого для формирования голографического поля.

Голография крайне требовательна к разрешающей способности фотоматериалов. Расстояние между двумя максимумами интерференционной картины того же порядка, что и длина волны лазера, а последняя чаще всего составляет 632,8 нм для гелий-неонового лазера, 532 нм для неодимового лазера на второй гармонике, 514 нм и 488 нм для гелий-аргонового лазера. Таким образом, это величина порядка 0,0005 мм. Чтобы получить чёткое

изображение картины интерференции, потребовались регистрирующие среды с разрешающей способностью до 6000 линий на миллиметр (при записи по схеме на встречных пучках с углом схождения лучей 180°).

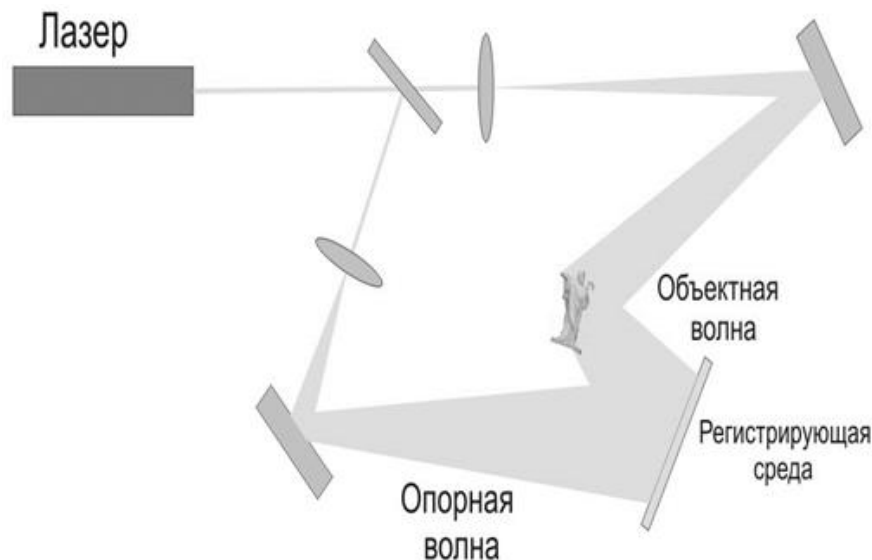


Рис. 13.4. Схема записи голограмм по методу Э. Лейта и Ю. Упатниекса

Регистрирующие голографические среды – это светочувствительные материалы, в которых записываемое интерференционное поле инициирует возникновение соответственной ему пространственной модуляции по крайней мере одного из параметров: коэффициента поглощения a , показателя преломления n или толщины материала d .

Регистрирующие среды подразделяются на плоские (двумерные) и объемные (трехмерные или толстые). Для классификации используется параметр, который иногда в литературе называют **критерий Клейна**:

$$Q = \frac{2\pi\lambda d}{n\Lambda^2},$$

где λ – длина волны; d – толщина слоя; n – средний коэффициент преломления слоя; Λ – расстояние между интерференционными плоскостями.

Объемными (толстыми) голограммами считаются такие, у которых $Q > 10$. И наоборот, голограмма считается **тонкой (плоской)**, когда $Q < 1$.

Как видно из рис. 13.4, пучок когерентного излучения лазера направляется на полупрозрачное зеркало, с помощью которого получают два пучка – предметный и опорный. Опорный пучок волны направляют непосредственно на фотопластинку. Предметный пучок освещает объект, голограмму которого регистрируют. Отраженный от объекта световой пучок – объектный – попадает на фотопластинку. В плоскости пластинки два пучка – объектный и опорный – образуют сложную интерференционную картину, которая вследствие когерентности двух пучков света остается неизменной во времени и представляет собой изображение стоячей волны. Остается только зарегистрировать

ее обычным фотографическим путем. Полученные таким образом голограммы и называются **внеосевыми** голограммами. Внеосевое расположение регистрирующей среды, хотя и требует использования лазерных источников излучения для формирования голографического поля, позволяет пространственно разделить порядки дифракции голограммы и тем самым избежать переналожения изображений.

