

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ ИМ. ПРОФ. М.А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»
(СПбГУТ)

Кафедра ИУС

И.М.Новожилов

УПРАВЛЕНИЕ В БИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Учебное пособие

Введение

В пособии изложен материал дисциплины “Управление в биотехнических системах”, связанный с расчетами, анализом и синтезом систем управления (СУ), описываемых линейными непрерывными моделями.

Современные СУ различаются функциональным назначением, сложностью, внутренней организацией. На разных этапах проектирования СУ описываются моделями различных классов и форм представления. Развитие теории управления последние десятилетия как раз и связано с появлением новых методов анализа и синтеза таких СУ; в основном эти методы ориентированы на компьютерные технологии.

Тем не менее, изложение курса теории управления традиционно включает в себя достаточно подробное изучение методов анализа и синтеза СУ с *типовой структурой* (одноконтурных, реализующих принцип отрицательной обратной связи), которые на определенных этапах проектирования могут быть адекватно описаны непрерывными моделями с линейными стационарными детерминированными операторами [1], [2], [3], [4]. Именно на таких СУ прежде всего рассматриваются основополагающие понятия, характеризующие поведение СУ, проводится анализ и синтез переходных и установившихся режимов, изучается влияние на свойства СУ отдельных операторов и параметров функциональных звеньев.

Частотный подход к проектированию динамических систем различного назначения был преобладающим в “докомпьютерную” эпоху. Внедрение автоматизированного расчета современных СУ сопровождалось и разработкой новых методов и методик анализа и синтеза, ориентированных именно на использование компьютеров. Тем не менее, продолжал развиваться и частотный подход, но уже также с ориентацией на автоматизацию расчетов [5], [6], [7]. Основной причиной сохранения и

развития частотных методов расчета СУ является информативность частотной характеристики (ЧХ) в плане отображения участия отдельных звеньев СУ на формирование ЧХ. Это позволяет устанавливать связь вида операторов и значений параметров звеньев системы с ее свойствами и характеристиками. Сказанное определило преобладание частотного подхода к анализу и синтезу СУ в предлагаемом учебном пособии.

С методических позиций освоения методов теории управления, анализ СУ “объяснительного” типа, при котором устанавливается связь характеристик и показателей качества динамической системы с ее организацией и значениями параметров, может быть понят и освоен студентами, если до использования компьютера будут изучены характеристики типовых звеньев и способы “ручного” построения ЧХ. При этом становится ясным, как формируется ЧХ под влиянием звеньев и их операторов. Перечисленные выше учебники хотя и освещают частотный подход к расчету СУ, тем не менее не достаточно подробно описывают сам процесс построения и формирования ЧХ. Одна из основных целей данного пособия – восполнение этого недостатка. Сказанное тем более важно для студентов вечерней формы обучения с сокращенным объемом часов и, в особенности, для студентов заочной формы обучения, предполагающей в основном самостоятельное освоение дисциплины.

Специфика использования частотного подхода к расчету СУ заключается в том, что поведение СУ непосредственно оценивается во временной области, в то время как анализ и синтез осуществляются в частотной области. Это требует хорошего понимания взаимосвязи временных и частотных характеристик и показателей качества. Поэтому в пособии отдельно представлен материал, специально посвященный взаимосвязи временных и частотных характеристик СУ.

В учебном пособии нашли отражение следующие вопросы.

- Дано понятие процесса управления и приведены его необходимые составляющие. Изложены основные принципы, на которых строятся СУ, дана их классификация. Рассмотрены различные типы поведения объектов и СУ; дано понятие типового поведения СУ.
- Рассмотрены различные формы представления линейных непрерывных моделей СУ. Введено понятие СУ с типовой структурой и представлены основные характеристики, используемые при расчетах таких СУ.

- Даны типовые звенья СУ и их характеристики в частотной и временной областях. Описан процесс построения логарифмических частотных характеристик и рассмотрено влияние значений параметров звеньев на вид характеристик звеньев.

- Подробно изложен процесс построения логарифмических частотных характеристик соединений звеньев для СУ с типовой структурой; при этом сделан акцент на выявление влияния параметров отдельных звеньев на характеристику всей СУ.

- Описано действие обратной связи на различных диапазонах частот СУ. Отдельно рассмотрены вопросы соответствия временных и частотных характеристик для установления взаимосвязи полосы пропускания и быстродействия, что необходимо для анализа и синтеза СУ.

- Рассмотрены установившиеся режимы в СУ при обработке типовых степенных воздействий; приведен расчет установившихся ошибок. Сделан анализ соответствия астатизма СУ и ее функционального назначения. Описаны вопросы синтеза СУ по требованиям к установившимся процессам.

- Рассмотрены вопросы анализа устойчивости СУ. Даны алгебраические и частотные критерии устойчивости. Описана методика синтеза коррекции в частотной области с целью обеспечения устойчивости и качества переходных процессов, основанная на формировании типовой частотной характеристики СУ.

- Рассматривается задача преобразования моделей СУ со сложной, нетиповой структурой. Представлены необходимые сведения из теории графов и даны такие понятия, как пути, контуры, отношения некасания контуров, определитель графа. Подробно описан алгоритм получения характеристического полинома и передаточных функций по структурной схеме сложной СУ.

Развитие программных средств (ПС) для расчетов СУ характеризуется как созданием мощных и достаточно универсальных пакетов прикладных программ, так и разработкой специализированных ПС, решающих более ограниченный круг задач. Такие достоинства универсальных ПС, как широта класса моделей и состава решаемых задач, потенциальная гибкость формирования методик расчета часто оборачиваются рядом недостатков, к которым следует отнести трудности в освоении ПС, слабую поддержку методическим обеспечением, их высокую стоимость. В свою очередь,

именно благодаря ориентации на более узкий круг моделей и задач и конкретные методы расчетов специализированные ПС могут дополняться развитым методическим обеспечением.

При сопоставлении универсальных и специализированных ПС наблюдается вполне естественная ситуация, когда круг задач, который может быть в принципе решен на ПС обоих типов, на специализированных решается значительно эффективнее и прежде всего по временным затратам. Именно временной фактор при освоении и использовании ПС в учебном процессе, в особенности для вечерней и заочной форм обучения, делает выбор в пользу специализированных ПС более предпочтительным.

К характерным представителям универсальных ПС можно отнести пакет MATLAB с его многочисленными расширениями [8], [9], [10].

Эффективным специализированным ПС для проектирования СУ является программно-методическое обеспечение на базе программы *CLASSiC (Complex Linear Analysis and Structure Synthesis in Control)*, разработанное на кафедре автоматики и процессов управления СПбГЭТУ “ЛЭТИ” [5], [11]. Благодаря удобному интерфейсу и развитой методической поддержке ПС *CLASSiC* получило широкое распространение, в частности в вузах России и за рубежом (имеются версии с диалогом на русском, английском, польском, немецком и других языках) [5].

В предлагаемом пособии расчет характеристик всех примеров моделей СУ и иллюстративные материалы выполнены с использованием версии 3 ПС *CLASSiC* [11]. Существенной чертой *CLASSiC-3* является наличие подсистемы анализа структурных особенностей сложных СУ с отображением структурных свойств непосредственно на блок-схеме, что и использовано в материалах последнего раздела пособия.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ.

ПРИНЦИПЫ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Понятия об управлении и системах управления.

Составляющие процесса управления

Под *управлением* будем понимать совокупность мероприятий по организации процесса для достижения поставленной цели.

Необходимые составляющие процесса управления рассмотрим на примере движения судна – см. рис. 1.1 [6], [7].

