

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М.А.Бонч-Бруевича**

Кафедра РПВЭС и ЭА

В.А. Никамин

**СТАНДАРТЫ И СИСТЕМЫ ЦИФРОВОЙ
ЗВУКОЗАПИСИ**

**Методические указания
к выполнению практических работ**

специальность 210400 («Аудиовизуальная техника»)

Санкт-Петербург
2014

УДК 004.085 (077)
ББК 3871я7
Н62

Рецензент
профессор, кандидат технических наук
А.А. Фадеев

*Рекомендовано к печати
редакционно-издательским советом университета*

Никамин, В.А.
Н62 Стандарты и системы цифровой звукозаписи: методические указания к выполнению практических работ/ В.А. Никамин, ГОУВПО СПбГУТ. – СПб, 2014.

Изложены методические указания к выполнению практических работ по дисциплине «Стандарты и системы цифровой звукозаписи». Для каждой работы приводятся описания элементов теории, необходимых для осмысленного ее выполнения, примеры выполнения задания, а также список литературы.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 210400 «Аудиовизуальная техника».

**УДК 004.085 (077)
ББК 3871я7**

© В.А. Никамин, 2014
© Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича», 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

Выполнение практических работ, представленных в сборнике, закрепляет знания, полученные в ходе изучения дисциплины «Стандарты и системы цифровой звукозаписи», и способствует более полному усвоению изложенного в нем материала.

Целью работы 1 является освоение процедуры помехоустойчивого кодирования информации, где студенты получают навыки определения основных характеристик кодов, заданных порождающим многочленом: избыточности, скорости, минимального кодового расстояния, обнаруживающей и исправляющей способности. Кроме того, определяют порождающую и проверочную матрицы и разрабатывают схемы реализации кодера и декодера. Наконец, рассчитывают вероятность появления неоткорректированного символа на выходе декодера и сравнивают ее с вероятностью появления искажений в канале записи. Тем самым они могут наглядно оценить значимость и эффективность помехоустойчивого кодирования как инструмента существенного повышения качества воспроизведенного с носителя сигнала.

Целью работы 2 является освоение процедуры канального кодирования информации, предназначенной для записи на носитель. Студенты проводят спектральный анализ кодированных канальными кодами последовательностей с помощью дискретного преобразования Фурье и получают навыки оценки их характеристик с точки зрения самосинхронизируемости и уровня постоянной составляющей в спектре сигнала, а также определяют занимаемую им полосу частот и коэффициент повышения плотности записи. Выполнение данной работы помогает студентам наглядно оценить значимость и эффективность канального кодирования, как инструмента повышения объема данных, которые можно записать на носитель, и обеспечения требуемых характеристик воспроизведенного с носителя сигнала.

Работа 3 посвящена освоению процедур кодирования кодами Рида-Соломона, которые наиболее часто встречаются в современных системах связи и системах записи информации на носитель. Студенты разрабатывают схемы кодирования кодами Рида-Соломона и рассчитывают их элементы.

В работе 4 студенты приобретают навыки системного анализа задачи проектирования тракта преобразования звукового сигнала в целях записи его на магнитный или оптический носитель. Исходя из характеристик цифрового звукового сигнала на входе системы кодирования (разрядность квантования, частота дискретизации, число каналов), характера искажений в канале записи/воспроизведения (вероятность появления искаженного символа и максимальная длина пакетов

ошибок) и характеристик заданного кода коррекции ошибок (код Рида–Соломона), производится выбор длины перемежения, необходимой для декорреляции существующих в канале пакетов ошибок, размера и структуры блока коррекции ошибок, канального кода, согласующегося с размерностью элементов поля Галуа, из которого берутся элементы кода Рида–Соломона. Также определяется порождающий многочлен кода Рида–Соломона, его порождающая матрица и находятся все элементы заданного поля Галуа. Производится выбор подходящей конфигурации блочной синхрогруппы и рассчитывается ее длина. Выполняется расчет скорости потока звуковых данных (данных пользователя), общей скорости потока данных и скорости потока данных на выходе системы кодирования (канальных битов). Кроме того, рассчитывается вероятность ошибки декодирования для случая, когда декодер Рида–Соломона исправляет максимально возможное число ошибок в кодовом слове и среднее число неисправленных ошибок в единицу времени (секунду, минуту, час). Определяется коэффициент повышения плотности записи, полученный за счет использования выбранного канального кода. В заключение разрабатывается полная структурная схема системы кодирования звукового сигнала.

Выполнение представленных работ должно помочь студенту овладеть логикой рассуждений, имеющих целью решение поставленной задачи, а не запоминание последовательности вывода и преобразования формул. Не требуется запоминать формулы, которые не запоминаются естественным образом сами собой в силу отображения выражаемых ими физических процессов. Все необходимые формулы, как правило, можно найти в справочной литературе. Важно попытаться понять логику самих физических процессов и овладеть умением самостоятельно творчески мыслить.

Практическая работа 1Ц3

Исследование влияния кодов корректирующих ошибки на вероятность появления искаженного символа в воспроизведенном сигнале

Цель работы

- освоение процедур помехоустойчивого кодирования информации и методов его реализации;
- расчет вероятности появления искаженного символа в воспроизведенном сигнале после выполнения процедуры коррекции ошибок и сравнение ее с исходной вероятностью появления ошибки в канале записи/воспроизведения.

Исходные данные:

- вероятность p ошибки в канале записи/воспроизведения;
- код, используемый для защиты от ошибок, заданный:
- - параметрами n и k и порождающим многочленом $g(x)$ – если код циклический;
- - только порождающим многочленом $g(x)$ – если это код Хэмминга.

Требуется:

1. *Определить характеристики кода:*
 - скорость кода R ;
 - избыточность кода $R_{изб}$;
 - минимальное кодовое расстояние d_{min} ;
 - количество ошибок t_n , которое данный код может гарантированно исправить;
 - количество ошибок t_o , которое данный код может гарантированно обнаружить.
2. *Найти проверочную матрицу H кода.*
3. *Найти порождающую матрицу G кода.*
4. *Найти матрицы синдромов S для случаев однократной ошибки в кодовом слове.*
5. *Разработать схемы:*
 - кодера;
 - декодера, исправляющего только одну ошибку.
6. *Рассчитать вероятность отказа от декодирования $P_{отк}$ (появление неисправленной ошибки) для случая, когда декодер исправляет t_n ошибок в кодовом слове.*

Варианты заданий:

Вариант	n	k	$g(x)$	p	Код
1	-	-	$g(x) = x^4 + x + 1$	10^{-5}	Хэмминга
2	-	-	$g(x) = x^4 + x^3 + 1$	10^{-4}	Хэмминга
3	7	3	$g(x) = x^4 + x^3 + 1$	10^{-6}	Циклический
4	-	-	$g(x) = x^3 + x^2 + 1$	10^{-5}	Хэмминга
5	15	10	$g(x) = x^5 + x^2 + 1$	10^{-6}	Циклический
6	15	10	$g(x) = x^5 + x^2 + 1$	10^{-4}	Циклический
7	15	9	$g(x) = x^6 + x + 1$	10^{-5}	Циклический
8	15	9	$g(x) = x^6 + x + 1$	10^{-4}	Циклический
9	15	11	$g(x) = x^4 + x + 1$	10^{-6}	Циклический
10	15	11	$g(x) = x^4 + x^3 + 1$	10^{-5}	Циклический
11	15	9	$g(x) = x^6 + x + 1$	10^{-4}	Циклический
12	7	4	$g(x) = x^3 + x^2 + 1$	10^{-6}	Циклический
13	7	3	$g(x) = x^4 + x + 1$	10^{-5}	Циклический
14	10	6	$g(x) = x^4 + x + 1$	10^{-4}	Циклический
15	12	8	$g(x) = x^4 + x^3 + 1$	10^{-5}	Циклический
16	14	8	$g(x) = x^6 + x + 1$	10^{-4}	Циклический
17	8	4	$g(x) = x^4 + x + 1$	10^{-5}	Циклический
18	13	8	$g(x) = x^5 + x^2 + 1$	10^{-4}	Циклический
19	10	4	$g(x) = x^6 + x + 1$	10^{-4}	Циклический
20	14	9	$g(x) = x^5 + x^2 + 1$	10^{-5}	Циклический
21	12	6	$g(x) = x^6 + x + 1$	10^{-4}	Циклический
22	18	12	$g(x) = x^6 + x + 1$	10^{-6}	Циклический
23	10	5	$g(x) = x^5 + x^2 + 1$	10^{-4}	Циклический
24	12	7	$g(x) = x^5 + x^2 + 1$	10^{-5}	Циклический
25	16	10	$g(x) = x^6 + x + 1$	10^{-4}	Циклический

1. Элементы теории помехоустойчивого кодирования, используемые в работе

Коды, используемые в данной работе, относятся к классу линейных блочных систематических кодов, построенных над полем $GF(2)$, т.е. являются двоичными кодами.

Существует два основных класса кодов: блочные и древовидные. **Блочный код** характеризуется тем, что последовательности из k входных информационных символов отображаются в последовательности из n выходных символов, т.е. каждый блок из n символов зависит только от соответствующего блока из k символов и не зависит ни от каких других блоков.

Древовидный код отображает бесконечную последовательность информационных символов, поступающих со скоростью k_0 символов за один интервал времени, в непрерывную последовательность символов кодового слова со скоростью n_0 символов за один интервал времени, т.е. каждый набор из n выходных символов зависит как от текущего входного набора символов, так и от некоторого числа предыдущих входных символов [1].

Линейный код – это множество последовательностей длины n над полем $GF(q)$, называемых кодовыми словами, такое, что сумма двух кодовых слов является кодовым словом, и произведение любого кодового слова на элемент поля также является кодовым словом [2].

Систематическим кодом называется код, у которого в процессе кодирования информационные символы не изменяют своего значения и после завершения процедуры кодирования располагаются на первых позициях в кодовом слове. Вычисленные в процессе кодирования символы называются **проверочными символами** [3]. Проверочные символы располагаются на последних позициях в кодовом слове.

Если в процессе кодирования информационные символы не сохраняют своих значений и в полученном кодовом слове невозможно выделить ни информационные, ни проверочные символы, то такие коды называются **несистематическими кодами**.

Число информационных символов в кодовом слове систематического кода обозначается буквой k , число проверочных – буквой r , а общее число символов в кодовом слове – буквой n . Обозначается систематический код следующим образом – $[n, k]$. Например, запись $[7, 4]$ указывает на то, что общее число символов в кодовом слове равно 7, из них 4 – информационные, а $7 - 4 = 3$ – проверочные.

Скорость блочного кода определяется равенством $R = k/n$.

Избыточность блочного кода определяется равенством $R_{изб} = r/n$.

Расстоянием по Хэммингу между двумя q -ичными последовательностями x и y длины n (в том числе кодовыми словами длины n) называется число позиций, в которых они различаются. Это расстояние обозначается через $d(x, y)$.

Например, расстояние между последовательностями $x = 0\underline{1}00\underline{1}011$ и $y = 00\underline{1}00\underline{1}11$ равно четырем (подчеркнутые позиции), т. е. $d(01001011, 00100111) = 4$.

Минимальное расстояние по Хэммингу между двумя кодовыми словами называется **минимальным кодовым расстоянием** данного кода.

Теорема о минимальном кодовом расстоянии (без доказательства). Минимальное расстояние любого линейного $[n, k]$ -кода удовлетворяет неравенству

$$d_{\min} \leq 1 + n - k.$$

Минимальное кодовое расстояние (**граница Синглтона**) характеризует обнаруживающую и исправляющую способность кода [2].

Если t_o – число ошибок, которые код может обнаружить, а t_u – число ошибок, которое код может исправить, то

$$t_o = d_{\min} - 1$$

$$t_u = \frac{d_{\min} - 1}{2} \text{ - для нечетных значений } d_{\min}, \text{ и } t_u = \frac{d_{\min} - 2}{2} \text{ - для четных значений } d_{\min}.$$

Код называется **циклическим**, если он линеен и любой циклический сдвиг кодового слова также является кодовым словом. Например, если $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ принадлежит коду C , то и $(c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-2})$ и $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_0)$ также принадлежат коду C .

Кодами Хэмминга называются коды, у которых

$$n = 2^r - 1, \text{ а } k = 2^r - 1 - r.$$

Кодирование блоковых кодов состоит в том, что каждому из k -символьных информационных слов ставится в соответствие n -символьное кодовое слово, причем у систематических кодов первые k символов являются исходными **информационными символами**. Дополнительные $r = n - k$ символов называются **проверочными** и определяются по k информационным, исходя из определенных правил. У двоичных кодов для этого чаще всего используется проверка на четность, т.е. результат сложения некоторых информационных символов и одного из проверочных по модулю 2, с таким расчетом, чтобы полученная сумма была равна 0. Число таких проверок, разумеется, равно числу проверочных символов r .

Например, для того чтобы кодировать 3-символьные информационные слова в 6-символьные кодовые (код $[6, 3]$), необходимо задать 3

проверки на четность, определяющие значения трех проверочных символов. Это можно сделать следующим образом:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = b_1 \\ a_2 + a_3 = b_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.1)$$

где a_1, a_2, a_3 – информационные символы, а b_1, b_2, b_3 – проверочные символы. То же самое можно записать в другом виде:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + b_1 = 0 \\ a_2 + a_3 + b_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + b_3 = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Однако вместо того чтобы явно выписывать уравнения для проверок на четность, часто более удобным оказывается использовать матричные обозначения. Матрица, содержащая ту же информацию, что и система уравнений для проверок на четность, называется *проверочной матрицей H* .

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Каждый столбец матрицы H соответствует некоторому символу кодового слова: первые три столбца – информационным символам, а последние три – проверочным. Соотношение, выражаемое первой строкой, состоит в том, что четвертый символ является суммой a_1 и a_2 . Аналогично вторая строка указывает, что пятый символ является суммой a_2 и a_3 и т.д. Такая форма записи матрицы H называется *канонической* [4]. Это значит, что первые k столбцов задают информационные символы, которые входят во все уравнения, в то время как последние $n - k$ столбцов образуют единичную матрицу I_{n-k} .

$$H = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [A|I_{n-k}]$$

Таким образом, если некоторый набор символов a длины n является кодовым словом, то должно выполняться равенство:

$$H \cdot a^T = 0 \quad (1.3)$$

где a^T – матрица-столбец, составленная из символов, входящих в набор a . Это равенство называется *условием ортогональности*. Если условие ортогональности (1.3) выполняется, то принятое кодовое сло-

во не содержит ошибок. Если не выполняется, то в принятом кодовом слове есть ошибки.

Используя проверочную матрицу, легко построить *кодер* заданного ею кода (рис. 1.1). Для этого на входы сумматоров по модулю 2, формирующих значения проверочных символов b_1 , b_2 и b_3 , из соответствующих им строк матрицы H подаются те значения a_1 , a_2 и a_3 , которым соответствуют «единицы».

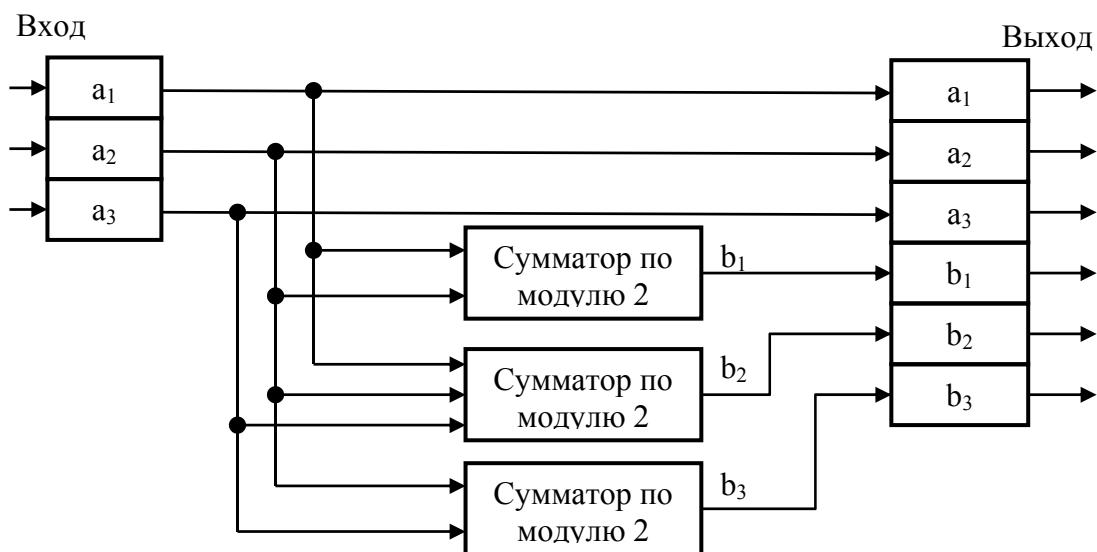


Рис. 1.1. Кодер кода [6,3]

Для построения *декодера* можно использовать систему уравнений (1.2), эквивалентом которой является матрица H (рис. 1.2). Символы каждой строки подаются на вход одного из трех сумматоров по модулю 2. Если в принятом кодовом слове ошибок нет, то все три уравнения системы выполняются, и на выходах всех трех сумматоров будут «нули». Если в одном из символов есть ошибка, то те уравнения, где есть этот символ, выполняться не будут. На выходах сумматоров получится некоторый набор «единиц» и «нулей», которые называются *синдромами* S . Для каждого из символов кодового слова этот набор будет своим, поэтому с помощью логической схемы можно сформировать «1» на том ее выходе, который соответствует ошибочному символу, и исправить его путем простого инвертирования.

Следует отметить, что ошибке в первом символе будет соответствовать набор синдромов, эквивалентный ее первому столбцу, ошибке во втором символе – второму столбцу и ошибке в третьем символе – третьему столбцу.

Код можно задать и другим способом, который также является компактным выражением метода кодирования. Для этого использует-

ся матрица G , которая называется *порождающей матрицей* кода. Порождающей она называется потому, что если информационное слово i длины k умножить на матрицу G , то должно получиться кодовое слово a длины n , т.е. $a = iG$.

