

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ**  
**Федеральное государственное**  
**образовательное бюджетное учреждение**  
**высшего профессионального образования**  
**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ**  
**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ**  
**им. проф. М.А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»**

---

*А.Д. Андреев, Л.М. Черных*

**ФИЗИКА**  
**КОЛЕБАНИЯ**

Конспект лекций

**СПб ГУТ )))**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ**  
**2013**

УДК 537.8  
ББК В33  
А 65

Рецензент  
Профессор кафедры физики СПбГМТУ С.А.Шейнерман

*Рекомендовано к печати  
редакционно-издательским советом СПбГУТ*

**Андреев, А.Д.**  
Физика. Колебания. Конспект лекций. *Андреев А.Д., Черных  
Л.М.* СПб.: Издательство СПбГУТ, 2013. – 38с.

Содержит теоретический материал по разделу «Колебания» общего курса физики. Предназначается для студентов технических специальностей всех форм обучения. Рекомендуются для самостоятельной работы студентов при подготовке к упражнениям, коллоквиумам и экзаменам.

**УДК 537.8  
ББК В33**

© Андреев А.Д., Черных Л.М., 2013  
© Федеральное государственное образовательное  
бюджетное учреждение высшего профессионального  
образования «Санкт-Петербургский  
государственный университет телекоммуникаций  
им. проф. М.А. Бонч-Бруевича», 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Свободные колебания в механической системе.....	4
1.1. Общие понятия и определения.....	4
1.2. Свободные колебания без затухания в механической системе.....	5
1.3. Свободные колебания без затухания математического маятника.....	8
1.4. Свободные колебания без затухания физического маятника.....	9
1.5. Свободные колебания с затуханием в механической системе. Аперидический процесс.....	11
2. Свободные колебания в электрическом контуре.....	15
2.1. Физические основы генерации свободных колебаний в электрическом контуре.....	15
2.2. Свободные колебания без затухания в электрическом контуре.....	16
2.3. Свободные колебания с затуханием в электрическом контуре. Аперидический разряд конденсатора.....	17
3. Сложение колебаний.....	19
3.1. Представление гармонических колебаний с помощью вращающегося вектора.....	19
3.2. Сложение колебаний одинаковой частоты и одинакового направления.....	20
3.3. Сложение колебаний близких частот и одинакового направления.....	22
3.4. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.....	24
4. Вынужденные колебания.....	28
4.1. Вынужденные колебания в электрическом контуре.....	28
4.2. Цепи переменного тока.....	34
4.3. Вынужденные колебания в механической системе.....	35
Литература.....	38

## **ВВЕДЕНИЕ**

Колебания – процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Колебания свойственны многим явлениям природы: высокая степень периодичности вращения планет вокруг Солнца и связанная с этим смена времён года; вращение Земли вокруг своей оси и связанные с этим колебания освещенности днём и ночью; движение Луны вокруг Земли, вызывающее приливы и отливы на океанском побережье.

В колебательных процессах различной природы обнаруживаются закономерности, которые описываются общими математическими методами. Поэтому результаты, полученные при исследовании колебаний и волн в механике, могут быть перенесены в оптику или радиотехнику.

Из множества видов периодических процессов в физике выделяют механические и электромагнитные колебания, играющие большую роль в технике и в жизнедеятельности человека. Ниже будут рассмотрены наиболее важные с технической точки зрения свободные и вынужденные колебания в механической системе и в электрическом контуре.

### **1. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ**

#### **1.1. Общие понятия и определения**

Колебания называются периодическими, если значения физических величин, характеризующих механическое состояние системы, повторяются через равные промежутки времени. Напомним, что под механическим состоянием системы следует понимать совокупность координат и скоростей тел, входящих в систему [1]. Таким образом, повторение состояния материальной точки, совершающей колебания, это не только повторение той же самой величины отклонения от положения равновесия, но и повторение величины и направления её скорости.

На рис.1 показаны три простейшие системы, в которых можно наблюдать механические колебания: тело на пружине, совершающее колебания в вертикальном направлении, классический маятник и шарик, катающийся по вогнутой поверхности. Общее во всех трёх случаях – наличие силы, направленной к положению равновесия системы. В первом случае это результирующая сил тяжести и упругости. Во втором случае это результирующая сил натяжения нити и тяжести. В третьем случае - результирующая сил реакции опоры и тяжести, также направленная к положению равновесия. В последних двух случаях результирующие силы, аналогичные по действию с упругой силой, называют квазиупругими силами.

Таким образом, наличие в системе упругой или квазиупругой силы, направленной к положению равновесия, следует считать необходимым условием для свободных колебаний в данной системе.

Периодом колебаний  $T$  называется минимальное время, через которое состояние системы повторяется.

Частотой колебаний называется величина

$$\nu = 1/T, \quad (1.1)$$

равная числу колебаний за единицу времени.

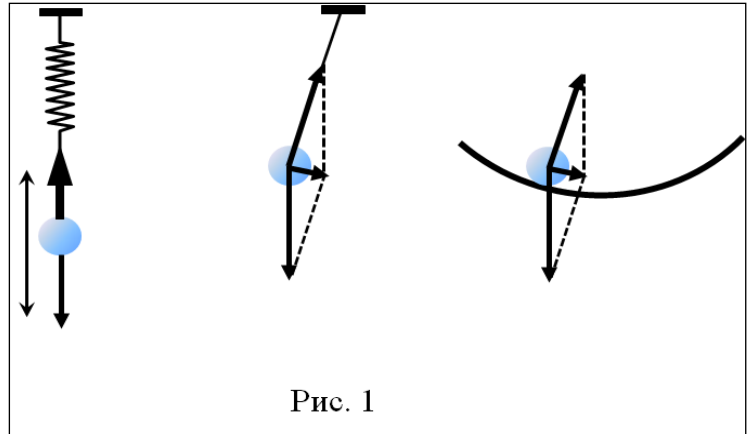


Рис. 1

Наиболее важными являются гармонические колебания, для которых величина, характеризующая их, например отклонение материальной точки от положения равновесия  $x(t)$ , изменяется во времени по законам синуса или косинуса. В этом случае скорость материальной точки  $dx/dt = \dot{x}$  и её ускорение  $d^2x/dt^2 = \ddot{x}$  будут также изменяться по гармоническому закону.

На практике колебания часто бывают гармоническими или могут быть представлены как результат суперпозиции нескольких или бесконечного числа гармонических колебаний.

## 1.2. Свободные колебания без затухания в механической системе

Свободными называются колебания, возникающие в системе, предоставленной самой себе после некоторого внешнего воздействия, выведшего систему из состояния устойчивого равновесия.

На рис.2 показана такая система, состоящая из шарика массой  $m$  и горизонтально расположенной пружины жесткостью  $k$ , прикрепленной к неподвижной стене. Пусть  $x$  – смещение центра инерции шарика от положения равновесия. Выведенный из положения равновесия ( $x=0$ ) в результате сжатия пружины ( $x < 0$ ) или её растяжения ( $x > 0$ ) шарик будет совершать колебания в горизонтальной плоскости.

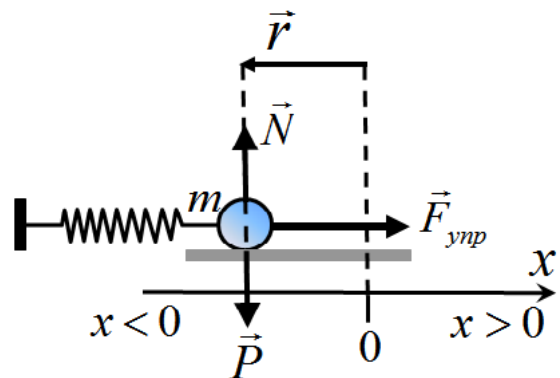


Рис. 2

Пусть масса пружины пренебрежимо мала по сравнению с массой шарика. Если считать силу трения равной нулю, то по 2-му закону Ньютона ускорение шарика равно:

$$\vec{a} = \frac{1}{m}(\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{упр}}), \quad (1.2)$$

где  $\vec{P}$  - сила тяжести шарика;  $\vec{N}$  - сила реакции опоры;  $\vec{F}_{\text{упр}}$  - сила упругости.

Сила упругости направлена к положению равновесия и при небольших деформациях пружины пропорциональна смещению  $\vec{r}$  шарика от положения равновесия:

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{r}; \quad (\vec{F}_{\text{упр}})_x = -kx$$

Проецируя (1.2) на ось  $x$ , и обозначая проекцию вектора ускорения  $(\vec{a})_x = \ddot{x}$ , получим уравнение второго закона Ньютона для шарика в виде:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(0 + 0 - kx) = -\frac{k}{m}x$$

Коэффициент  $k/m$  - положительное число. Введём обозначение

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2. \quad (1.3)$$

Таким образом, получаем линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.4)$$

В физике систему, описываемую уравнением (1.4), называют гармоническим осциллятором. Нетрудно убедиться, что решение уравнения (1.4) имеет вид гармонического колебания:

$$x = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.5)$$

где  $a_0$  и  $\varphi_0$  - постоянные величины. Их значения определяются начальным воздействием при выведении системы из положения равновесия. Величина  $a_0$ , равная максимальному значению отклонения от положения равновесия, называется амплитудой колебаний (рис. 3). Величина

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 \quad (1.6)$$

называется фазой колебаний,  $\varphi_0$  - начальная фаза колебаний, т.е.

фаза колебаний в момент времени  $t = 0$ . Таким образом, начальная фаза колебаний зависит от выбора начала отсчета времени. Величина, равная скорости изменения фазы, называется циклической или круговой частотой:

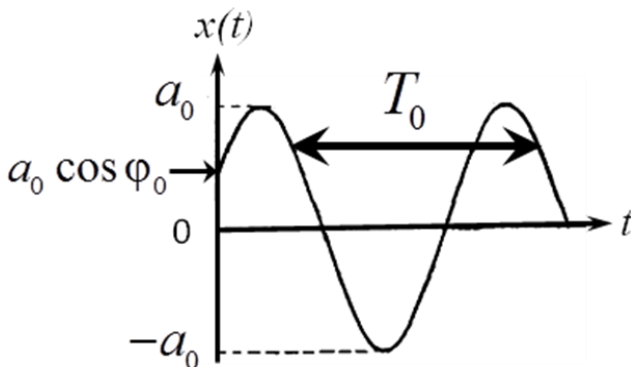


Рис. 3

$$\omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.7)$$

Так как фаза линейно зависит от времени, то

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Изменению фазы  $\Delta\varphi = 2\pi$  соответствует промежуток времени, равный периоду колебаний  $\Delta t = T_0$ . Следовательно,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}. \quad (1.8)$$

Учитывая формулу (1.1), получаем связь циклической частоты с частотой колебаний.

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 \quad (1.9)$$

Из формул (1.8) и (1.3) находим

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.10)$$

Период колебаний шарика тем меньше (а частота, соответственно, тем больше), чем меньше его масса и чем больше коэффициент упругости пружины.

Из формул (1.8) – (1.10) следует, что период колебаний, частота и циклическая частота являются характеристиками системы, так как определяются её параметрами: массой шарика и коэффициентом жесткости пружины. Поэтому характеристики  $T_0, \nu_0, \omega_0$  называются собственным периодом, собственной частотой и собственной циклической частотой соответственно.