Схема Лейта и Упатниекса позволяет в зависимости от толщины регистрирующей среды и ширины спектра пространственных частот регистрировать как тонкие, так и объемные голограммы. Если толщина регистрирующей среды мала по сравнению с расстоянием между поверхностями максимумов интенсивности регистрируемого голографического поля, то голограмма, полученная в этом положении, действует как двумерная дифракционная решетка. При этом голограмма по сути представляет собой систему полос на поверхности регистрирующей среды. То же самое справедливо и для габоровских осевых голограмм. Голограммы, получаемые на относительно толстых, по сравнению с периодом следования, регистрирующих средах представляют собой объемную дифракционную решетку, состоящую из последовательности частично отражающих поверхностей. Такая решетка, как известно, обладает селективным, т. е. зависящим от угла падения и длины волны восстанавливающей волны, откликом, описываемым законом Брэгга. Голограммы, обладающие такими свойствами, называют **объемными** или **брэгговскими**.

Условие Вульфа–Брэгга определяет направление максимумов дифракции упруго рассеянного на кристалле рентгеновского излучения (рис. 13.5). Выведено в 1913 г. независимо У. Л. Брэггом и Г. В. Вульфом. Имеет вид

$$2d\sin\theta = n\lambda ,$$

где d – межплоскостное расстояние; θ – дифракционный угол (брэгговский), n – порядок дифракционного максимума, λ – длина волны.

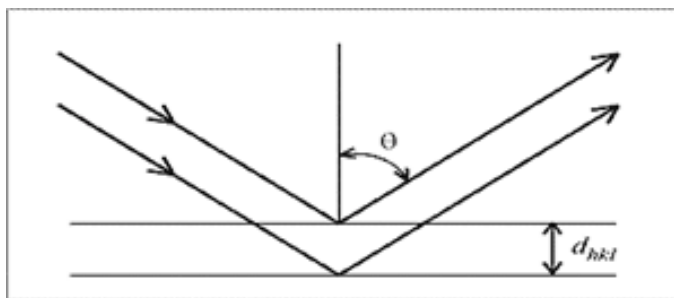


Рис. 13.5. Иллюстрация условия Вульфа–Брэгга

Это условие определяет пики интенсивности дифракционной картины. При $n = 1$ мы наблюдаем пик взаимного усиления волн дифракции, удаленных друг от друга на одну длину волны, при $n = 2$ – второй пик дифракции (разность хода составляет две длины волны) и т. д.

В результате интерференции волн, распространяющихся в толстослойной эмульсии, образуются плоскости, засвеченные светом большей интенсивности. После проявления голограммы на засвеченных плоскостях образуются слои почернения. На их основе создаются так называемые брэгговские плоскости, которые обладают свойством частично отражать свет. Другими словами, создается трехмерная интерференционная картина (рис. 13.6).

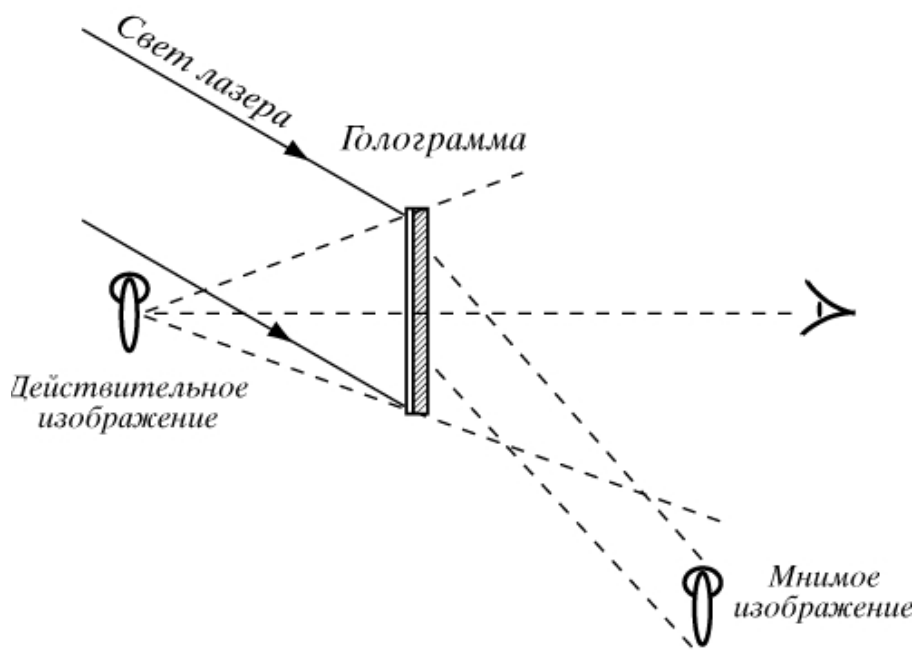


Рис. 13.6. Схема воспроизведения пропускающей голограммы, полученной методом Э. Лейта и Ю. Упатниекса