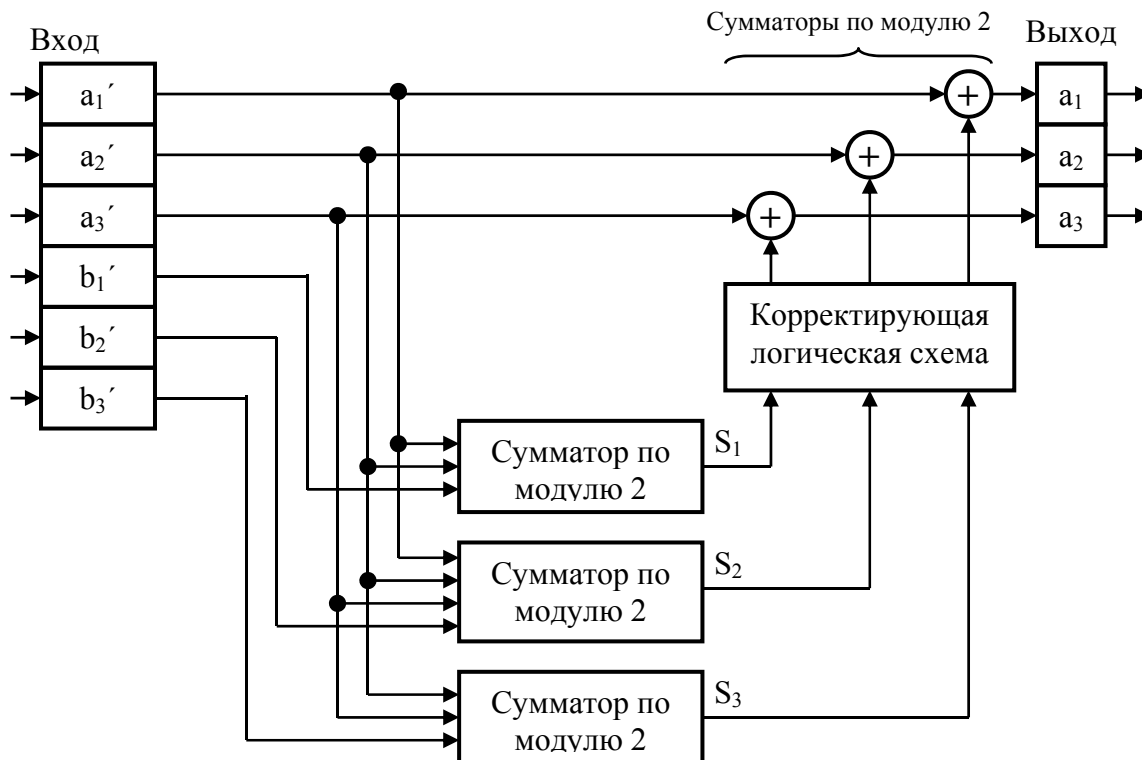


Рис.1.2. Декодер кода [6,3]

Чтобы понять, как должна выглядеть порождающая матрица, вспомним, что сумма по модулю 2 двух любых кодовых слов также является кодовым словом. Несколько раз используя это свойство, получаем, что любая линейная комбинация кодовых слов (при сложении по модулю 2) также является кодовым словом. Поскольку информационные символы выбираются независимо, можно надеяться, что существуют кодовые слова, каждое из которых содержит ровно один символ «1» в информационной части кодового слова. Тогда все 2^k кодовых слов можно будет получить как 2^k возможных линейных комбинаций этих k кодовых слов или *базисных векторов* (если код рассматривать как линейное векторное пространство, что и в самом деле является справедливым).

Попробуем найти три различных кодовых слова кода [6,3], упомянутого выше, каждое из которых содержит единственный символ «1» на первых трех позициях. Предположим, что первое из этих кодовых слов имеет вид $1\ 0\ 0\ b_{11}\ b_{12}\ b_{13}$. Умножая кодовый вектор на каж-

дую из строк матрицы \mathbf{H} , находим, что b_{11} , b_{12} , b_{13} должны быть элементами ее первого столбца, т.е. набором 101. Аналогично, полагая, что второе кодовое слово имеет вид 0 1 0 b_{21} b_{22} b_{23} , получаем, что элементы b_{21} b_{22} b_{23} совпадают с элементами второго столбца матрицы \mathbf{H} , т.е. набором 111 и т.д. Таким образом, проверочные символы каждого из трех кодовых слов с единственным символом «1» на первых трех позициях совпадают с одним из первых трех столбцов проверочной матрицы \mathbf{H} . Если сформировать из этих трех кодовых слов матрицу, то эта матрица и будет порождающей матрицей \mathbf{G} кода [6,3].

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Любое кодовое слово кода [6,3] может быть получено как линейная комбинация строк этой матрицы. В *канонической форме* матрица \mathbf{G} всегда состоит из единичной матрицы размерности $k \times k$, к которой присоединена $k \times (n-k)$ -матрица проверочных символов.

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [\mathbf{I}_k | \mathbf{B}]$$

Проверочная часть порождающей матрицы получается из матрицы \mathbf{H} (в канонической форме) транспонированием подматрицы, образованной первыми k столбцами.

Любое информационное слово \mathbf{i} кодируется в кодовое слово \mathbf{a} путем умножения на порождающую матрицу \mathbf{G} . Например, если $\mathbf{i} = 011$, то

$$\mathbf{a} = |011| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |0111100|$$

Следует отметить, что проверочная часть первой строки матрицы \mathbf{G} эквивалентна первому столбцу матрицы \mathbf{H} , проверочная часть второй строки – второму столбцу и проверочная часть третьей строки – третьему столбцу.

Циклические коды, в силу их алгебраической структуры, проще всего задавать с помощью *порождающего многочлена* $g(x) = g_r x^r + g_{r-1} x^{r-1} + \dots + g_1 x + g_0$ с коэффициентами из поля $\text{GF}(q)$. В случае двоичного поля коэффициентами $g(x)$ будут 0 и 1.

В качестве неприводимого многочлена может использоваться один из неприводимых многочленов степени $n-k = r$. Кодовые слова

циклического кода состоят из всевозможных произведений многочленов степени не выше $k-1$ (информационных слов длины k) на порождающий многочлен $g(x)$. Таким образом, любое кодовое слово циклического кода должно делиться на $g(x)$ без остатка. Если при делении принятого кодового слова на $g(x)$ получается остаток не равный 0, значит, в нем имеется ошибка. Остаток от деления может служить синдромом ошибки. Так же, как и в случае матричного задания кода, по характеру синдромов можно определить в каком именно символе произошла ошибка.

Кодирование циклических кодов реализуется с помощью регистров сдвига с обратными связями. Величина обратной связи соответствует коэффициенту при x в соответствующей степени. В случае двоичных кодов «1» соответствует наличию связи, а «0» - ее отсутствию. Например, для $g(x) = x^3 + x + 1$ будет выглядеть, как показано на рис. 1.3.

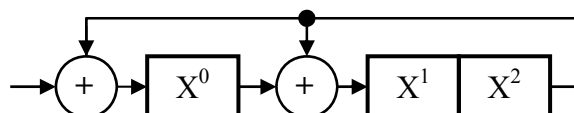


Рис. 1.3. Схема умножения на многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$.

С помощью такой схемы можно выполнять кодирование кода [7,4]. Однако кодовые слова, полученные с помощью такой схемы, будут несистематическими. Чтобы избавиться от этого неудобства, вместо умножения информационного многочлена на $g(x)$ используют предварительное умножение его на x^r и последующее деление на $g(x)$. Остаток суммируют с делимым. Для этого используют схему, как показано на рис. 1.4, где выполняется предварительное умножение на x^r , где $r = 3$. Код при этом получится тот же самый, но кодовые слова будут систематическими, т.е. на первых позициях будут располагаться информационные символы, а на последних – остаток от деления информационного многочлена на порождающий.

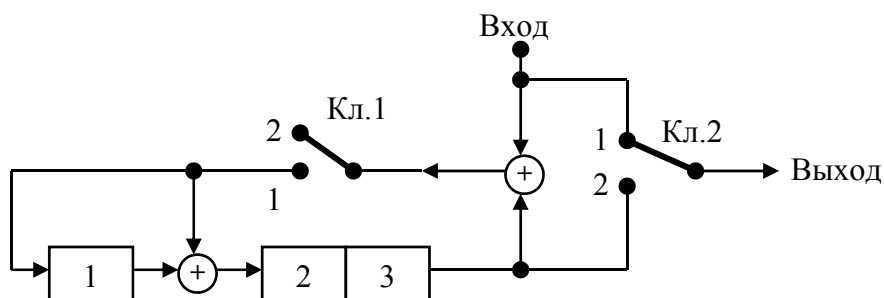


Рис. 1.4. Кодер циклического кода [7,4] с предварительным умножением на x^3 и последующим делением на $g(x) = x^3 + x + 1$.

Декодирование циклического кода состоит в делении кодового слова на порождающий многочлен $g(x)$ с помощью схемы, подобной показанной на рис. 1.3, и анализе полученного остатка. Если остаток равен 0, то ошибок нет, если не равен, то такой остаток рассматривается как синдром и по характеру синдрома определяется положение ошибки и производится ее коррекция, как и в случае матричного задания кода. Для того чтобы найти проверочную матрицу, используют связь многочленов, выражающих кодовые слова циклических кодов, с элементами конечных полей. Для некоторых n столбцы проверочных матриц циклических $[n, k]$ -кодов (например, кодов Хэмминга), являются элементами конечного поля $GF(2^{n-k})$ с тем же самым порождающим многочленом $g(x)$, т.е. проверочную матрицу кода $[7,4]$ можно записать как

$$H = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^6 \end{vmatrix}$$

где α – примитивный элемент поля $GF(2^3) = 010$.

Найти элементы поля $GF(2^3)$ можно, используя схему на рис. 1.3. Для этого нужно записать в крайнюю левую ячейку «1» (элемент $\alpha^0 = 1$ или 100) и сделать еще 6 сдвигов вправо. Каждый сдвиг будет соответствовать умножению на α , т.е. при этом степень α будет увеличиваться на единицу: после первого сдвига получим α^1 (010), после второго - α^2 (001), после третьего - α^3 (110), после четвертого - α^4 (011) и так далее до α^6 . Всего должно быть 7 сдвигов. В результате получим все 7 столбцов матрицы H .

Вероятность $P_{ош}$ отказа от декодирования декодера $[n,k]$ -кода можно найти по формуле:

$$P_{отк} = 1 - \sum_{i=0}^n \alpha_i p^i (1-p)^{n-i},$$

где p – вероятность ошибки в канале, а $\alpha_i = C_i^n$ - число картин ошибок кратности i в кодовом слове из n символов ($C_i^n = \frac{n!}{(n-i)!i!}$).

Внимание! При расчете вероятности $P_{отк}$ следует помнить, что величина эта очень маленькая, поэтому вычисления нужно производить с возможно большим числом значащих цифр после запятой – ничего не отбрасывая и не округляя. Верным признаком того, что количества значащих цифр после запятой недостаточно, служит факт получения отрицательного значения вероятности $P_{отк}$, чего в принципе быть не может.

2. Пример выполнения

Пусть задан код Хэмминга с порождающим многочленом $g(x) = x^3 + x + 1$. Вероятность ошибки в канале записи/воспроизведения $p = 10^{-5}$.

1. Коды Хемминга называются коды, длина которых $n = 2^r - 1$. Величина r (количество проверочных символов в кодовом слове) заданного кода равна степени порождающего многочлена $g(x)$, т.е. $r = 3$. Следовательно, длина кодового слова заданного кода $n = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$. Количество информационных символов в кодовом слове $k = n - r = 7 - 3 = 4$. Значит, заданный код является кодом Хэмминга [7,4].

Скорость кода $R = k/n = 4/7$.

Избыточность кода $R_{изб} = r/n = 3/7$.

Минимальное кодовое расстояние кода $d_{min} \leq n - k + 1 = 3 + 1 = 4$ (граница Синглтона).

Количество ошибок t_u , которое данный код может гарантированно исправить:

$$t_u = \frac{d-2}{2} = 1.$$

Количество ошибок t_o , которое данный код может гарантированно обнаружить

$$t_o = d - 1 = 3.$$

2. Проверочную матрицу H заданного кода можно отыскать двумя способами.

Первый способ – с помощью регистра сдвига с обратными связями, осуществляющего последовательное деление степеней x , отождествляемого примитивному элементу α поля $GF(2^3)$, начиная от x^0 до x^6 , на порождающий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$.

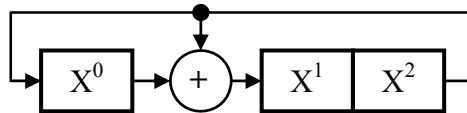
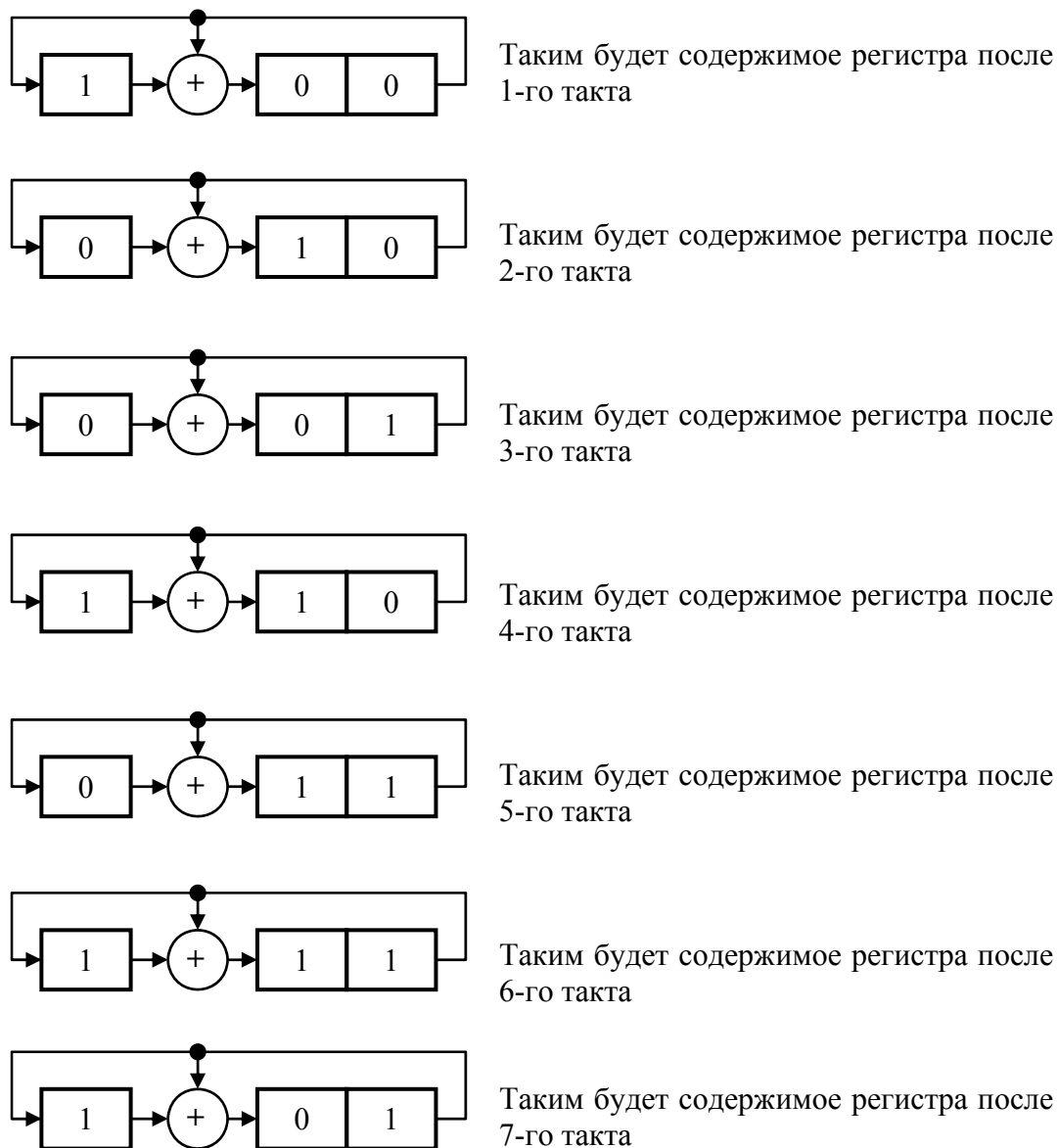


Рис. 2.1. Схема деления на многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$.

Проверочная матрица H должна содержать 7 столбцов (количество столбцов равно длине кодового слова n) и 3 строки (количество строк равно количеству проверочных символов r). Следовательно, для того, чтобы найти эти 7 столбцов, нужно выполнить 7 сдвигов вправо «единицы», которая записывается первым тактовым импульсом в крайнюю левую ячейку регистра, соответствующую x^0 .



