

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»

М.С. Былина, С.Ф. Глаголев

ОРГАНИЗАЦИЯ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА»**

Рукопись

СПбГУТ)))

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2017**

УДК 621.317.7 (075.8)

ББК 30.10я73

????

Рецензент

Былина М.С., Глаголев С.Ф.

???? Организация и обработка результатов многофакторного эксперимента : методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Планирование эксперимента» / М.С. Былина, С.Ф. Глаголев. – СПб. : Издательство СПбГУТ, 2017. – ??? с.

В данном учебном пособии приведены методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Планирование и обработка результатов эксперимента». Пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по программам подготовки бакалавров по направлению 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 12.03.03 «Фотоника и оптоинформатика».

Индивидуальные задания включают краткое описание цели эксперимента по определению некоторой физической величины (реакции), зависящей от не менее трех различных физических величин (факторов), результаты многократных (не менее трех) измерений реакции при максимальных и минимальных значениях факторов.

Студенты, выполняющие задания, должны иметь базовые знания по дисциплинам «Физика», «Теория электрических цепей» и «Метрология, стандартизация и сертификация».

УДК 621.317.7 (075.8)

ББК 30.10я73

© Былина М.С., Глаголев С.Ф., 2017

© Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича», 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.
УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ.....	ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.
АНАЛИЗ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ, ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ.	ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.
2. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ИЗМЕРЕНИЙ, ВЫБОР ТИПОВ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ И РАСЧЕТНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ РЕАКЦИИ И ВЛИЯЮЩИХ ФАКТОРОВ. ...	ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.
3. НОРМИРОВАНИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ.....	ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.
4. ВЫБОР МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ.....	ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.
5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА	ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ	ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Планирование эксперимента» предназначена для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника» и 12.03.03 «Фотника и оптоинформатика», которые должны быть подготовлены в области научно-исследовательской деятельности к решению следующих профессиональных задач:

- разработка рабочих планов и программ проведения научных исследований и технических разработок, выбор методик и средств решения задачи, подготовка отдельных заданий для исполнителей;
- сбор, обработка, анализ и систематизация научно-технической информации по теме исследования, выбор методик и средств решения задачи;
- разработка методики и организация проведения экспериментов и испытаний, анализ их результатов;
- подготовка научно-технических отчетов, обзоров, публикаций по результатам выполненных исследований;
- разработка физических и математических моделей исследуемых процессов, явлений и объектов, относящихся к профессиональной сфере; создание компьютерных программ с использованием, как стандартных пакетов автоматизированного проектирования и исследований, так и разрабатываемых самостоятельно.

В результате выполнения представленных в пособии заданий студент должен научиться:

- выбирать необходимые измерительные приборы с учетом их метрологических характеристик,
- обрабатывать результаты измерений,
- анализировать и осмысливать полученные результаты,
- использовать современные информационные технологии и вычислительную технику.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1. Анализ индивидуального задания, представление исходных данных

Этот раздел должен содержать текст индивидуального задания с результатами активного многофакторного эксперимента по определению реакции у в нескольких опытах, которые отличаются различным сочетанием n влияющих величин x_1, \dots, x_n (факторов). Факторы могут принимать только минимальные и максимальные значения. В индивидуальных заданиях количество факторов равно $n = 3$. Их значения, название и размерность необходимо привести в табл. 1.

Таблица 1
Значения влияющих факторов

№ факто-ра, j	Обознач. фактора, x_j	Уровни факторов		Название фи-зических вели-чин	Размерность
		Миним. $x_{j min}$	Максим. $x_{j max}$		
1	x_1				
2	x_2				
3	x_3				

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) должен содержать все возможные независимые опыты, число которых составляет $N = 2^n$. В нашем случае $N = 8$. Порядок проведения опытов называют планом эксперимента, который может быть представлен в виде табл. 2. В табл. 2 указывается номер опыта и сочетание влияющих факторов. При заполнении таблицы используются нормализованные значения факторов. Минимальному значению фактора соответствует -1 , а максимальному 1 .

Таблица 2
План многофакторного эксперимента

Номер опыта, i	Нормированные значения факторов x_j		
	x_1	x_2	x_3
1	-1	-1	-1
2	-1	-1	1
3	-1	1	-1
4	-1	1	1
5	1	-1	-1
6	1	-1	1
7	1	1	-1
8	1	1	1

Эксперимент проводится сериями.

Результаты экспериментальных исследований приведены в текстовом файле zadachaN_M.txt, где N – номер индивидуального задания, а M - номер варианта. Каждый столбец представляет собой одну серию экспери-

ментальных исследований. Всего серий $m = 3$. Внутри столбца результаты измерений с учетом их обработки расположены в порядке проведения опытов. Результаты измерений и расчетов исследуемой величины, которые приведены в файле, необходимо поместить в табл. 3.

Таблица 3

Результаты экспериментов

№ опыта	Реакция y (размерность) в серии $k =$		
	1	2	3
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

2. Структурная схема измерений, выбор типов измерительных приборов и расчетных формул для реакции и влияющих факторов

В этом разделе на основе индивидуального задания необходимо спланировать экспериментальное исследование, то есть предложить и привести схему экспериментальной установки, предложить методику измерений, выбрать типы измерительных приборов для измерения влияющих факторов и реакции, а также предложить формулы для расчета реакции и факторов в случае использования косвенных измерений. Рассмотрим выполнение этого пункта на конкретном примере.

2.1. Индивидуальное задание

Исследование изменений коэффициента усиления y (номинальное значение $Y_0 = G_0$) эрбиевого оптического усилителя с попутной накачкой и с номинальными значениями:

коэффициент усиления при малом сигнале $G_0 = 30$ дБ (1000 раз),
 уровень максимальной выходной мощности $p_0 = 17$ дБ (50 мВт),
 длина волны сигнала $\lambda_s = 1550$ нм,
 длина волны накачки $\lambda = 980$ нм.

при изменении:

первого влияющего фактора x_1 (температуры окружающей среды) от $T_{\min} = -10$ до $T_{\max} = +30^\circ\text{C}$;

второго влияющего фактора влияющего фактора x_2 (тока накачки) в диапазоне от $I_{\min} = 90$ до $I_{\max} = 110$ мА;

третьего влияющего фактора x_3 (длины волны сигнала) от $\lambda_{\min} = 1530$ до $\lambda_{\max} = 1570$ нм.