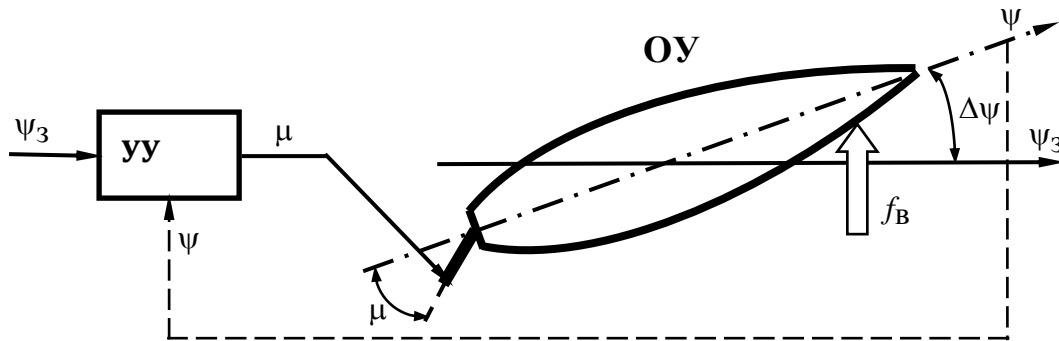


Рис. 1.1

Целью процесса управления в данном случае является поддержание объектом управления (ОУ) заданного курса ψ_3 . При движении ОУ (судно) подвергается *возмущающему воздействию* f_B (волны, порывы ветра), в результате чего текущий курс ψ в некоторый момент времени будет отличаться от заданного ψ_3 . Информация о цели и о текущем состоянии процесса управления поступает на *управляющее устройство* (УУ). В УУ сравниваются цель и текущее состояние, оценивается их *рассогласование* $\Delta\psi$ и вырабатывается *управляющее воздействие* μ на регулирующий орган ОУ. В данном случае регулирующий орган ОУ – руль; управляющее воздействие μ – угол поворота руля.

УУ “принимает решение”, т. е. вырабатывает управляющее воздействие на основе величины рассогласования и в соответствии с определенным алгоритмом – *законом управления*. Управляющее воздействие должно минимизировать рассогласование между целью и состоянием процесса управления с заданной точностью и за требуемое время.

Рассмотренный пример содержит все необходимые аспекты, то есть все перечисленные ниже составляющие процесса управления любым объектом.

1. Наличие четко формализованной цели управления. В данном случае это – требуемый курс судна ψ_3 .

2. Контроль за текущим состоянием процесса управления. В данном случае это – истинный курс судна ψ .

3. Сопоставление цели и состояния процесса, оценка рассогласования и принятие решения, то есть выработка управляющего воздействия.

4. Исполнение решения – непосредственное действие на регулирующий орган ОУ.

Отсутствие хотя бы одной из перечисленных составляющих или их неправильная организация делают невозможным осуществление процесса управления либо вообще, либо – с достаточно высоким качеством.

Для организации процесса управления конкретным объектом помимо УУ необходимы измерительные устройства для получения информации о текущем состоянии, а также усилительно-преобразовательные устройства и исполнительные механизмы, назначением которых является согласование сигналов по физической природе, по мощности и динамическому диапазону. Все эти взаимосвязанные и взаимодействующие функциональные устройства в совокупности с ОУ и образуют *систему управления (СУ)*.

1.2. Принципы управления

Несмотря на многообразие ОУ, можно сформулировать лишь несколько основополагающих *принципов управления* [1], [4], [6], [7]. Реализация того или иного принципа управления определяет вид общей структуры СУ.

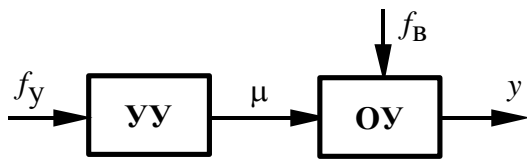


Рис. 1.2

Независимо от того, как организован процесс управления, в любой СУ должен присутствовать прямой канал передачи управляющего воздействия f_y к той выходной

координате y , которая должна это управляющее воздействие “воспроизводить” – рис. 1.2.

Здесь изображена укрупненная структура; ОУ может содержать усилительные, преобразовательные и другие функциональные звенья.

Принципы управления разделяются по способу контроля за текущим состоянием процесса управления.

Принцип разомкнутого управления. Структура на рис. 1.2 собственно и реализует этот принцип. По существу, здесь не производится учет текущей информации о состоянии процесса управления.

Принцип разомкнутого управления может быть использован только в тех случаях, когда сигнальное возмущающее воздействие f_b незначительно, вариации параметров (параметрические возмущения) всех функциональных устройств также малы, математическое описание СУ известно и достоверно,

а требования к качеству процесса управления не слишком высоки. Таким образом, использование принципа разомкнутого управления ограничено.

Принцип компенсации. При реализации принципа компенсации учет информации о текущем состоянии процесса управления производится путем *непосредственного измерения возмущающего воздействия* – см. рис. 1.3.

Структурной особенностью СУ, реализующих принцип компенсации, является наличие на структурной схеме модели дополнительного пути прохождения возмущающего воздействия.

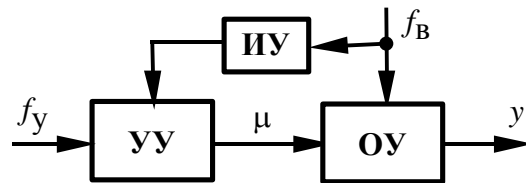


Рис. 1.3

Принцип компенсации возмущения используется в тех случаях, когда имеется глобальное (по сравнению с другими) и поддающееся измерению сигнальное возмущение.

Очевидно, что влияние параметрических возмущений и неопределенность параметров операторов функциональных звеньев в данном случае не учитываются, не ослабляются и непосредственно ухудшают качество процесса управления.

Принцип замкнутого управления. При реализации этого принципа учет информации о текущем состоянии процесса управления производится путем *непосредственного измерения управляемой координаты* – см. рис. 1.4.

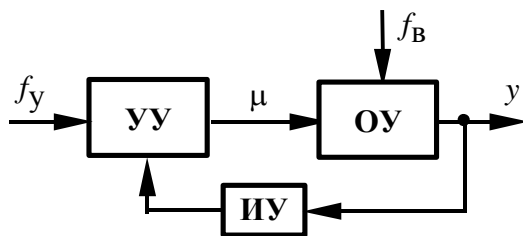


Рис. 1.4

Структурной особенностью СУ, реализующих принцип замкнутого управления, является наличие на структурной схеме модели системы замкнутого пути – *контура*, образуемого при передаче текущей информации от управляемой координаты к УУ. Поэтому такой принцип управления называется также *принципом обратной связи*.

Существенной особенностью замкнутого управления является то обстоятельство, что не имеют значения причины, вызвавшие отклонение процесса от цели управления. Ими могут являться множество сигнальных и параметрических возмущений, неточность математического описания функциональных звеньев. В связи с этим рассматриваемый принцип более универсален и получил широкое распространение.

Следует отметить, что выработка УУ нового управляющего воздействия для реагирования на изменившееся текущее состояние может произойти только после факта отклонения текущего состояния от цели и появления рассогласования. Поэтому такой принцип управления называется также *управлением по отклонению*.

Принцип комбинированного управления. Этот принцип является комбинацией (объединением) принципов компенсации и замкнутого управления – см. рис. 1.5.

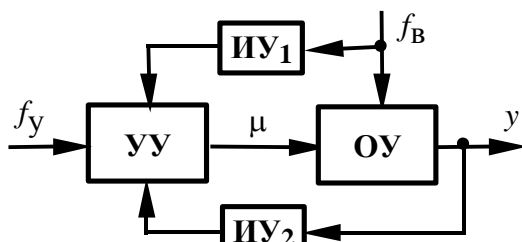


Рис. 1.5

Комбинированный принцип целесообразно использовать при высоких требованиях к качеству процесса управления и в том случае, если есть преобладающее и доступное измерению сигнальное возмущение. Это возмущение компенсируется созданием дополнительного пути, а влияние всех остальных неучтенных сигнальных и параметрических возмущений уменьшается контуром отрицательной обратной связи.

1.3. Классификация систем управления

В основе любой классификации лежат *признаки*, по которым множество объектов подразделяется на подмножества – классы.