Получим 7 троек двоичных символов, которые соответствуют 7 столбцам матрицы H . Для того чтобы записать матрицу H в канонической форме, тройки символов следует расположить следующим образом:

- 100 – 7-й столбец
- 010 – 6-й столбец
- 001 – 5-й столбец
- 110 – 4-й столбец
- 011 – 3-й столбец
- 111 – 2-й столбец
- 101 – 1-й столбец

В результате, матрица H будет иметь вид:

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Второй способ состоит в непосредственном делении x в соответствующей степени на многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$ и представлении остатка от деления в двоичной форме.

$$\begin{array}{l} x^0 \rightarrow 100 \\ x^1 \rightarrow 010 \\ x^2 \rightarrow 001 \\ x^3 = x + 1 \rightarrow 110 \end{array} \quad \begin{array}{l} + \frac{x^4}{x^2+x} \left| \frac{x^3+x+1}{x} \right. \\ \hline x^2+x \rightarrow 011 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \frac{x^5}{x^2+x+1} \left| \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \right. \\ \hline x^3+x^2 \\ + \frac{x^3+x+1}{x^2+x+1} \rightarrow 111 \end{array} \quad \begin{array}{l} + \frac{x^6}{x^2+x+1} \left| \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \right. \\ \hline x^4+x^3 \\ + \frac{x^4+x^2+x}{x^2+1} \\ \hline x^3+x^2+x \\ + \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \rightarrow 101 \end{array}$$

Получим те же самые 7 троек двоичных чисел, которые соответствуют тем же 7 столбцам матрицы H , что и при первом способе:

100 – 7-й столбец
 010 – 6-й столбец
 001 – 5-й столбец
 110 – 4-й столбец
 011 – 3-й столбец
 111 – 2-й столбец
 101 – 1-й столбец

3. Для того, чтобы найти порождающую матрицу G , запишем матрицу H в виде системы уравнений проверки на четность:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + b_1 = 0 \\ a_2 + a_3 + a_4 + b_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_4 + b_3 = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Последовательно приравнявая «единице» каждый из информационных символов a_1, a_2, a_3 и a_4 , найдем порождающую матрицу G :

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Для того чтобы найти матрицы синдромов, воспользуемся системой уравнений (2.1). Синдром – это результат проверки выполнения уравнения этой системы, т.е.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + b_1 = S_1 \\ a_2 + a_3 + a_4 + b_2 = S_2 \\ a_1 + a_2 + a_4 + b_3 = S_3 \end{cases} \quad (2.2)$$

Если в принятом кодовом слове ошибок нет, то все синдромы будут равны 0, и матрица синдромов S будет выглядеть так:

$$S = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Если ошибка произойдет в символе a_1 , то не будут выполняться 1-е и 3-е равенства этой системы, и матрица синдромов будет выглядеть как

$$S_{a1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Если ошибка произойдет в символе a_2 , то не будет выполняться ни одно равенство этой системы, и матрица синдромов будет выглядеть как

$$S_{a2} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Если ошибка произойдет в символе a_3 , то не будут выполняться 1-е и 2-е равенства этой системы, и матрица синдромов будет выглядеть как

$$S_{a3} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Если ошибка произойдет в символе a_4 , то не будут выполняться 2-е и 3-е равенства этой системы, и матрица синдромов будет выглядеть как

$$S_{a4} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Если ошибка произойдет в одном из проверочных символов b_1 , b_2 или b_3 , то не будет выполняться только одно из равенств системы (2.1) и в матрице синдромов будет только одна единица:

$$S_{b1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad S_{b2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad S_{b3} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

5. Схема кодера Хэмминга [7,4] будет выглядеть, как показано на рис. 2.2, где каждый из трех сумматоров по модулю 2 выполняет операцию соответствующую одному из трех уравнений системы (2.3), полученной из системы уравнений (2.1).

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = b_1 \\ a_2 + a_3 + a_4 = b_2 \\ a_1 + a_2 + a_4 = b_3 \end{cases} \quad (2.3)$$

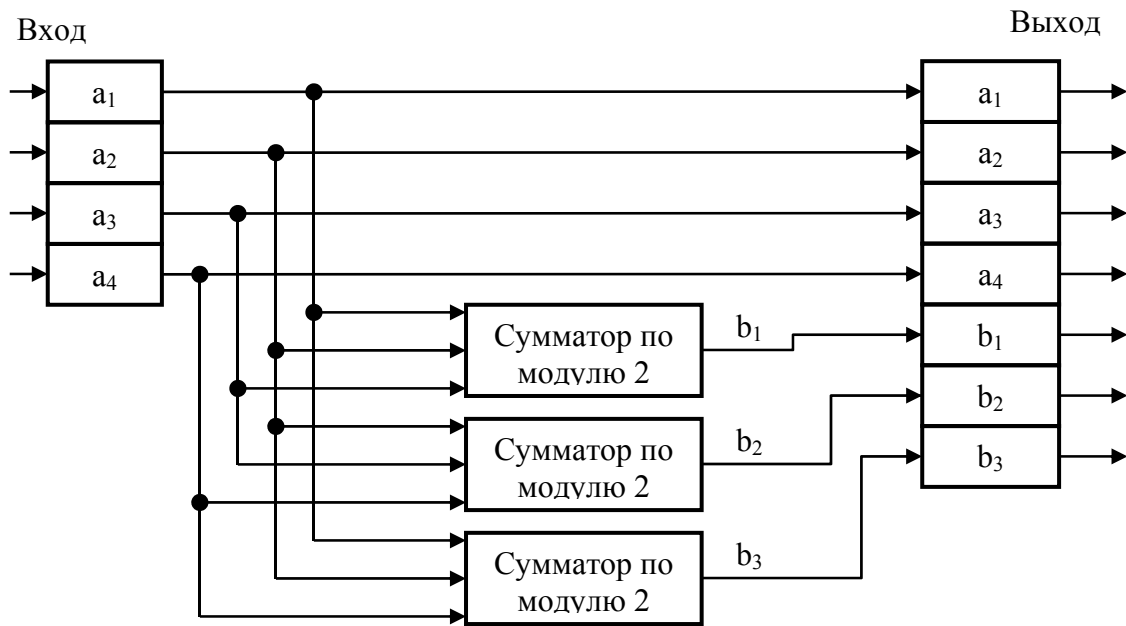


Рис. 2.2. Кодер Хэмминга [7,4]

Схема декодера Хэмминга [7,4] будет выглядеть, как показано на рис. 2.3, где каждый из трех сумматоров по модулю 2 выполняет операцию соответствующую одному из трех уравнений системы (2.2).

Корректирующая схема, показанная на рис. 2.4, содержит четыре трехвходовые схемы «И» (&), на входы которых подаются наборы синдромов, соответствующие матрицам синдромов S_{a1} , S_{a2} , S_{a3} и S_{a4} , и формирует «1» на том выходе, который соответствует символу, в котором зарегистрирована ошибка, и который требуется исправить путем простого инвертирования.

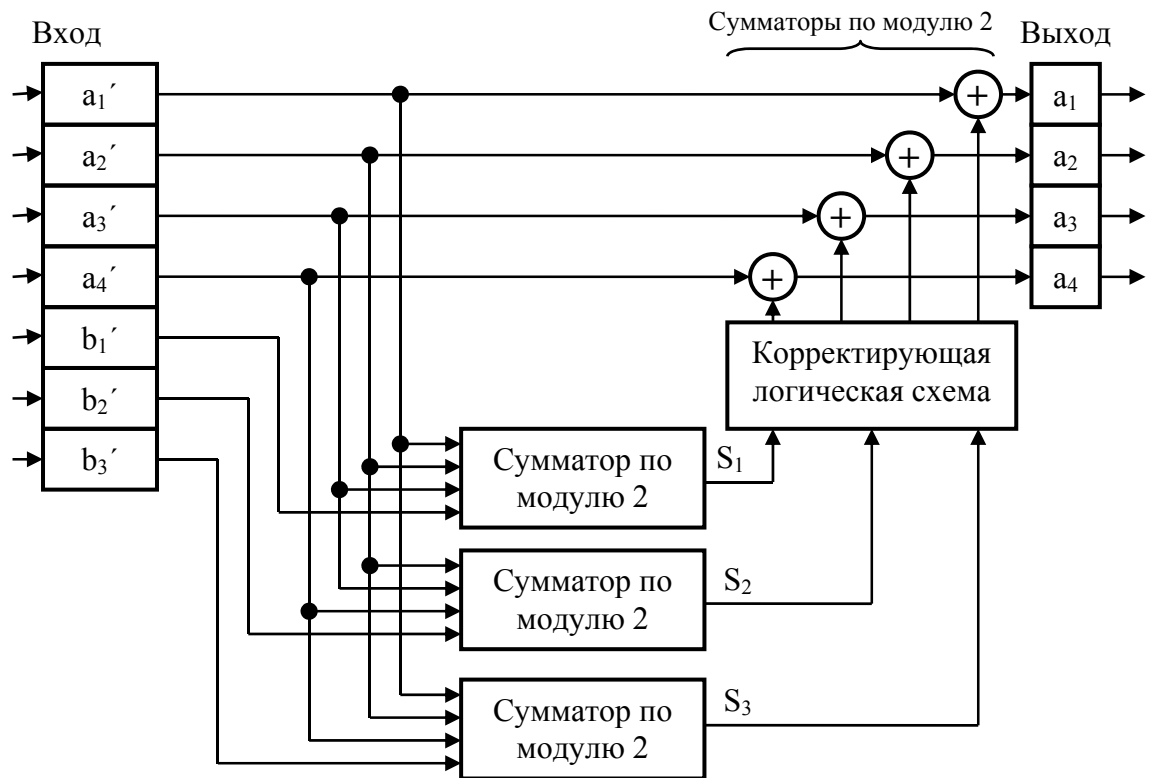


Рис.2.3. Декодер Хэмминга [7,4]

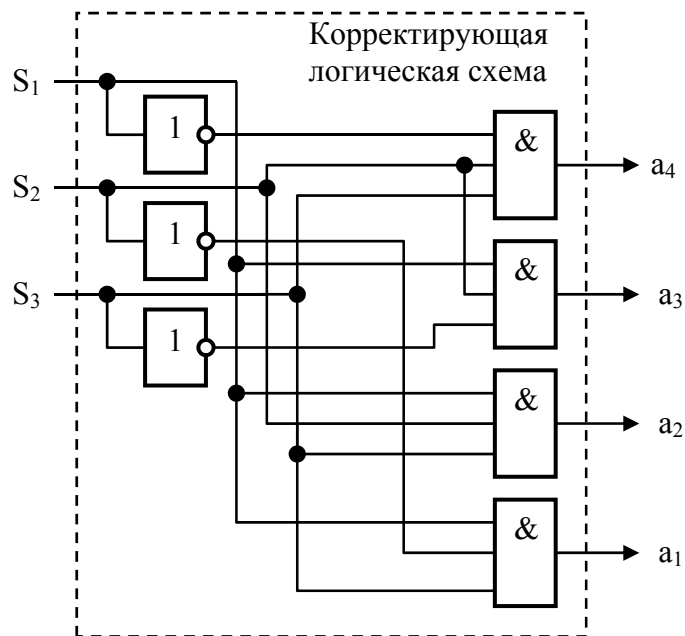


Рис. 2.4. Корректирующая логическая схема

Для того чтобы на схеме (рис. 2.4) избежать путаницы с соединениями, ее можно изображать как показано на рис. 2.5. Здесь жирной линией обозначен жгут из нескольких проводов. Место входа каждого

провода в жгут и выхода из него обозначаются одной и той же цифрой.

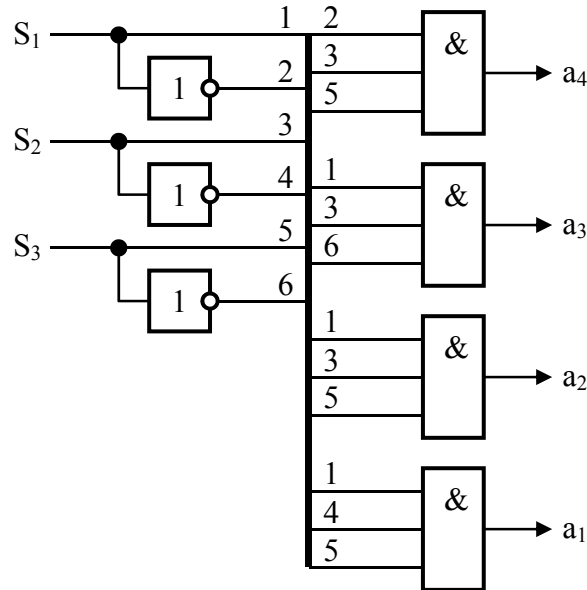


Рис. 2.5. Корректирующая логическая схема (вариант)

Если код $[7,4]$ рассматривать как циклический код, то схема для его кодирования будет выглядеть как показано на рис. 2.6. В отличие от кодера Хэмминга, который является параллельным (т.е. кодовые слова подаются на него в параллельном коде и кодируются за один такт), кодер циклического кода является последовательным, т.е. кодовые слова подаются на его вход в последовательном коде – побитно, и преобразование осуществляется за n тактов (в данном случае – за 7 тактов).

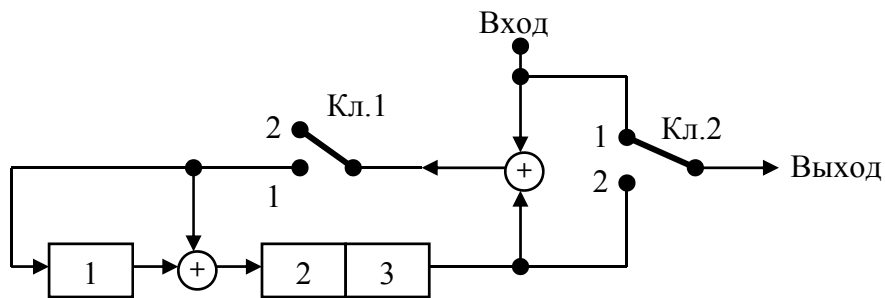


Рис. 2.6. Кодер циклического кода $[7,4]$.

В течение первых k тактов (в рассматриваемом случае $k = 4$) ключи Кл.1 и Кл.2 находятся в положении 1 и k информационных символов поступают со входа на выход кодера и одновременно на регистр сдвига с обратными связями, осуществляющий деление после-

довательности символов на порождающий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$. После того как информационные символы введены, ключи Кл.1 и Кл.2 переводятся в положение 2 и полученный в ячейках регистра остаток от деления выводится на выход за последние $n - k = r$ тактов (в рассматриваемом случае $r = 7 - 4 = 3$).

Схема декодера циклического кода [7,4] приведена на рис. 2.7. Декодирование здесь также осуществляется в последовательном коде, т.е. побитно. Корректирующая схема соответствует той, что изображена на рис. 2.4 (или на рис. 2.5), а устройство деления на порождающий многочлен $g(x)$ показано на рис. 2.8.

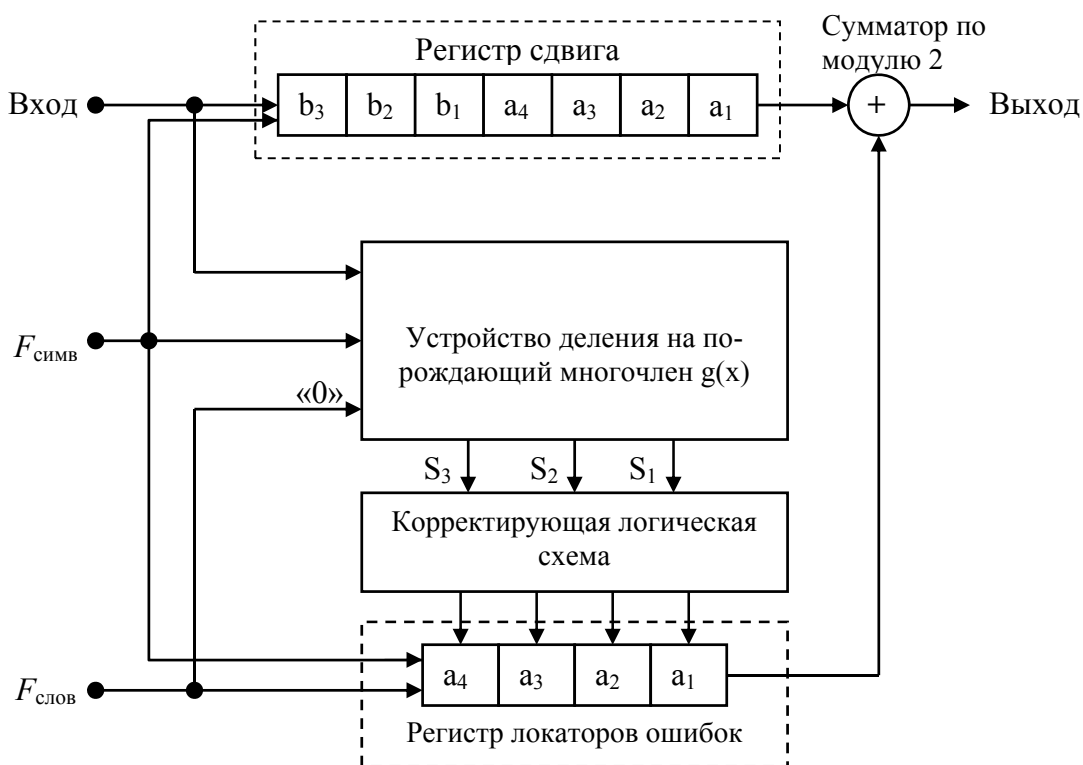


Рис. 2.7. Декодер циклического кода [7,4]

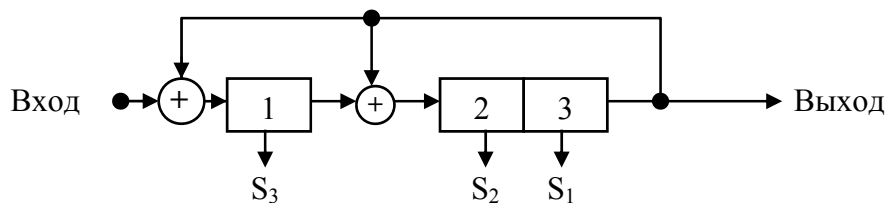


Рис.2.8. Схема устройства деления на порождающий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$.

Декодирование осуществляется следующим образом. Символы кодового слова последовательно бит за битом вводятся в регистр сдвига и одновременно подаются на вход устройства деления на порождающий многочлен $g(x)$, ячейки которого перед этим должны

быть обнулены. Ввод символов осуществляется тактовыми импульсами частоты $F_{\text{симв}}$ (рис. 2.9). После того как в регистр сдвига записан последний 7-й символ кодового слова, в ячейках устройства деления на порождающий многочлен окажется вычисленный остаток от деления этого слова на $g(x)$, т.е. синдромы S_1 , S_2 и S_3 . Если все они будут равны «0» (ошибок нет), то и на выходе корректирующей логической схемы также будут все «нули». Если в одном из символов присутствует ошибка, то часть синдромов или все они будут иметь значения «1». При этом на одном из четырех выходов корректирующей логической схемы, соответствующем ошибочному информационному символу, появится «единица». Импульсом сигнала $F_{\text{слов}}$, который должен располагаться между 7-м и 1-м импульсами частоты $F_{\text{симв}}$ (см. рис. 2.9), результат коррекции записывается в регистр локаторов ошибок, а ячейки схемы устройства деления на порождающий многочлен обнуляются, подготавливая ее для обработки следующего кодового слова.