В соответствии с техническими условиями значение коэффициента усиления не должно отличаться от номинала более чем на 6.6% (т.е. $\delta G = 2$ дБ).

2.2. Планирование эксперимента

Упрощенная схема (рис. 1) объекта исследования – оптического усилителя (ОУ) включает:

- мультиплексор WDM, объединяющий ослабленный оптический сигнал с длиной волны λ_s и оптический сигнал накачки,
- источник накачки - лазерный диод (ЛД) с длиной волны $\lambda = 980$ нм,
- активную среду - оптическое волокно (ОВ), сердцевина которого легирована ионами эрбия,
- оптический фильтр (ОФ), пропускающий полезный оптический сигнал в диапазоне длин волн $\lambda_s \pm \Delta\lambda_s$ и подавляющий излучение накачки в диапазоне длин волн $\lambda \pm \Delta\lambda$,
- оптический изолятор (ОИ), который подавляет отраженные от непододнностей линейного тракта оптические импульсы.

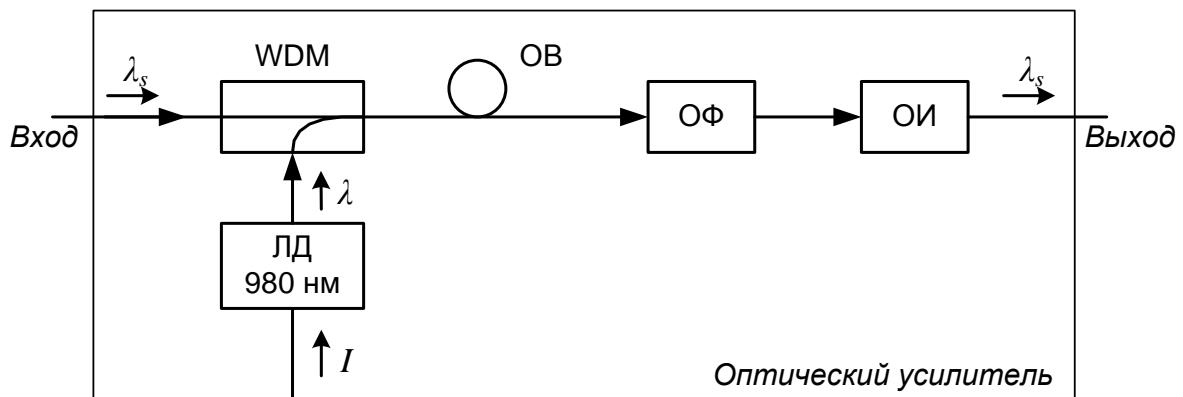


Рис. 1. Упрощенная схема эрбьевого оптического усилителя с попутной накачкой.

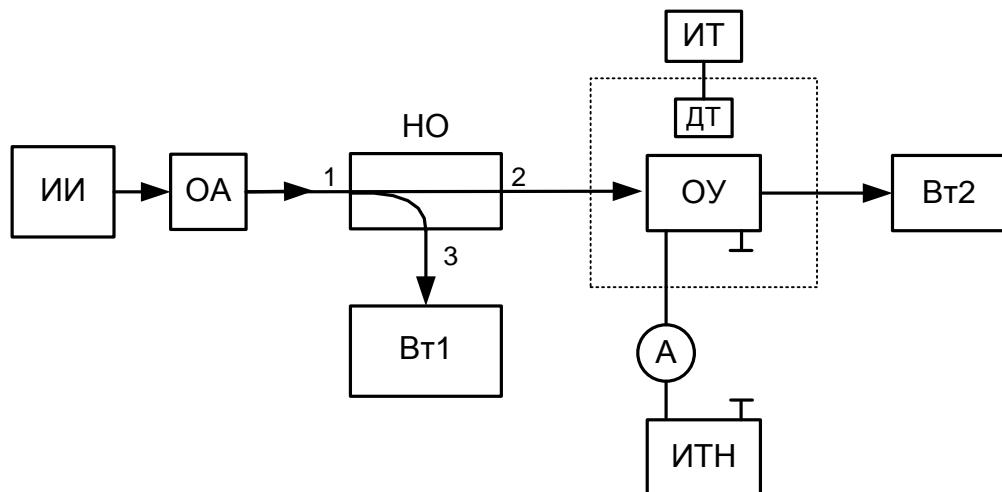


Рис. 2. Упрощенная схема экспериментальной установки для исследования оптического усилителя.

Схема исследований (рис. 2) должна включать следующие приборы и оборудование:

- источник или источники оптического излучения (ИИ) с известными длинами волн,
- регулируемый оптический аттенюатор (ОА),
- направленный ответвитель (НО) для измерений проходящей оптической мощности,
- источник тока накачки (ИТН) и измеритель тока – амперметр (А),
- измерители оптической мощности – ваттметры (Вт1 и Вт2),
- термокамеру (ТК) с возможностью изменения температуры и измеритель температуры – датчик температуры (ДТ).

Оценим основные требуемые параметры приборов и оборудования в соответствии с исходными данными.

- Источники оптических сигналов (ИИ) должны иметь длины волн $\lambda_s = 1530$ и 1570 нм. В качестве источников можно использовать трансиверы для систем грубого спектрального уплотнения (CWDM), которые имеют уровни выходной оптической мощности p_{uu} от 0 до +5 дБм.
- Термокамера (ТК) должна поддерживать температуру в диапазоне от -10 до +30 °С. В этих же пределах должен работать измеритель температуры (ИТ).
- Источник тока накачки (ИТН) должен обеспечивать изменение тока от 90 до 110 мА. В таких же пределах амперметр должен измерять значение тока.

Параметры некоторых элементов можно выбрать произвольно на основе общих рассуждений и простых расчетов.

Направленный ответвитель (НО) имеет один входной порт 1 и два выходных – порт пропускания 2 и порт ответвления 3. Потери между портами 1 и 2 назовем вносимыми a_{vh} , а между портами 1 и 3 – потерями ответвления a_{ot} . НО разделяет входной поток на две почти равные части и имеет потери $a_{vh} \approx a_{ot} = 3 - 3.5$ дБ.