Системы управления можно классифицировать по различным признакам. Рассмотрим следующие признаки классификации: *информационный, по типу сигналов, алгоритмический, энергетический*.

Классификация систем управления по информационному признаку. В этом случае СУ подразделяются по способу получения текущей информации о состоянии процесса управления. Поэтому рассматриваемая классификация подразделяет СУ как раз в соответствии с принципами управления – см. подразд. 1.2.

Классификация систем управления по типу сигналов. Используемые в теории управления модели СУ как правило абстрагированы от физической природы сигналов. Сигналы (*координаты, переменные*) на входах и выходах функциональных звеньев рассматриваются как носители информации, а сами звенья – как преобразователи этих сигналов. Преобразование сигнала

некоторым звеном производится в соответствии с приданным (приписанным) этому звену оператором.

Непрерывные системы. В них информация кодируется уровнем (значением) функции непрерывного времени – см. рис. 1.6,*а*.

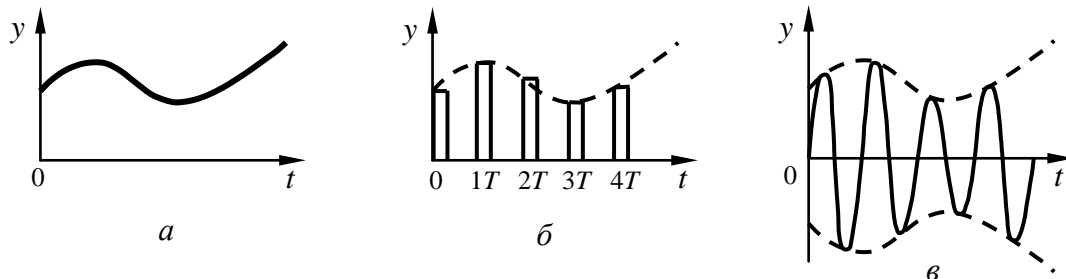


Рис. 1.6

Цифровые системы. В них все переменные или их часть представляют собой дискретные сигналы. Квантование, или дискретизация сигналов может производиться как по уровню, так и по времени. Системы, в которых производится квантование сигнала по времени, а мгновенное значение непрерывного сигнала на выходе какого-либо аналогового звена (звеньев) в моменты квантования кодируется каким-либо параметром импульса (амплитудой, шириной, фазой), называются *импульсными системами*. На рис. 1.6,*б* приведен пример квантования непрерывного сигнала с одинаковыми периодом следования T и длительностью импульсов, амплитуда которых несет информацию о значениях непрерывного сигнала (так называемая *амплитудно-импульсная модуляция*).

Системы переменного тока. Информация кодируется амплитудой переменного тока, то есть огибающей несущего сигнала – см. рис. 1.6,*в*.

Классификация систем управления по алгоритмам управления. На

рис. 1.7 приведена *типовая структура СУ с единичной отрицательной обратной связью*. Единичная обратная связь означает, что вся информация о выходной

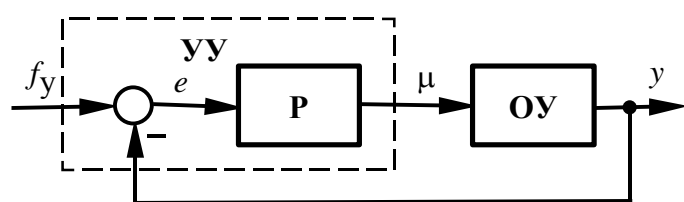


Рис. 1.7

координате передается на *элемент сравнения*, который образует ошибку рассогласования $e(t) = f_y(t) - y(t)$. *Регулятор P* на основе информации об ошибке, т. е. по величине рассогласования цели (задающего воздействия

$f_y(t)$) и текущего состояния (управляемой координаты $y(t)$) вырабатывает управляющее воздействие μ на ОУ.

Регулятор функционирует в соответствии с заложенным в него алгоритмом, называемым *законом управления* (законом регулирования).

Рассмотрим наиболее распространенные – *типовые* – законы управления для непрерывных СУ [4], [6], [7]. Регулятор будем трактовать как преобразователь сигналов в соответствии с некоторым математическим оператором.

Пропорциональный закон (П-закон). Воздействие на объект прямо-пропорционально рассогласованию:

$$\mu(t) = k_p e(t). \quad (1.1)$$

Интегральный закон (И-закон). Уровень воздействия на объект определяется суммарной ошибкой:

$$\mu(t) = k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + \mu_0. \quad (1.2)$$

Если продифференцировать выражение (1.2), то получим соотношение $d\mu(t)/dt = k_I e(t)$, которое показывает, что величина ошибки определяет скорость изменения управляющего воздействия. Отличительной особенностью И-закона управления является то обстоятельство, что установившиеся процессы в СУ могут существовать только при $e(t) = 0$.

Пропорционально-интегральный закон (ПИ-закон). Представляет собой комбинацию первых двух:

$$\mu(t) = k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau. \quad (1.3)$$

Пропорционально-интегрально-дифференциальный закон (ПИД-закон). В дополнение к ПИ-закону формирует управляющее воздействие также и с учетом скорости изменения ошибки:

$$\mu(t) = k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + k_D \frac{de(t)}{dt}. \quad (1.4)$$

Рассмотренные типовые законы управления (регулирования) (1.1) – (1.4) часто используются в системах промышленной автоматики.

Классификация систем управления по энергетическому признаку. В зависимости от того, не используется или используется дополнительная

(сторонняя) энергия для реализации (исполнения) принятого управляющим устройством решения, СУ подразделяются на системы *прямого* регулирования и системы *непрямого* регулирования (управления).

В системах прямого управления отбираемая измерительным устройством энергия достаточна для оказания воздействия на регулирующий орган объекта. При этом часто такие функциональные элементы, как ИУ, УУ (вместе с элементом сравнения) и исполнительный механизм, оказываются конструктивно объединенными. В качестве примера можно указать на две СУ в автомобиле: система стабилизации уровня топлива в поплавковой камере карбюратора, а также система стабилизации температуры охлаждающей жидкости двигателя. Системы прямого регулирования просты и надежны, но применимы с простыми алгоритмами управления и при не высоких требованиях к процессу управления.

В системах непрямого управления функционально разделяются функции измерения (контроля за текущим состоянием процесса), принятия решения управляющим устройством (быть может, по сложному алгоритму) и исполнения решения. Для последней составляющей используются специальные исполнительные устройства и механизмы (*сервоприводы*), целью которых является преобразование управляющего сигнала по физической природе и усиление по величине и мощности.

По виду используемой энергии различают электрические, механические, гидравлические, электрогидравлические и другие СУ.

1.4. Поведение объектов и систем управления

Теория управления оперирует математическими моделями объектов и СУ, которые описывают поведение систем, то есть их реакцию на управляющие и возмущающие воздействия. Как уже говорилось, функционирующие в этих моделях сигналы (координаты, переменные) в большинстве случаев абстрагированы от их физической природы. Это позволяет описывать и обобщать закономерности поведения в объектах и системах различного функционального назначения.

Поведение объектов управления. Рассмотрим отдельно поведение судна как объекта управления без системы управления, представленной в подразд. 1.1, рис. 1.1 [6], [7]. Будем считать, что управляющее воздействие

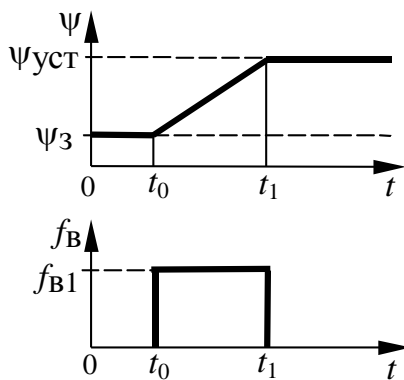


Рис. 1.8

на объект не меняется (руль судна закреплен). До момента времени t_0 судно двигалось курсом ψ , совпадающим с заданным ψ_3 – см. рис. 1.8. Пусть на этот объект с момента времени t_0 и до t_1 подействовало постоянное возмущение $f_{в1}$ (боковой ветер), отклоняющее его с заданного курса ψ_3 . Отклонение текущего курса ψ от заданного будет возрастать – накапливаться, т. е. интегрироваться. При прекращении

действия возмущения (момент времени t_1) новый установившийся курс $\psi_{уст}$ не изменится; объект сам по себе не придет в исходное состояние, то есть не вернется к заданному курсу. Такие объекты называются *нейтральными*, или *без самовыравнивания*.