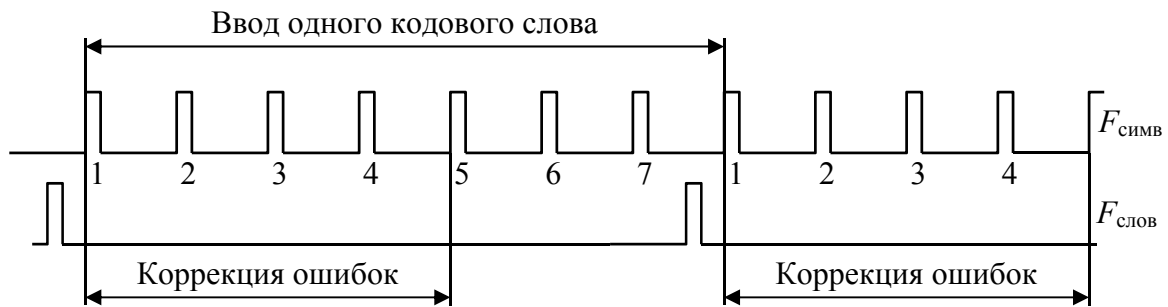


Рис. 2.9. Временные диаграммы работы декодера циклического кода [7,4]

После этого в течение четырех тактов производится коррекция обнаруженных ошибок: информационные символы из регистра сдвига и локаторы ошибок из регистра локаторов ошибок последовательно поступают на входы сумматора по модулю 2 и ошибочные символы инвертируются, что и будет означать их коррекцию. Одновременно с этим ячейки регистра сдвига будут заполняться символами следующего кодового слова, а схема деления на порождающий многочлен – производить их деление на $g(x)$, т.е. начнется процесс декодирования очередного кодового слова.

6. Вероятность отказа декодера от декодирования $P_{\text{отк}}$ из-за наличия ошибок в канале рассчитывается по формуле:

$$P_{\text{отк}} = 1 - \sum_{i=0}^n \alpha_i p^i (1-p)^{n-i},$$

где p – вероятность ошибки в канале, а $\alpha_i = C_i^n$ - число картин ошибок кратности i в кодовом слове из n символов.

Для заданного кода длины $n = 7$, исправляющего одну ошибку, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 7$. При заданной вероятности ошибки в канале $p = 10^{-5}$, вероятность отказа от декодирования $P_{отк}$ составит:

$$P_{отк} = 1 - (1 - p)^7 - 7p(1 - p)^6 = 1 - 0,99993 - 0,00006999 = 0,00000001 = 10^{-8}$$

Таким образом, в результате применения кода Хэмминга, исправляющего одну ошибку, вероятность отказа от декодирования уменьшилась ровно на три порядка.

3. Контрольные вопросы

1. Какие два основных класса кодов вы знаете? Чем они характеризуются?
2. Что такое линейный код?
3. Какие коды являются систематическими и какие - несистематическими? Как обозначаются систематические коды?
4. Что такое скорость кода и избыточность кода?
5. Что такое расстояние по Хэммингу между двумя q -ичными последовательностями и что такое минимальное кодовое расстояние? Что характеризует минимальное кодовое расстояние (граница Синглтона)?
6. Какие коды называются циклическими?
7. Что такое коды Хэмминга?
8. Что такое проверочная матрица кода и как она формируется, исходя из системы уравнений проверки на четность? Что такое каноническая форма проверочной матрицы?
9. Как найти проверочную матрицу $[n,k]$ -кода, используя первые n ненулевых элементов поля $GF(q)$?
10. Что такое синдром и как он находится?
11. Что такое порождающая матрица кода? Как она находится? Каноническая форма порождающей матрицы. Как с помощью порождающей матрицы формируются кодовые слова?
12. Что такое порождающий многочлен кода?
13. Как реализуется кодирование циклических кодов с помощью регистров сдвига с обратными связями?
14. Как найти вероятность отказа от декодирования декодера $[n,k]$ -кода?

4. Рекомендуемая литература

1. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки – М.: Мир, 1976.
2. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки – М.: Связь, 1979.
3. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролируемых ошибки – М.: Мир, 1986.
4. Кларк Дж., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи – М.: Радио и связь, 1987.

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М.А.Бонч-Бруевича**

Кафедра РПВЭС и ЭА

Студент _____

Группа _____

ОТЧЕТ
по практической работе №1ЦЗ

Исследование влияния кодов корректирующих ошибки на вероятность появления искаженного символа в воспроизведенном сигнале

Вариант _____

Исходные данные:

- вероятность ошибки в канале записи/воспроизведения $p =$ _____
- код защиты от ошибок _____; $g(x) =$ _____

1. *Определение характеристик кода*

- скорость кода $R =$ _____
- избыточность кода $R_{изб} =$ _____
- минимальное кодовое расстояние $d_{min} =$ _____
- количество ошибок, которое данный код может гарантированно исправить $t_u =$ _____
- количество ошибок, которое данный код может гарантированно обнаружить $t_o =$ _____

2. *Определение проверочной матрицы кода H*

$H =$

3. *Определение порождающей матрицы кода G*

$G =$

4. Расчет матриц синдромов S для случая однократной ошибки в кодовом слове

5. Разработка схем кодера и декодера, исправляющего одну ошибку (схемы приводятся в Приложениях 1 (схема кодера) и 2 (схема декодера и корректирующей логической схемы к нему))

6. Расчет вероятности отказа от декодирования $P_{отк}$ для случая, когда декодер исправляет t_u ошибок в кодовом слове

Вероятность отказа от декодирования $P_{отк} =$ _____

7. Выводы

Работа выполнена «__» _____ 20__ г.

(подпись преподавателя)

Отчет проверен «__» _____ 20__ г.

(подпись преподавателя)

Практическая работа №2ЦЗ

Исследование канальной модуляции

1.Цели работы:

- освоение процедуры канального кодирования информации;
- расчет спектральных характеристик кодированного сигнала;
- оценка характеристик заданного канального кода с точки зрения самосинхронизации и уровня постоянной составляющей.

2. Исходные данные:

- последовательность информационных символов (байт), заданных в шестнадцатеричном коде;
- канальный код, используемый для модуляции;
- канальная тактовая частота f_k ;
- начальное значение числовой суммы (DSV).

3. Требуется:

1. Построить временную диаграмму последовательности, модулированной заданным кодом, и диаграмму текущих значений DSV.
2. Найти значения минимальной f_{min} и максимальной f_{max} частоты в спектре кодированного сигнала.
3. Найти величину окна детектирования t_w .
4. Определить спектр кодированной последовательности и построить его график.

Варианты заданий

Вариант	Последовательность информационных символов	Канальный код	Канальная тактовая частота f_k , МГц	Начальное значение DSV	Примечание
1	A1,37,4B,F5,D8,9C,62,0E	4/5	2	0	
2	D1,8A,97,C3,B6,24,E5,F0	4/5NRZI	3	0	
3	DB,13,08,FA,9E,67,42,5C	EFM	4	-1	Стратегия 1
4	E6,20,8C,9D,A5,F1,B3,47	2/3 (I)	2	0	
5	E7,64,2B,03,F8,C1,95,AD	2/3 (II)	3	0	
6	0D,1F,58,AE,49,72,6C,B3	EFM	4	+2	Стратегия 2
7	E0,26,C9,8D,5F,B4,73,1A	2/4	2	0	
8	0F,5E,42,6B,3C,79,A8,1D	4/5	4	0	
9	C6,3D,75,E9,AF,80,31,CB	EFM	4	+1	Стратегия 3
10	74,3B,1F,5A,D9,C8,02,6E	4/5NRZI	4	0	
11	B3,6C,58,49,72,1F,0D,AE	2/3 (I)	4	0	
12	A9,B8,C7,D6,E5,F4,12,03	2/3 (II)	2	0	
13	D8,9C,62,0E,A1,37,4B,F5	EFM	4	0	Стратегия 1
14	B6,24,E5,F0,D1,8A,97,C3	2/3 (I)	2	0	
15	9E,67,42,5C,DB,13,08,FA	2/3 (II)	1	0	
16	A5,F1,B3,47,E6,20,8C,9D	4/5	2	0	
17	F8,C1,95,AD,E7,64,2B,03	4/5NRZI	3	0	
18	49,72,6C,B3,0D,1F,58,AE	EFM	4	+4	Стратегия 2
19	5F,B4,73,1A,E0,26,C9,8D	2/4	3	0	
20	3C,79,A8,1D,0F,5E,42,6B	4/5	2	0	
21	AF,80,31,CB,C6,3D,75,E9	4/5NRZI	1	0	
22	D9,C8,02,6E,74,3B,1F,5A	2/3 (I)	3	0	
23	72,1F,0D,AE,B3,6C,58,49	2/3 (II)	3	0	
24	E5,F4,12,03,A9,B8,C7,D6	2/4	2	0	
25	4B,F5,D8,9C,62,0E,A1,37	EFM	4	-2	Стратегия 3

Примечания:

- *стратегия 1* – по минимальному абсолютному значению DSV в конце кодового слова;

- *стратегия 2* – по минимальному удалению графика DSV от осевой линии;

- *стратегия 3* – по максимуму числа пересечений графиком DSV осевой линии;

- при одинаковых значениях критериев в соответствии с рекомендуемой стратегией, для принятия решения используется стратегия следующего уровня;

- бит, предшествующий первому биту формируемой последовательности, имеет «низкий» уровень;

- если при кодировании кодом 4/5 величина мгновенного значения DSV в конце предыдущего кодового слова равна 0, то из двух вариантов для следующего кодового слова выбирается вариант с $DSV > 0$.

Таблица преобразования шестнадцатеричного кода в двоичный

0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	A	1010
3	0011	B	1011
4	0100	C	1100
5	0101	D	1101
6	0110	E	1110
7	0111	F	1111

1. Порядок выполнения работы

1.1. Методы кодирования информации различными канальными кодами с контролем величины числовой суммы (DSV) подробно описаны в [1]. Кроме того, в [2,3] описывается процедура кодирования по способу EFM.

1.2. Минимальная и максимальная частота в спектре кодированного сигнала находятся по формулам:

$$f_{min} = f_k/2T_{max}; \quad f_{max} = f_k/2T_{min},$$

где f_k – канальная тактовая частота, а T_{max} и T_{min} – максимальный и минимальный интервалы между двумя соседними перепадами уровня в кодированной последовательности, выраженные в периодах канальной тактовой частоты T_k .

1.3. Величина окна детектирования $t_w = 1/f_k = \pm 1/2f_k$ (мкс).

1.4. Расчет спектра полученной последовательности производится путем выполнения дискретного преобразования Фурье (ДПФ) характеристической функции $\theta_{n\tau}$, отражающей вероятности p_n появления в полученном фрагменте кодированной информации интервалов между двумя соседними перепадами уровня сигнала, равных n :

$$\theta_{n\tau} = \sum_{n=T_{min}}^{T_{max}} p_n \cos n\omega T + i \sum_{n=T_{min}}^{T_{max}} p_n \sin n\omega T \quad (1.1)$$

где $T_{min} \leq n \leq T_{max}$;

$$p_n = N_n/N_\Sigma;$$

N_n - количество интервалов, равных n ;

N_Σ - общее количество интервалов в последовательности;

$T = 1/f_k$ - период канальной тактовой частоты;

ω - циклическая частота, равная $2\pi f$.

Расчет выполняется только для спектральных компонент, соответствующих частотам $f_k/2n$ в интервале $T_{min} \leq n \leq T_{max}$, т.е. в диапазоне частот от $f_{min} = f_k/2T_{max}$ до $f_{max} = f_k/2T_{min}$. При этом $p_n = N_n/N_\Sigma$, где – N_n это количество интервалов, равных n , а N_Σ - общее количество интервалов в последовательности.

Значения спектральных компонент находятся по формуле:

$$F(\omega) = \frac{M\alpha^2}{\omega^2 \tau_0} \cdot \frac{1 - |\theta_{n\tau}|^2}{1 + 2 \operatorname{Re} \theta_{n\tau} + |\theta_{n\tau}|^2} \quad (1.2)$$

где $|\theta_{n\tau}|^2 = U_\theta^2 + V_\theta^2$;

$$\operatorname{Re} \theta_{n\tau} = U_{\theta} = \sum_{n=T_{\min}}^{T_{\max}} p_n \cos n\omega T ;$$

$$\operatorname{Im} \theta_{n\tau} = V_{\theta} = \sum_{n=T_{\min}}^{T_{\max}} p_n \sin n\omega T ;$$

M – число интервалов различной длительности в интервале $T_{\min} \leq n \leq T_{\max}$;

α – уровни импульсов высокого и низкого уровней (принимается равной 1) (см. рис. 1.1);

τ_0 – средняя длительность импульса высокого или низкого уровня:

$$\tau_0 = T \sum_{n=T_{\min}}^{T_{\max}} n \cdot p_n .$$

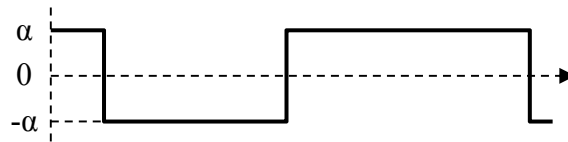


Рис. 1.1. Уровни импульсов

Примечания:

- в число интервалов различной длительности M включаются все возможные длительности этих интервалов в промежутке $T_{\min} \leq n \leq T_{\max}$, даже если какой-то из них в преобразованной последовательности отсутствует. Например, для кода EFM, у которого $3 \leq n \leq 11$, значение M всегда равно 9, даже если какого-либо интервала, скажем $n = 11$, в кодированной последовательности нет вовсе.

- если на концах преобразуемой последовательности получаются интервалы, длительность которых меньше T_{\min} , то такие интервалы отбрасываются и в расчет не принимаются;

- при кодировании кодом EFM следует обратить внимание на то, что каждый кодовый символ, в том числе самый первый, должен начинаться с трех соединительных разрядов, а не с 14-разрядного кодового слова, взятого из таблицы преобразования (см. пример на рис. 3.13,а в [1]).

2. Пример выполнения

Пусть задана информационная последовательность A1,B2,C3,D4,E5,F6,07,89, которую требуется модулировать канальным кодом 4/5 NRZI. Канальная тактовая частота $f_k = 1$ МГц. Начальное значение $DSV = 0$.

2.1. Процесс кодирования и модуляции заданной последовательности наглядно представлен на рис. 2.1. Там же показана диаграмма значений DSV , соответствующих полученной последовательности.

2.2. Минимальный интервал между двумя соседними перепадами уровня T_{min} у кода 4/5 NRZI равен $1T_k$, а максимальный $T_{max} = 3T_k$. Следовательно,

$$f_{max} = f_k/2 = 1\text{МГц}/2 = 500 \text{ кГц}; \quad f_{min} = f_k/6 = 1\text{МГц}/6 = 166,7 \text{ кГц}.$$

2.3. Величина окна детектирования $t_w = 1/f_k = 1/1\text{МГц} = 1,0$ (мкс).

2.4. Для того чтобы найти спектр последовательности, найдем значения N_Σ и N_i для $i = 1, 2$ и 3 .

$$N_\Sigma = 50;$$

$$N_1 = 27;$$

$$N_2 = 17;$$

$$N_3 = 6.$$

Тогда вероятности p_i будут, соответственно, равны:

$$p_1 = 27/50 = 0,54 \text{ (для частоты } f_k/2 = f_{max} = 500 \text{ кГц)};$$

$$p_2 = 17/50 = 0,36 \text{ (для частоты } f_k/4 = 250 \text{ кГц)};$$

$$p_3 = 6/50 = 0,12 \text{ (для частоты } f_k/6 = f_{min} = 166,7 \text{ кГц)}.$$

Из правил кодирования кодом 4/5 NRZI известно, что число интервалов различной длительности здесь равно трем: $n = 1$ (T_{min}); $n = 2$ и $n = 3$ (T_{max}), следовательно, $M = 3$.

Период частоты $f_k T = 10^{-6}$. Уровень импульсов сигнала $\alpha = 1$.