Ваттметры Вт1 и Вт2 должны измерять уровни оптической мощности на выходе ИИ с учетом ослабления в НО и уровень выходной мощности ОУ. С некоторым запасом диапазон измерения должен обеспечивать измерения от -5 до 20 дБм.

Более точно требования к параметрам элементов экспериментальной установки можно определить из следующих уравнений для уровня мощности на выходе ОУ (измеряется ваттметром Вт2)

$$p_2 = p_{uu} - a_{oa} - a_{vh} + G \quad (1)$$

и уровня мощности на выходе НО (измеряется ваттметром Вт1)

$$p_1 = p_{uu} - a_{oa} - a_{ot}. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) можно получить уравнение измерения

$$G = p_2 - p_1 + a_{ot} - a_{vh} = p_2 - p_1 + \Delta a. \quad (3)$$

Измерение коэффициента усиления ОУ (G) относится к косвенным измерениям, т.к. искомая величина определяется на основе измерения дру-

гих величин функционально связанных с искомой. Часть величин, входящих в (3), можно определить до проведения основного эксперимента в ходе предварительного исследования.

Определим требования к минимальному и максимальному затуханию оптического аттенюатора по выражениям

$$a_{oa_max} = G_{max} - p_{2_min} + p_{1_max} + a_{om_max} - a_{bh_min} = 32 - 15 + 5 + 3.5 - 3 = 22.5 \text{ dB},$$

$$a_{oa_min} = G_{min} - p_{2_max} + p_{1_min} + a_{om_min} - a_{bh_max} = 28 - 19 + 0 + 3 - 3.5 = 10.5 \text{ dB}.$$

Регулируемый ОА должен иметь диапазон регулирования от 10 до 25 дБ.

2.3. Методика проведения эксперимента

2.3.1. Предварительные исследования

Предварительные исследования проводятся для измерения следующих величин: уровень мощности ИИ $p_{ii}(\lambda)$, потери в НО $a_{bh}(\lambda)$ и $a_{om}(\lambda)$ на двух длинах волн. Для измерений используем ваттметр Вт1, который по очереди подключается к входу НО (точка 1, результат измерения $p_{em1}(\lambda)$), выходу НО (точка 2, результат измерения $p_{em2}(\lambda)$) и выходу ответвления (точка 3, результат измерения $p_{em3}(\lambda)$). Расчетные формулы:

$$\begin{aligned} a_{bh}(\lambda) &= p_{em1}(\lambda) - p_{em2}(\lambda), \\ a_{om}(\lambda) &= p_{em1}(\lambda) - p_{em3}(\lambda) \\ \Delta a &= a_{om}(\lambda) - a_{bh}(\lambda) = p_{em2}(\lambda) - p_{em3}(\lambda). \end{aligned} \quad (4)$$

2.3.2. Подготовка к основным исследованиям.

Исследуемый оптический усилитель (ОУ) помещаем в термокамеру (ТК), устанавливаем и поддерживаем минимальное значение температуры, которую контролируем с помощью датчика температуры (ДТ). Входной и выходной оптический сигналы передаются по оптическим волокнам (ОВ) через отверстия в ТК. Также через отверстия вводятся в ТК электрические проводники для передачи тока накачки и сигнала с ДТ. Источники излучения (ИИ), направленный ответвитель (НО), регулируемый оптический аттенюатор (ОА), оптические ваттметры (Вт1 и Вт2) расположены вне ТК.

Процессы установления температуры происходят медленно, поэтому нужно достаточно большое время для измерений при одной температуре. Поэтому после окончания процесса установления температуры в ТК проводятся измерения коэффициента усиления G при изменении других влияющих факторов (длины волны сигнала и тока накачки).

2.3.3. Процедура измерения.

В принципе можно проводить измерения коэффициента усиления G двумя способами:

при определенном уровне входного сигнала и измерении выходного уровня,

при определенном уровне выходного сигнала и измерении входного уровня.

Второй способ проще и лучше характеризует оптический усилитель мощности.

Процедура измерения в каждом опыте будет одной и той же. Устанавливаем максимальное затухание в ОА, устанавливаем нужную нам длину волны и значение тока накачки и измеряем уровни оптической мощности ваттметрами Вт1 и Вт2. Уменьшаем затухание регулируемого ОА до получения на выходе ОУ номинального значения выходного уровня $p_2=17$ дБм. Рассчитываем G по выражению (3). Результаты измерений и расчетов заносим в таблицу 4.

Таблица 4. Результаты измерений и расчетов

№ серии	№ опыта	Влияющие факторы			Результаты измерений			Результаты расчетов
		$T, ^\circ C$	I, mA	λ_s, nm	p_1, dBm	p_2, dBm	a_{oa}, dB	
1	1	-10	90	1530				29.98
	2	-10	110	1530				28.93
	3	-10	90	1570				28.66
	4	-10	110	1570				27.99
	5	+30	90	1530				29.94
	6	+30	110	1530				31.81
	7	+30	90	1570				31.75
	8	+30	110	1570				31.39
2	9	-10	90	1530				29.06

2.3.4. Выбор параметров приборов и оборудования.

Для выбора конкретного типа приборов и оборудования можно воспользоваться справочной литературой и информацией из Интернета. При выборе необходимо обратить внимание на пределы изменения измеряемых и устанавливаемых величин, а также на погрешности измерения и установки.

В рамках выполнения задания можно ограничиться выбором основных параметров измерительных средств и используемого оборудования, которые необходимо привести в таблице 5.

В уравнение измерения (3) входят $n=3$ величин, которые могут вносить вклад в погрешность определения G , которую мы можем принять равной 10% (0.2 дБ) от допустимого отклонения $\Delta G=\pm 2$ дБ. Полагая вклады всех трех величин равными и независимыми, погрешности каждой величины не должны превышать $0.2/\sqrt{3}=0.11$ дБ.

Погрешности измерения и поддержания тока накачки, температуры в термокамере, а также погрешности длины волны используемых источников излучения можно выбрать, исходя из следующих рассуждений.