Рассмотрим другой объект – электродвигатель. Будем считать, что на холостом ходу (без нагрузки на валу) на двигатель подано управление, обеспечивающее ему скорость вращения холостого хода n_{xx} – см. рис. 1.9. Будем также считать, что управляющее воздействие меняться не будет. В момент времени t_0 на валу двигателя произошло изменение нагрузки – момент сопротивления (нагрузки) возрос от M_{xx} до некоторой величины $M_{н1}$. Это вызовет уменьшение скорости вращения, величина которой после окончания переходного процесса примет некоторое значение n_1 . После сброса нагрузки, то есть после прекращения действия возмущения (момент времени t_1) скорость вращения двигателя вернется к значению, существовавшему до приложения возмущения. Считается, что объекты такого типа обладают *самовыравниванием* и называются *устойчивыми*.

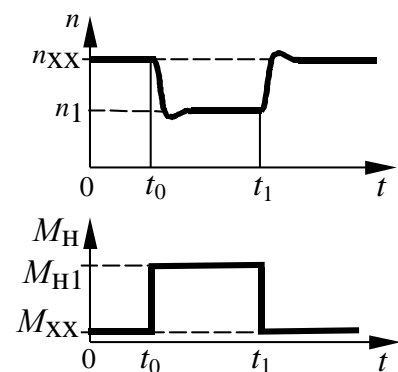


Рис. 1.9

Приведем пример поведения другого объекта – баллистической ракеты на вертикальном участке активной траектории полета. В плане

рассматриваемого процесса аналогами ракеты, “стоящей” на струе газа, являются механический маятник в верхнем положении равновесия, а также длинный шест, поставленный не горизонтальную плоскость. Очевидно, что при любом, даже малом возмущении начнется отклонение объекта от вертикали; это отклонение будет увеличиваться и после прекращения действия возмущения. Такие объекты называются *неустойчивыми*.

Рассмотрим также поведение маятника, находящегося в нижнем положении равновесия. Возмущающее воздействие отклонит маятник от этого положения на некоторый угол, и после прекращения действия возмущения маятник станет совершать колебательные движения. Про подобные объекты говорят, что они нейтральны, но находятся на *колебательной границе устойчивости*.

Поведение систем управления. Каждый объект при функционировании должен иметь требуемое поведение. Для нейтрального и, тем более, неустойчивого объекта следует добиться устойчивого поведения. Кроме этого, необходимо обеспечить инвариантность (независимость) или малую чувствительность управляемых координат к сигнальным и параметрическим возмущениям. Например, для рассмотренного примера электродвигателя может быть сформулировано требование в установившемся режиме уменьшить до малой величины (быть может, до нуля) отклонение между n_{xx} и n_1 – см. рис. 1.9. Переходный процесс как реакция на изменение входных воздействий также должен заканчиваться за требуемое время и быть достаточно плавным.

Для обеспечения требуемого поведения объекта его объединяют с рядом других функциональных звеньев в систему в соответствии с выбранным принципом управления. Такое множество взаимосвязанных звеньев и объекта проявляется при их взаимодействии новым качеством, не присущим отдельно взятому объекту управления – см. подразд. 1.1, 1.2.

Реакция любой СУ на входное воздействие определяется двумя составляющими: характеристиками входного воздействия и свойствами собственно самой СУ.

На рис. 1.10 представлена реакция некоторой устойчивой СУ на входное управляющее воздействие, которое в момент времени $t = 0$ изменяется скачком от нуля до величины $f_y = \text{Const}$.

Можно выделить две составляющие реакции СУ на входной сигнал: переходный режим (переходный процесс) и установившийся режим. Время окончания переходного процесса – *время регулирования* t_p – определяют как момент последнего вхождения в некоторую зону, которая обычно составляет $\pm 5\%$ от установившегося значения $u_{уст}$ (штриховые линии на рис. 1.10).

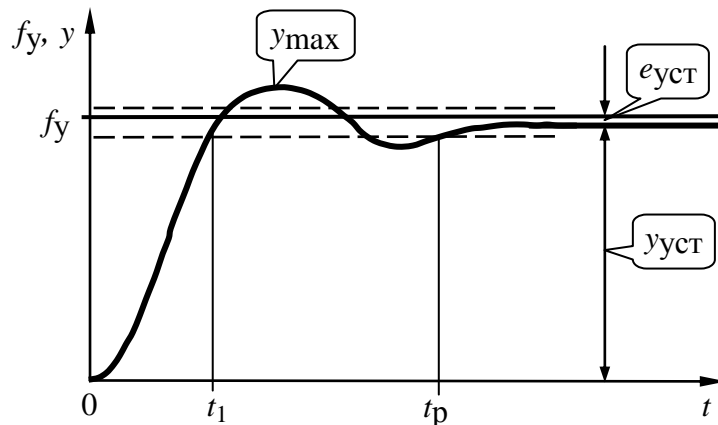


Рис. 1.10

Установившаяся ошибка $e_{уст} = f_y - u_{уст}$ характеризует *точность* СУ в установившемся режиме.

Динамика СУ (переходный режим) характеризуется *быстродействием* системы и склонностью процесса к колебательности.

Склонность к колебательности оценивается *перерегулированием*

$$\sigma = \frac{y_{max} - u_{уст}}{u_{уст}} \cdot 100\% .$$

Если под *быстродействием* понимать скорость изменения выходной координаты при реакции на входное воздействие, то может быть также

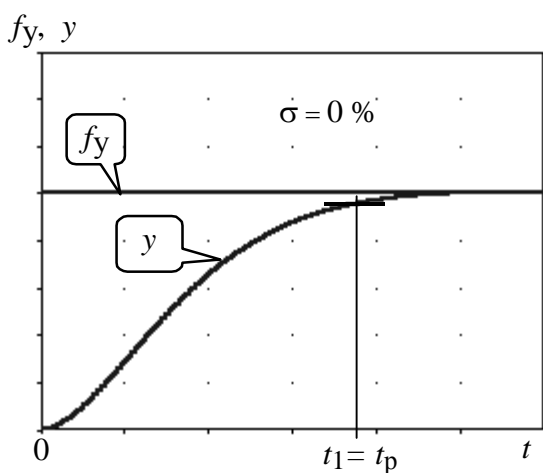


Рис. 1.11

использован показатель качества *время первого согласования* t_1 , т. е. время первого вхождения в зону $\pm 5\%$ от установившегося значения $u_{уст}$. Очевидно, что для процессов с перерегулированием $\sigma < 5\%$, выполняется $t_p = t_1$ – см. рис. 1.11. Если процесс не имеет перерегулирования, т. е. $\sigma = 0$, то процесс называется *апериодическим*; такой процесс и представлен на рис. 1.11.

Для $\sigma \geq 5\%$ имеем $t_p > t_1$. При значительной колебательности процесса показатели динамики t_1 и t_p находятся в противоречии, то есть для достаточно быстродействующей системы время окончания процесса может значительно превосходить время первого согласования – см. рис. 1.12.

Для процессов в СУ, находящихся на границе устойчивости, время регулирования (то есть время окончания процесса) $t_p = \infty$.

Для процессов в неустойчивых СУ рассмотренные показатели качества динамики смысла вообще не имеют.