Средняя длительность импульса

$$\tau_0 = T \sum_{n=T_{min}}^{T_{max}} n \cdot p_n = T(1 \cdot 0,54 + 2 \cdot 0,34 + 3 \cdot 0,12) = 1,58T = 1,58 \cdot 10^{-6}.$$

Найдем величину спектральной составляющей для $\omega_1 = 2\pi f_k/2$:

$$\begin{aligned} U_\theta &= 0,54 \cos 1 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{2} \cdot 10^{-6} + 0,34 \cos 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{2} \cdot 10^{-6} + 0,12 \cos 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{2} \cdot 10^{-6} = \\ &= 0,54 \cos \pi + 0,34 \cos 2\pi + 0,12 \cos 3\pi = -0,54 + 0,34 - 0,12 = -0,32; \end{aligned}$$

$$U_\theta^2 = 0,1;$$

$$V_{\theta} = 0,54 \sin 1 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{2} \cdot 10^{-6} + 0,34 \sin 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{2} \cdot 10^{-6} + 0,12 \sin 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{2} \cdot 10^{-6} =$$

$$= 0,54 \sin \pi + 0,34 \sin 2\pi + 0,12 \sin 3\pi = 0 + 0 + 0 = 0;$$

$$V_{\theta}^2 = 0;$$

$$|\theta_{nr}|^2 = U_{\theta}^2 + V_{\theta}^2 = 0,1 + 0 = 0,1.$$

$$F(\omega_1) = \frac{M\alpha^2}{\omega^2 \tau_0} \cdot \frac{1 - |\theta_{nr}|^2}{1 + 2 \operatorname{Re} \theta_{nr} + |\theta_{nr}|^2} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot \pi^2 \cdot 10^{12} \cdot 1,58 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{1 - 0,1}{1 - 0,64 + 0,1} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 0,9}{9,87 \cdot 1,58 \cdot 0,37} = 0,47 \cdot 10^{-6}.$$

Найдем величину спектральной составляющей для $\omega_2 = 2\pi f_k/4$:

$$U_{\theta} = 0,54 \cos 1 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{4} \cdot 10^{-6} + 0,34 \cos 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{4} \cdot 10^{-6} + 0,12 \cos 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{4} \cdot 10^{-6} =$$

$$= 0,54 \cos \frac{\pi}{2} + 0,34 \cos \pi + 0,12 \cos \frac{3\pi}{2} = 0 - 0,34 + 0 = -0,34;$$

$$U_{\theta}^2 = 0,12;$$

$$V_{\theta} = 0,54 \sin 1 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{4} \cdot 10^{-6} + 0,34 \sin 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{4} \cdot 10^{-6} + 0,12 \sin 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{4} \cdot 10^{-6} =$$

$$= 0,54 \sin \frac{\pi}{2} + 0,34 \sin \pi + 0,12 \sin \frac{3\pi}{2} = 0,54 + 0 - 0,12 = 0,42;$$

$$V_{\theta}^2 = 0,18;$$

$$|\theta_{nr}|^2 = U_{\theta}^2 + V_{\theta}^2 = 0,12 + 0,18 = 0,3.$$

$$F(\omega_2) = \frac{M\alpha^2}{\omega^2 \tau_0} \cdot \frac{1 - |\theta_{nr}|^2}{1 + 2 \operatorname{Re} \theta_{nr} + |\theta_{nr}|^2} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 16}{4 \cdot \pi^2 \cdot 10^{12} \cdot 1,58 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{1 - 0,3}{1 - 0,68 + 0,3} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 0,7}{9,87 \cdot 1,58 \cdot 0,62} = 0,87 \cdot 10^{-6}.$$

Найдем величину спектральной составляющей для $\omega_3 = 2\pi f_k/6$:

$$U_{\theta} = 0,54 \cos 1 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{6} \cdot 10^{-6} + 0,34 \cos 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{6} \cdot 10^{-6} + 0,12 \cos 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{6} \cdot 10^{-6} =$$

$$= 0,54 \cos \frac{\pi}{3} + 0,34 \cos \frac{2\pi}{3} + 0,12 \cos \pi = 0,27 - 0,17 - 0,12 = -0,02;$$

$$U_{\theta}^2 = 4 \cdot 10^{-4};$$

$$V_{\theta} = 0,54 \sin 1 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{6} \cdot 10^{-6} + 0,34 \sin 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{6} \cdot 10^{-6} + 0,12 \sin 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{10^6}{6} \cdot 10^{-6} =$$

$$= 0,54 \sin \frac{\pi}{3} + 0,34 \sin \frac{2\pi}{3} + 0,12 \sin \pi = 0,54 \cdot 0,87 + 0,34 \cdot 0,87 + 0 = 0,77;$$

$$V_{\theta}^2 = 0,59;$$

$$|\theta_{nr}|^2 = U_{\theta}^2 + V_{\theta}^2 = 4 \cdot 10^{-4} + 0,59 \approx 0,59.$$

$$F(\omega_3) = \frac{M\alpha^2}{\omega^2 \tau_0} \cdot \frac{1 - |\theta_{nr}|^2}{1 + 2 \operatorname{Re} \theta_{nr} + |\theta_{nr}|^2} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 36}{4 \cdot \pi^2 \cdot 10^{12} \cdot 1,58 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{1 - 0,59}{1 - 0,04 + 0,59} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 0,41}{9,87 \cdot 1,58 \cdot 1,55} = 0,46 \cdot 10^{-6}.$$

Следовательно, спектр полученной последовательности будет выглядеть, как показано на рис. 2.2.

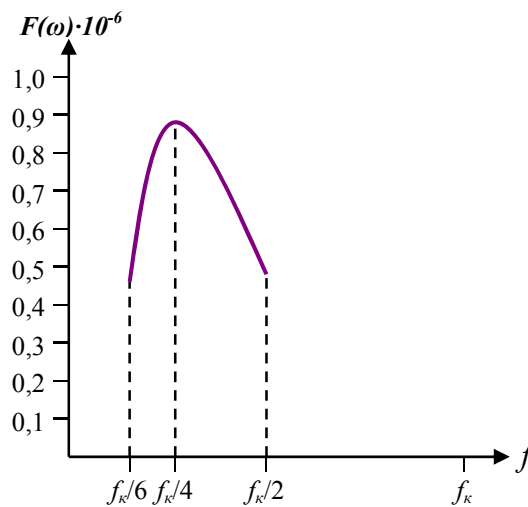


Рис. 2.2. Спектр последовательности в коде 4/5 NRZI

Вывод: код 4/5 NRZI обладает хорошей самосинхронизацией, поскольку максимальный интервал между двумя соседними перепадами равен 3 периодам тактовой частоты, но, как видно из рис. 2.1, обладает довольно высоким уровнем постоянной составляющей.

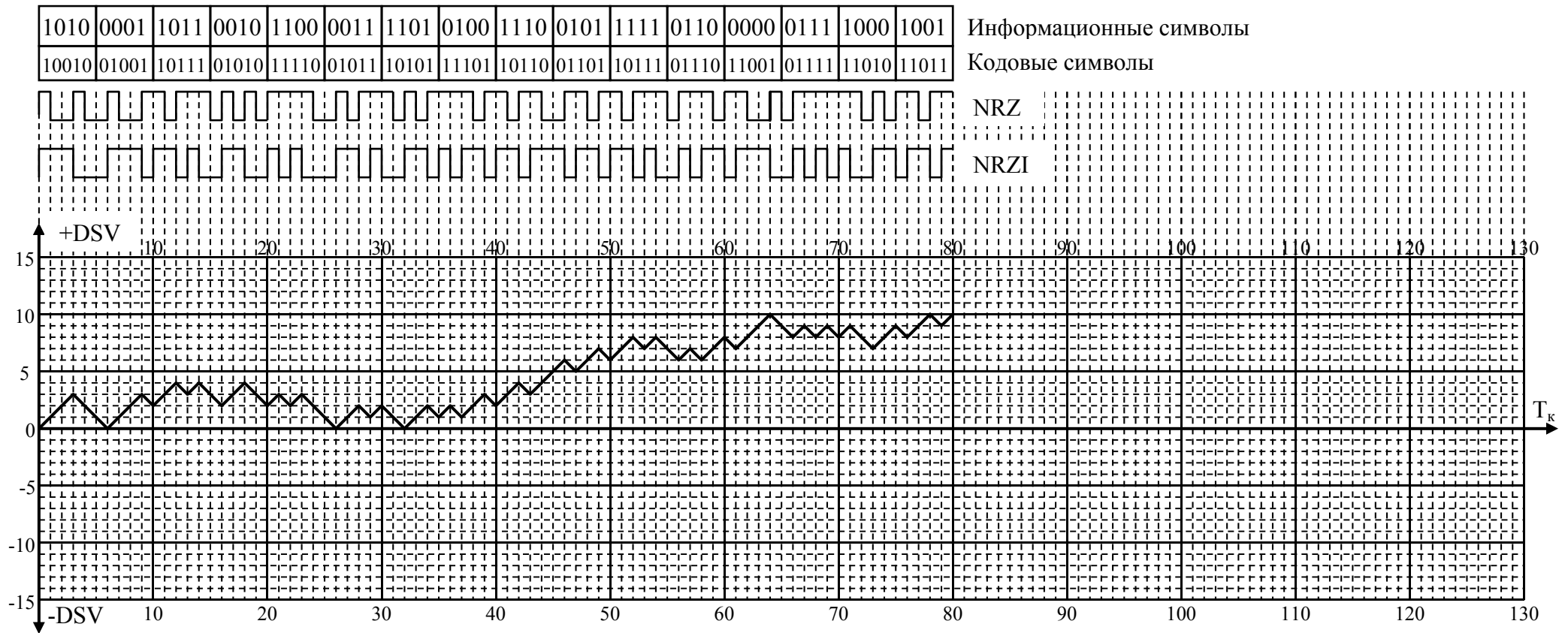


Рис. 2.1. Временные диаграммы и диаграмма значений DSV последовательности, кодированной кодом 4/5 NRZI

3. Контрольные вопросы

1. Что такое канальное кодирование, и какие задачи оно выполняет?
2. Что такое канальная тактовая частота?
3. Что такое окно детектирование и чему оно равно?
4. Что такое минимальная и максимальная длина пробега?
5. Что такое минимальная и максимальная длина волны записи?
6. Для чего нужно ограничивать длину пробега сверху?
7. Для чего нужно ограничивать длину пробега снизу?
8. Что такое DSV и для чего эта величина используется в канальном кодировании?
9. Каким образом достигается повышение плотности записи?
10. Что такое самосинхронизация?
11. Что такое коэффициент повышения плотности записи?
12. Что такое скорость канального кода?
13. Для чего нужно снижать уровень низкочастотных составляющих в спектре кодированного сигнала?

Литература

1. Никамин В.А. Канальная модуляция в системах записи цифровых данных. Учебное пособие. – Изд-во СПбГУТ, 2009, 80 с.
2. Никамин В.А. Форматы цифровой звукозаписи. - СПб, «ЭЛБИ», 1998, 264 с.
3. Никамин В.А. Цифровая звукозапись. Технологии и стандарты. - СПб-Киев, «Наука и Техника», 2001, 256 с.

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М.А.Бонч-Бруевича**

Кафедра РПВЭС и ЭА

Студент _____

Группа _____

ОТЧЕТ

по практической работе №2ЦЗ

«Исследование канальной модуляции»

Вариант _____

Исходные данные:

- последовательность информационных символов _____;
- канальный код, используемый для модуляции _____;
- канальная тактовая частота $f_k =$ _____;
- начальное значение числовой суммы $DSV =$ _____.

1. Временные диаграммы и диаграмма значений DSV последовательности – на рис. 3.1.

2. Минимальная частота в спектре сигнала $f_{min} =$ _____
Максимальная частота в спектре сигнала $f_{max} =$ _____

3. Величина окна детектирования $t_w =$ _____

4. Суммарное количество интервалов $N_\Sigma =$ _____
Количества интервалов, равных i составляет:

Вероятности p_i равны:

$n =$ _____

$M =$ _____

$$\alpha = 1; T = \frac{\tau_0}{\sum_{n=T_{\min}}^{T_{\max}} n \cdot p_n}$$

Вычисление $F(\omega)$:

Спектр полученной последовательности – на рис. 3.2.

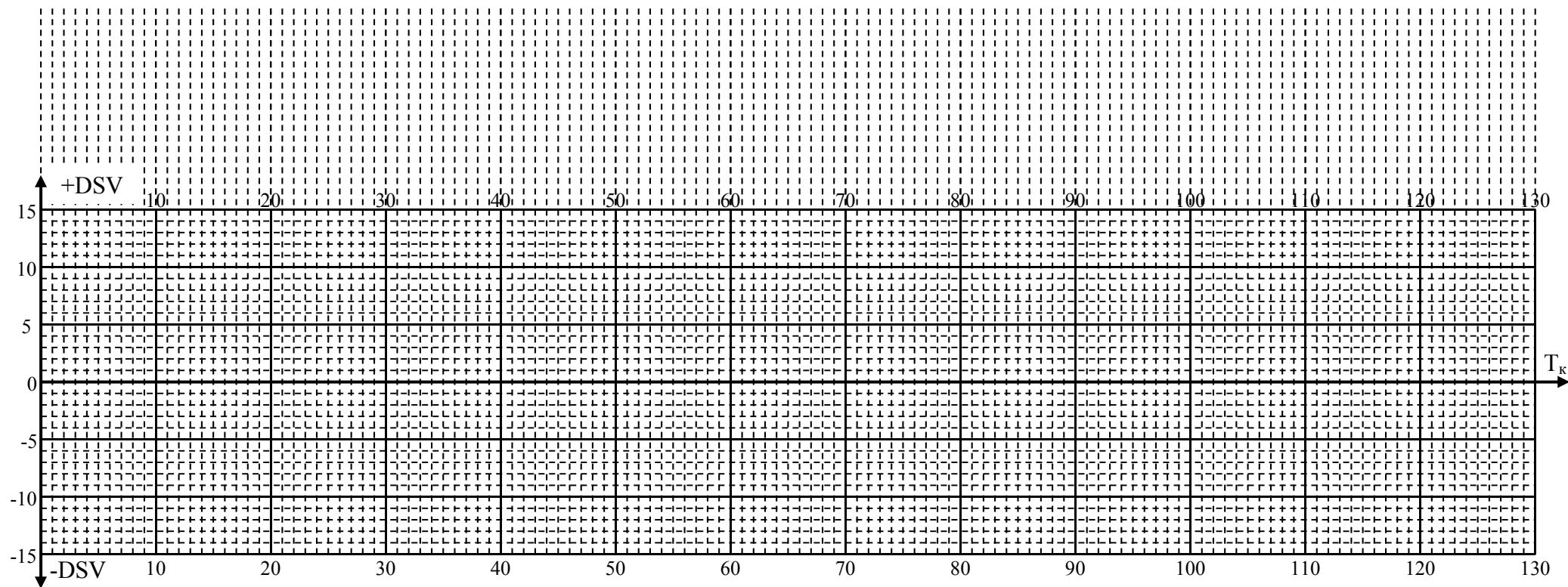


Рис. 3.1. Кодовые последовательности и диаграмма значений DSV

7. Выводы

Работа выполнена «__» _____ 20__ г.

(подпись преподавателя)

Отчет проверен «__» _____ 20__ г.

(подпись преподавателя)

Практическая работа 3ЦЗ

Расчет и проектирование кодера Рида-Соломона

Цель работы

- освоение методов проектирования и расчета кодера Рида-Соломона с заданными характеристиками;
- расчет вероятности появления искаженного символа в воспроизведенном сигнале после выполнения процедуры коррекции ошибок и сравнение ее с исходной вероятностью появления ошибки в канале записи/воспроизведения.

Исходные данные:

- вероятность p ошибки в канале записи/воспроизведения;
- характеристики кода Рида-Соломона, расширенного за счет добавления общей проверки на четность, и используемого для защиты от ошибок:
 - $[N, K]$;
 - порядок q поля $GF(q)$, из которого берутся коэффициенты кодовых многочленов (символы кодовых слов);
 - порождающий многочлен $g(x)$ поля $GF(q)$.

Требуется:

- найти все ненулевые элементы поля $GF(q)$;
- определить порождающий многочлен $G(x)$ и проверочную матрицу H кода Рида-Соломона (РС);
- разработать структурную и функциональную схемы кодера РС;
- рассчитать вероятность отказа от декодирования $P_{\text{отк}}$ для случая, когда декодер исправляет t_n ошибок в кодовом слове.

Вариант	Вероятность p ошибки в канале записи/воспроизведения	Код РС		
		[N,K]	q	$g(x)$
1	10^{-4}	[12,10]	2^4	x^4+x^3+1
2	10^{-4}	[14,12]	2^4	x^4+x+1
3	10^{-5}	[6,4]	2^6	x^6+x+1
4	10^{-4}	[4,2]	2^3	x^3+x^2+1
5	10^{-5}	[10,8]	2^4	x^4+x^3+1
6	10^{-5}	[12,10]	2^4	x^4+x+1
7	10^{-5}	[8,6]	2^4	x^4+x+1
8	10^{-5}	[18,16]	2^6	x^6+x+1
9	10^{-3}	[5,3]	2^3	x^3+x^2+1
10	10^{-4}	[9,7]	2^4	x^4+x^3+1
11	10^{-6}	[6,4]	2^3	x^3+x^2+1
12	10^{-4}	[10,8]	2^6	x^6+x+1
13	10^{-4}	[18,14]	2^4	x^4+x^3+1
14	10^{-5}	[14,10]	2^5	x^5+x^2+1
15	10^{-5}	[10,6]	2^4	x^4+x^3+1
16	10^{-4}	[12,8]	2^6	x^6+x+1
17	10^{-4}	[16,12]	2^5	x^5+x^2+1
18	10^{-3}	[8,4]	2^5	x^5+x^2+1
19	10^{-5}	[12,10]	2^6	x^6+x+1
20	10^{-4}	[10,6]	2^5	x^5+x^2+1
21	10^{-3}	[7,3]	2^3	x^3+x^2+1
22	10^{-4}	[10,6]	2^4	x^4+x+1
23	10^{-5}	[14,10]	2^4	x^4+x^3+1
24	10^{-3}	[9,5]	2^4	x^4+x+1
25	10^{-3}	[4,2]	2^6	x^6+x+1

1. Порядок выполнения работы

1.1. **Кодами Рида–Соломона** над полем $GF(q)$ называются не двоичные $[N,K]$ -коды длины $N = q-1$. Разумеется, q всегда больше 2. **Порождающий многочлен кода РС**, исправляющего t ошибок и обнаруживающего $2t$ ошибок, задается формулой:

$$G(x) = (x-\alpha)(x-\alpha^2) \dots (x-\alpha^{2t}) \quad (1.1)$$

или в виде степенного многочлена

$$G(x) = g_{2t}x^{2t} + g_{2t-1}x^{2t-1} + g_{2t-2}x^{2t-2} + \dots + g_1x + g_0. \quad (1.2)$$

Коды РС могут быть **укороченными** ($N < q-1$), а также **расширенными** путем добавления общей проверки на четность, как все коды, используемые в данной работе. **Порождающий многочлен расширенного кода РС** задается формулой:

$$G(x) = (x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2) \dots (x-\alpha^{2t-1}) \quad (1.3)$$

или

$$G(x) = g_{2t-1}x^{2t-1} + g_{2t-2}x^{2t-2} + \dots + g_1x + g_0 \quad (1.4)$$

а **проверочная матрица H** такого кода выглядит следующим образом:

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha^{N-1} & \alpha^{N-2} & \alpha^{N-3} & \dots & \alpha & 1 \\ \alpha^{2(N-1)} & \alpha^{2(N-2)} & \alpha^{2(N-3)} & \dots & \alpha^2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{(2t-1)(N-1)} & \alpha^{(2t-1)(N-2)} & \alpha^{(2t-1)(N-3)} & \dots & \alpha^{2t-1} & 1 \end{vmatrix}$$

где α – **примитивный элемент** поля $GF(q)$, которому принадлежат символы кодовых слов кода РС.

Таким образом, можно отметить, что порождающий многочлен кода РС в форме (1.1) имеет столько сомножителей, сколько ошибок он способен обнаружить ($2t$ или $N-K$).

Число столбцов проверочной матрицы кода РС равно общему числу символов в кодовом слове (N), а число строк – удвоенному числу ошибок, которые он способен исправить ($2t$ или, что то же самое – $N-K$).