Такая толстослойная голограмма обеспечивает эффективное восстановление объектной волны при условии, что угол падения опорного пучка при записи и восстановлении останется неизменным. Не допускается также изменение длины волны света при восстановлении. Избирательность объемной пропускающей голограммы позволяет записать на пластинке до нескольких десятков изображений, изменяя угол падения опорного пучка соответственно при записи и восстановлении.

Схема записи пропускающих объемных голограмм аналогична схеме Лейта–Упатниекса для двумерных голограмм. При восстановлении **объемной** голограммы, в отличие от плоских пропускающих голограмм, образуется только одно изображение вследствие отражения от голограммы восстанавливающего пучка только в одном направлении, определяемом углом Брэгга θ .

13.3. Голограммы Денисюка

В 1962 г. русский физик Юрий Николаевич Денисюк предложил весьма перспективный метод голографии с записью в трехмерной среде (рис. 13.7). В этой схеме луч лазера 1 (опорная волна) расширяется линзой 2 и направляется

зеркалом на фотопластинку 3. Часть луча, прошедшая через нее, освещает объект 4. Отраженный от объекта свет формирует объектную волну 5. Как видно, объектная 5 и опорная 6 волны падают на пластинку с разных сторон (так называемая схема на встречных пучках).

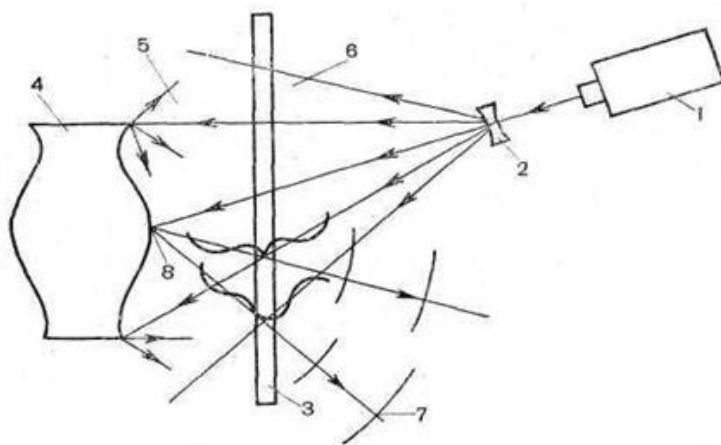


Рис. 13.7. Схема получения отражательных голограмм, предложенная Ю. Н. Денисюком:
 1 – лазер; 2 – рассеивающая линза; 3 – прозрачная голографическая фотопластинка; 4 – объект; 5 – объектный пучок;
 6 – опорный пучок; 7 – элементарные объектные волны;
 8 – элемент поверхности объекта

При просвечивании голограммы в отраженном свете восстанавливается изображение объекта. Важное для практического применения свойство голограмм Денисюка заключается в возможности восстановления голограммы с помощью расходящегося пучка белого света. Это объясняется тем, что при освещении голограммы условия дифракции выполняются только для тех длин волн и тех направлений распространения света, которые удовлетворяют условиям дифракции. Весь остальной свет проходит сквозь голограмму, не взаимодействуя с ней. Поэтому голограмма видна в том цвете, в котором она была записана.

Этот метод делает возможным получение также цветных голографических изображений. Для этого в фотопластинке нужно зарегистрировать три элементарных голограммы при длинах волн синего, зеленого и красного света. При восстановлении голограммы белым светом каждая из элементарных голограмм формирует свое изображение в соответствующем цвете. Эти три изображения образуют полноцветную картину, подобно тому, как это происходит на экране цветного телевизора. Таково упрощенное описание этого метода.

Для записи голограмм по методу Денисюка используют стеклянные фотопластины, политые слоем желатина, в котором распределены микрокристаллы галогенидов серебра. Эти фотопластинки должны обладать полной прозрачностью до проявления. Толщина желатинового слоя порядка 10 мкм достаточна, чтобы регистрировать объемную интерференционную картину, поскольку эта величина много больше, чем длина волны света, порядка 0,5 мкм.