Типовое поведение систем управления. Несмотря на многообразие объектов различного функционального назначения и систем управления этими объектами, можно описать *типовое поведение* некоторой “хорошей” СУ. Переходный процесс в такой системе должен быть плавным и либо апериодическим, либо – слабоколебательным – см. рис. 1.13. Ограничение на допустимое перерегулирование зависит от требований к конкретной СУ;

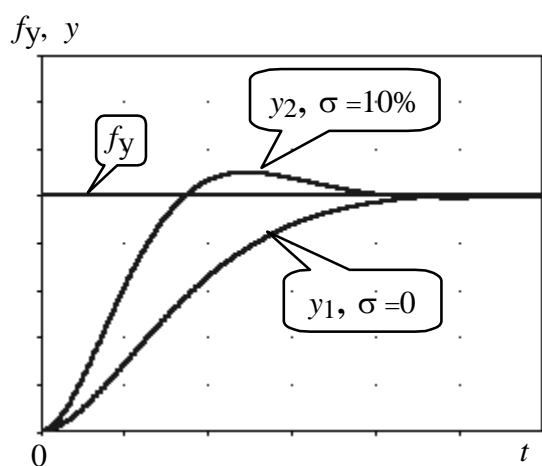


Рис. 1.13

обычно $\sigma < 10 \div 15\%$. Для некоторых СУ перерегулирование вообще недопустимо и процесс должен быть апериодическим.

Показанные на рис. 1.13 кривые могут быть решением линейного дифференциального уравнения второго порядка, характеристический полином которого имеет пару либо действительных корней (апериодический процесс), либо – пару слабоколебательных комплексно-сопряженных корней (процесс с не значительным перерегулированием). Отсюда следует, что при проектировании даже сложной СУ, содержащей различные динамические звенья и описываемой дифференциальным уравнением достаточно высокого порядка, следует

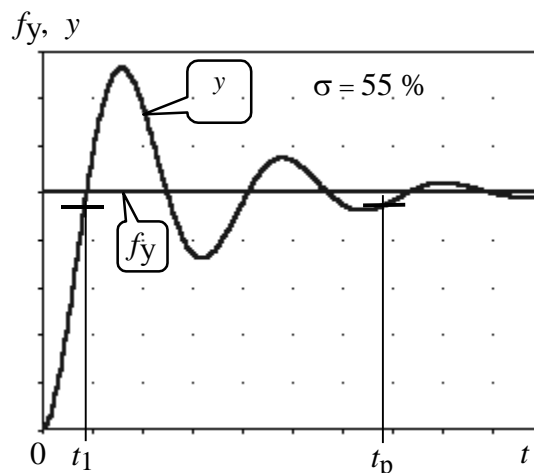


Рис. 1.12

обеспечивать типовое, “простое” поведение, соответствующее поведению системы низкого порядка.

Показатели качества систем управления. Происходящие в динамических системах процессы оцениваются различными показателями качества (критериями), которые характеризуют свойства систем с разных сторон. В этом разделе выше рассмотрены следующие показатели качества: время первого согласования t_1 , время регулирования t_p , перерегулирование σ , установившаяся ошибка $e_{уст}$. Все эти критерии оценивают временные процессы, т. е. реакции на входные воздействия и, таким образом, непосредственно характеризуют поведение СУ.

Как будет видно из последующего материала, для расчетов, анализа свойств и обеспечения требуемых характеристик СУ используются модели, представленные не только во временной области, но и в области комплексной переменной “ s ” преобразования Лапласа, а также модели, отображающие частотные свойства. При использовании всех этих форм представления моделей также вводятся различные оценки и показатели качества.

При проектировании СУ установление взаимосвязи и соответствия различных показателей качества повышает достоверность расчетов и способствует установлению зависимости свойств и характеристик СУ от особенностей внутренней организации и значений параметров отдельных звеньев.

1.5. Задачи теории управления

Основные задачи теории управления – *анализ и синтез*.

Анализ направлен на выявление свойств поведения СУ и оценку этих свойств с использованием различных критериев – показателей качества. Кроме констатации свойств СУ анализ должен также объяснять зависимость свойств и характеристик от организации системы (ее внутренней структуры), от вида операторов и значений параметров отдельных звеньев.

Синтез направлен на формирование структуры системы для реализации выбранного принципа управления, формирование алгоритма управляющего устройства, а также включает в себя определение и расчет операторов регуляторов и корректирующих звеньев для обеспечения требуемого поведения СУ.

2. ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ И ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В разделе рассматриваются различные формы представления конечномерных линейных непрерывных стационарных моделей СУ.

В зависимости от информативности о внутренней организации СУ (о ее структуре), выделяют два типа моделей.

Модели первого типа – со “свернутой” внутренней организацией или модели “вход–выход” – см. рис. 2.1 [5], [6], [7].

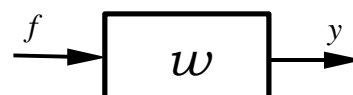


Рис. 2.1

В таких моделях отсутствует информация о внутренней структуре СУ, то есть о составе функциональных звеньев и переменных и о взаимосвязях между ними. Модель представляет собой заданный в некоторой форме математический оператор преобразования входного сигнала f (управляющего или возмущения) в выходной сигнал y .

На таких моделях и рассматриваются в данном разделе формы представления оператора преобразования w .

Модели второго типа – с раскрытой внутренней организацией – несут информацию о структуре системы – см. подразд. 2.5, 2.6.

2.1. Дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение (ДУ) “ n -го порядка” связывает во временной области входную переменную $f(t)$, выходную переменную $y(t)$ и их производные:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f. \quad (2.1)$$

Порядок n определяется по наибольшему номеру производной левой части уравнения (2.1).

ДУ дополняется начальными условиями $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$.

Часто используется компактная запись ДУ (2.1), для чего вводится символьный оператор дифференцирования по времени $p \equiv d/dt$:

$$A_n(p) y(t) = B_m(p) f(t). \quad (2.2)$$

Здесь $A_n(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0$, $B_m(p) = b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0$ – операторные полиномы.

2.2. Передаточные функции

По определению передаточная функция (ПФ) представляет собой оператор, равный отношению изображений выходной и входной координат при нулевых начальных условиях. Для СУ, представленной на рис. 2.1, ПФ

$$W(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}. \quad (2.3)$$

Изображения функций будем обозначать прописными буквами.

ПФ (2.3) может быть легко получена из ДУ (2.1) (или (2.2)). Для этого преобразуем по Лапласу левую и правую части (2.1); при этом воспользуемся свойством линейности преобразования Лапласа и тем, что дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения на комплексный аргумент s (справедливо при нулевых начальных условиях).

Таким образом, если $y(t) \Rightarrow Y(s)$, то $y'(t) \Rightarrow sY(s)$, $y''(t) \Rightarrow s^2Y(s), \dots$

В результате получим:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0)F(s). \quad (2.4)$$

Из (2.4) с учетом (2.3) окончательно получим

$$W(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{(b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0)}{(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0)} = \frac{B_m(s)}{A_n(s)}. \quad (2.5)$$

Как следует из (2.5), ПФ является дробно-рациональной функцией (отношением двух полиномов). Полиномы числителя и знаменателя образуются из соответствующих коэффициентов правой и левой частей исходного ДУ (2.1) или (2.2). Полином $A_n(s)$ знаменателя ПФ системы (или отдельного звена) называется *характеристическим полиномом* системы (звена).

Как видно из (2.1) и (2.5), по ДУ можно сразу записать ПФ, и наоборот.

Форма представления ПФ (2.5) называется *полиномиальной*. Можно представить ПФ также в *факторизованной* форме, то есть коэффициентом, множеством нулей (корней полинома числителя) $z_j : j=1, \dots, m$, и множеством полюсов (корней полинома знаменателя) $p_i : i=1, \dots, n$:

$$W(s) = \frac{b_m \prod (s - z_j)}{a_n \prod (s - p_i)} = \frac{k \prod (s - z_j)}{\prod (s - p_i)}. \quad (2.6)$$

Здесь $k = b_m / a_n$ – отношение старших коэффициентов полиномов (2.5).