На рис.4 приведены графики зависимости от времени отклонения от положения равновесия  $x(t)$ , скорости шарика  $\dot{x}(t)$ , его потенциальной  $W_{\text{пот.}}(t)$  и кинетической  $W_{\text{кин.}}(t)$  энергии:

$$x = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -a_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$W_{\text{пот.}}(t) = k \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} k a_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$W_{\text{кин.}}(t) = m \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{2} m a_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

За начало отсчета времени ( $t=0$ ) взят момент прохождения шариком положения равновесия при его движении впра-

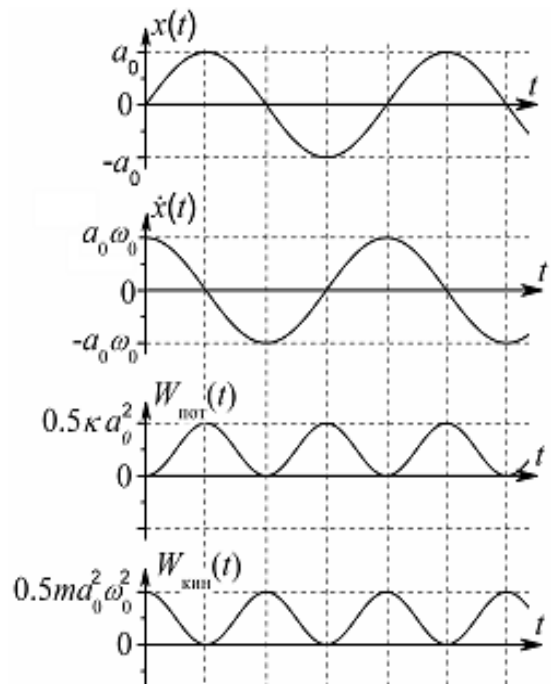


Рис. 4

во в сторону увеличения деформации растяжения пружины. Таким образом, начальная фаза колебаний на рис.4:  $\varphi_0 = -\pi/2$ . Из графиков также следует, что при прохождении положения равновесия ( $x=0$ ) скорость шарика и его кинетическая энергия максимальны, а потенциальная энергия равна нулю. Когда отклонение шарика максимально ( $|x|=a_0$ ), его скорость и кинетическая энергия становятся равными нулю, а потенциальная энергия достигает наибольшего значения.

Полная энергия шарика складывается из потенциальной и кинетической. В рассматриваемой системе на шарик действуют только консервативные силы. Поэтому для гармонических колебаний выполняется закон сохранения полной механической энергии [1]. Полная механическая энергия, равная максимальным значениям потенциальной и кинетической энергии, постоянна:

$$W_{\text{полн}} = W_{\text{пот}}(t) + W_{\text{кин}}(t) = \frac{1}{2}ka_0^2 = \frac{1}{2}ma_0^2\omega_0^2 = \text{const.} \quad (1.11)$$

### 1.3. Свободные колебания без затухания математического маятника

Математический маятник – система, состоящая из невесомой нерастяжимой нити длиной  $l$  и подвешенного к ней тела массой  $m$ , линейными размерами которого можно пренебречь по сравнению с длиной нити (рис.5).

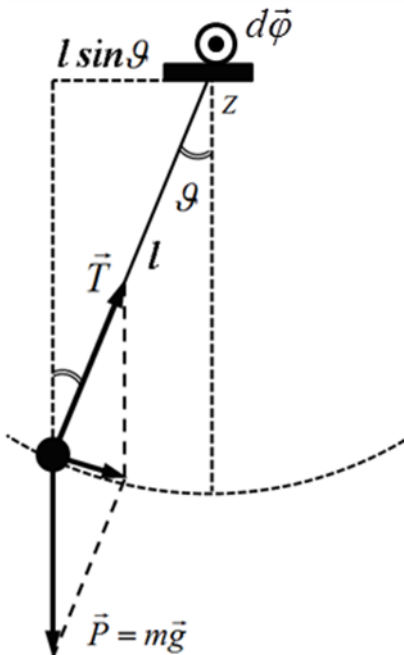


Рис. 5

Отклоним маятник от положения равновесия на угол  $\vartheta$  (рис.5) и отпустим его. Тогда под действием квазиупругой силы, результирующей силы натяжения нити и силы тяжести, маятник начнет движение к положению равновесия  $\vartheta=0$ . Под действием момента сил движение тела будет происходить по дуге окружности радиуса  $l$ . Согласно основному уравнению динамики вращательного движения угловое ускорение материальной точки равно:

$$\varepsilon = \frac{M_z}{I_z} \quad (1.12)$$

В (1.12)  $M_z$  - момент сил, действующих на материальную точку, относительно оси  $Z$ , перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку подвеса маятника;  $I_z$  - момент инерции материальной точки относительно оси  $Z$ :

$$I_z = ml^2 \quad (1.13)$$



Момент силы натяжения нити относительно оси  $Z$  равен нулю. Момент силы тяжести:

$$M_z = mgl \sin \vartheta. \quad (1.14)$$

На рис.5 при движении маятника слева направо вектор элементарного углового перемещения  $d\vec{\phi}$  направлен к нам перпендикулярно плоскости рисунка [1] и соответствует уменьшению угла отклонения маятника от положения равновесия ( $\vartheta$ ):

$$d\phi = -d\vartheta.$$

Угловое ускорение равно второй производной угла поворота  $\ddot{\phi}$  [1] по времени:

$$\varepsilon = \ddot{\phi} = -\ddot{\vartheta}. \quad (1.15)$$

Подстановка формул (1.13) – (1.15) в 1.12 приводит к дифференциальному уравнению:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0.$$

В случае малых отклонений математического маятника от положения равновесия  $\sin \vartheta \approx \vartheta$ . Вводя обозначение

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2, \quad (1.16)$$

получаем уравнение гармонического осциллятора (1.4):

$$\ddot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0.$$

Таким образом, при малых отклонениях математического маятника от положения равновесия его колебания происходят по гармоническому закону (1.5). Период колебаний согласно (1.16) будет равен:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{l/g}. \quad (1.17)$$

#### 1.4. Свободные колебания без затухания физического маятника

Абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести относительно неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через его центр инерции, называется физическим маятником [1]. На рис.6 изображён физический маятник, центр инерции которого находится в точке  $C$ . Расстояние от центра инерции до оси вращения равно  $l$ . Ось вращения  $Z$  направлена на наблюдателя. Если маятник отклонить от положения равновесия на угол  $\vartheta$  (рис.6) и отпустить, он под действием квазиупругой силы начнет двигаться к положению равновесия ( $\vartheta = 0$ ). Траектория движения центра инерции - дуга окружности радиуса  $l$ . Момент силы тяжести относительно оси  $Z$ :

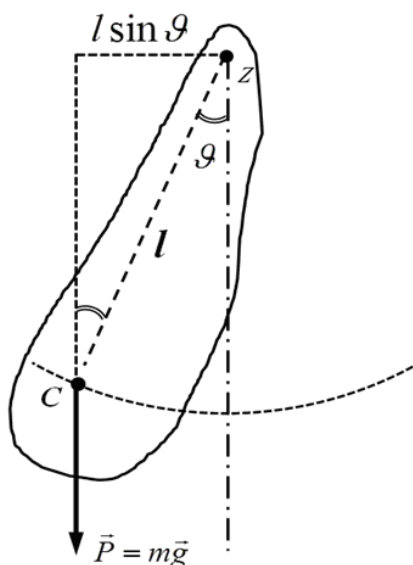


Рис. 6

$$M_Z = mgl \sin \vartheta.$$

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения угловое ускорение центра инерции равно:

$$\varepsilon = \frac{M_Z}{I_Z} = \frac{mgl \sin \vartheta}{I_Z}, \quad (1.18)$$

где  $I_Z$  - момент инерции твердого тела относительно оси  $Z$ . Подстановка формулы (1.15) в (1.18) приводит к дифференциальному уравнению:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{mgl}{I_Z} \sin \vartheta = 0.$$

В случае малых отклонений физического маятника от положения равновесия  $\sin \vartheta \approx \vartheta$ .

Вводя обозначение

$$\frac{mgl}{I_Z} = \omega_0^2, \quad (1.19)$$

получаем уравнение гармонического осциллятора (1.4):

Таким образом, при малых отклонениях физического маятника от положения равновесия его колебания происходят по гармоническому закону (1.5). При этом период колебаний согласно (1.19) будет равен:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{I_Z / mgl} \quad (1.20)$$

Из сравнения формул (1.20) для периода колебаний физического маятника и (1.17) для периода колебаний математического маятника видно, что математический маятник с длиной  $l_{\text{пр.}} = I_Z / ml$  будет иметь такой же период колебаний, как рассматриваемый физический маятник. Величина  $l_{\text{пр.}}$  называется приведённой длиной физического маятника, и формулу (1.20) записывают в следующем виде:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{l_{\text{пр.}} / g}$$

### 1.5. Свободные колебания с затуханием в механической системе. Аperiodический процесс

Во всякой реальной колебательной системе всегда присутствуют неконсервативные силы - силы трения, действие которых приводит к уменьшению полной механической энергии системы. В случае свободных колебаний, когда убыль энергии не восполняется за счет внешнего источника, происходит затухание колебаний.

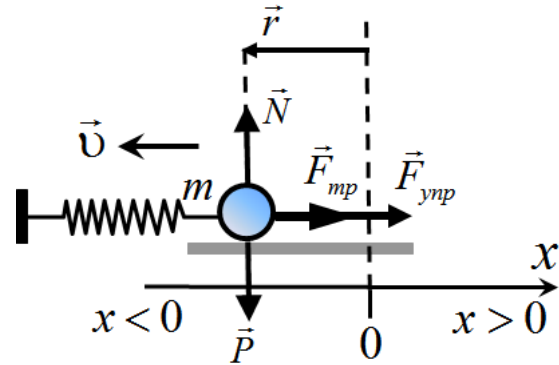


Рис. 7

В отличие от ранее рассмотренной модели, состоящей из шарика массой  $m$  и горизонтально расположенной пружины жесткостью  $k$  (см. рис.2), в модели на рис.7 учитывается наличие силы трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , направление которой противоположно направлению вектора скорости шарика  $\vec{v}$ .

На рис.7 используются ранее введенные (рис.2) обозначения:  $x$  – смещение центра инерции шарика от положения равновесия;  $x < 0$  – соответствует деформации сжатия, а  $x > 0$  – деформации растяжения пружины. Выведенный из положения равновесия, шарик будет совершать свободные колебания в горизонтальной плоскости.

Ограничимся рассмотрением небольших отклонений от положения равновесия и небольшой скоростью движения шарика, когда величину силы трения с хорошей степенью точности можно считать пропорциональной величине скорости:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu \vec{v}, \quad (1.21)$$

где  $\mu$  - коэффициент трения (сопротивления).

Пренебрегая массой пружины по сравнению с массой шарика, с учетом всех сил, действующих в нашей модели, запишем уравнение 2-ого закона Ньютона:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} (\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{тр}}), \quad (1.22)$$

где  $\vec{P}$  - сила тяжести шарика;  $\vec{N}$  - сила реакции опоры;  $\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{r}$  - сила упругости;  $\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu\vec{v}$  - сила трения.

Проецируя (1.22) на ось  $x$ , и учитывая, что  $(\vec{a})_x = \ddot{x}$ ,  $(\vec{F}_{\text{упр}})_x = -kx$ ,  $(\vec{F}_{\text{тр}})_x = -\mu(\vec{v})_x = -\mu\dot{x}$ , получим уравнение второго закона Ньютона для шарика в виде:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(0 + 0 - kx - \mu\dot{x}). \quad (1.23)$$

Введём обозначения:  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ,  $\frac{\mu}{m} = 2\alpha$ . Перепишем (1.23) следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.24)$$

Полученное уравнение представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Если сопротивлением среды (трением) можно пренебречь, то  $\mu = 0$ ,  $\alpha = 0$  и уравнение (1.24) переходит в уравнение гармонического осциллятора (1.4).