Схема Денисюка отличается предельной простотой и в случае применения полупроводникового лазера (имеющего крайне малые размеры и дающего расходящийся пучок без применения линз) сводится к одному лишь лазеру и некоторой основе, на которой закрепляются лазер, пластинка и объект. Именно такие схемы применяются при записи любительских голограмм.

Практические аспекты применения голограмм Денисюка состоят в следующем. Наиболее широкое распространение получили голограммы, изображающие предметы искусства. Отсюда, кстати, пошло общеупотребительное наименование голограмм этого типа – «изобразительные». Существуют целые галереи изобразительных голограмм редких золотых украшений и прочих раритетов из коллекций различных музеев. Более того, когда лет двадцать назад появились сравнительно недорогие импульсные лазеры, появилась возможность съемки голографических портретов. Существуют коммерческие студии, которые осуществляют запись портретов людей и животных, но из-за достаточно высокой стоимости процесса и материалов этот бизнес эксклюзивен и не имеет широкого распространения. Дополнительные трудности, обусловленные необходимостью снабдить каждую голограмму источником света, капризность желатиновых фотоматериалов к условиям хранения (они очень чувствительны к влажности) и неудобство обращения с хрупким стеклянным носителем наряду с дороговизной процесса и материалов существенно ограничивают область применимости таких проектов.

Около десяти лет назад корпорацией «Дюпон» был разработан фотополимер, который, подобно галогенид-серебряной желатиновой эмульсии, способен регистрировать голографические изображения при использовании данной методики записи. Это событие позволило реализовать массу проектов, связанных с производством сувенирной продукции, поскольку разрешило проблему прочности и безопасности продукта. Теперь стало возможным изготовление изобразительных голограмм в паспорту, а также в виде открыток и даже самоклеящихся этикеток. Самоклеящиеся голограммы этого типа нашли применение, и для защиты от подделок. Наиболее крупный проект реализован в России для маркировки голограммами из фотополимера контрольно-кассовых машин. Для большего распространения этой технологии в сфере защиты от подделки существуют препятствия, связанные как с низкой производительностью изготовления таких голограмм, дороговизной монопольного материала, так и с конкуренцией со стороны голографической продукции, изготовленной другими методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крауфорд, Ф. Волны / Ф. Крауфорд ; пер. с англ. под ред. А. И. Шальникова и А. О. Вайсенберга. – 2-е изд., испр. ; главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». – М., 1976.
2. Бишоп, Р. Колебания ; пер. с англ. / Р. Бишоп. – М. : Наука, 1968.
3. Горелик, Г. С. Колебания и волны / Г. С. Горелик. – М. : Физматгиз, 1959.
4. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М. : Мир, 1967. – Вып. 3. Излучение. Волны. Кванты.
5. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М. : Мир, 1967. – Вып. 4. Кинетика. Теплота. Звук.
6. Дитчберн, Р. Физическая оптика ; пер. с англ. / Р. Дитчберн. – М. : Наука, 1965.
7. Кабисов, К. С. Колебания и волновые процессы: Теория. Задачи с решениями / К. С. Кабисов, Т. Ф. Камалов, В. А. Лурье. – Изд. 3-е. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014.
8. Иродов, И. Е. Волновые процессы / И. Е. Иродов. – М. ; СПб. : Физматлит, 2001.
9. Ландсберг, Г. С. Оптика / Г. С. Ландсберг. – М. : Гостехиздат, 1940.
10. Поль, Р. В. Оптика / Р. В. Поль. – М. : Наука, 1966.
11. Жевандров, Н. Д. Поляризация света / Н. Д. Жевандров. – М. : Наука, 1969.
12. Островский, Ю. И. Голография и ее применение / Ю. И. Островский. – М. : Наука, 1976 .

Никамин Виктор Александрович

**ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ
В МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕДАХ**

Учебное пособие

Редактор *Е. Ю. Пономарева*

План издания 2018 г., п. 2

Подписано к печати 20.07.2018
Объем 7,0 усл.-печ. л. Тираж 26 экз. Заказ 835

Редакционно-издательский отдел СПбГУТ
193232 СПб., пр. Большевиков, 22

Отпечатано в СПбГУТ