2.3. Временные характеристики

Реакция любой динамической системы на входной сигнал – временная характеристика – определяется двумя составляющими: параметрами сигнала и свойствами собственно самой системы.

Для СУ, описываемых линейными дифференциальными уравнениями (2.1), это обстоятельство проявляется в форме решения ДУ, использующей операторный метод на основе преобразования Лапласа. Как следует из (2.3), изображение выходной координаты $Y(s)=F(s)W(s)$. Тогда оригинал – решение ДУ – может быть получен применением обратного преобразования Лапласа:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}. \quad (2.7)$$

Решение ДУ может быть сведено к сумме двух составляющих [6], [7]:

$$y(t) = u_{св}(t) + u_{вын}(t). \quad (2.8)$$

Свободная составляющая $u_{св}(t)$ характеризует динамику собственно самой системы и определяется решением однородного уравнения, образуемого из (2.1) приравниванием нулю правой части. При этом решение определяется корнями $s_i: i=1, \dots, n$ характеристического полинома $A_n(s)$ (или, что тоже самое, полюсами ПФ) системы:

$$u_{св}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t}. \quad (2.9)$$

Вынужденная составляющая в (2.8) $u_{вын}(t)$ определяется с учетом входного сигнала.

В подразд. 1.4 введено понятие устойчивости ОУ и СУ с позиции их поведения. Теперь для устойчивости СУ можно записать

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{св}(t) = 0. \quad (2.10)$$

Если все n корней характеристического полинома действительные, то $u_{св}(t)$ представляет собой сумму n экспонент – см. (2.9). Если имеются пары комплексно-сопряженных корней, то каждой такой паре $s_{i,i+1} = \alpha \pm j\omega$ в переходном процессе соответствует составляющая $C_i e^{\alpha t} \sin(\omega t)$.

Если расположить все корни характеристического полинома на комплексной плоскости, то с учетом (2.10) можно сформулировать следующее утверждение. *Для устойчивости СУ необходимо и достаточно,*

чтобы корни характеристического полинома принадлежали левой полуплоскости плоскости корней.

Если корни действительные, то они должны быть отрицательными; если присутствуют пары комплексно-сопряженных корней, то должны быть отрицательными их действительные части.

При наличии пары чисто мнимых корней $s_{i,i+1} = \pm j\omega$ (корни располагаются на оси мнимых) в переходном процессе присутствует незатухающая колебательная составляющая; система находится на “колебательной границе устойчивости”.

Если имеется хотя бы один “правый” действительный корень или пара комплексно-сопряженных правых корней, то будет иметь место

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{св}}(t) = \infty, \quad (2.11)$$

что является достаточным условием для неустойчивости СУ.

Если получено изображение процесса $Y(s)$, то еще до нахождения по выражению (2.7) оригинала $y(t)$ могут быть получены предельные значения в начале процесса и по его окончании с помощью теорем преобразования Лапласа о начальном и конечном значениях оригинала и изображения.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s), \quad (2.12)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s). \quad (2.13)$$

Информация о корнях характеристического полинома и соотношения (2.12) и (2.13) позволяют сделать ряд качественных и количественных суждений о характере временной характеристики еще до построения собственно всего переходного процесса в СУ.

2.4. Частотные характеристики

Частотные характеристики (ЧХ) представляют собой зависимости установившихся реакций системы (объекта) на гармонические сигналы всех частот. Если на вход некоторой линейной устойчивой СУ подать сигнал $A_f \text{Sin}(\omega t)$, то на ее выходе установятся вынужденные движения, которые также будут представлять собой гармонический сигнал $A_y(\omega) \text{Sin}(\omega t + \varphi(\omega))$ той же частоты, но измененной амплитуды и сдвинутый по фазе. Отношение $A_y(\omega)/A_f$ представляет собой коэффициент передачи по амплитуде на данной частоте $R(\omega)$; функция $R(\omega)$ называется *модулем ЧХ*.

В ЧХ, используемых для расчетов СУ, частота ω – круговая; имеет размерность рад/с (иногда условно обозначается “с⁻¹”).

ЧХ может быть описана оператором $W(j\omega)$ – комплексной функцией вещественного аргумента ω . Существуют различные формы представления комплексных функций:

$$W(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega) = R(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (2.14)$$

В соответствии с (2.14) используют разные типы ЧХ:

Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) $W(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega)$ есть сумма вещественной и мнимой частей ЧХ и строится на комплексной плоскости. При изменении частоты ω от нуля до ∞ конец вектора описывает на комплексной плоскости траекторию, называемую *годографом Найквиста*. АФХ не имеет отдельной оси частот и каждая точка характеристики может быть оцифрована соответствующим значением частоты.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$R(\omega) = \sqrt{\text{Re}(\omega)^2 + \text{Im}(\omega)^2}, \quad (2.15)$$

представляет собой зависимость от частоты модуля ЧХ.

Фазо-частотная характеристика ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)}, \quad (2.16)$$

отображает зависимость фазового сдвига от частоты.

Часто используются *логарифмические* амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ)

$$L(\omega) = 20 \lg R(\omega), \quad (2.17)$$

где $L(\omega)$ – логарифмический модуль, измеряемый в *децибеллах* (дБ). При делении оси частот на декады (интервалы десятикратного изменения частоты) и распределении ω внутри интервалов в логарифмическом масштабе, ЛАЧХ преобретают ряд специфических особенностей, облегчающих их построение и позволяющих более наглядно отображать свойства СУ (см. разд. 3, 4).

Как правило, ФЧХ (2.16) строится одновременно с АЧХ (2.15) или ЛАЧХ (2.17) на единой шкале частот; именно соотношение амплитудной и фазовой характеристик позволяет выявить ряд важных свойств СУ.

Если известна ПФ $W(s)$ отдельного звена или всей СУ, то частотный оператор получается простой заменой переменной

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}. \quad (2.18)$$

Так как ПФ является отношением двух полиномов комплексного аргумента s , то при подстановке значения частоты четные степени полиномов дают вещественные части, а нечетные степени – мнимые части ЧХ. Избавлением от иррациональности в знаменателе ПФ могут быть выделены вещественная и мнимая части ЧХ, а затем, в соответствии с (2.15), (2.17) и (2.16), модуль $R(\omega)$, логарифмический модуль $L(\omega)$ и фаза $\varphi(\omega)$.

2.5. Системы управления с типовой структурой

На рис. 2.1 представлена модель СУ в форме “вход-выход”. Известен оператор w преобразования входного воздействия в выходной сигнал, заданный в одной из рассмотренных выше форм представления. Информация о внутренней организации в такой модели отсутствует (модель системы со свернутой организацией).

Рассмотрим модели с раскрытой внутренней организацией, которые отображают структуру СУ, то есть состав функциональных звеньев и связи между ними.

Многообразие объектов и СУ порождает и большое множество структур, отличающихся числом и составом звеньев и способов их взаимосвязей. Здесь ограничимся так называемой *типовой структурой* СУ, реализующей принцип обратной связи – см. подразд. 1.2, рис. 1.2, а также п. 1.3, рис. 1.7. К моделям такого вида может быть приведено описание значительного множества СУ различного функционального назначения.

Вариант типовой структуры СУ изображен на рис. 2.2.

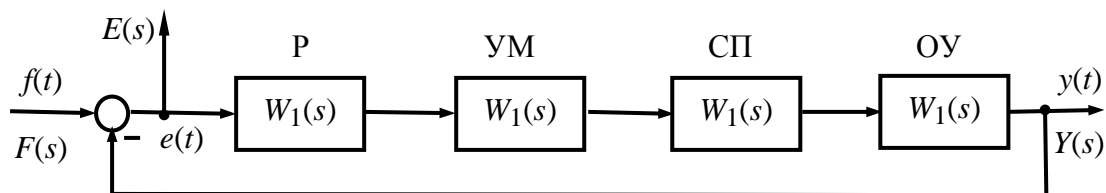


Рис. 2.2

Прямой канал образован объектом управления ОУ и рядом звеньев, обеспечивающих реализацию управляющего воздействия (в данном случае это – сервопривод СП и усилитель мощности УМ). Регулятор Р в соответствии с заложенным в него алгоритмом управления преобразует ошибку рассогласования в управляющее воздействие. В общем случае в

зависимости от характеристик ОУ прямой канал может иметь разный состав последовательно соединенных функциональных звеньев.