Решение уравнения (1.24) будем искать в виде колебательного процесса с амплитудой колебаний, изменяющейся во времени:

$$x(t) = a(t)\cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1.25)$$

где  $a(t)$ ,  $\omega$ ,  $\varphi_0$  - величины, которые необходимо определить. Запишем выражения для первой  $\dot{x}(t)$  и второй  $\ddot{x}(t)$  производных по времени:

$$\dot{x}(t) = \dot{a}\cos(\omega t + \varphi_0) - a\omega\sin(\omega t + \varphi_0);$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{a}\cos(\omega t + \varphi_0) - 2\dot{a}\omega\sin(\omega t + \varphi_0) - a\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0).$$

После подстановки полученных выражений в (1.24) и группировки членов получаем:

$$\left[ \ddot{a} + 2\alpha\dot{a} + (\omega_0^2 - \omega^2)a \right] \cos(\omega t + \varphi_0) - 2\omega[\dot{a} + \alpha a] \sin(\omega t + \varphi_0) = 0.$$

Т.к. синус и косинус не могут одновременно быть равными нулю, то выражения, стоящие в квадратных скобках, должны равняться нулю. Таким образом, получаем два уравнения:

$$1. \ddot{a} + 2\alpha\dot{a} + (\omega_0^2 - \omega^2)a = 0.$$

$$2. \dot{a} + \alpha a = 0.$$

Второе уравнение можно переписать:

$$\frac{da}{a} = -\alpha dt.$$

После интегрирования получаем:

$$\ln a = -\alpha t + const.$$

Константу интегрирования представим в виде  $\ln a_0$ , где  $a_0$  - любое вещественное число, смысл которого будет выяснен ниже. Потенцируя, получим для величины  $a(t)$  следующее выражение:

$$a(t) = a_0 e^{-\alpha t}. \quad (1.26)$$

Подстановка  $a(t)$ ,  $\dot{a} = -a_0\alpha e^{-\alpha t}$  и  $\ddot{a} = +a_0\alpha^2 e^{-\alpha t}$  в первое уравнение и сокращение на величину  $a_0 e^{-\alpha t}$  приводит к уравнению для определения  $\omega$ :

$$\alpha^2 - 2\alpha^2 + (\omega_0^2 - \omega^2) = 0$$

Отсюда:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (1.27)$$

Таким образом, если  $\alpha < \omega_0$ ,  $\omega$  - вещественная величина, и решение дифференциального уравнения (1.24) имеет вид:

$$x(t) = a_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1.28)$$

при любых значениях  $a_0$  и  $\varphi_0$ .

График функции (1.28) приведён на рис.8.

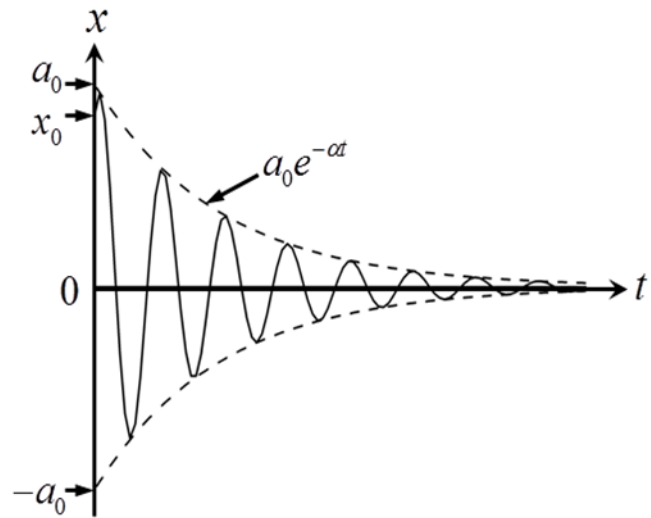


Рис. 8

Пунктирная кривая представляет собой зависимость амплитуды колебаний

$$a(t) = a_0 e^{-\alpha t}$$

от времени (1.26). Из этой зависимости следует, что быстрота затухания колебаний в системе определяется величиной  $\alpha = \frac{\mu}{2m}$ , стоящей в показателе экспоненты и, таким образом, зависит от наличия диссипативных сил, действующих в системе. Эта величина является характеристикой колебательной системы и называется коэффициентом затухания. Формулу (1.26) для амплитуды можно представить в виде:

$$a(t) = a_0 e^{-t/\tau}, \quad (1.29)$$

где величина  $\tau$  называется временем релаксации и связана с коэффициентом затухания соотношением

$$\alpha = 1/\tau \quad (1.30)$$

Из формулы (1.29) видно, что за время, равное времени релаксации, амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Как видно из выражения (1.28)  $x(t=0) = x_0 = a_0 \cos \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  - начальная фаза колебаний, величина которой определяется моментом начала отсчета времени. Постоянные  $a_0$  и  $\varphi_0$  не являются характеристиками колебательной системы, а определяются начальными условиями.

Период затухающих колебаний вычисляется по формуле:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \quad (1.31)$$

Рост силы сопротивления в системе приводит к возрастанию коэффициента затухания  $\alpha$  и согласно (1.27) уменьшению частоты колебаний  $\omega$ , а согласно (1.31) к увеличению периода колебаний  $T$ .

Величина, показывающая, во сколько раз амплитуда колебаний уменьшается за время, равное периоду колебаний, называется декрементом затухания:

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\alpha T}, \quad (1.32)$$

а величина

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \alpha T \quad (1.33)$$

называется логарифмическим декрементом затухания.

С учетом формулы (1.30) можем написать

$$\lambda = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \quad (1.34)$$

т.е. логарифмический коэффициент затухания – это величина обратная числу колебаний  $N_e = \tau/T$ , в течение которых амплитуда убывает в  $e$  раз.

Для характеристики колебательной системы используется понятие добротности  $Q$ , которая обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (1.35)$$

Увеличение силы трения (сопротивления) в системе приводит к срыву колебаний. Если  $\alpha = \omega_0$ , из (1.27) следует, что  $\omega = 0$ , и согласно (1.28) в системе происходит апериодический процесс:

$$x(t) = a_0 e^{-\alpha t} \cos \varphi_0. \quad (1.36)$$

Если  $\alpha > \omega_0$  из (1.27) следует, что  $\omega$  – комплексное число и решение уравнения (1.24) будет иметь другой вид, отличный от (1.28). На рис.9 показаны два варианта для зависимости  $x(t)$  возвращения системы к положению равновесия. Кривая 1 соответствует апериодическому процессу, описываемому формулой (1.36). Кривая 2 соответствует процессу, когда системе, выведенной из положения равновесия, сообщают некоторую начальную скорость, так что она имеет достаточный запас энергии для прохождения положения равновесия.

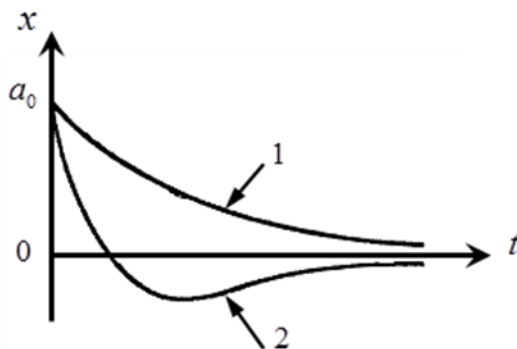


Рис. 9

Кривая 1 соответствует апериодическому процессу, описываемому формулой (1.36). Кривая 2 соответствует процессу, когда системе, выведенной из положения равновесия, сообщают некоторую начальную скорость, так что она имеет достаточный запас энергии для прохождения положения равновесия.

## 2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КОНТУРЕ

### 2.1 Физические основы генерации свободных колебаний в электрическом контуре

Рассмотрим электрическую цепь (рис.10), состоящую из последовательно соединенных элементов: конденсатора емкостью  $C$ , катушки индуктивностью  $L$  и сопротивления  $R$ . В положении переключателя «1» конденсатор заряжается от источника постоянного напряжения  $U_0$ . При этом на обкладках конденсатора появляются заряды, равные по величине и противоположные по знаку:

$$q_+ = |q_-| = q_0 = U_0 C$$

В конденсаторе накапливается энергия электрического поля  $0,5CU_0^2$  [2]. После перевода ключа в положение «2» начинается разряд конденсатора через катушку индуктивности и сопротивление.

Из-за явления самоиндукции нарастание силы тока в цепи происходит постепенно. Уменьшение энергии электрического поля в конденсаторе сопровождается увеличением энергии магнитного поля  $0,5LI^2$  [3], обусловленного током, текущим через катушку индуктивности.

При полном разряде конденсатора ток через катушку индуктивности, благодаря явлению самоиндукции [3], не прекратится. Начнется процесс перезарядки обкладок конденсатора, и сила тока будет уменьшаться. После полной перезарядки конденсатора сила тока в цепи станет равной нулю, и начнется возрастание силы тока, текущего в противоположном направлении. Таким образом, в рассматриваемой цепи могут возникнуть свободные колебания напряжения, заряда и тока, связанные с взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей [4].

Наличие в цепи активного сопротивления приводит к необратимой потере энергии, в результате чего будет наблюдаться затухание колебаний либо их отсутствие.

Согласно второму правилу Кирхгофа сумма падений напряжения в замкнутом контуре равна алгебраической сумме электродвижущих сил, действующих в контуре:

$$U_C + U_R = \varepsilon_S, \quad (2.1)$$

где 
$$U_C = \frac{q}{C} \quad (2.2)$$

– падение напряжения на конденсаторе ;

$$U_R = RI = R \frac{dq}{dt} = R\dot{q} \quad (2.3)$$

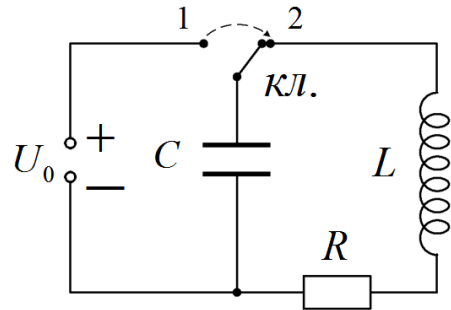


Рис. 10

– падение напряжения на сопротивлении;

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt} = -L\ddot{q} \quad (2.4)$$

– ЭДС самоиндукции.

После подстановки (2.2) – (2.4) в уравнение (2.1) получим:

$$\frac{q}{C} + R\dot{q} = -L\ddot{q}. \quad (2.5)$$

Разделим обе части уравнения (2.5) на  $L$  и введем обозначения:

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2; \quad \frac{R}{L} = 2\alpha. \quad (2.6)$$

Запишем уравнение (2.5) следующим образом:

$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (2.7)$$

Полученное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, решение которого обсуждалось в разделе 1.5 при рассмотрении свободных колебаний в механической системе.

## 2.2. Свободные колебания без затухания в электрическом контуре

Покажем, что в случае, когда активное сопротивление цепи практически равно нулю, и необратимыми потерями энергии можно пренебречь, в замкнутом контуре (рис.10) возникают свободные гармонические колебания.

Действительно, в этом случае  $R=0, \alpha=0$  и (2.7) преобразуется в уравнение гармонического осциллятора (1.4):

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (2.8)$$

Решением уравнения (2.8) является функция

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.9)$$

Заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с амплитудой  $q_0$ , циклической частотой  $\omega_0$ , начальной фазой  $\varphi_0$ . Циклическая частота, как следует из введённого обозначения (2.6), равна:

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC}. \quad (2.10)$$

Частота  $\omega_0$  называется собственной циклической частотой контура и зависит только от величины индуктивности и ёмкости в рассматриваемой цепи. Для периода гармонических колебаний получается известная формула Томсона:

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (2.11)$$



Примем за начало отсчета времени  $t = 0$  момент перевода ключа из положения «1» в положение «2». В положении «1» заряд конденсатора максимален и равен  $q_0$ . Тогда, как следует из уравнения (2.9),

$$q(t = 0) = q_0 \cos \varphi_0 = q_0. \quad (2.12)$$

Следовательно,  $\cos \varphi_0 = 1$  и  $\varphi_0 = 0$ . При этом в контуре возникают свободные гармонические колебания, и заряд на обкладках конденсатора изменяется по закону:

$$q(t) = q_0 \cos \omega_0 t. \quad (2.13)$$

Напряжение на обкладках конденсатора:

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{C} \cos \omega_0 t = U_0 \cos \omega_0 t. \quad (2.14)$$

Сила тока в цепи также изменяется по гармоническому закону:

$$I(t) = \dot{q} = -\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t = I_0 \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}), \quad (2.15)$$

опережая по фазе изменение напряжения на конденсаторе на  $\frac{\pi}{2}$ .