Предполагаемое изменение коэффициента усиления ОУ составляет ± 2 дБ. Пусть это изменение будет полностью определяться изменениями влияющих факторов: температуры $\Delta T = 30 - (-10) = 40$ °C, тока накачки $\Delta I = 110 - 90 = 20$ mA или длины волн $\Delta \lambda = 1570 - 1530 = 40$ нм. Тогда функции влияния составят

$$\Delta G/\Delta T = 2/40 = 0.05 \text{ дБ/}^{\circ}\text{C},$$

$$\Delta G/\Delta I = 2/20 = 0.1 \text{ дБ/mA},$$

$$\Delta G/\Delta \lambda = 2/40 = 0.05 \text{ дБ/нм}.$$

Определим допустимые погрешности измерения и поддержания тока и температуры, а также длины волны источника излучения, если допустимая погрешность определения коэффициента усиления ОУ составляет $\delta G = 0.11$ дБ

$$\delta T = \delta G / (\Delta G / \Delta T) = 0.11 / 0.05 = 2.2 \text{ } ^{\circ}\text{C},$$

$$\delta I = \delta G / (\Delta G / \Delta I) = 0.11 / 0.1 = 1.1 \text{ mA},$$

$$\delta \lambda = \delta G / (\Delta G / \Delta \lambda) = 0.11 / 0.05 = 2.2 \text{ нм}.$$

Таблица 5

Параметры средств измерения и используемого оборудования

Измеряемая или устанавливаемая величина	Тип прибора или оборудования	Диапазон измерения или установки	Допустимая погрешность
Оптическая мощность, p	Ваттметр оптический	-5 - +20 дБм	0.11 дБ
Потери деления мощности, a	Направленный ответвитель	3 – 3.5 дБ	0.11 дБ
Температура, T	Измеритель температуры и термокамера	-10 - +30 °C	2.2 °C
Ток накачки, I	Амперметр	90 – 110 mA	1.1 mA
Длина волны, λ	Излучатель	1530, 1570 нм	2.2. нм

2.3.5. Результаты измерений и расчетов.

В данном варианте задания результаты измерений G с учетом их обработки находятся в файле zadacha0_2.txt (рис.).

zadacha0_2 - Блокнот			
Файл	Правка	Формат	Вид
28.98	29.06	28.89	
28.93	28.72	28.49	
28.66	28.72	28.3	
27.99	28.11	27.99	
31.81	31.55	31.49	
31.75	31.21	31.59	
31.39	31.13	31.2	
31.21	31.25	31.36	

Рис.3. Результаты измерений и обработки эксперимента.

Часть результатов измерения и обработки эксперимента из файла zadacha0_2.txt перенесена в таблицу 4.

2.3.6. Некоторые дополнительные рекомендации

При исследовании погрешности измерения некоторого прибора надо учесть, что погрешность может быть абсолютной или относительной и измеряться либо в единицах самой физической величины или в процентах от измеряемой величины. Для определения погрешности может использоваться аналогичный более точный прибор, на который воздействуют те же факторы.

Если исследуется какая-либо физическая величина (параметр объекта), то для ее определения при воздействии влияющих факторов в одних случаях можно использовать существующий измерительный прибор, а в других случаях необходимо разрабатывать схему измерения этой величины с использованием нескольких приборов (косвенные измерения) и рассчитывать реакцию по результатам измерения этих приборов.

Для задания и измерения значений влияющих факторов также необходим выбор измерительных приборов и испытательного оборудования.

В отчете должны быть приведены расчетные выражения, связывающие реакцию и влияющие факторы.

3. Нормирование и представление исходных данных

Будем полагать, что реакция y (отклик) исследуемого устройства связана с влияющими факторами $x_1 \dots x_n$ некоторой зависимостью

$$y = f(x_1, \dots, x_n), \quad (5)$$

где n – число учитываемых факторов.

Учитываемые факторы могут иметь различную размерность и физическую природу. Гораздо удобнее искать зависимость отклика от безразмерных нормированных значений факторов, которые вычисляются по формулам

$$\hat{x}_j = \frac{x_j - x_{j0}}{\Delta x_j}, \quad (6)$$

где \hat{x}_j – нормированное значение j -го фактора, x_j – натуральное значение j -го фактора, $x_{j0} = (x_{j\max} + x_{j\min})/2$ – натуральное значение нулевого (среднего) уровня j -го фактора, $\Delta x_j = (x_{j\max} - x_{j\min})/2$ – интервал варьирования j -го фактора.

Нормированное значение фактора всегда лежит в пределах ± 1 . Часто на практике оказывается достаточным устанавливать только два значения нормированного фактора $+1$ и -1 .

4. Выбор математической модели

Неизвестную зависимость единственного отклика от нескольких факторов $y = f(x_1, \dots, x_n)$ чаще всего ищут в виде неполного полинома степени n :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{k-1, k} x_{k-1} x_k + \dots . \quad (7)$$

Такой полином состоит из слагаемых, представляющих собой произведения факторов во всех возможных сочетаниях, а перед каждым произведением стоит неизвестный числового коэффициент β . Саму функцию (7) называют уравнением регрессии, а коэффициенты β – коэффициентами уравнения регрессии. Цифры, входящие в индексы коэффициентов, указывают на то, какие факторы являются сомножителями соответствующего слагаемого. Принято говорить, что коэффициент перед произведением двух и более факторов отражает эффект от взаимодействия этих факторов.

В слагаемые полинома (7) факторы входят только в 1-й степени, поэтому полином является неполным. Последнее слагаемое полинома представляет собой произведение всех n факторов (и неизвестного числового коэффициента), поэтому полином имеет степень n . В формуле (7) ряд слагаемых опущен, так как его запись в общем виде весьма громоздка. Чтобы закономерность составления слагаемых полинома (7) была более понятна, приведем запись неполного кубического полинома для единственного отклика при числе факторов $n = 3$:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3. \quad (8)$$

При получении регрессионной модели с натуральными (в своих размерностях) значениями факторов приходится сталкиваться с определенными трудностями. Поэтому сначала получают безразмерный полином с нормированными безразмерными значениями факторов $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$, вычисляемыми по формуле (6). Общий вид безразмерного полинома полностью аналогичен виду размерного полинома (7):

$$y = b_0 + b_1 \hat{x}_1 + b_2 \hat{x}_2 + b_3 \hat{x}_3 + b_{12} \hat{x}_1 \hat{x}_2 + b_{13} \hat{x}_1 \hat{x}_3 + b_{23} \hat{x}_2 \hat{x}_3 + b_{123} \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3, \quad (9)$$

где коэффициенты b , как правило, отличаются по своим значениям от соответствующих коэффициентов β .