Операторы звеньев СУ будем задавать передаточными функциями (2.3) или (2.6). ПФ прямого канала без обратной связи, то есть ПФ разомкнутой СУ, будем обозначать $W_p(s)$. ПФ последовательного соединения звеньев равна произведению ПФ отдельных звеньев, то есть

$$W_p(s) = \prod_i W_i(s). \quad (2.19)$$

В результате типовая структура СУ может быть приведена к виду, представленному на рис. 2.3. В данной модели фигурируют три координаты: входное воздействие $f(t)$, выходной управляемый сигнал $y(t)$ и сигнал ошибки $e(t)$. Этой модели можно поставить в соответствие две модели типа “вход-выход” – см. рис. 2.4.

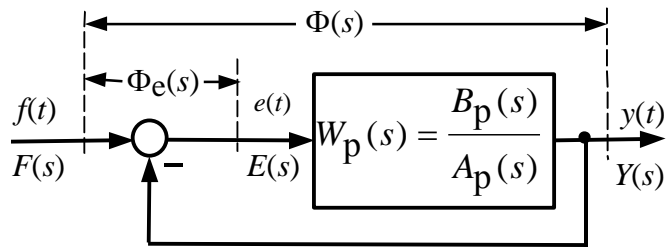


Рис. 2.3



Рис. 2.4

На рис. 2.4,*а* представлена модель в виде ПФ $\Phi(s)$ замкнутой системы по управлению. На рис. 2.4,*б* представлена модель в виде ПФ $\Phi_e(s)$ замкнутой системы по ошибке.

2.6. Связь передаточных функций замкнутой и разомкнутой типовой системы управления. Характеристический полином типовой системы управления

Для СУ с типовой структурой (см. рис. 2.3) выразим ПФ $\Phi(s)$ и $\Phi_e(s)$ замкнутой системы через оператор $W_p(s)$ прямой цепи, то есть системы без обратной связи.

ПФ по управлению $\Phi(s) = Y(s) / F(s)$. Для получения этого оператора по модели, изображенной на рис. 2.3, необходимо исключить координату $E(s)$:

$$Y(s) = E(s)W_p(s) = (F(s) - Y(s))W_p(s). \quad (2.20)$$

Из (2.20) получаем

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)}. \quad (2.21)$$

Выразим теперь ПФ замкнутой системы по управлению через полином числителя и знаменателя ПФ разомкнутой системы. Подставляя в (2.21) $W_p(s) = B_p(s) / A_p(s)$, получим

$$\Phi(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B_p(s)}{A_p(s) + B_p(s)}. \quad (2.22)$$

Таким образом, числители ПФ разомкнутой и ПФ по управлению замкнутой систем совпадают.

Знаменатель ПФ замкнутой системы $A(s)$, он же – характеристический полином замкнутой системы – равен сумме полиномов знаменателя и числителя ПФ разомкнутой системы.

ПФ по ошибке $\Phi_e(s) = E(s) / F(s)$. Для получения этого оператора по модели, изображенной на рис. 2.3, необходимо исключить координату $Y(s)$:

$$E(s) = F(s) - Y(s) = F(s) - E(s)W_p(s). \quad (2.23)$$

Из соотношения (2.23) получаем

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{F(s)} = \frac{1}{1 + W_p(s)}. \quad (2.24)$$

Выразим теперь ПФ замкнутой системы по ошибке через полином числителя и знаменателя ПФ разомкнутой системы. Подставляя в (2.24) $W_p(s) = B_p(s) / A_p(s)$, получим

$$\Phi_e(s) = \frac{B_e(s)}{A(s)} = \frac{A_p(s)}{A_p(s) + B_p(s)}. \quad (2.25)$$

Таким образом, числитель ПФ замкнутой системы по ошибке совпал со знаменателем ПФ разомкнутой системы.

Знаменатель ПФ замкнутой системы $A(s)$, он же – характеристический полином замкнутой системы, равен сумме полиномов знаменателя и числителя ПФ разомкнутой системы, как и для ПФ по управлению.

Сразу обобщим важную особенность. У любой СУ – один характеристический полином; он не зависит от назначенных входа и выхода при получении конкретной ПФ.

Соотношения (2.21), (2.22) и (2.24), (2.25) справедливы для рассматриваемой здесь *типовой СУ*, то есть для *одноконтурной системы с единичной отрицательной обратной связью*.

3. ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В [1], [2], [3], [4] описаны различные СУ, объекты и функциональные элементы которых отличаются по назначению, физической природе сигналов, энергоемкости и по другим параметрам.

Широкий класс функциональных элементов СУ с достаточной для процесса проектирования точностью может быть представлен так называемыми *типовыми звеньями*, представленными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков.

Из всех таких типовых звеньев рассмотрим ряд наиболее распространенных *звеньев первого порядка*, то есть описываемых дифференциальными уравнениями не выше первого порядка. Эти звенья ограничим следующим составом.

1. Пропорциональное звено
2. Интегрирующее звено (интегратор)
3. Идеальное дифференцирующее звено (дифференциатор)
4. Апериодическое звено первого порядка
5. Пропорционально-дифференцирующее звено.

Для описания процессов, содержащих колебательную составляющую, используется и также будет рассмотрено *колебательное звено второго порядка*.

Операторы звеньев будем задавать дифференциальным уравнением и ПФ. Будем рассматривать переходную характеристику звена (реакцию на ступенчатое воздействие) и его частотные характеристики.

3.1. Пропорциональное звено

Уравнение имеет следующий вид

$$y = Kx. \quad (3.1)$$

Передаточная функция

$$W(s) = K/1 = K. \quad (3.2)$$

Описывающее это звено алгебраическое уравнение (3.1) можно рассматривать как вырожденное дифференциальное уравнение нулевого порядка. Во временной области это звено воспроизводит любой входной

сигнал, изменяя его величину в K раз. В связи с этим такое звено называется также *безынерционным*.

Единственный параметр K называется *коэффициентом передачи*.

Получим частотный оператор звена:

$$W(j\omega) = W(s) |_{s=j\omega} = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega) = K + j0. \quad (3.3)$$

АЧХ пропорционального звена

$$R(\omega) = \sqrt{\text{Re}(\omega)^2 + \text{Im}(\omega)^2} = K. \quad (3.4)$$

Модуль логарифмической ЧХ – ЛАЧХ (размерность в децибеллах (дБ))

$$L(\omega) = 20 \lg R(\omega) = 20 \lg K. \quad (3.5)$$

ФЧХ определяется выражением

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} = 0^\circ. \quad (3.6)$$

Рассмотрим АФХ, определяемую выражением (3.3) – см. рис. 3.1.