Энергия электрического поля:

$$W_E(t) = 0,5CU_C^2(t) = 0,5CU_0^2 \cos^2 \omega_0 t. \quad (2.16)$$

Энергия магнитного поля:

$$W_m(t) = 0,5LI^2(t) = 0,5LI_0^2 \sin^2 \omega_0 t. \quad (2.17)$$

На рис. 11 приведены графики зависимости от времени заряда на обкладках конденсатора  $q(t)$ , силы тока в колебательном контуре  $I(t)$ , энергии электрического поля  $W_E(t)$  и энергии магнитного поля  $W_m(t)$ . Видно, что сила тока в контуре равна нулю, когда абсолютная величина заряда на обкладках конденсатора максимальна. При полном разряде конденсатора ( $q = 0$ ) абсолютная величина тока в контуре достигает максимального значения.

Полная энергия колебаний в контуре, т.е. сумма энергий магнитного и электрического полей, равная их максимальным значениям, постоянна

$$W_{\text{полн.}} = W_E(t) + W_m(t) = 0,5CU_0^2 = 0,5LI_0^2 = \text{const.} \quad (2.18)$$

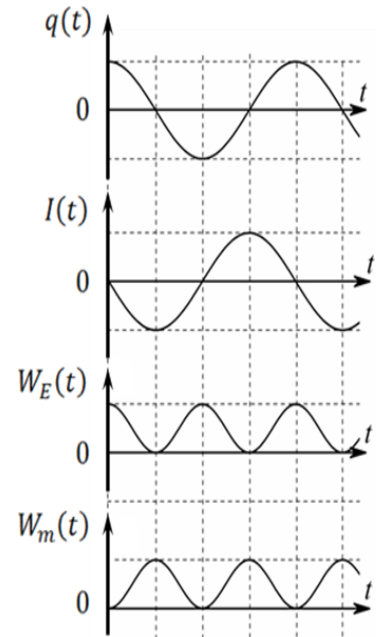


Рис. 11

### 2.3. Свободные колебания с затуханием в электрическом контуре. Апериодический разряд конденсатора.

Покажем, что в случае, когда активное сопротивление цепи не равно нулю, и необратимыми потерями энергии нельзя пренебречь, в замкнутом

контуре (рис.10) при определенных условиях могут возникать свободные электрические колебания с затуханием.

С этой целью вернемся к дифференциальному уравнению (2.7)

$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решение уравнения (2.7), как и в случае механических колебаний с затуханием, будем искать в виде:

$$q(t) = a(t) \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (2.19)$$

В результате выкладок, аналогичных выкладкам, приведенным в 1.5 при решении дифференциального уравнения (1.24), получим, что решение уравнения (2.7) примет вид:

$$q(t) = q_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.20)$$

где  $a(t) = q_0 e^{-\alpha t}$  называют амплитудой затухающих колебаний. Начальная амплитуда  $q_0$  и начальная фаза колебаний  $\varphi_0$  определяются начальными условиями;  $\alpha$  - коэффициент затухания. Как видно из формул (2.6), коэффициент затухания зависит от сопротивления и индуктивности цепи:

$$\alpha = R/2L. \quad (2.21)$$

Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (2.22)$$

Для вещественных значений циклической частоты коэффициент затухания не может быть больше собственной циклической частоты колебаний  $\omega_0$ :

$$\alpha \leq \omega_0$$

В противном случае решение уравнения (2.7) в виде (2.20) не подходит.

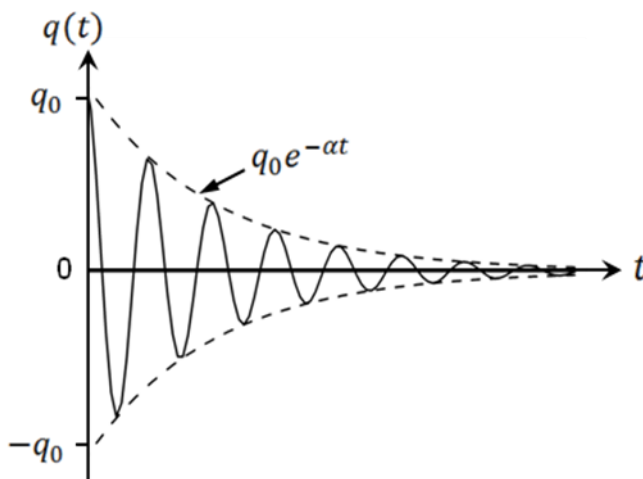


Рис. 12

На рис.12 приведен график зависимости  $q(t)$  для случая, когда  $\alpha < \omega_0$ , и когда начало отсчёта времени ( $t = 0$ ) соответствует переводу ключа (см. рис.10) из положения 1 при максимальном значении величины заряда конденсатора в положение 2. При этом

$$q(t = 0) = q_0 \cos \varphi_0. \quad (2.23)$$

Для затухающих электрических колебаний вводятся характеристики затухания такие

же, как для механических затухающих колебаний (см. 1.5): декремент затухания (1.32)

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\alpha T} ;$$

логарифмический декремент затухания (1.33)

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \alpha T ;$$

добротность электрического контура (1.34)

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} .$$

Когда величина активного сопротивления такова, что коэффициент затухания оказывается большим или равным собственной циклической частоте  $\alpha \geq \omega_0$ , из (2.22)

следует, что  $\omega$  - мнимое число или ноль. В этом случае колебания в цепи отсутствуют. Происходит апериодический разряд конденсатора.

В частности, при  $\alpha = \omega_0$ , т.е. когда

$$\frac{R}{2L} = \sqrt{1/LC} \quad (2.24)$$

(этот режим называется критическим)  $\omega = 0$ , заряд конденсатора убывает по экспоненциальному закону

$$q(t) = q_0 e^{-\alpha t} , \quad (2.25)$$

асимптотически стремясь к нулю (рис.13). Из (2.24) следует, что сопротивление цепи, при критическом режиме равно

$$R_{кр} = 2\sqrt{L/C} . \quad (2.26)$$

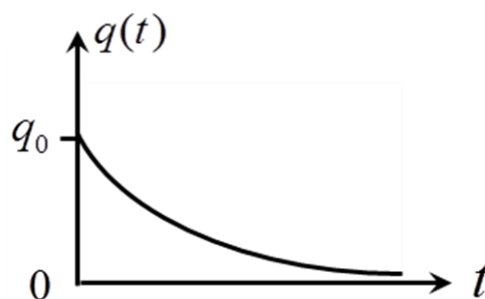


Рис. 13

## СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

### 3.1. Представление гармонических колебаний с помощью вращающегося вектора

Для упрощения решения ряда задач гармоническое колебание

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3.1)$$

можно представить в виде вращающегося на плоскости вектора  $\vec{A}(t)$ , исходящего из точки 0 оси X. Длину вектора возьмем равной амплитуде колебания A, а угол  $\varphi$  между осью X и вектором  $\vec{A}(t)$  равным фазе колебания  $\omega t + \varphi_0$  (рис.14). Тогда проекция вектора  $\vec{X}$  на ось X будет равна значению величины x в момент времени t. В частности, при  $t=0$  угол между вектором  $\vec{A}$  и осью X равен начальной фазе колебания  $\varphi_0$ , а проекция вектора

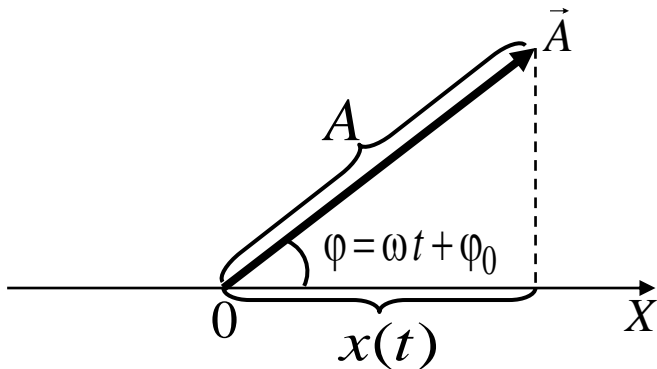


Рис. 14

$\vec{A}(t)$  на ось  $X$  равна начальному значению величины  $x$ . С течением времени угол  $\varphi$  линейно растёт и вектор  $\vec{A}(t)$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг начала координат  $0$  против часовой стрелки. При этом проекция вектора меняется по гармоническому закону в соответствии с выражением (3.1), т.е. представляет величину  $x$  в

момент времени  $t$ . Угловая скорость  $\omega$  при этом равна циклической частоте колебаний величины  $x$ .

Рассмотренный способ представления гармонической величины называется векторной диаграммой.

Отметим, что при помощи вращающегося вектора можно представить любые гармонически изменяющиеся величины: смещение от положения равновесия материальной точки, силу тока, напряжение, магнитную индукцию и т. д.

### 3.2. Сложение колебаний одинаковой частоты и одинакового направления

В различных технических устройствах часто имеет место сложение гармонических колебаний. Например, если в двух ветвях цепи текут переменные токи

$$I_1(t) = I_{m1} \cos(\omega t + \varphi_{01}), \quad I_2(t) = I_{m2} \cos(\omega t + \varphi_{02}), \quad (3.2)$$

то в третьей ветви будет течь ток, равный сумме этих токов (рис. 15):

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t). \quad (3.3)$$

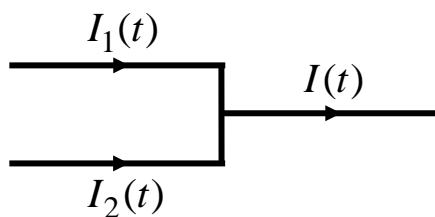


Рис. 15

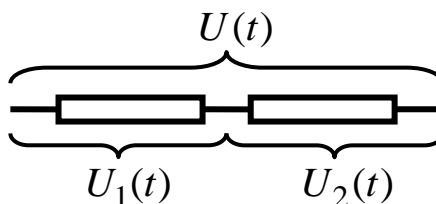


Рис. 16

Если на двух участках цепи имеются переменные напряжения

$$U_1(t) = U_{m1} \cos(\omega t + \varphi_{01}), \quad U_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \varphi_{02}), \quad (3.4)$$

то общее напряжение между концами этой цепи будет равно сумме напряжений на этих участках (рис. 16):

$$U(t) = U_1(t) + U_2(t). \quad (3.5)$$

Эти два случая можно рассматривать как примеры сложения гармонических колебаний одного направления.

Рассмотрим, каков результат сложения двух колебаний одного направления и одинаковой частоты. Применим для этого метод векторной диаграммы. Пусть надо сложить два таких колебания:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}), \quad (3.6)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}). \quad (3.7)$$

Представим их на плоскости в виде двух вращающихся векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  (рис.17). Построим результирующий вектор  $\vec{A}$ , равный векторной сумме этих векторов (рис.17):

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2. \quad (3.8)$$

Проекции векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  на ось  $X$  равны значениям величин  $x_1$  и  $x_2$  в данный момент времени  $t$ . Проекция  $x$  вектора  $\vec{A}(t)$  на ось  $X$  равна сумме проекций  $x_1$  и  $x_2$  векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  на эту ось:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \quad (3.9)$$

Вращение векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$ , а вместе с ними вращение вектора  $\vec{A}(t)$ , происходит с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ . При этом проекция  $x$  вектора  $\vec{A}$  будет совершать гармоническое колебание

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3.10)$$

с той же частотой, с которой колеблются величины  $x_1$  и  $x_2$ . Как видно из рис. 17, амплитуда  $A$  результирующего колебания может быть найдена по теореме косинусов:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \alpha},$$

где  $\cos \alpha = \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = -\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ .

Таким образом, для амплитуды результирующего колебания получаем выражение:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}. \quad (3.11)$$

В формуле (3.11) учтено, что разность фаз колебаний величин  $x_1$  и  $x_2$  не меняется со временем и равна разности начальных фаз колебаний. Соглас-

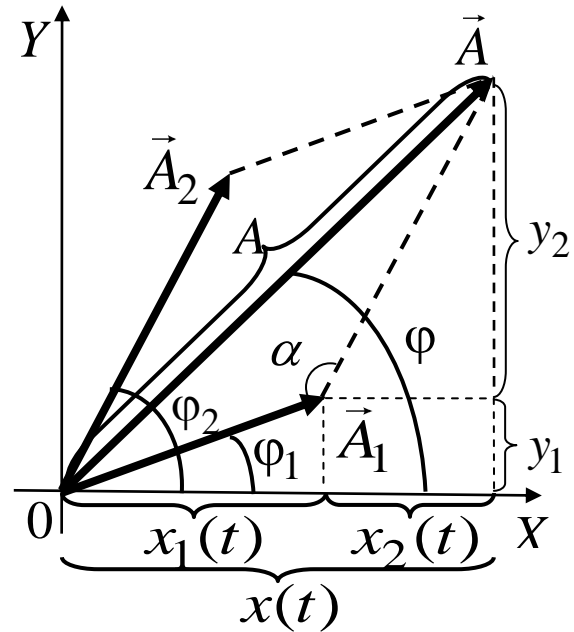


Рис. 17

но рис.17 начальная фаза результирующего колебания  $\varphi_0$  может быть найдена из соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (3.12)$$

Учитывая, что полная энергия при колебаниях пропорциональна квадрату амплитуды (см. формулы 1.11 и 2.18), получаем для энергии результирующего колебания следующую формулу:

$$W = W_1 + W_2 + 2\sqrt{W_1 W_2} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}), \quad (3.13)$$

где  $W_1$  - полная энергия первого колебания,  $W_2$  - полная энергия второго колебания. Последнее слагаемое в (3.13) и под корнем в формуле (3.11) называется интерференционным членом. Оно показывает, что амплитуда и энергия результирующего колебания зависят не только от амплитуд и энергий складываемых колебаний, но и от их разности фаз.

Рассмотрим наиболее важные частные случаи.

Пусть разность фаз складываемых колебаний равна нулю:  $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 0$ , т.е.  $\varphi_{02} = \varphi_{01}$ . Вектора  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  на векторной диаграмме будут совпадать по направлению. В этом случае амплитуды колебаний просто складываются, а фаза результирующего колебания совпадает с фазами складываемых колебаний:  $A = A_1 + A_2$ ,  $\varphi_0 = \varphi_{01} = \varphi_{02}$ . Энергия результирующего колебания превышает сумму энергий складываемых колебаний:  $W = W_1 + W_2 + 2\sqrt{W_1 W_2}$ . В частности, если  $A_2 = A_1$ , то  $A = 2A_1$  и  $W = 4W_1$ .

Пусть разность фаз складываемых колебаний равна  $\pi$ . Вектора  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  на векторной диаграмме будут направлены в противоположные стороны. Следовательно,  $A = |A_1 - A_2|$ . А фаза результирующего колебания будет совпадать с фазой колебания, имеющего большую амплитуду. Можно показать, что энергия результирующего колебания  $W$  будет меньше или равна по модулю разности энергий складываемых колебаний:  $W \leq |W_2 - W_1|$ . В частности, если  $A_2 = A_1$ , то  $A = 0$  и  $W = 0$ .

Пусть разность фаз складываемых колебаний равна  $\pi/2$ . В этом случае интерференционный член равен нулю,  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ ,  $W = W_1 + W_2$ , т.е. энергия результирующего колебания равна сумме энергий складываемых колебаний.

### 3.3 Сложение колебаний близких частот и одинакового направления

Пусть складываются два колебания одинакового направления

$$x_1(t) = A \cos \omega t, \quad x_2(t) = A \cos(\omega + \Delta\omega)t, \quad (3.14)$$

где  $\Delta\omega \ll \omega$ , (3.15)

т.е. разность частот этих колебаний много меньше самих частот. Для простоты рассматриваем случай, когда амплитуды колебаний одинаковы, а начальные фазы равны нулю.

Результат сложения таких колебаний можно представить с помощью векторной диаграммы. В этом случае вектор, изображающий одно колебание, например,  $\vec{A}_2$ , будет вращаться с несколько большей угловой скоростью, чем вектор  $\vec{A}_1$ , изображающий другое колебание (рис. 17). Периодически эти два вектора будут то совпадать по направлению, то становиться противоположно направленными. Поэтому амплитуда результирующего вектора  $\vec{A}$ , а следовательно и результирующего колебания будет становиться то максимальной, то равной нулю.

Выведем формулу для результирующего колебания

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \quad (3.16)$$

Вынося амплитуду за скобку и применяя известную формулу тригонометрии для суммы косинусов, получаем

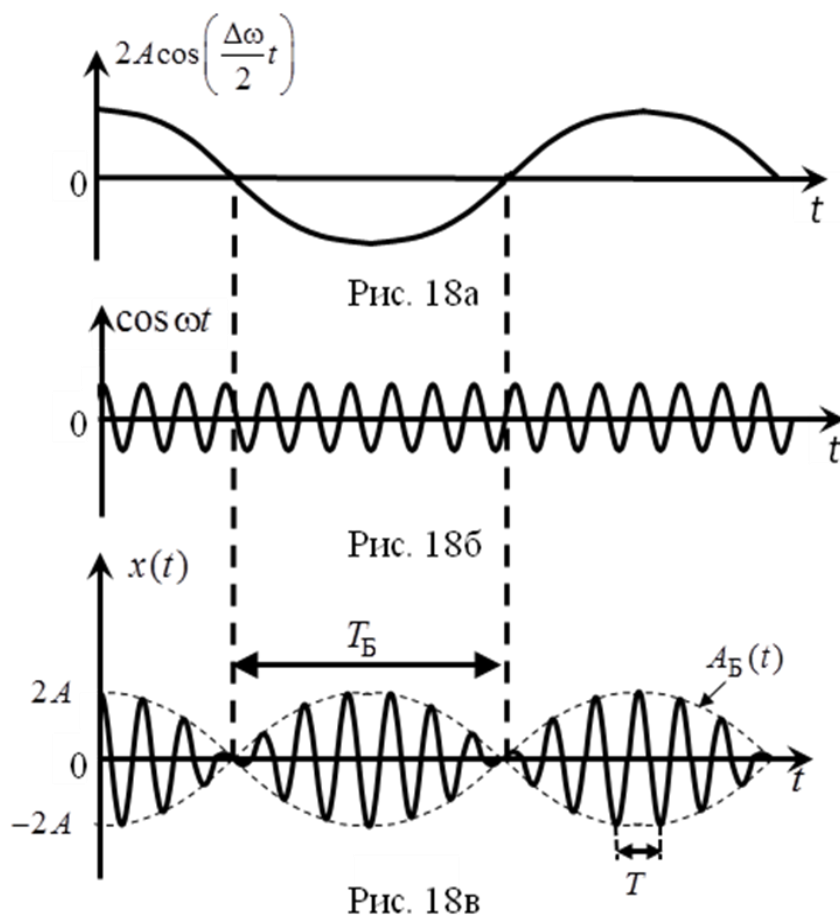
$$x(t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]. \quad (3.17)$$

Вследствие неравенства (3.15) можно пренебречь величиной  $\Delta\omega/2$  по сравнению с частотой  $\omega$  в выражении (3.17). Тогда равенство (3.17) примет более удобный для анализа вид

$$x(t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos \omega t. \quad (3.18)$$

Выражение (3.18) представляет собой произведение двух множителей, графики которых показаны на рис.18. Первый множитель в (3.18) является медленно меняющимся со временем (рис.18а) по сравнению со вторым множителем (рис.18б). Поэтому величину

$$A_B(t) = \left| 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right| \quad (3.19)$$



на графике  $x(t)$  можно рассматривать как амплитуду колебаний, периодически изменяющуюся в пределах от нуля до  $2A$  (рис.18в). Колебания, получающиеся в результате сложения двух колебаний с близкими частотами, называются биениями. Частота изменения амплитуды биений равна  $\Delta\omega$ , т.е. разности частот складываемых колебаний, а период ее изменения равен

$$T_{\text{Б}} = 2\pi/\Delta\omega \quad (3.20)$$

Период результирующего колебания  $x(t)$ :

$$T = 2\pi/\omega. \quad (3.21)$$

Пусть, например, к слушателю приходят с одного направления две звуковые волны, одна из которых имеет частоту 500 Гц, а другая – 501 Гц. Слушатель воспримет результирующее колебание как пульсирующий звук, частота которого практически равна 500 Гц, причем частота пульсаций будет равна 1 Гц, а период пульсаций равен 1 с.

### 3.4 Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний

Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний можно наблюдать, если на горизонтально и вертикально отклоняющие пластины осциллографа подать напряжения, величина которых изменяется по гармоническому закону. При этом луч осциллографа участвует одновре-



менно в колебаниях, происходящих как в горизонтальном направлении, так и в вертикальном направлении.

Рассмотрим сначала случай, когда частоты этих колебаний одинаковы:

$$x(t) = A_x \cos \omega t, \quad y(t) = A_y \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.22)$$

где  $A_x$ ,  $A_y$  - амплитуды взаимно перпендикулярных колебаний,  $\varphi$  - разность фаз колебаний. Получим уравнение траектории результирующего колебания, по которой будет происходить движение пятна, образованного лучом на экране осциллографа. Для этого исключим время из уравнений (3.22). Деля второе равенство (3.22) на амплитуду, и используя для этого равенства формулу косинуса суммы, запишем его в виде

$$\frac{y(t)}{A_y} = \cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi. \quad (3.23)$$

Из первого равенства (3.22) и известной формулы тригонометрии получаем

$$\cos \omega t = \frac{x(t)}{A_x}, \quad \sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2(t)}{A_x^2}}. \quad (3.24)$$

Подставим эти выражения в уравнение (3.23):

$$\frac{y(t)}{A_y} = \frac{x(t)}{A_x} \cos \varphi \mp \sqrt{1 - \frac{x^2(t)}{A_x^2}} \sin \varphi. \quad (3.25)$$

После несложных алгебраических преобразований уравнение (3.25) перепишем в виде

$$\frac{y^2(t)}{A_y^2} + \frac{x^2(t)}{A_x^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{x(t) \cdot y(t)}{A_x \cdot A_y} \cos \varphi = \sin^2 \varphi - \frac{x^2(t)}{A_x^2} \sin^2 \varphi. \quad (3.26)$$

Наконец, учитывая, что  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ , приходим к уравнению, связывающему координаты  $x$  и  $y$ :

$$\frac{x^2(t)}{A_x^2} + \frac{y^2(t)}{A_y^2} - 2 \frac{x(t) \cdot y(t)}{A_x \cdot A_y} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (3.27)$$

Уравнение (3.27) является уравнением эллипса. Таким образом, при сложении взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты траектория результирующего колебания представляет собой эллипс (рис. 19). Форма и ориентация эллипса в пространстве зависят от соотношения амплитуд и от соотношения фаз складываемых колебаний. Эллипс ограничен прямоугольником  $-A_x \leq x \leq A_x$ ,  $-A_y \leq y \leq A_y$  (рис. 19).

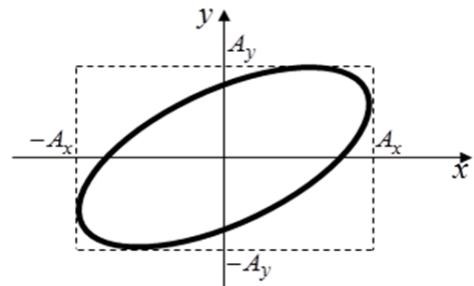


Рис. 19

Рассмотрим частные случаи сложения взаимно перпендикулярных колебаний.