Процедура отыскания элементов поля $GF(q)$ подробно описана в разделе 2.1 настоящих Методических Указаний.

1.2. Обобщенная структурная схема кодера РС выглядит, как показано на рис. 1.1.

Работает схема следующим образом. Перед началом процесса кодирования содержимое ячеек регистра должно быть равно нулю (кодер предварительно обнуляется). Ключи Кл.1 и Кл.2 находятся в положении I. На вход кодера последовательно подаются K информа-

ционных символов, которые поступают на вход сумматора и одновременно – на выход. В это время в регистре производится деление входной последовательности информационных символов на порождающий многочлен кода $G(x)$. После ввода последнего информационного символа ключи Кл.1 и Кл.2 переводятся в положение II и из ячеек регистра на выход выводятся $N-K$ полученных в результате деления символов остатка (проверочные символы). На этом процедура кодирования завершается. Ячейки регистра вновь обнуляются и он, таким образом, подготавливается к процедуре кодирования следующих K информационных символов [1-4].

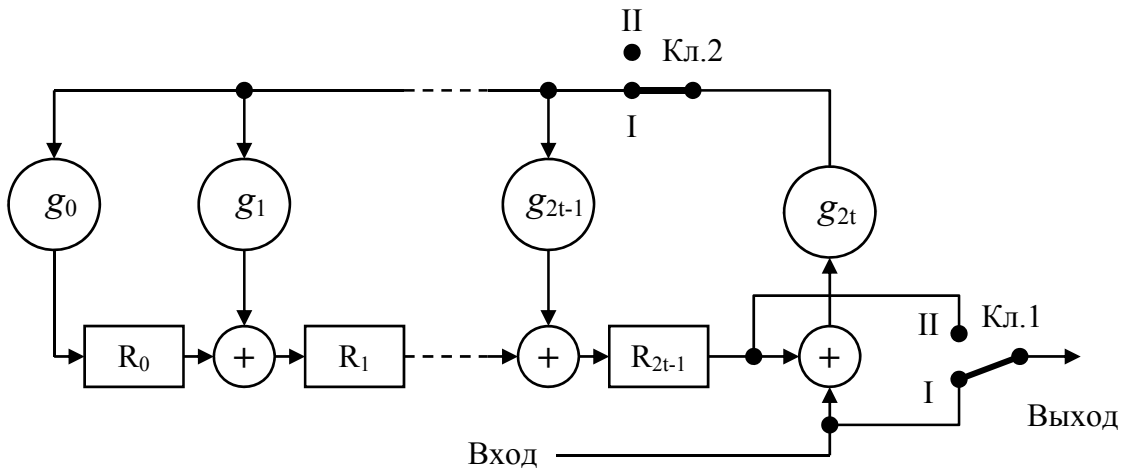


Рис. 1.1. Кодер РС

1.3. Расчет **вероятности отказа от декодирования** $P_{отк}$ для случая, когда декодер исправляет t_n ошибок в кодовом слове, выполняется по формуле

$$P_{отк} = 1 - \sum_{i=0}^N \alpha_i p^i (1-p)^{N-i}$$

где p – вероятность появления в канале искаженного символа, а $\alpha_i = C_i^N$ – число картин ошибок кратности i в кодовом слове кода РС из N символов ($C_i^N = \frac{N!}{(N-i)!i!}$).

Примечание. В данной работе ошибочным символом считается весь t -разрядный набор двоичных символов, а не отдельный бит.

2. Пример выполнения

Пусть Для защиты от ошибок используется код РС [6,4] над полем $GF(2^3)$ с порождающим многочленом $g(x) = x^3 + x^2 + 1$. Вероятность появления искаженного символа в канале записи/воспроизведения $p = 10^{-4}$,

2.1. Заданный код РС[6,4] является укороченным ($N=6 < q-1=2^3-1=7$) и одновременно расширенным за счет добавления общей проверки на четность (по условиям задачи). Он способен исправить $t = \frac{N-K}{2} = \frac{6-4}{2} = 1$ ошибку. Следовательно, его порождающий многочлен:

$$G(X) = (x-1)(x-\alpha),$$

а проверочная матрица

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha^5 & \alpha^4 & \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

где α – **примитивный элемент** поля $GF(2^3)$, которому принадлежат символы кодовых слов кода РС[6,4].

Элементы поля $GF(2^3)$ можно отыскивать двумя способами.

Первый способ – с помощью регистра сдвига с обратными связями, осуществляющего последовательное деление степеней x , отождествляемого примитивному элементу α поля $GF(2^3)$, начиная от x^0 до x^6 , на порождающий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$.

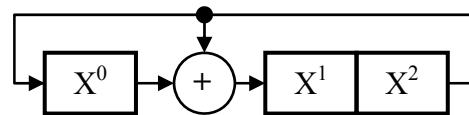
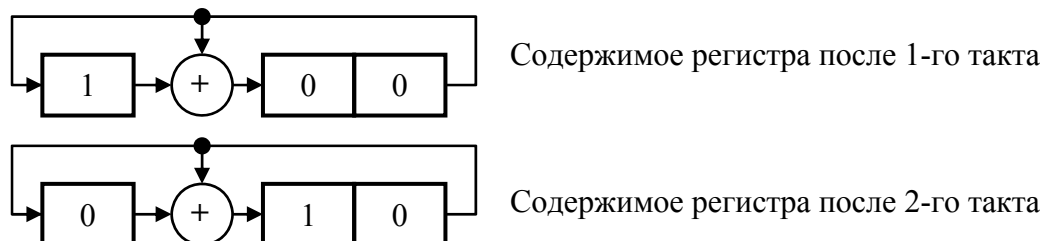
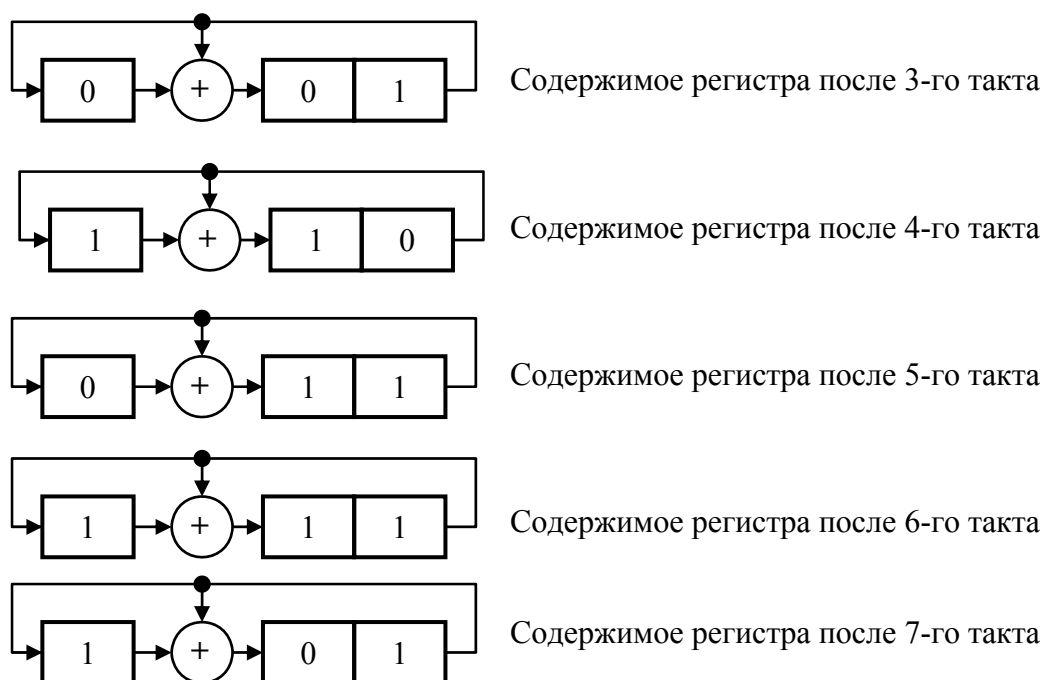


Рис. 2.1. Схема деления на многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$.

Для того, чтобы найти $q-1 = 2^3 - 1 = 7$ ненулевых элементов поля $GF(2^3)$, нужно выполнить 7 сдвигов вправо «единицы», которая записывается первым тактовым импульсом в крайнюю левую ячейку регистра, соответствующую x^0 .





Получим 7 трехразрядных наборов двоичных символов, которые соответствуют 7 ненулевым элементам поля $GF(2^3)$, и которые могут быть представлены в виде двоичных наборов, в виде степеней α и в виде многочленов от x :

$$\begin{aligned} 100 - \alpha^0 &\rightarrow x^0 = 1; \\ 010 - \alpha^1 &\rightarrow x; \\ 001 - \alpha^2 &\rightarrow x^2; \\ 110 - \alpha^3 &\rightarrow x+1; \\ 011 - \alpha^4 &\rightarrow x^2+x; \\ 111 - \alpha^5 &\rightarrow x^2+x+1; \\ 101 - \alpha^6 &\rightarrow x^2+1. \end{aligned}$$

Второй способ состоит в непосредственном делении x в соответствующей степени на многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$ и представлении остатка от деления в двоичной форме.

$$\begin{aligned} x^0 &\rightarrow 100 \\ x^1 &\rightarrow 010 \\ x^2 &\rightarrow 001 \\ x^3 = x + 1 &\rightarrow 110 \\ \\ + \frac{x^4}{x^2+x} &\left| \frac{x^3+x+1}{x} \right. \\ & \quad x^2+x \rightarrow 011 \\ \\ + \frac{x^5}{x^2+x+1} &\left| \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \right. \\ & \quad x^3+x^2 \\ & + \frac{x^3+x+1}{x^2+x+1} \rightarrow 111 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^6 & x^3+x+1 \\
+x^6+x^4+x^3 & x^3+x+1 \\
\hline
x^4+x^3 & \\
+x^4+x^2+x & \\
\hline
x^3+x^2+x & \\
+x^3+x+1 & \\
\hline
x^2+1 & \rightarrow 101
\end{array}$$

Получим те же самые 7 троек двоичных чисел, которые соответствуют тем же 7 ненулевым элементам поля $GF(2^3)$, что и при первом способе:

$$100 - \alpha^0 \rightarrow x^0 = 1;$$

$$010 - \alpha^1 \rightarrow x;$$

$$001 - \alpha^2 \rightarrow x^2;$$

$$110 - \alpha^3 \rightarrow x+1;$$

$$011 - \alpha^4 \rightarrow x^2+x;$$

$$111 - \alpha^5 \rightarrow x^2+x+1;$$

$$101 - \alpha^6 \rightarrow x^2+1.$$

Результаты вычислений заносятся в таблицу:

Таблица ненулевых элементов поля $GF(2^3)$

В виде двоичных наборов	В виде степеней α	В виде многочленов
100	α^0	1
010	α^1	x
001	α^2	x^2
110	α^3	$x+1$
011	α^4	x^2+x
111	α^5	x^2+x+1
101	α^6	x^2+1

2.2. Структурная схема кодера РС[6,4], очевидно, будет выглядеть, как показано на рис. 2.2, поскольку кодовое слово данного кода содержит всего 2 проверочных символа.

Для того чтобы построить функциональную схему кодера, необходимо определить коэффициенты g порождающего многочлена в степенной форме. Преобразуем порождающий многочлен в форму степенного многочлена от x :

$$G(X) = (x-1)(x-\alpha) = x^2 - \alpha x - x + \alpha = x^2 + (\alpha+1)x + \alpha$$

Таким образом, $g_2 = 1$; $g_1 = \alpha+1$; $g_0 = \alpha$.

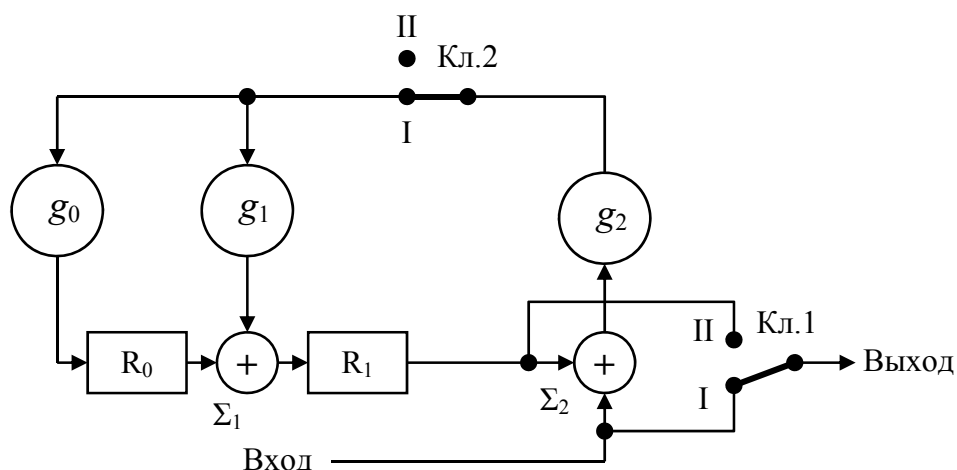


Рис. 2.2. Структурная схема кодера РС [6,4]

Произвольный элемент A поля $GF(2^3)$ с порождающим многочленом $g(x) = x^3 + x + 1$ можно представить в виде суммы степеней α от 0-й до 2-й с коэффициентами a , взятыми из поля $GF(2)$: $A = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2$. Чтобы отыскать схему умножителя произвольного элемента поля $GF(2^3)$ на фиксированный элемент того же поля g , надо выполнить это умножение и определить коэффициенты произведения.

Поскольку $g_2 = 1$, то все коэффициенты произведения Ag_2 равны 1 и умножитель на g_2 не требуется.

$$\begin{aligned} Ag_1 &= (a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2)(\alpha + 1) = a_0\alpha + a_1\alpha^2 + a_2\alpha^3 + a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 = \\ &= a_0\alpha + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_2 + a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 = (a_0 + a_2) + (a_0 + a_1 + a_2)\alpha + \\ &+ (a_1 + a_2)\alpha^2; \end{aligned}$$

$$Ag_0 = (a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2)\alpha = a_0\alpha + a_1\alpha^2 + a_2(\alpha + 1) = a_0\alpha + a_1\alpha^2 + a_2 + a_2\alpha = a_2 + (a_0 + a_2)\alpha + a_1\alpha^2.$$

Тогда функциональная схема кодера РС будет выглядеть, как показано на рис. 2.3.

2.8. Вероятность отказа от декодирования рассчитывается по формуле:

$$P_{отк} = 1 - \sum_{i=0}^N \alpha_i p^i (1-p)^{N-i}$$

Для заданного кода РС длины $N = 6$, исправляющего одну ошибку, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 6$. При заданной вероятности ошибки в канале $p = 10^{-4}$, вероятность отказа от декодирования $P_{отк}$ составит:

$$P_{отк} = 1 - (1-p)^6 - 6p(1-p)^5 = 1 - 0,9994 - 0,00059997 = 0,00000003 = 3 \cdot 10^{-8}.$$

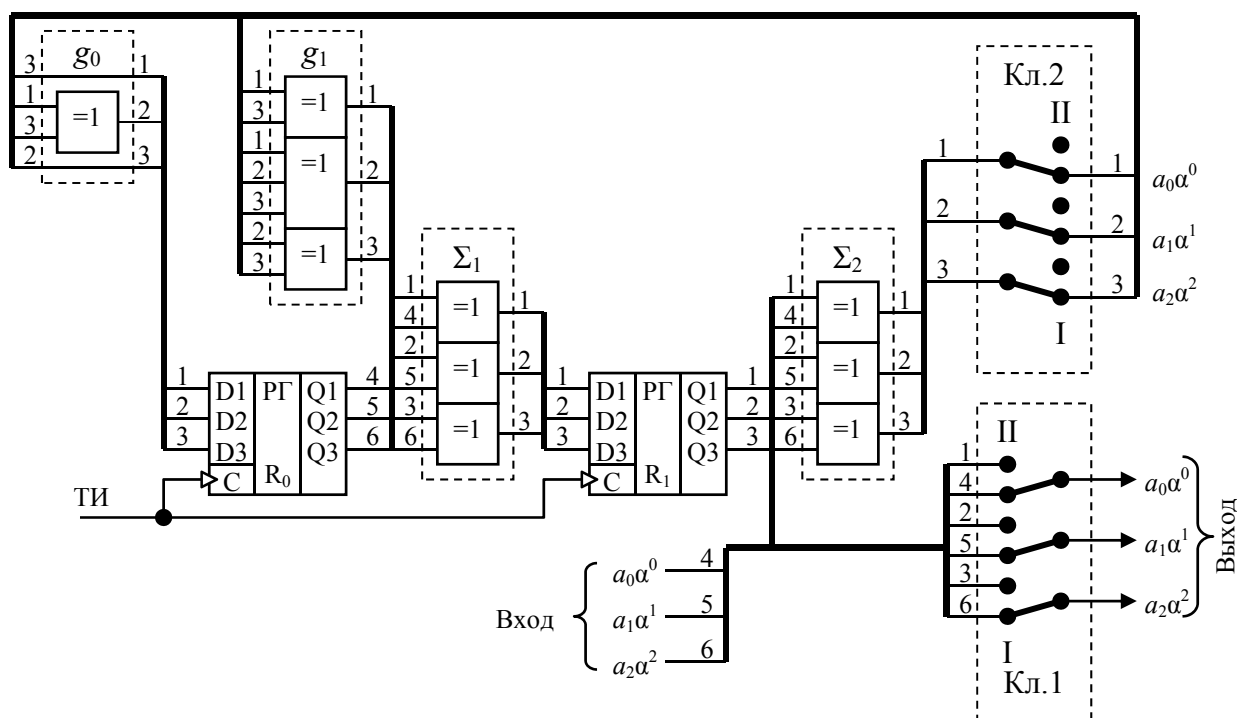


Рис. 2.3. Функциональная схема кодера РС [6,4]
 ТИ – тактовые импульсы; РГ – 3-разрядные регистры

3. Контрольные вопросы

1. Какие коды называются кодами Рида-Соломона?
2. Как выглядит порождающий многочлен кода Рида-Соломона?
3. Что такое укороченный код Рида-Соломона?
4. Что такое расширенный код Рида-Соломона? Как выглядит порождающий многочлен такого кода и его проверочная матрица?
5. Чему равно число строк и число столбцов проверочной матрицы кода Рида-Соломона?
6. Сколько сомножителей должен иметь порождающий многочлен кода Рида-Соломона в форме (1.1)?