Регрессионная модель в виде неполного степенного полинома имеет ряд достоинств. В частности, как будет показано ниже, процедура расчета коэффициентов b относительно проста, особенно если нормированные факторы принимают два значения ± 1 .

Ниже рассмотрим последовательность получения коэффициентов регрессионной модели в виде неполного степенного полинома.

5. Статистическая обработка результатов многофакторного эксперимента

Задачей статистической обработки результатов эксперимента является нахождение наилучших значений коэффициентов полинома (9). Расчет нормированных коэффициентов уравнения регрессии и проверка пригодности этого уравнения для практики осуществляется в следующем порядке.

5.1. Для каждого i -го опыта ($i = 1, \dots, n$) определяются среднее значение и дисперсия по всем m сериям измерений:

$$M(y_i) = \frac{\sum_{u=1}^m (y_i)_u}{m}, \quad (10)$$

$$D(y_i) = \frac{\sum_{u=1}^m [(y_i)_u - M(y_i)]^2}{m}, \quad (11)$$

где $(y_i)_u$ – значение отклика, полученное в u -й серии для i -го опыта, m – количество серий опытов.

5.2. Выполняется проверка однородности дисперсий $D(y_i)$. Для этого определяется расчетное значение критерия Кохрена по формуле

$$G_{\text{pac}^q} = \frac{D(y_i)_{\max}}{\sum_{i=1}^N D(y_i)}, \quad (12)$$

где $D(y_i)_{\max}$ – максимальная из дисперсий $D(y_i)$.

С критерием $G_{\text{расч}}$ связаны степени свободы: для числителя $f_1 = m - 1$, для знаменателя $f_2 = N$. Для заданной доверительной вероятности α по значениям f_1 и f_2 определяется критическое значение критерия Кохрена $G_{\text{кр}}$ по табл. 6.

Таблица 6

Критические значения критерия Кохрена G_{kp} при доверительной вероятности $\alpha = 0.95$

Если выполняется условие:

$$G_{\text{расч}} < G_{\text{кр}}, \quad (13)$$

то дисперсии однородны, и статистическая обработка продолжается. Если условие не выполняется, то дисперсии неоднородны. В этом случае требуется увеличить количество серий опытов, или же необходимо повысить точность задания значений факторов и измерения значения отклика.

В случае неоднородности дисперсий продолжать статистическую обработку некорректно, так как все используемые далее формулы выведены в предположении, что дисперсии однородны. При выполнении индивидуального задания при невыполнении условия (13) обработку можно продолжить, но при подведении итогов это обстоятельство следует упомянуть и высказать рекомендации по продолжению эксперимента.

Отметим, что приведенная выше формула для $G_{\text{расч}}$ справедлива, если каждый опыт выполнялся одинаковое число раз (m раз). Из нее следует, что дисперсии однородны, если доля максимальной из них в сумме не превышает критическую величину $G_{\text{кр}}$. Из табл. 6 видно, что всегда $0 < G_{\text{кр}} < 1$.

5.3. Определяется дисперсия воспроизводимости откликов:

$$D(y) = \frac{\sum_{i=1}^N D(y_i)}{N}, \quad (14)$$

которая является средней по всем опытам дисперсией. Чем она больше, тем хуже воспроизводится значение отклика при повторной установке одних и тех же уровней факторов. Можно сказать, что дисперсия воспроизводимости характеризует внутреннюю стабильность исследуемого объекта.

5.4. Рассчитываются оценки коэффициентов полинома. Формулы для расчета зависят от индекса коэффициента, поэтому их запись в общем виде весьма громоздка. При числе факторов $n = 3$ эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{\sum_{i=1}^N M(y_i)}{N}, \quad b_1 = \frac{\sum_{i=1}^N [(\hat{x}_1)_i M(y_i)]}{N}, \quad b_2 = \frac{\sum_{i=1}^N [(\hat{x}_2)_i M(y_i)]}{N}, \quad b_3 = \frac{\sum_{i=1}^N [(\hat{x}_3)_i M(y_i)]}{N}, \\ b_{12} &= \frac{\sum_{i=1}^N [(\hat{x}_1)_i (\hat{x}_2)_i M(y_i)]}{N}, \quad b_{13} = \frac{\sum_{i=1}^N [(\hat{x}_1)_i (\hat{x}_3)_i M(y_i)]}{N}, \quad b_{23} = \frac{\sum_{i=1}^N [(\hat{x}_2)_i (\hat{x}_3)_i M(y_i)]}{N}, \\ b_{123} &= \frac{\sum_{i=1}^N [(\hat{x}_1)_i (\hat{x}_2)_i (\hat{x}_3)_i M(y_i)]}{N} \end{aligned} \quad (15)$$

где $(\hat{x}_j)_i$ – нормированное значение (+1 или -1) j -го фактора в i -м опыте.

Из формул (15) видно, что закономерность, позволяющая составлять формулы для расчета любого коэффициента полинома при любом числе факторов, заключается в следующем. Для любого коэффициента под зна-

ком суммы $\sum_{i=1}^N$ записывается произведение среднего значения отклика и нормированных значений тех факторов, номера которых входят в индекс этого коэффициента.

5.5. Выполняется проверка значимости коэффициентов b . Для этого рассчитывается половина ширины доверительного интервала по формуле:

$$\Delta b = t \sqrt{\frac{D(y)}{N(n-1)}}, \quad (16)$$

где t – значение коэффициента Стьюдента, которое определяется по табл. 7 по заданной доверительной вероятности α и числу степеней свободы $f = N \cdot (m - 1)$.

Таблица 7

Значения коэффициента Стьюдента t при доверительной вероятности $\alpha = 0.95$

f	4	8	12	16	20	24	28
t	2.78	2.31	2.18	2.12	2.09	2.06	2.05
f	32	40	60	80	120	400	
t	2.04	2.02	2.00	1.99	1.98	1.97	

Далее для каждого из коэффициентов b проверяется выполнение условия

$$|b| > \Delta b. \quad (17)$$

Если (17) выполняется, то коэффициент считается значимым.