1) Разность фаз колебаний  $\varphi = 0$ . Разделим второе уравнение (3.22) на первое:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{A_y}{A_x}, \text{ т.е. } y(t) = \frac{A_y}{A_x} x(t). \quad (3.28)$$

Из (3.28) следует, что в этом случае траектория представляет собой прямую линию, расположенную в первой и третьей четвертях (рис.20). Точка со-

вершает  
гармони-  
ческое  
колеба-  
ние  
этой  
частотой  
плиту-

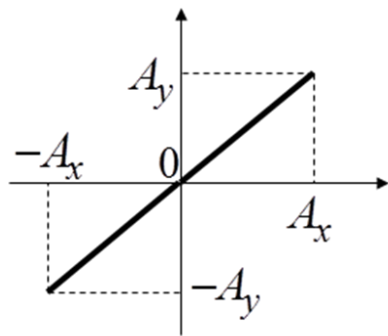


Рис. 20

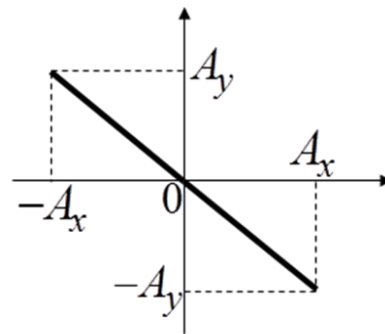


Рис. 21

вершает  
гармони-  
ческое  
колеба-  
ние  
этой  
частотой  
плиту-

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}. \quad (3.29)$$

2) Разность фаз колебаний  $\varphi = \pi$ . Тогда второе уравнение (3.22) можно записать в виде:

$$y(t) = -A_y \cos \omega t. \quad (3.30)$$

Разделив это уравнение на первое, получим

$$\frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{A_y}{A_x}, \text{ т.е. } y(t) = -\frac{A_y}{A_x} x(t). \quad (3.31)$$

В данном случае траектория представляет собой прямую линию, расположенную во второй и четвертой четвертях (рис.21). Уравнения (3.28) и (3.31) можно было получить и из общего уравнения траектории (3.27).

3) Разность фаз колебаний  $\varphi = \pm \pi/2$ . В этом случае уравнение траектории (3.27) примет вид

$$\frac{x^2(t)}{A_x^2} + \frac{y^2(t)}{A_y^2} = 1. \quad (3.32)$$

Получили уравнение прямого эллипса, оси которого направлены вдоль осей координат (рис. 22). Значения  $\varphi = \pi/2$  и  $\varphi = -\pi/2$  соответствуют разным направлениям движения точки по эллипсу. Действительно, в данном случае уравнения (3.22) можно представить в виде

$$x(t) = A_x \cos \omega t, \quad y(t) = A_y \cos(\omega t \pm \pi/2) = \mp A_y \sin \omega t. \quad (3.33)$$

Из уравнений (3.33) видно, что при  $t=0$   $x=A_x$ ,  $y=0$ , т. е. точка, совершающая колебания, находится в крайнем правом положении на эллипсе при  $\varphi = \pm\pi/2$ . Через четверть пе-

риода  $\omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$ , и координаты примут значения:

$$x=0, \quad y=-A_y \quad \text{при } \varphi = \pi/2,$$

$$x=0, \quad y=A_y \quad \text{при } \varphi = -\pi/2.$$

Это означает, что колеблющаяся точка при  $\varphi = \pi/2$  перейдет в крайнее нижнее положение на эллипсе, т. е. будет перемещаться по часовой стрелке, а при  $\varphi = -\pi/2$  перейдет в крайнее верхнее положение на эллипсе, т. е. будет перемещаться против часовой стрелки.

Если при  $\varphi = \pm\pi/2$  амплитуды колебаний вдоль осей  $x$  и  $y$  одинаковы, т. е. если  $A_y = A_x = A$ , то эллипс превращается в окружность радиуса  $A$ . Точка будет перемещаться по этой окружности по часовой стрелке при  $\varphi = \pi/2$  и против часовой стрелки при  $\varphi = -\pi/2$ .

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x), \quad y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y) \quad (3.34)$$

неодинаковы, то траектория колебаний, вообще говоря, будет неустойчивой, она будет все время меняться. Однако если частоты, а, следовательно, и периоды колебаний  $T_x$  и  $T_y$  вдоль соответствующих осей относятся как целые числа, т. е. если

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{m}{n} = \frac{T_y}{T_x}, \quad (3.35)$$

то траектория становится устойчивой. В этом случае, как видно из (3.35)

$$mT_x = nT_y = T \quad (3.36)$$

и через время  $T$ , равное целому числу колебаний как вдоль оси  $x$  так и вдоль оси  $y$ , колеблющаяся точка возвращается в исходное положение и колебательный цикл повторяется. Такие траектории называются фигурами Лиссажу.

В качестве примера на рис. 23 показаны траектории точки для случая

$$x = \pm A_x \sin 2\omega t, \quad y(t) = A_y \cos \omega t. \quad (3.37)$$

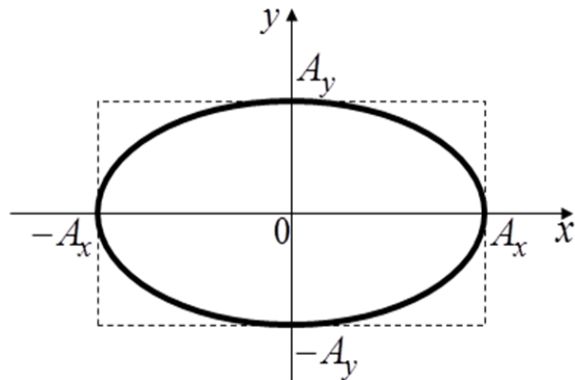


Рис. 22

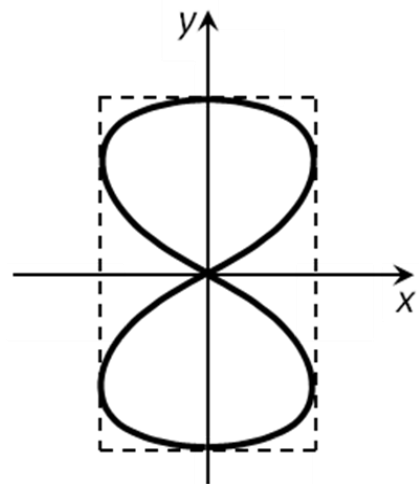


Рис. 23

Траектории различаются направлением движения точки.

Полная энергия результирующего колебания при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний равна сумме энергий каждого колебания:

$$W = W_1 + W_2. \quad (3.38)$$

## 4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### 4.1. Вынужденные колебания в электрическом контуре

Как следует из глав 1 и 2, колебания в реальных колебательных системах являются затухающими. Чтобы они стали незатухающими, надо компенсировать потери энергии в колебательной системе. Для этого, например, в колебательный контур надо включить источник переменного тока.

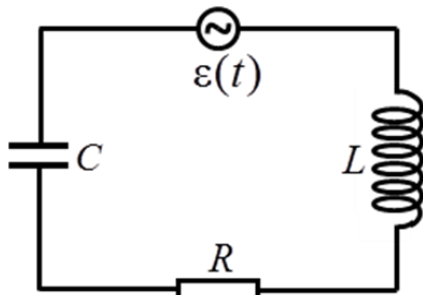


Рис. 24

(ЭДС)

Рассмотрим вынужденные колебания в электрическом контуре, создаваемые электродвижущей силой источника переменного тока. На рис. 24 показан электрический контур, состоящий из последовательно соединенных конденсатора емкостью  $C$ , катушки индуктивностью  $L$  и сопротивления  $R$ , подключенных к источнику переменного тока, который создает в образовавшейся цепи электродвижущую силу

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos \Omega t, \quad (4.1)$$

где  $\varepsilon_m$  - амплитуда ЭДС,  $\Omega$  - циклическая частота этой ЭДС.

Выведем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний для колебательного контура. Согласно второму правилу Кирхгофа (см. §2.1):

$$U_C + U_R = \varepsilon_s + \varepsilon, \quad (4.2)$$

где

$$U_C = \frac{q}{C} \quad (4.3)$$

- напряжение на конденсаторе,

$$U_R = I \cdot R = R\dot{q} \quad (4.4)$$

- напряжение на сопротивлении контура,

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2} = -L\ddot{q} \quad (4.5)$$

- ЭДС самоиндукции. В данном случае кроме ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_s$  в контуре действует внешняя ЭДС  $\varepsilon$ , которая и создает вынужденные колебания в нем. Подставим выражения (4.1), (4.3)-(4.5) в равенство (4.2). Тогда его можно представить в следующем виде:

$$\frac{q}{C} + R\dot{q} + L\ddot{q} = \varepsilon_m \cos \Omega t. \quad (4.6)$$

Разделим все части равенства (4.6) на  $L$ . Тогда, введя обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad (4.7)$$

его можно переписать в виде

$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_m}{L} \cos \Omega t, \quad (4.8)$$

где  $\omega_0$  - собственная циклическая частота колебаний контура,  $\alpha$  - коэффициент затухания.

Получили неоднородное дифференциальное уравнение. Его решение может быть представлено как сумма общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного уравнения (4.8).

Общее решение однородного уравнения было подробно рассмотрено в разделе 2.3. Оно имеет вид

$$q(t) = q_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.9)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (4.10)$$

Уравнение (4.9) описывает свободные колебания заряда на обкладках конденсатора (см. 2.3). Решение однородного уравнения стремится к нулю, если  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, слагаемым (4.9) можно пренебречь, когда после начала свободных колебаний пройдет время, много большее времени релаксации  $\tau$ , т.е. если  $t \gg \tau$ . Эта часть полного решения связана с переходным процессом, возникающим при включении вынуждающей ЭДС.

Как показывает опыт, после затухания свободных колебаний (4.9) в контуре устанавливаются гармонические колебания, происходящие с частотой вынуждающей силы. Поэтому частное решение неоднородного уравнения (4.6), описывающее установившиеся вынужденные колебания, ищем в виде

$$q(t) = q_m \cos(\Omega t - \Psi). \quad (4.11)$$

Найдем амплитуды вынужденных колебаний заряда  $q_m$  и силы тока  $I_m$  и разность фаз  $\Psi$  между ЭДС источника тока и зарядом на конденсаторе.

Применим для этого метод векторной диаграммы. Равенство (4.6) может быть записано следующим образом:

$$U_C + U_R + U_L = \varepsilon, \quad (4.12)$$

т.е. сумма падений напряжений на всех элементах контура равна ЭДС источника, действующей в контуре. Рассмотрим выражения для отдельных слагаемых в (4.12), учитывая равенство (4.11) и вытекающее из него равенство для силы тока

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\Omega q_m \sin(\Omega t - \Psi) = I_m \cos(\Omega t - \Psi + \pi/2), \quad (4.13)$$

где  $I_m = \Omega q_m$  (4.14)

- амплитуда силы тока. Для напряжения на конденсаторе получаем выражение

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\Omega t - \Psi) = U_{Cm} \cos(\Omega t - \Psi), \quad (4.15)$$

где амплитуда напряжения

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = I_m X_C, \quad X_C = \frac{1}{\Omega C}. \quad (4.16)$$

Напряжение на сопротивлении

$$U_R = IR = I_m R \cos(\Omega t - \Psi + \pi/2) = U_{Rm} \cos(\Omega t - \Psi + \pi/2), \quad (4.17)$$