3. Рекомендуемая литература

1. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки – М.: Мир, 1976.
2. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки – М.: Связь, 1979.
3. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки – М.: Мир, 1986.
4. Кларк Дж., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи – М.: Радио и связь, 1987.

$$G(X) =$$

3. Проверочная матрица H кода РС

$$H =$$

4. Структурная схема кодера РС

5. Функциональная схема кодера РС (на отдельном листе)

6. Расчет вероятности отказа от декодирования $P_{отк}$ для случая, когда декодер РС исправляет t_n ошибок в кодовом слове

Вероятность ошибочного декодирования $P_{отк} =$ _____

7. Выводы

Работа выполнена « ___ » _____ 20__ г.

(подпись преподавателя)

Отчет проверен « ___ » _____ 20__ г.

(подпись преподавателя)

Практическая работа № 4ЦЗ

Исследование системы кодирования цифрового звукового сигнала для записи на носитель

1. Цели работы:

- приобретение навыков системного анализа задачи проектирования тракта преобразования звукового сигнала с целью записи его на магнитный или оптический носитель;
- освоение методов декорреляции пакетов ошибок, существующих в канале записи/воспроизведения, путем выбора подходящей схемы перемежения данных;
- освоение методов построения блока коррекции данных;
- освоение процедуры выбора канального кода с целью повышения плотности записи и обеспечения самосинхронизации;
- освоение процедуры выбора конфигурации блочной синхрогруппы и расчета ее оптимальной длины;
- расчет вероятности появления искаженного символа в воспроизведенном сигнале после выполнения процедуры коррекции ошибок и сравнение ее с исходной вероятностью появления ошибки в канале записи/воспроизведения.

2. Исходные данные.

2.1. Характеристики входного цифрового звукового сигнала:

- стерео/моно (S/M);
- частота дискретизации f_d ;
- разрядность квантования $N_{кв}$;
- характеристика квантования (линейная/нелинейная).

2.2. Характер искажений, существующий в канале записи/воспроизведения:

- вероятность p появления искаженного символа;
- максимальная длина l пакетов ошибок.

2.3. Характеристики кода Рида-Соломона, расширенного за счет добавления общей проверки на четность, и используемого для защиты от ошибок:

- $[N, K]$;
- порядок q поля $GF(q)$, из которого берутся коэффициенты кодовых многочленов (символы кодовых слов);
- порождающий многочлен $g(x)$ поля $GF(q)$.

3. Требуется:

- найти все ненулевые элементы поля $GF(q)$;
- определить порождающий многочлен $G(x)$ и проверочную матрицу H кода Рида-Соломона;
- определить структуру кодового слова кода Рида-Соломона (РС);
- определить длину L перемежения;
- определить размер D и структуру блока данных;
- выбрать канальный код, обладающий самосинхронизацией и, по возможности, обеспечивающий повышение плотности записи;
- выбрать подходящую конфигурацию синхрогруппы и ее длину L_{CG} ;
- рассчитать скорость потока звуковых данных (данных пользователя) $V_{П}$;
- рассчитать общую скорость потока данных V_{O} ;
- рассчитать скорость потока данных на выходе системы кодирования (канальных бит) V_{K} ;
- рассчитать вероятность отказов от декодирования $P_{отк}$ для случая, когда декодер исправляет t_n ошибок в кодовом слове и среднее число $N_{ош}$ неисправленных ошибок в единицу времени (минуту, час);
- определить коэффициент повышения плотности записи, полученный за счет использования канального кода;
- изобразить структурную схему системы кодирования.

Варианты заданий:

Вариант	Характеристики входного сигнала				Характеристики канала		Код РС		
	M/S	$f_{\text{д}}$, кГц	$N_{\text{кв}}$	Хар-ка квантования	p	l	[N,K]	q	$g(x)$
1	S	44,1	16	линейная	10^{-4}	18	[12,8]	2^4	x^4+x^3+1
2	S	44,1	12	нелинейная	10^{-4}	16	[14,12]	2^4	x^4+x+1
3	S	48	16	линейная	10^{-5}	20	[10,8]	2^4	x^4+x+1
4	M	96	12	линейная	10^{-6}	12	[6,4]	2^3	x^3+x^2+1
5	M	48	16	линейная	10^{-5}	22	[10,8]	2^4	x^4+x^3+1
6*	S	48	18	линейная	10^{-5}	12	[22,18]	2^6	x^6+x+1
7*	S	48	12	нелинейная	10^{-5}	25	[16,12]	2^6	x^6+x+1
8*	S	48	24	линейная	10^{-5}	20	[20,16]	2^6	x^6+x+1
9	M	44,1	12	нелинейная	10^{-4}	12	[6,4]	2^3	x^3+x^2+1
10	S	96	20	линейная	10^{-4}	15	[14,10]	2^4	x^4+x^3+1
11	M	32	12	нелинейная	10^{-6}	22	[6,4]	2^3	x^3+x^2+1
12*	S	44,1	12	нелинейная	10^{-4}	18	[12,8]	2^6	x^6+x+1
13*	M	48	24	линейная	10^{-3}	20	[8,4]	2^6	x^6+x+1
14*	S	48	24	линейная	10^{-4}	16	[10,8]	2^6	x^6+x+1
15	S	48	20	линейная	10^{-3}	12	[14,10]	2^4	x^4+x+1
16	S	96	16	линейная	10^{-3}	20	[12,8]	2^4	x^4+x+1
17*	S	48	16	линейная	10^{-4}	18	[6,4]	2^8	$x^8+x^4+x^3+x^2+1$
18*	S	44,1	24	линейная	10^{-3}	16	[10,6]	2^8	$x^8+x^4+x^3+x^2+1$
19*	S	48	16	линейная	10^{-5}	20	[14,12]	2^8	$x^8+x^4+x^3+x^2+1$
20*	S	96	24	линейная	10^{-4}	18	[16,12]	2^8	$x^8+x^4+x^3+x^2+1$
21*	M	48	24	линейная	10^{-4}	12	[11,9]	2^8	$x^8+x^4+x^3+x^2+1$
22	M	48	12	нелинейная	10^{-4}	18	[11,9]	2^4	x^4+x^3+1
23*	M	96	18	линейная	10^{-4}	15	[11,9]	2^6	x^6+x+1
24*	S	48	12	нелинейная	10^{-3}	22	[20,16]	2^6	x^6+x+1
25*	S	48	18	линейная	10^{-4}	16	[10,6]	2^6	x^6+x+1

*Требуется найти только первые 31 ненулевых символов поля GF(q)

1. Порядок выполнения работы

1.1. *Кодами Рида–Соломона* над полем $GF(q)$ называются не двоичные $[N,K]$ -коды длины $N = q-1$. Разумеется, q всегда больше 2. *Порождающий многочлен кода РС*, исправляющего t ошибок, задается формулой:

$$g(x) = (x-\alpha)(x-\alpha^2) \dots (x-\alpha^{2^t}).$$

Коды РС могут быть *укороченными* ($N < q-1$), а также *расширенными* путем добавления общей проверки на четность, как все коды, используемые в данной работе. *Порождающий многочлен расширенного кода РС* задается формулой:

$$g(x) = (x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2) \dots (x-\alpha^{2^t-1}),$$

а *проверочная матрица H* такого кода выглядит следующим образом:

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha^{N-1} & \alpha^{N-2} & \alpha^{N-3} & \dots & \alpha & 1 \\ \alpha^{2(N-1)} & \alpha^{2(N-2)} & \alpha^{2(N-3)} & \dots & \alpha^2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{(2^t-1)(N-1)} & \alpha^{(2^t-1)(N-2)} & \alpha^{(2^t-1)(N-3)} & \dots & \alpha^{2^t-1} & 1 \end{vmatrix}$$

где α – *примитивный элемент* поля $GF(q)$, которому принадлежат символы кодовых слов кода РС. Процедура отыскания элементов поля $GF(q)$ подробно описана в руководстве к практической работе №1.

1.2. *Структура кодового слова* определяется исходя из следующих соображений. Элементами заданного поля $GF(q)$ являются m -разрядные двоичные наборы (m – степень порождающего многочлена $g(x)$ поля $GF(q)$, где $q = 2^m$). Разрядность квантования $N_{кв}$ в данной работе всегда кратна m . Таким образом, каждый отсчет можно представить в виде некоторого числа i m -разрядных символов ($i = 2,3,4$). Например, 16-разрядный отсчет представляется в виде четырех 4-разрядных символов, 18-разрядный отсчет – в виде трех 6-разрядных символов и т.п.

Далее принимается во внимание количество кодовых (N) и информационных K символов в кодовом слове кода РС, а также характер входного сигнала – моно (M) или стерео (S). Если $N = 12$, $K = 8$, отсчет представлен четырьмя 4-разрядными символами и сигнал стереофонический (S), то кодовое слово будет выглядеть, как показано на рис. 1.1а, если сигнал монофонический (M), то как показано на рис. 1.1б.

1.3. **Перемежение данных** является инструментом преобразования пакетов ошибок, существующих в канале передачи/записи данных, в случайные ошибки. **Длина перемежения L** должна быть не меньше, чем максимальная длина l пакета ошибок ($L > l$). Длину перемежения можно выбрать на единицу больше максимальной длины пакета ошибок - $L = l + 1$. В работе допускается использовать простейшую схему перемежения, показанную на рис. 1.2.

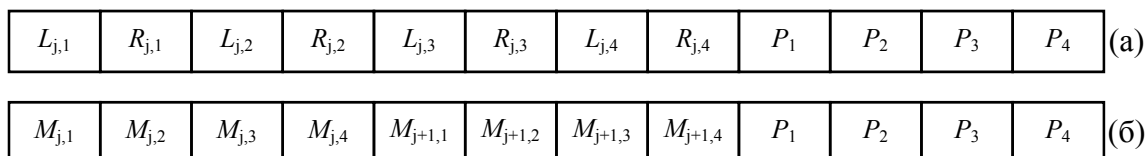


Рис. 1.1. Структура кодового слова кода РС

при стереофоническом (а) и монофоническом (б) входном сигнале j – порядковый номер отсчета, L – отсчет левого канала стереофонического сигнала, R – отсчет правого канала стереофонического сигнала, M – отсчет монофонического сигнала, P – проверочные символы кодового слова



Рис. 1.2. Схема перемежения

Размер D блока данных в символах равен произведению длины перемежения L на количество символов N в кодовом слове:

$$D = N \times L \text{ (символов).}$$

1.4. **Канальный код** выбирается в [1] исходя из разрядности символа кода РС. Если символ 4-разрядный, то можно выбрать ка-

нальный код 4/5 и кодировать им каждый символ, можно выбрать код 2/3 и кодировать им половинки символов, можно выбрать код 8/10 и кодировать им пары символов.

1.5. Чтобы выбрать *длину синхрогруппы* L_{CG} , нужно определить количество канальных бит в *блоке записи* $N_{\text{бл}}$. Для этого достаточно размер блока данных в символах D умножить на количество бит (разрядов) в символе m и разделить на скорость канального кода R_k :

$$N_{\text{бл}} = D \cdot m / R_k.$$

Тогда расчетная длина синхрогруппы

$$L_{CG} \sim 2 \log_2 N_{\text{бл}}$$

Реальная длина синхрогруппы L_{CG} определяется после выбора ее конфигурации. Конфигурация синхрогруппы, если она не приводится в описании канального кода, должна соответствовать правилам кодирования данного канального кода, но принадлежать к числу редко встречающихся в потоке данных. Например, содержать несколько интервалов максимальной длины подряд.

1.6. **Скорость потока данных пользователя** для монофонического сигнала:

$$V_n = f_d \times N_{\text{кв}} \text{ (кбит/с)},$$

для стереофонического:

$$V_n = 2 f_d \times N_{\text{кв}} \text{ (кбит/с)}.$$

Общая скорость потока данных рассчитывается с учетом добавления к основным данным проверочных символов кода РС, т.е. для отыскания ее достаточно разделить скорость потока данных пользователя V_n на скорость кода РС R_{PC} :

$$V_o = \frac{V_n}{R_{PC}} = \frac{V_n}{\frac{K}{N}} = \frac{N \cdot V_n}{K}$$

Для определения *скорости потока данных на выходе системы кодирования* в канальных битах нужно вначале определить *скорость следования блоков данных* $V_{\text{бл}}$. Для этого необходимо общую скорость потока данных V_o разделить на размер D блока данных в символах и на количество бит m в символе:

$$V_{\text{бл}} = \frac{V_o}{m \cdot D}$$

Затем нужно определить суммарное количество канальных бит в блоке записи с учетом добавленной синхрогруппы D_{Σ} :

$$D_{\Sigma} = N_{\text{бл}} + L_{CG}.$$

Тогда скорость потока данных на выходе системы кодирования определяется по формуле:

$$V_K = V_{\text{бл}} \times D_{\Sigma}$$

1.7. Расчет **вероятности отказа от декодирования** $P_{\text{отк}}$ для случая, когда декодер исправляет t_n ошибок в кодовом слове, выполняется по методике, изложенной в руководстве к лабораторной работе №1, т.е. по формуле

$$P_{\text{отк}} = 1 - \sum_{i=0}^n \alpha_i p^i (1-p)^{n-i}$$

где p – вероятность появления в канале искаженного символа, а $\alpha_i = C_i^n$ – число картин ошибок кратности i в кодовом слове кода РС из N символов.

Примечание. В данной работе ошибочным символом считается весь m -разрядный набор двоичных символов, а не отдельный бит, как в лабораторной работе №1.

Для отыскания **среднего числа неисправленных ошибок** в секунду достаточно вероятность ошибки декодирования $P_{\text{отк}}$ умножить на общую скорость потока данных V_O , поделенную на количество бит m в одном символе:

$$N_{\text{ош}}(\text{с}) = P_{\text{отк}} \times V_O/m,$$

то же в минуту:

$$N_{\text{ош}}(\text{мин}) = 60N_{\text{ош}}(\text{с})$$

то же в час:

$$N_{\text{ош}}(\text{ч}) = 60N_{\text{ош}}(\text{мин}) = 3600 N_{\text{ош}}(\text{с}).$$

1.8. **Коэффициент повышения плотности записи** $K = (d+1) \cdot \frac{n}{m}$,

полученный за счет использования данного канального кода, указан в описании канального кода в [1].

1.9. **Структурная схема системы кодирования** стереофонического звукового сигнала выглядит, как показано на рис. 1.3.

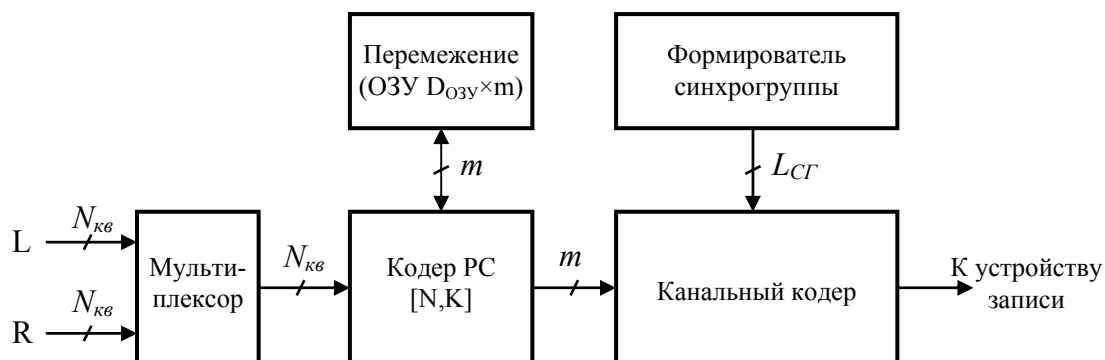


Рис. 1.3. Структурная схема системы кодирования

Примечания.

- 1. Количество ячеек памяти $D_{OЗУ}$ оперативного запоминающего устройства (ОЗУ), используемого для выполнения перемежения данных, выбирается как наименьшая степень 2, превышающая величину D размера блока данных. Например, если $D = 200$, то $D_{OЗУ} = 2^8 = 256$.**
- 2. Если по условиям задачи кодированию подвергается монофонический сигнал, то мультиплексор в структурной схеме кодера, разумеется, отсутствует.**

2. Пример выполнения

Пусть задан входной монофонический сигнал, с частотой дискретизации $f_d = 48$ кГц, квантование 12-разрядное нелинейное. Вероятность появления искаженного символа в канале записи/воспроизведения $p = 10^{-4}$, максимальная длина пакетов ошибок $l = 8$ символов. Для защиты от ошибок используется код РС [6,4] над полем $GF(2^3)$ с порождающим многочленом $g(x) = x^3 + x^2 + 1$.

2.1. Заданный код РС[6,4] является укороченным ($N=6 < q-1=2^3-1=7$) и одновременно расширенным за счет добавления общей проверки на четность (по условиям задачи). Он способен исправить $t = \frac{N-K}{2} = \frac{6-4}{2} = 1$ ошибку. Следовательно, его порождающий многочлен:

$$G(X) = (x-1)(x-\alpha),$$

а проверочная матрица

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha^5 & \alpha^4 & \alpha^3 & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

где α – **примитивный элемент** поля $GF(2^3)$, которому принадлежат символы кодовых слов кода РС[6,4].

Элементы поля $GF(2^3)$, как и в лабораторной работе №1, можно отыскать двумя способами.

Первый способ – с помощью регистра сдвига с обратными связями, осуществляющего последовательное деление степеней x , отождествляемого примитивному элементу α поля $GF(2^3)$, начиная от x^0 до x^6 , на порождающий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$.