Доверительный интервал $I = [b - \Delta b; b + \Delta b]$ полагается одинаковым для всех коэффициентов b . Если для какого-либо коэффициента b условие (17) не выполняется, то такой коэффициент следует считать незначимым (равным нулю) с доверительной вероятностью α , так как отличным от нуля он мог оказаться за счет ошибок эксперимента.

5.6. Записывается безразмерный полином вида (9), который должен содержать только значимые коэффициенты, после чего определяются расчетные значения отклика y_i в каждом i -м опыте. Для этого в записанный полином подставляются нормированные значения факторов, при которых осуществлялся i -й опыт.

Например, пусть при обработке результатов полного факторного эксперимента с тремя влияющими факторами значимыми оказались коэффициенты $b_0 = 10, b_1 = 11, b_{23} = 2.3$. Тогда безразмерный полином имеет вид

$$y = b_0 + b_1 \hat{x}_1 + b_{23} \hat{x}_2 \hat{x}_3 = 10 + 11 \hat{x}_1 + 2.3 \hat{x}_2 \hat{x}_3$$

и значение отклика во 2-м опыте, в котором $\hat{x}_1 = -1, \hat{x}_2 = -1, \hat{x}_3 = +1$ рассчитывается как

$$y_{2\text{расч}} = 10 + 11 \cdot (-1) + 2.3 \cdot (-1) \cdot (+1) = -3.3$$

5.7. Выполняется проверка адекватности построенной модели и делается заключение о ее пригодности для практики. Для этого рассчитывается дисперсия адекватности по формуле

$$D_{ad}(y) = \frac{\sum_{i=1}^N [y_{i\text{расч}} - M(y_i)]^2}{N-d}, \quad (18)$$

где d – количество значимых коэффициентов построенной модели.

Дисперсия адекватности в основном порождается тем, что истинная зависимость отклика от факторов, как правило, отличается от используемой модели в виде неполного полинома, то есть несовершенством используемой модели.

Далее определяется расчетное значение критерия Фишера по формуле

$$F_{\text{расч}} = \frac{D_{ad}(y)}{D(y)}. \quad (19)$$

С критерием $F_{\text{расч}}$ связаны степени свободы: для числителя $f_1 = N - d$, для знаменателя $f_2 = N \cdot (n - 1)$. Для заданной доверительной вероятности α по значениям f_1 и f_2 определяется критическое значение критерия Фишера $F_{\text{кр}}$ по табл. 8.

Если выполняется условие

$$F_{\text{расч}} < F_{\text{кр}}, \quad (20)$$

то модель адекватна, т.е. аппроксимация результатов опытов полиномом (9) не противоречит опытным данным и модель пригодна для практики. Если условие (20) не выполняется, то полученной моделью пользоваться нельзя.

Таблица 8
Значения коэффициента Фишера $F_{\text{кр}}$ при доверительной вероятности $\alpha = 0.95$

$f_2 = N \cdot (n - 1)$	$f_1 = N - d$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3883	6.2560	6.1631	6.0942	6.0410
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8378	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2567	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911
20	4.3513	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913
40	4.0848	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2900	2.1750	2.0867	2.0164
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0090	1.9374

Из формулы для $F_{\text{расч}}$ следует, что модель адекватна, если дисперсия адекватности D_{ad} , обусловленная несовершенством используемой модели, превышает дисперсию воспроизведимости $D(y)$, обусловленную внутренней нестабильностью исследуемого объекта, не более чем в F_{kp} раз.

5.8. Осуществляется переход от безразмерного полинома (9) к размерному полиному (8). Для этого в безразмерный полином подставляются выражения для нормированных факторов (6), после чего раскрываются все скобки, и приводятся подобные слагаемые. Эти преобразования целесообразно проводить, придав средним значениям x_{j0} и интервалам варьирования Δx_j факторов конкретные числовые значения из табл. 1, содержащей сведения о факторах.

Например, пусть при обработке результатов ПФЭ типа 2^3 значимыми оказались коэффициенты $b_0 = 10$, $b_1 = 11$, $b_{23} = 2,3$. Пусть базовые уровни и интервалы варьирования факторов равны $x_{10} = 100$, $x_{20} = 200$, $x_{30} = 300$, $\Delta x_1 = 10$, $\Delta x_2 = 20$, $\Delta x_3 = 30$. Подставляя эти значения в полученное в предыдущем примере выражение для отклика y , имеем

$$\begin{aligned} y &= 10 + 11\hat{x}_1 + 2.3\hat{x}_2\hat{x}_3 = 10 + 11 \frac{x_1 - x_{10}}{\Delta x_1} + 2.3 \frac{x_2 - x_{20}}{\Delta x_2} \cdot \frac{x_3 - x_{30}}{\Delta x_3} = \\ &= 10 + 11 \frac{x_1 - 100}{10} + 2.3 \frac{x_2 - 200}{20} \cdot \frac{x_3 - 300}{30} = \\ &= 130 + 1.1x_1 - 1.15x_2 - 0.77x_3 + 0.0038x_2x_3 \end{aligned}$$

Отметим, что в данном случае полученные коэффициенты размерного полинома $\beta_0 = 130$, $\beta_1 = 1,1$, $\beta_2 = 1,15$, $\beta_3 \approx 0,77$, $\beta_{23} \approx 0,0038$ не совпадают с соответствующими коэффициентами b безразмерного полинома.

6. Анализ результатов многофакторного эксперимента

Рассмотрим анализ результатов многофакторного эксперимента на примере эксперимента, спланированного в разделе 2. В результате расчетов в среде MathCad получились следующие значения коэффициентов безразмерного полинома (таблица 9):

Таблица 9

Значения коэффициентов размерного полинома

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
29.991	1.421	-0.215	-0.107	0	0.091	0	0

Переход от безразмерного полинома к размерному дал следующие значения коэффициентов размерного полинома (таблица 10).