где амплитуда напряжения на сопротивлении

$$U_{Rm} = I_m R. \quad (4.18)$$

Напряжение на катушке

$$\begin{aligned} U_L = L\ddot{q} &= -Lq_m \Omega^2 \cos(\Omega t - \Psi) = L\Omega I_m \cos(\Omega t - \Psi + \pi) = \\ &= U_{Lm} \cos(\Omega t - \Psi + \pi), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где амплитуда напряжения на катушке

$$U_{Lm} = I_m X_L, \quad X_L = \Omega L. \quad (4.20)$$

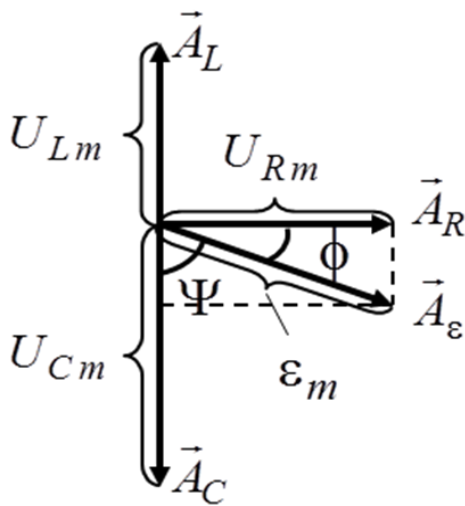


Рис. 25

Согласно равенствам (4.1), (4.15), (4.17), (4.19), все величины в уравнении (4.12) меняются по гармоническому закону с одинаковой частотой и могут быть представлены векторами на плоскости. Пусть напряжение  $U_R$  изображается горизонтальным вектором  $\vec{A}_R$ , направленным направо (рис.25). Как видно из сравнения (4.19) и (4.17), напряжение на катушке опережает напряжение на сопротивлении на  $\pi/2$ . Поэтому вектор  $\vec{A}_L$ , изображающий напряжение  $U_L$ , будет направлен вертикально вверх. Из сравнения (4.15) и (4.17) следует, что напряжение на конденсаторе отстает от напряжения на сопротивлении по фазе на  $\pi/2$ . Следовательно, вектор  $\vec{A}_C$ , изображающий напряжение  $U_C$  на конденсаторе, будет направлен вертикально вниз. Как следует из равенства (4.12), сумма векторов  $\vec{A}_R$ ,  $\vec{A}_L$  и  $\vec{A}_C$  даст вектор  $\vec{A}_E$ , изображающий ЭДС  $\epsilon$  источника тока (рис. 25). Угол  $\Psi$  между векторами  $\vec{A}_E$  и  $\vec{A}_C$  на рис. 25 равен разности фаз между ЭДС источника тока и на-

пряжением на конденсаторе. Рис. 25 соответствует случаю, когда напряжение на конденсаторе больше напряжения на катушке.

Длины векторов на векторной диаграмме равны амплитудам соответствующих напряжений. Как видно из рис. 25, для этих амплитуд имеет место следующее соотношение:

$$\varepsilon_m = \sqrt{U_{Rm}^2 + (U_{Lm} - U_{Cm})^2}. \quad (4.21)$$

Подставляя в (4.21) соотношения (4.16), (4.18) и (4.20), и выражая амплитуду силы тока, получаем равенство

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z}, \quad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad (4.22)$$

где  $X_C$  и  $X_L$  даются формулами (4.16) и (4.20). Как видно из рис. 25,

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{U_{Rm}}{U_{Cm} - U_{Lm}}. \quad (4.23)$$

Деля числитель и знаменатель (4.23) на амплитуду силы тока и применяя затем формулы (4.16) и (4.20), получаем

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{R}{1/(\Omega C) - \Omega L}. \quad (4.24)$$

Проведем анализ решения, описывающего установившиеся вынужденные колебания, происходящие с частотой вынуждающей силы. Как видно из (4.22), амплитуда колебаний силы тока пропорциональна амплитуде ЭДС источника. Рассмотрим зависимость амплитуды силы тока вынужденных колебаний от этой частоты. Как следует из (4.16) и (4.22), при  $\Omega \rightarrow 0$  величина  $X_C \rightarrow \infty$ ,

следовательно, величина  $Z$  тоже стремится к бесконечности и  $I_m \rightarrow 0$ . Этот результат очевиден, т.к. равенство нулю частоты колебаний соответствует подключению к контуру источника постоянного тока, и конденсатор при этом является разрывом цепи постоянного тока. Когда частота источника тока  $\Omega \rightarrow \infty$ , то, как следует из (4.20) и (4.22), величина  $X_L \rightarrow \infty$ , следовательно,  $Z \rightarrow \infty$  и

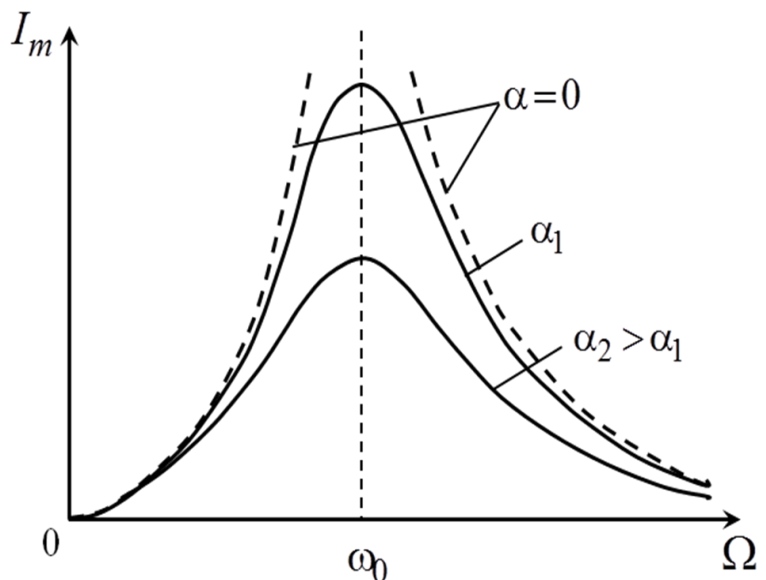


Рис. 26

опять  $I_m \rightarrow 0$ . Чтобы понять, каков характер зависимости между этими крайними значениями частоты, рассмотрим подкоренное выражение в (4.22). Величина  $Z$  достигает минимума, когда  $X_C = X_L$ , т.е. при частоте

$$\Omega_{I_{\text{рез}}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \quad (4.25)$$

Следовательно, амплитуда силы тока достигает максимального значения

$$I_{m \text{ рез}} = \frac{\varepsilon_m}{R} \quad (4.26)$$

при частоте  $\Omega_{I_{\text{рез}}}$ , равной собственной частоте колебательного контура.

На рис. 26 представлены графики зависимости амплитуды силы тока от частоты вынужденных колебаний. Графики соответствуют одинаковым значениям емкости конденсатора и индуктивности катушки, но различным значениям сопротивления контура. Так как разные значения сопротивления соответствуют разным значениям коэффициента затухания, то можно сказать, что на рисунке показаны графики для одного и того же контура, но с различными значениями коэффициента затухания.

Как следует из рассмотренного, при изменении частоты  $\Omega$  вынужденных колебаний происходит возрастание амплитуды силы тока в окрестности значения  $\Omega_{I_{\text{рез}}}$ . Явление резкого возрастания амплитуды колебаний величины при приближении частоты вынужденных колебаний к определенному значению, называется резонансом. Частота, при которой достигается максимальное значение амплитуды колебаний, называется резонансной. Как видно из приведенных графиков, резонанс проявляется тем сильнее, чем меньше коэффициент затухания. При сопротивлении контура и соответственно коэффициенте затухания стремящихся к нулю, амплитуда колебаний стремится к бесконечности, как это видно из выражения (4.26). Этому случаю соответствует пунктирная кривая на рис. 26.

Для изучения зависимости амплитуды заряда и напряжения на конденсаторе от  $\Omega$  подставим выражения (4.16) и (4.20) для  $X_C$  и  $X_L$  в (4.22), а полученное выражение для  $I_m$  подставим в (4.14). Выразив из полученного равенства  $q_m$ , с помощью (4.7) можно получить следующее выражение

$$q_m = \frac{\varepsilon_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}}. \quad (4.27)$$

Из (4.27) следует, что если  $\Omega \rightarrow 0$ , то амплитуда заряда на обкладках конденсатора  $q_m = \varepsilon_m C$ . Следовательно, амплитуда напряжения на конденсаторе при нулевой частоте будет равна амплитуде внешней ЭДС:

$$U_{Cm}(\Omega = 0) = \frac{q_m(\Omega = 0)}{C} = \varepsilon_m. \quad (4.28)$$

Проведем анализ подкоренного выражения в (4.27) на экстремум. Очевидно, экстремум этого выражения соответствует экстремуму амплитуды за-



ряда и амплитуды напряжения на конденсаторе. Для этого возьмем производную от этого выражения и приравняем ее нулю:

$$2 \cdot (\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot (-2\Omega) + 8\alpha^2\Omega = 0. \quad (4.29)$$

Из полученного равенства следует, что экстремум амплитуды имеет место при частоте внешней ЭДС

$$\Omega_{q\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}. \quad (4.30)$$

Так как амплитуда заряда при изменении частоты от 0 до бесконечности меняется от некоторого значения до нуля, то, очевидно, что этот экстремум соответствует максимуму. Таким образом, резонансная частота для напряжения и заряда конденсатора отличается от резонансной частоты (4.25) для силы тока. Однако это отличие незначительно, если коэффициент затухания мал. Подставив (4.30) в (4.27), получим выражение для амплитуды заряда в максимуме:

$$q_{m\text{рез}} = \frac{\varepsilon_m}{2L\alpha\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} = \frac{\varepsilon_m}{R\omega}. \quad (4.31)$$

При переходе к последнему равенству учтены выражения (4.7) и (4.10). Из выражения (4.31) видно, что максимальную амплитуду заряда можно считать

обратно пропорциональной величине коэффициента затухания, если он не слишком велик. На рис. 27 представлены графики зависимости амплитуды заряда на обкладках конденсатора от частоты вынужденных колебаний.

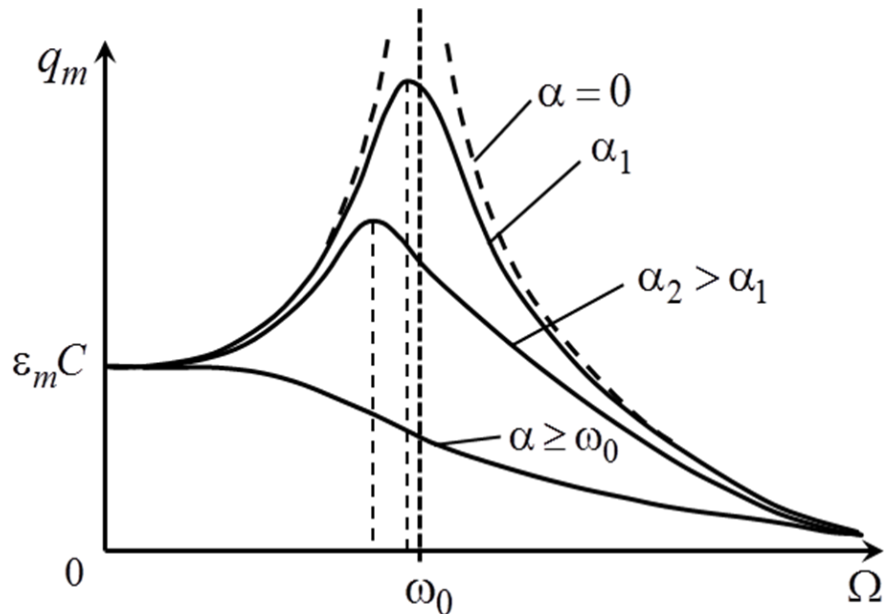


Рис. 27

Так как напряжение на конденсаторе прямо пропорционально его заряду, то графики зависимости амплитуды напряжения от частоты внешней ЭДС имеют такой же вид, как и для амплитуды заряда.

Если коэффициент затухания становится большим, а именно,

$$\alpha \geq \omega_0 / \sqrt{2}, \quad (4.32)$$

то резонансная частота становится равной нулю или мнимой (см. (4.30)). Это означает, что максимум отсутствует, и амплитуда колебаний монотон-

но уменьшается до нуля при возрастании частоты от нулевого значения до бесконечности (рис. 27).