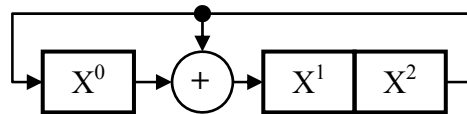
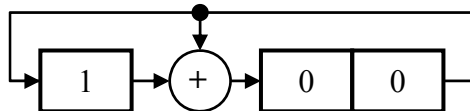
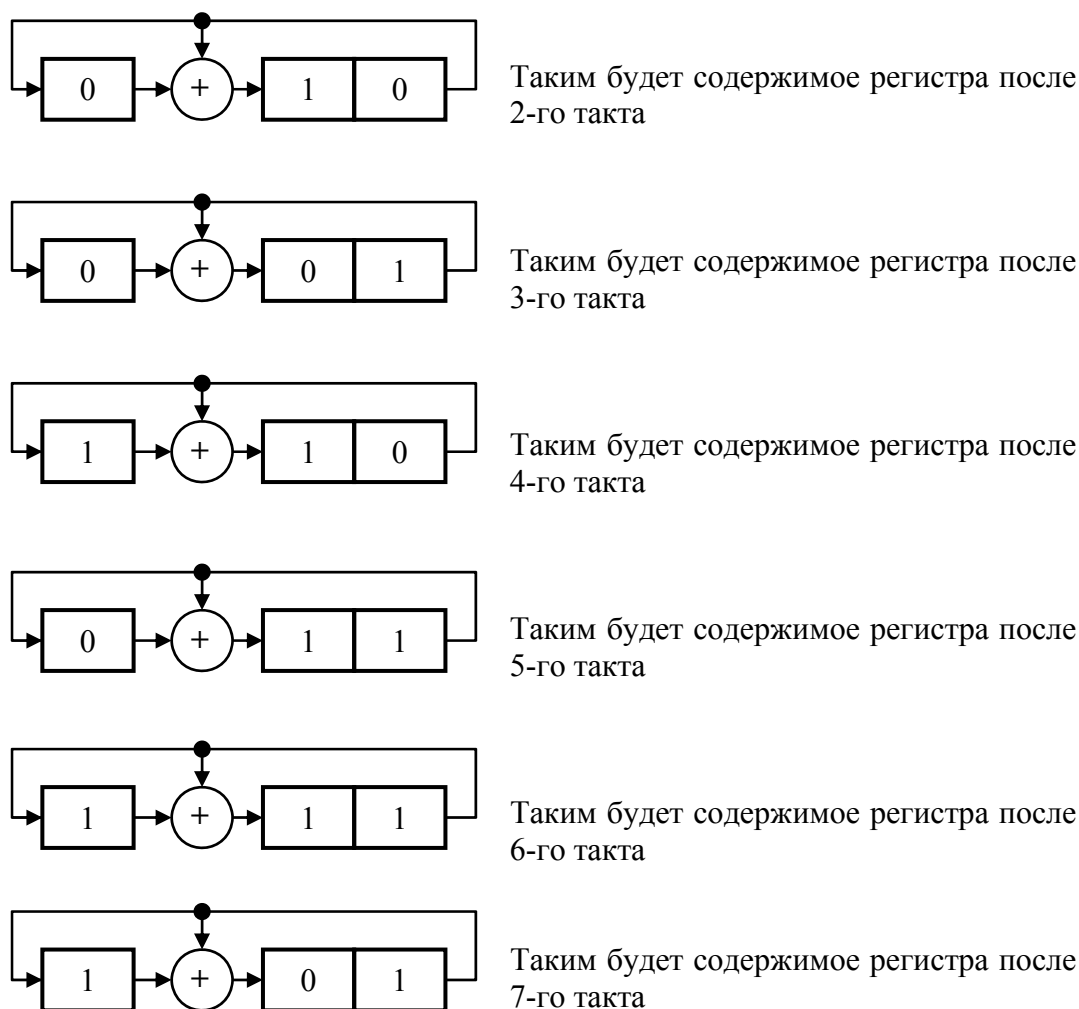


Рис. 2.1. Схема деления на многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$.

Для того, чтобы найти $q-1 = 2^3 - 1 = 7$ ненулевых элементов поля $GF(2^3)$, нужно выполнить 7 сдвигов вправо «единицы», которая записывается первым тактовым импульсом в крайнюю левую ячейку регистра, соответствующую x^0 .



Таким будет содержимое регистра после 1-го такта



Получим 7 трехразрядных наборов двоичных символов, которые соответствуют 7 ненулевым элементам поля $GF(2^3)$, и которые могут быть представлены в виде двоичных наборов, в виде степеней α и в виде многочленов от x :

$$100 - \alpha^0 \rightarrow x^0 = 1;$$

$$010 - \alpha^1 \rightarrow x;$$

$$001 - \alpha^2 \rightarrow x^2;$$

$$110 - \alpha^3 \rightarrow x+1;$$

$$011 - \alpha^4 \rightarrow x^2+x;$$

$$111 - \alpha^5 \rightarrow x^2+x+1;$$

$$101 - \alpha^6 \rightarrow x^2+1.$$

Второй способ состоит в непосредственном делении x в соответствующей степени на многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$ и представлении остатка от деления в двоичной форме.

$$x^0 \rightarrow 100$$

$$x^1 \rightarrow 010$$

$$x^2 \rightarrow 001$$

$$x^3 = x + 1 \rightarrow 110$$

$$+ \frac{x^4}{x^4+x^2+x} \left| \frac{x^3+x+1}{x} \right.$$

$$x^2+x \rightarrow 011$$

$$+ \frac{x^5}{x^5+x^3+x^2} \left| \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \right.$$

$$x^3+x^2$$

$$+ \frac{x^3+x+1}{x^2+x+1} \rightarrow 111$$

$$+ \frac{x^6}{x^6+x^4+x^3} \left| \frac{x^3+x+1}{x^3+x+1} \right.$$

$$x^4+x^3$$

$$+ \frac{x^4+x^2+x}{x^3+x^2+x}$$

$$+ \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \rightarrow 101$$

Получим те же самые 7 троек двоичных чисел, которые соответствуют тем же 7 ненулевым элементам поля $GF(2^3)$, что и при первом способе:

$$100 - \alpha^0 \rightarrow x^0 = 1;$$

$$010 - \alpha^1 \rightarrow x;$$

$$001 - \alpha^2 \rightarrow x^2;$$

$$110 - \alpha^3 \rightarrow x+1;$$

$$011 - \alpha^4 \rightarrow x^2+x;$$

$$111 - \alpha^5 \rightarrow x^2+x+1;$$

$$101 - \alpha^6 \rightarrow x^2+1.$$

Результаты вычислений заносятся в таблицу:

Таблица ненулевых элементов поля $GF(2^3)$

В виде двоичных наборов	В виде степеней α	В виде многочленов
100	α^0	1
010	α^1	x
001	α^2	x^2
110	α^3	$x+1$
011	α^4	x^2+x
111	α^5	x^2+x+1
101	α^6	x^2+1

2.2. Структура кодового слова выбирается исходя из того, что элементами заданного поля $GF(2^3)$ являются 3-разрядные двоичные наборы, разрядность квантования $N_{кв}$ в соответствии с заданием равна 12, входной сигнал является монофоническим, а количество информационных символов в кодовом слове кода РС[6,4] $K = 4$. Следова-

тельно, один 12-разрядный отсчет можно представить четырьмя 3-разрядными двоичными наборами, входящими в качестве информационных символов в одно кодовое слово кода РС[6,4], как показано на рис. 2.1.

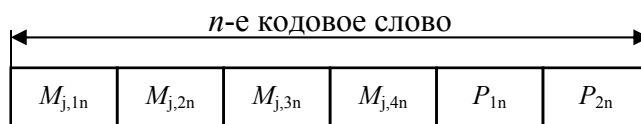


Рис. 2.1. Структура кодового слова кода РС[6,4]

j – порядковый номер отсчета, n – порядковый номер кодового слова; M – отсчет монофонического сигнала, P – проверочные символы кодового слова

2.3. Поскольку длина кодового слова кода РС[6,4] $N = 6$, а длина перемежения L должна быть больше максимальной длины пакета ошибок $l = 8$ по крайней мере на единицу, то можно бы выбрать $L = l+1 = 8+1 = 9$. Однако длину перемежения L лучше выбрать равной ближайшему четному числу, большему 8, т.е. 10. При этом условии *схема перемежения* будет выглядеть следующим образом:



Рис. 2.2. Схема перемежения

Размер D блока данных в символах равен произведению длины перемежения L на количество символов N в кодовом слове:

$$D = N \times L = 6 \times 10 = 60.$$

2.4. Поскольку разрядность символа кода РС $m = 3$, то в качестве **канального кода** удобнее всего выбрать **код ЗРМ** ($d=2, k=11$), в соответствии с которым производится замена 3-разрядных групп двоичных символов на 6-разрядные.

2.5. Для того чтобы определить **длину синхрогруппы** L_{CG} , нужно определить количество канальных бит в **блоке записи** $N_{\text{бл}}$. Для этого размер блока данных в символах $D = 60$ необходимо умножить на количество бит в символе $m = 3$ и разделить на скорость канального кода R_k , которая у кода ЗРМ равна $\frac{1}{2}$:

$$N_{\text{бл}} = D/R_k = 60 \cdot 3 \cdot 2 = 360$$

Тогда **примерная длина синхрогруппы**

$$L_{CG} \sim 2 \log_2 N_{\text{бл}} \approx 16.$$

Чтобы определить **точную длину синхрогруппы** и ее конфигурацию, нужно вспомнить, что максимальное число «нулей» между двумя соседними «единицами» у кода ЗРМ $k = 11$, а минимальное $d = 2$. Для того чтобы конфигурация синхрогруппы редко встречалась в потоке данных, обычно при ее формировании используют максимальные интервалы, которые сами по себе встречаются реже прочих интервалов. Для кода ЗРМ это интервал $T_{\text{max}} = k+1 = 12T_k$, где T_k – длительность канального бита, а T_{max} – максимальный интервал между двумя соседними перепадами уровня, который получается после модуляции сформированной последовательности канальных бит по методу NRZI.

Чтобы создать конфигурацию, которая в потоке данных не встречается совсем, лучше использовать не один максимальный интервал, а два подряд. Кроме того, как можно видеть из таблицы преобразования кода ЗРМ, кодовые слова кода ЗРМ заканчиваются не менее чем одним «нулем», а по правилам кодирования, минимальное число «нулей» между двумя соседними «единицами» должно быть равно 2. Следовательно, перед первой «единицей» синхрогруппы должен быть, по меньшей мере, один «нуль».

Далее, кодовое слово кода ЗРМ может начинаться с «единицы», поэтому, после последней «единицей» синхрогруппы должно быть, по меньшей мере, два «нуля».

Таким образом, конфигурацию синхрогруппы можно выбрать такой, как показано на рис. 2.3.

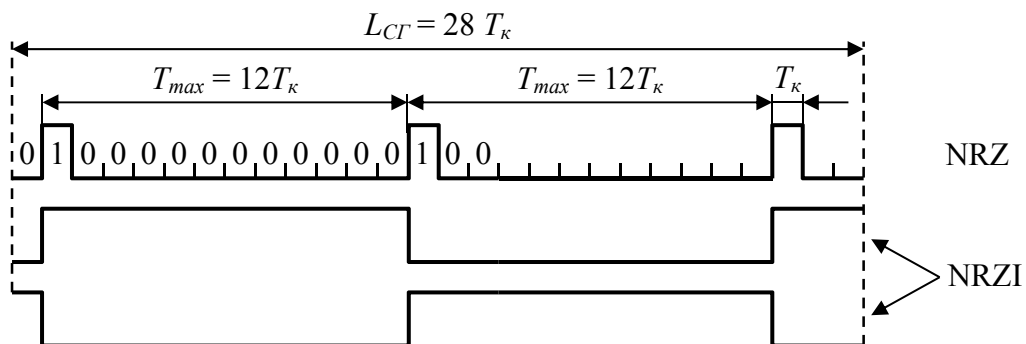


Рис. 2.3. Конфигурация синхрогруппы (СГ)

2.6. Скорость потока данных пользователя для заданного стереофонического сигнала:

$$V_n = 2 f_d \times N_{кв} = 48 \cdot 12 = 576 \text{ (кбит/с)}.$$

Общая скорость потока данных при заданных условиях:

$$V_o = \frac{N \cdot V_n}{K} = \frac{6 \cdot 576}{4} = 864 \text{ (кбит/с)}.$$

Для определения **скорости потока данных на выходе системы кодирования в канальных битах** определим вначале скорость следования блоков данных $V_{бл}$. Для этого необходимо общую скорость потока данных V_o разделить на размер D блока данных в символах и на количество бит m в символе:

$$V_{бл} = \frac{V_o}{D \cdot m} = \frac{864 \cdot 10^3}{60 \cdot 3} = 4800 \text{ (бл/с)}$$

Затем определим суммарное количество канальных бит в блоке записи с учетом добавленной синхрогруппы D_Σ :

$$D_\Sigma = N_{бл} + L_{СГ} = 360 + 28 = 388.$$

Тогда скорость потока данных на выходе системы кодирования V_K будет равна:

$$V_K = V_{бл} \times D_\Sigma = 4,8 \times 388 = 1862,4 \text{ (кбит/с)}.$$

2.7. Вероятность отказа от декодирования $P_{отк}$ рассчитывается по формуле:

$$P_{отк} = 1 - \sum_{i=0}^n \alpha_i p^i (1-p)^{n-i}$$

Для заданного кода РС длины $N = 6$, исправляющего одну ошибку, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 6$. При заданной вероятности ошибки в канале $p = 10^{-4}$, вероятность ошибки $P_{ош}$ декодирования составит:

$$P_{отк} = 1 - (1-p)^6 - 6p(1-p)^5 = 1 - 0,9994 - 0,00059997 = 0,00000003 = 3 \cdot 10^{-8}$$

Среднее число неисправленных ошибок в секунду равно:

$$N_{ош}(с) = P_{отк} \times V_o/m = 3 \cdot 10^{-8} \times 864000/3 = 8,64 \cdot 10^{-3} \text{ (ош/сек)}$$

Среднее число неисправленных ошибок в минуту равно:

$$N_{ош}(\text{мин}) = 60 N_{ош}(с) = 60 \times 8,64 \cdot 10^{-3} = 0,5184 \text{ (ош/мин)}$$

Среднее число неисправленных ошибок в час равно:

$$N_{ош}(\text{ч}) = 60 N_{ош}(\text{мин}) = 60 \cdot 0,5184 \approx 31,1 \text{ (ош/ч)}.$$

2.8. Коэффициент повышения плотности записи, полученный за счет использования канального кода ЗРМ $K = (d+1) \cdot \frac{n}{m} = 1,5$ [1].

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М.А.Бонч-Бруевича**

Кафедра РПВЭС и ЭА

Студент _____

Группа _____

ОТЧЕТ

по практической работе № 4ЦЗ

Исследование системы кодирования цифрового звукового сигнала для записи на носитель

Вариант _____

Исходные данные:

1. *Характеристики входного цифрового звукового сигнала:*

- _____ (стерео/моно);
- частота дискретизации $f_d =$ _____ кГц;
- разрядность квантования $N_{кв} =$ _____;
- характеристика квантования _____ (линейная/нелинейная).

2. *Характер искажений, существующий в канале записи/воспроизведения:*

- вероятность появления искаженного символа $p =$ _____;
- максимальная длина пакетов ошибок $l =$ _____.

3. *Характеристики кода Рида-Соломона, расширенного за счет добавления общей проверки на четность, и используемого для защиты от ошибок:*

- _____ $[N, K]$;
- порядок поля $GF(q)$, из которого берутся коэффициенты кодовых многочленов (символы кодовых слов) $q =$ _____;
- порождающий многочлен поля $GF(q)$ $g(x) =$ _____.

Результаты расчетов:

1. **Порождающий многочлен** кода РС $[\quad , \quad]$:

$G(X) =$ _____

Проверочная матрица:

Таблица ненулевых элементов поля $GF(2^3)$

В виде двоичных наборов	В виде степеней α	В виде многочленов

2. Структура кодового слова кода РС [,]:

3. Длина перемежения $L = \underline{\hspace{2cm}}$;

Размер блока данных $D = N \times L = \underline{\hspace{4cm}}$.

Схема перемежения:

4. Канальный код _____ ($d = _$, $k = _$), $R_k =$

5. Количество канальных символов в блоке записи $N_{bl} = D \cdot m / R_k =$

Длина синхрогруппы (расчетная) $L_{CG} \sim 2 \log_2 N_{bl} =$

Конфигурация синхрогруппы: (описать логику выбора, изобразить временные диаграммы и указать реальную длину)

6. **Скорость потока данных пользователя** для заданного стереофонического сигнала:

$$V_n = 2 f_{\partial} \times N_{кв} =$$

или монофонического сигнала:

$$V_n = f_{\partial} \times N_{кв} =$$

Общая скорость потока данных:

$$V_o = \frac{N \cdot V_n}{K} =$$

Скорость следования блоков данных

$$V_{\text{бл}} = \frac{V_0}{D \cdot m} =$$

Суммарное количество канальных бит в блоке записи с учетом добавленной синхрогруппы:

$$D_{\Sigma} = N_{\text{бл}} + L_{\text{СГ}} =$$

Скорость потока данных на выходе системы кодирования:

$$V_K = V_{\text{бл}} \times D_{\Sigma} =$$

7. Расчет вероятности ошибки декодирования $P_{\text{ош}}$ для случая, когда декодер исправляет ___ ошибки при $\alpha_i = C_i^n$ (для $i = 0, 1 \dots t$)

$$\alpha_0 =$$

$$\alpha_1 =$$

$$\alpha_2 =$$

$$\alpha_3 =$$

$$P_{\text{ош}} = 1 - \sum_{i=0}^n \alpha_i p^i (1-p)^{n-i} =$$

Среднее число неисправленных ошибок в секунду равно:

$$N_{\text{ош}}(\text{с}) = P_{\text{ош}} \times V_0/m =$$

Среднее число неисправленных ошибок в минуту равно:

$$N_{\text{ош}}(\text{мин}) = 60N_{\text{ош}}(\text{с}) =$$

Среднее число неисправленных ошибок в час равно:

$$N_{\text{ош}}(\text{ч}) = 60N_{\text{ош}}(\text{мин}) =$$

8. Коэффициент повышения плотности записи, полученный за счет использования канального кода

$$K = \underline{\hspace{2cm}}$$

9. Структурная схема полученной системы кодирования

10. Выводы

Работа выполнена « ___ **» _____ 20** ___ **г.**

(подпись преподавателя)

Отчет проверен « ___ **» _____ 20** ___ **г.**

(подпись преподавателя)