Таблица 10
Значения коэффициентов размерного полинома

β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7
43.281	-0.281	-0.022	-0.00765	0	0.000227	0	0
дБ	дБ/°C	дБ/mA	дБ/нм	дБ ² / (°C·mA)	дБ ² / (°C·нм)	дБ ² / (°C·mA)	дБ ² / (°C·mA·нм)

Построим графики зависимости исследуемого параметра от изменений влияющих факторов (рис. 4)

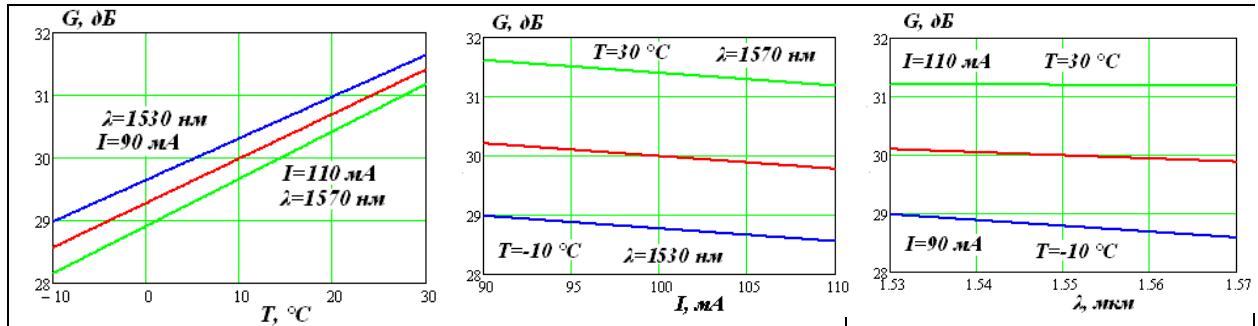


Рис. 4. Графики зависимости исследуемой величины от влияющих факторов

Видно, что при всех сочетаниях влияющих факторов величина коэффициента усиления не выходит за допустимые пределы и исследуемое устройство надо признать соответствующим техническим требованиям. Наиболее сильно влияние температуры окружающей среды.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Индивидуальные задания

по планированию активного многофакторного эксперимента

Значения реакции и факторов для индивидуальных заданий и факторов приведены в табл. П1.

1. Исследование изменений коэффициента передачи у усилителя переменного напряжения с равномерной частотной характеристикой с名义альным коэффициентом передачи K_0 . Максимальный размах выходного напряжения 5 В. При изменении:

первого влияющего фактора x_1 (температуры окружающей среды) в диапазоне от T_{\min} до T_{\max} ;

второго влияющего фактора x_2 (напряжения сетевого питания частотой 50 Гц) в диапазоне от U_{\min} до U_{\max} ;

третьего влияющего фактора x_3 (частоты входного синусоидального сигнала) в диапазоне частот от f_{\min} до f_{\max} .

В соответствии с техническими условиями на усилитель допустимое отклонение коэффициента передачи от номинала не должно превышать $\pm\delta_u$.

2. Исследование изменений коэффициента передачи у усилителя переменного напряжения с равномерной частотной характеристикой с名义альным коэффициентом передачи K_0 . Максимальный размах выходного напряжения 5 В. При изменении:

первого влияющего фактора x_1 (температуры окружающей среды) в диапазоне от T_{\min} до T_{\max} ;

второго влияющего фактора x_2 (частоты входного синусоидального сигнала) в диапазоне частот от f_{\min} до f_{\max} ;

третьего влияющего фактора x_3 (амплитуды входного синусоидального напряжения) в диапазоне от U_{\min} до U_{\max} .

В соответствии с техническими условиями допустимое отклонение коэффициента передачи от номинала не должно превышать $\pm\delta_u$.

3. Исследование погрешности счетчика электрической энергии y , с名义альным значением $\delta=0\%$. При изменении:

первого влияющего фактора x_1 (напряжения сетевого питания) в диапазоне от U_{\min} до U_{\max} ;

второго влияющего фактора x_2 (частоты сети) в диапазоне от f_{\min} до f_{\max} ;

третьего влияющего фактора x_3 (тока нагрузки) в диапазоне от I_{\min} до I_{\max} .

В соответствии с техническими условиями допустимая погрешность счетчика не должна превышать $\pm\delta_u$.

4. Исследование погрешности счетчика электрической энергии y , с номинальным значением $\delta=0\%$. При изменении:

первого влияющего фактора x_1 (температуры) в диапазоне от T_{min} до T_{max} ;

второго влияющего фактора x_2 (тока нагрузки) в диапазоне от I_{min} до I_{max} ;

третьего влияющего фактора x_3 (напряжения сетевого питания) в диапазоне от U_{min} до U_{max} .

В соответствии с техническими условиями допустимая погрешность счетчика не должна превышать $\pm\delta_y$.

5. Исследование погрешности оптического ваттметра y , с номинальным значением $\delta=0\%$. При изменении:

первого влияющего фактора x_1 (температуры окружающей среды) от T_{min} до T_{max} ;

второго влияющего фактора x_2 (мощности оптического излучения) от P_{min} до P_{max} ;

третьего влияющего фактора x_3 (длины волны оптического излучения) в диапазоне от λ_{min} до λ_{max} .

В соответствии с техническими условиями допустимая погрешность ваттметра не должна превышать $\pm\delta_y$.

6. Исследование погрешности оптического ваттметра y , с номинальным значением $\delta=0\%$. При изменении:

первого влияющего фактора x_1 (длины волны оптического излучения) в диапазоне от λ_{min} до λ_{max} ;

второго влияющего фактора x_2 (мощности оптического излучения) от P_{min} до P_{max} ;

третьего влияющего фактора x_3 (напряжения питания источника постоянного напряжения) в диапазоне от U_{min} до U_{max} .

В соответствии с техническими условиями допустимая погрешность ваттметра не должна превышать $\pm\delta_y$.

7. Исследование отклонений длины волны оптического генератора y , с номинальным значением λ_0 . При изменении:

первого влияющего фактора x_1 (температуры окружающей среды) от T_{min} до T_{max} ;

второго влияющего фактора x_2 (напряжения питания источника постоянного напряжения) от U_{min} до U_{max} ;

третьего влияющего фактора x_3 (скважности оптических импульсов) от Q_{min} до Q_{max} .