Рассмотрим зависимость разности фаз колебаний  $\Psi$  между внешней ЭДС и зарядом (напряжением) конденсатора от частоты вынужденных колебаний  $\Omega$ . Для упрощения анализа можно преобразовать (4.24) с помощью (4.7) к следующему выражению

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{2\alpha\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (4.33)$$

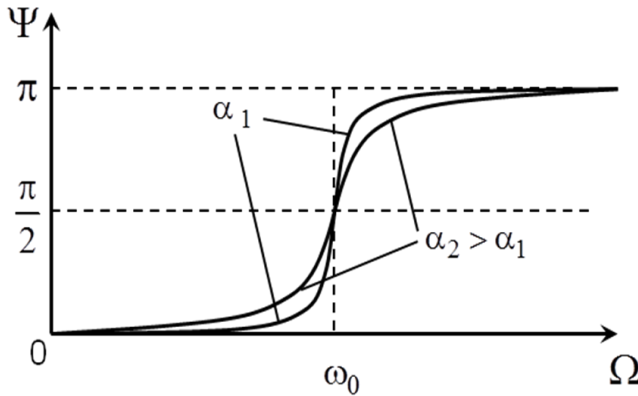


Рис. 28

График зависимости  $\Psi$  от  $\Omega$  представлен на рис. 28. Как следует из выражения (4.33), если  $\Omega \rightarrow 0$ , то  $\Psi \rightarrow 0$ . Это означает, что при низких частотах ЭДС источника и напряжение (заряд) на конденсаторе колеблются почти в одинаковой фазе. С возрастанием частоты это напряжение начинает отставать по фазе от ЭДС источника. Если  $\Omega = \omega_0$ , это отставание составляет

$\Psi = \pi/2$ . При дальнейшем возрастании частоты разность фаз продолжает увеличиваться и если  $\Omega \rightarrow \infty$ , то  $\Psi \rightarrow \pi$ .

## 4.2. Цепи переменного тока

Сопротивление, емкость и индуктивность – типичные параметры цепей переменного тока. Такие цепи часто бывают подключены к источнику переменного тока. Рассмотрим некоторые важные закономерности для таких цепей. Используем при этом результаты, полученные в предыдущем параграфе.

Равенство (4.22) можно рассматривать как обобщение закона Ома на цепи переменного тока. Величина  $Z$  называется полным сопротивлением цепи (импедансом). Величины  $X_L$  и  $X_C$ , как и величина  $R$ , измеряются в Омах. Величина  $X_C$  называется емкостным сопротивлением цепи, величина  $X_L$  называется индуктивным сопротивлением цепи. Величина

$$X = X_L - X_C \quad (4.34)$$

называется реактивным сопротивлением цепи. Для амплитуд напряжений на конденсаторе и на катушке индуктивности справедливы соотношения (4.16) и (4.20), по форме аналогичные закону Ома для постоянного тока.

Рассмотрим потери энергии в цепи переменного тока. Мощность тока в цепи, показанной на рис. 24, определяется соотношением

$$P(t) = \varepsilon(t)I(t). \quad (4.35)$$

Подставим в это равенство формулу (4.1) и последнюю из формул (4.13), учтя в ней, что

$$\pi/2 - \Psi = \phi, \quad (4.36)$$

где  $\phi$  - разность фаз между ЭДС  $\varepsilon$  и напряжением  $U_R$  на сопротивлении, а, следовательно, и силой тока (рис. 25). Тогда получим

$$P(t) = I_m \varepsilon_m \cos \Omega t \cdot \cos(\Omega t + \phi). \quad (4.37)$$

Применим известную формулу тригонометрии для произведения косинусов:

$$P(t) = \frac{1}{2} I_m \varepsilon_m \cos \phi + \frac{1}{2} I_m \varepsilon_m \cos(2\Omega t + \phi). \quad (4.38)$$

Среднее за период значение мощности равно

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2} I_m \varepsilon_m \cos \phi, \quad (4.39)$$

так как среднее за период значение второго слагаемого в (4.38) равно нулю. Входящий в формулу множитель  $\cos \phi$  получил название «коэффициент мощности». Как видно из векторной диаграммы (рис. 25),  $\varepsilon_m \cos \phi = U_{Rm}$ . Учитывая это соотношение и равенство (4.18), можно для средней мощности написать следующие формулы:

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2} I_m U_{Rm} = \frac{1}{2} I_m^2 R. \quad (4.40)$$

Необратимые потери энергии в цепи связаны с сопротивлением  $R$ .

### 4.3. Вынужденные колебания в механической системе

Вынужденными называются колебания, происходящие в колебательной системе под действием внешней (вынуждающей) силы. Примером вынужденных колебаний являются колебания частиц среды при распространении в ней упругой волны,

Свободные колебания в реальных механических системах являются затухающими, поскольку первоначально запасенная в системе энергия постепенно превращается в тепло. Для получения незатухающих колебаний в колебательной системе нужна внешняя сила, периодически компенсирующая эти потери энергии.

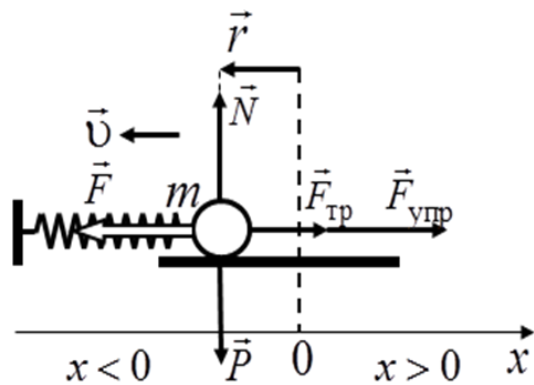


Рис. 29

Рассмотрим возникновение вынужденных колебаний в механической системе на примере колебаний груза массой  $m$  на упругой горизонтальной пружине жесткостью  $k$  (рис. 29). В отличие от рассмотренных в разделе

1.5 свободных механических колебаний в данном случае, кроме сил тяжести  $\vec{P}$ , реакции опоры  $\vec{N}$ , упругости  $\vec{F}_{\text{упр}}$  и трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , на груз действует внешняя сила

$$\vec{F} = \vec{F}_m \cos \Omega t, \quad (4.41)$$

где  $\vec{F}_m$  - амплитуда внешней силы,  $\Omega$  - циклическая частота этой силы.

По второму закону Ньютона (сравни с (1.22) в 1.5)):

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F} \quad (4.42)$$

Проецируя это уравнение на ось  $x$ , и применяя выражения для проекций силы упругости и силы трения на эту ось, введенные в 1.5, с учетом (4.41), получаем (сравни с (1.23) в 1.5):

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + F_m \cos \Omega t, \quad (4.43)$$

где  $F_m$  - модуль амплитуды внешней силы,  $\mu$  - коэффициент сопротивления. Разделим это уравнение на массу груза  $m$ , применим стандартные обозначения для собственной частоты колебаний системы  $\omega_0$  и коэффициента затухания  $\alpha$  (см. 1.5), введем новое обозначение  $f_m$ :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \alpha = \frac{\mu}{2m}, \quad f_m = \frac{F_m}{m}. \quad (4.44)$$

Тогда дифференциальное уравнение вынужденных колебаний примет вид

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos \Omega t. \quad (4.45)$$

В правой части неоднородного дифференциального уравнения (4.45) стоит внешняя сила. Решение неоднородного дифференциального уравнения может быть получено как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения было рассмотрено в 1.5. Оно имеет вид (рассмотрим случай  $\omega_0 > \alpha$ )

$$x(t) = a_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.46)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (4.47)$$

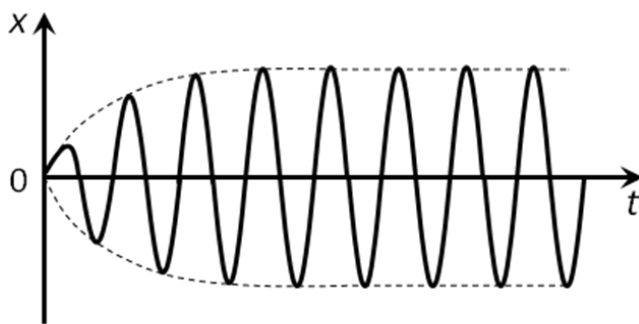


Рис. 30

Оно представляет собой свободные колебания данной системы. При достаточно больших временах ( $t \gg \tau = 1/\alpha$ ) величина (4.46) стремится к 0. Выражение (4.46) связано с переходным процессом, возникающим в системе после начала действия внешней силы (рис. 30).

Частное решение неоднородного

родного уравнения, как и в случае колебательного контура, может быть представлено в виде

$$x(t) = a \cos(\Omega t - \Psi), \quad (4.48)$$

где

$$a = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 \Omega^2}}, \quad (4.49)$$

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{2\alpha \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (4.50)$$

Убедиться, что выражения (4.48) – (4.50) являются решением уравнения (4.45), можно путем подстановки их в это уравнение.

При временах  $t \gg \tau$ , когда переходный процесс закончится, выражение (4.48) представляет собой установившиеся колебания, происходящие с частотой вынуждающей (внешней) силы. Этот процесс, как и в случае электрических колебаний (см. 4.1), называется вынужденными колебаниями. Выражение (4.49) задает зависимость амплитуды колебаний смещения  $x$  от параметров колебательной системы, а также от амплитуды и частоты внешней силы. Как следует из (4.49), амплитуда колебаний пропорциональна амплитуде внешней силы и сложным образом зависит от частоты внешней силы. Величина  $\Psi$  определяет запаздывание по фазе колебаний смещения относительно внешней силы  $F$ . Графики зависимости амплитуды колебаний  $a$  от частоты  $\Omega$  внешней силы имеют такой же вид, как и графики зависимости амплитуды колебаний заряда на конденсаторе от этой частоты. При частоте внешней силы, равной нулю (т.е. в случае постоянной силы), смещение от положения равновесия равно

$$a_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}, \quad (4.51)$$

где учтено выражение (4.44) для коэффициента жесткости пружины  $k$ . При частоте внешней силы, стремящейся к бесконечности, амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю. Как и в случае электрических колебаний, при резонансной частоте

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \quad (4.52)$$

амплитуда колебаний смещения от положения равновесия достигает максимального значения, величину которого можно получить, подставив (4.52) в выражение (4.49):

$$a_p = \frac{F_0}{2m\alpha \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} = \frac{F_0}{\mu\omega}. \quad (4.53)$$

При переходе к последнему выражению учтены равенства (4.44) и (4.47). Видно, что амплитуда колебаний стремится к бесконечности, если коэффициент сопротивления  $\mu$  стремится к нулю. При большом затухании, когда

$\alpha \geq \omega_0/\sqrt{2}$ , выражение под корнем в (4.52) становится равным нулю или отрицательным. В этом случае максимум на кривой зависимости  $a(\Omega)$  отсутствует, амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает с ростом частоты. Графики зависимости  $\Psi$  от  $\Omega$  также аналогичны графикам, которые имели место для электрических колебаний. При малых частотах внешней силы отставание смещения от силы по фазе невелико, вблизи резонанса оно становится близким к  $\pi/2$ , а при больших частотах  $\Omega \gg \omega_0$  сила и смещение колеблются практически в противофазе.

### Литература

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики: учеб. пособие для вузов: в 5 кн. / И. В. Савельев. - М.: Астрель: АСТ.

Кн. 1: Механика. – 2006. - 336 с.: ил.

2. *Андреев А.Д.* Физика. Электростатика. Конспект лекций.

А.Д.Андреев, Л.М.Черных. - СПб: СПбГУТ, 2004.

3. *Андреев А.Д.* Физика. Электромагнетизм. Конспект лекций.

А.Д.Андреев, Л.М.Черных. - СПб: СПбГУТ, 2012.

4. *Савельев И.В.* Курс общей физики: учеб. пособие для вузов: в 5 кн. / И. В. Савельев. - М.: Астрель: АСТ.

Кн. 2: Электричество и магнетизм. – 2006. - 336 с.: ил.

Выражаем глубокую признательность нашим коллегам по кафедре физики: Т.М. Розе за ценные замечания и доценту А.О. Буснюку за техническую помощь в ходе разработки настоящего методического пособия.