В соответствии с техническими условиями допустимое отклонение длины волны не должно превышать $\pm\delta_y$.

8. Исследование чувствительности фотодиода y , с номинальным значением S_0 . При изменении:

первого влияющего фактора x_1 (длины волны падающего излучения) в диапазоне от λ_{min} до λ_{max} ;

второго влияющего фактора x_2 (мощности падающего оптического излучения) напряжения питания источника постоянного напряжения) от P_{min} до P_{max} ;

третьего влияющего фактора x_3 (напряжения питания источника постоянного напряжения) от U_{min} до U_{max} .

В соответствии с техническими условиями допустимое отклонение чувствительности от номинала не должно превышать $\pm\delta_y$.

9. Исследование чувствительности фотодиода Y , с номинальным значением S_0 . При изменении:

первого влияющего фактора x_1 (температуры окружающей среды) от T_{min} до T_{max} ;

второго влияющего фактора x_2 (мощности падающего оптического излучения) от P_{min} до P_{max} ;

третьего влияющего фактора x_3 (длины волны падающего излучения) в диапазоне от λ_{min} до λ_{max} .

В соответствии с техническими условиями допустимое отклонение чувствительности от номинала не должно превышать $\pm\delta_y$.

10. Исследование чувствительности фотодиода к модулированному излучению y , с номинальным значением S_0 . При изменении:

первого влияющего фактора x_1 (температуры окружающей среды) от T_{min} до T_{max} ;

второго влияющего фактора x_2 (мощности падающего оптического излучения) от P_{min} до P_{max} ;

третьего влияющего фактора x_3 (частоты модуляции синусоидальным сигналом) в диапазоне от f_{min} до f_{max} .

В соответствии с техническими условиями допустимое отклонение чувствительности от номинала не должно превышать $\pm\delta_y$.

11. Исследование коэффициента стабилизации y (номинальное значение K_0) стабилизатора напряжения с номинальным значением $U_{вых}=5\text{ V}$. При изменении:

первого влияющего фактора x_1 (температуры окружающей среды) от T_{min} до T_{max} ;

второго влияющего фактора x_2 (сопротивления нагрузки) от R_{min} до R_{max} ;

третьего влияющего фактора x_3 (входного напряжения постоянного тока) в диапазоне от U_{min} до U_{max} .

В соответствии с техническими условиями минимальное значение коэффициента стабилизации не должно отличаться от номинала более чем на $\pm\delta_y$.

12. Исследование выходного сопротивления у (номинальное значение равно R_0) стабилизатора напряжения с номинальным выходным напряжением $U_{вых}=5\text{ В}$. При изменении:

первого влияющего фактора x_1 (температуры окружающей среды) от T_{min} до T_{max} ;

второго влияющего фактора x_2 (тока нагрузки) от I_{min} до I_{max} ;

третьего влияющего фактора x_3 (входного напряжения постоянного тока) в диапазоне от U_{min} до U_{max} .

В соответствии с техническими условиями выходное сопротивление стабилизатора не должно быть меньше 0 и не должно превышать номинальное значение более чем на $\pm\delta_y$.

Таблица П1

Исходные данные

№ за- дан	№ вар	Реакция			Факторы								
		у			x_1			x_2			x_3		
		ном. Y_0	разм y	δy	мин.	макс	разм	мин	макс	разм	мин	макс	разм
1	1	100	-	± 10	-10	40	$^{\circ}\text{C}$	200	240	В	0.03	30	кГц
	2	150		± 12	-20	50	$^{\circ}\text{C}$	180	260	В	0.03	100	кГц
2	1	200	-	± 15	0	30	$^{\circ}\text{C}$	100	5000	Гц	1	30	мВ
	2	250	-	± 10	-10	50	$^{\circ}\text{C}$	10	9000	Гц	1	10	мВ
3	1	0	%	± 1.5	200	240	В	45	55	Гц	0.2	15	А
	2	0	%	± 2	180	260	В	40	60	Гц	0.1	20	А
4	1	0	%	± 2	5	45	$^{\circ}\text{C}$	0.1	10	А	190	250	В
	2	0	%	± 1	0	40	$^{\circ}\text{C}$	0.1	20	А	180	260	В
5	1	0	%	± 0.5	-15	50	$^{\circ}\text{C}$	0.01	1	мВт	1280	1340	нм
	2	0	%	± 1	-20	40	$^{\circ}\text{C}$	0.01	10	мВт	1520	1580	нм
6	1	0	%	± 0.4	820	880	нм	0.02	2	мВт	4.5	5.5	В
	2	0	%	± 0.6	1520	1580	нм	0.01	2.5	мВт	2.8	3.5	В
7	1	1310	нм	± 20	0	30	$^{\circ}\text{C}$	4.5	5.5	В	0.05	0.5	-
	2	1550	нм	± 30	-10	40	$^{\circ}\text{C}$	2.8	5.5	В	0.1	0.8	-
8	1	0.5	А/Вт	± 0.03	1280	1340	нм	0.02	1	мВт	4	5	В
	2	0.5	А/Вт	± 0.05	1520	1580	нм	0.02	5	мВт	2.8	3.5	В
9	1	0.6	А/Вт	± 0.03	-10	40	$^{\circ}\text{C}$	0.01	2	мВт	1520	1580	нм
	2	0.4	А/Вт	± 0.04	-20	50	$^{\circ}\text{C}$	0.01	5	мВт	1290	1330	нм
10	1	0.4	А/Вт	± 0.02	-5	35	$^{\circ}\text{C}$	0.1	2	мВт	10	100	МГц
	2	0.5	А/Вт	± 0.03	-10	40	$^{\circ}\text{C}$	0.01	5	мВт	1	200	МГц
11	1	500	-	± 20	-10	45	$^{\circ}\text{C}$	10	100	Ом	6	10	В
	2	300	-	± 30	0	50	$^{\circ}\text{C}$	1	50	Ом	5.5	8	В
12	1	1	Ом	± 0.2	-5	35	$^{\circ}\text{C}$	0.05	2	А	6	10	В
	2	0.2	Ом	± 0.05	-10	40	$^{\circ}\text{C}$	0.05	10	А	5.5	8	В