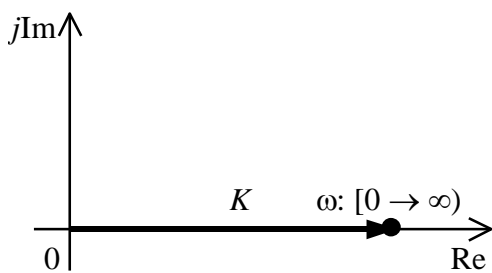
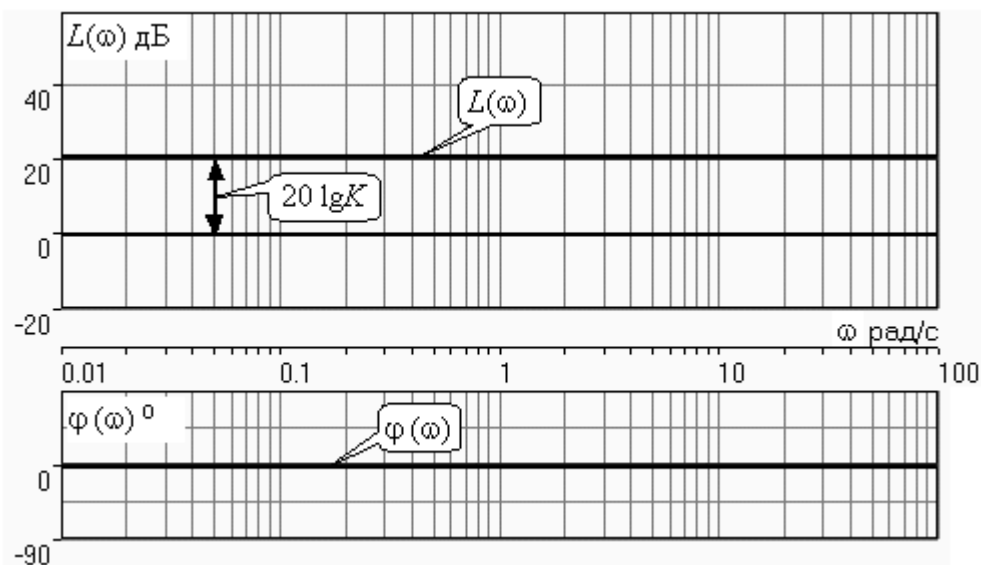


Рис. 3.1

Мнимая составляющая ЧХ равна нулю, а вещественная часть равна K и не зависит от частоты. Поэтому траектория конца вектора ЧХ при изменении частоты от нуля до ∞ вырождается в точку.

ЛЧХ определяются выражениями (3.4), (3.5), (3.6) и приведены на рис. 3.2.

ЛАЧХ (часто также используют аббревиатуру “ЛАХ”) представляет



собой прямую, параллельную оси частот и проходящую от этой оси на

расстоянии $20\lg K$. Очевидно, что приведенная на рис. 3.2 характеристика построена при значении $K = 10$.

Рис. 3.2

ФЧХ от параметра K не зависит и совпадает с осью частот.

При $K = 0$ ЛАХ совпадает с осью частот ($20\lg 1 = 0$ дБ); для $K < 1$ ЛАХ будет проходить под осью частот.

При изменении коэффициента передачи ЛАХ будет подниматься при увеличении K или опускаться при его уменьшении. Величина ΔL смещения ЛАХ при изменении K в ΔK раз будет составлять $\Delta L = 20\lg \Delta K$ (дБ).

Например, при увеличении K в 2 раза ЛАХ звена поднимется на 6 дБ, а при уменьшении в 2 раза опустится на такую же величину.

3.2. Интегрирующее звено (интегратор)

Дифференциальное уравнение интегратора

$$T_{\text{и}} \frac{dy(t)}{dt} = f(t). \quad (3.7)$$

Передаточная функция представляется в двух видах:

$$W(s) = \frac{1}{T_{\text{и}}s} = \frac{K}{s}, \quad (3.8)$$

где $K=1/T_{\text{и}}$. Параметр $T_{\text{и}}$ называется *постоянной интегрирования*, K – *коэффициент передачи* или *добротность* интегратора. Далее будет использоваться запись ПФ интегратора в виде $W(s)=K/s$.

Подадим на вход интегратора ступенчатое воздействие величины a , т. е. $f(t) = a1(t)$. Изображение такой функции $F(s) = a/s$. Изображение сигнала на выходе интегратора $Y(s) = F(s)W(s) = aK/s^2$. Обратное преобразование Лапласа дает реакцию интегратора на постоянный сигнал: $y(t) = aKt$ – см. рис. 3.3.

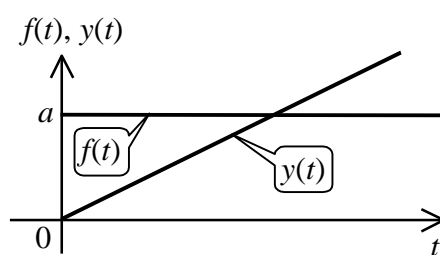


Рис. 3.3

Таким образом, реакция интегратора на постоянное воздействие представляет собой линейно изменяющийся сигнал, тангенс угла наклона которого к оси времени пропорционален величине входного воздействия и коэффициенту передачи интегратора.

Запишем частотный оператор интегрирующего звена:

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega) = K/j\omega = 0 + j(-K/\omega). \quad (3.9)$$

АЧХ

$$R(\omega) = \sqrt{\text{Re}(\omega) + \text{Im}(\omega)} = K/\omega. \quad (3.10)$$

Модуль ЛАЧХ (дБ)

$$L(\omega) = 20\lg R(\omega) = 20\lg K - 20\lg \omega. \quad (3.11)$$

ФЧХ интегрирующего звена

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(\text{Im}(\omega)/\text{Re}(\omega)) = \text{arctg}(-\infty) = -\pi/2. \quad (3.12)$$

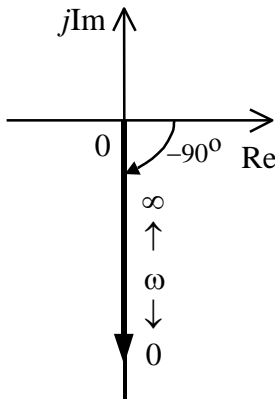


Рис. 3.4

Рассмотрим АФХ, которая определяется выражением (3.9) – см. рис. 3.4. Все точки АФХ располагаются на отрицательной части оси мнимых. На нулевой частоте интегратор имеет бесконечное усиление; при увеличении частоты модуль ЧХ $R(\omega)$ в соответствии с (3.10) монотонно уменьшается. Фазовый сдвиг на всех частотах составляет $-\pi/2$.

ЛЧХ интегратора строятся по формулам (3.10), (3.11), (3.12) – рис. 3.5.

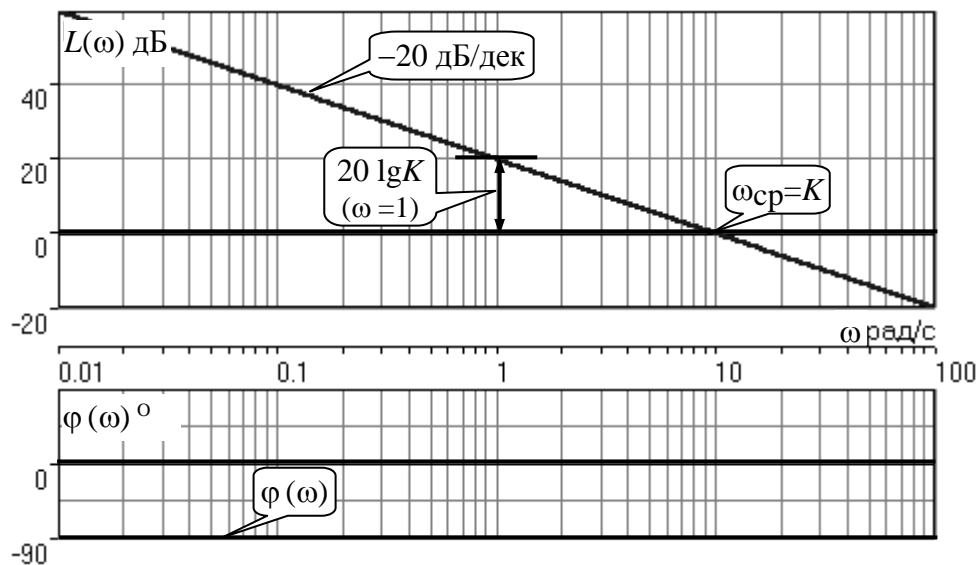


Рис. 3.5

ЛАХ представляет собой прямую, имеющую наклон -20 дБ/дек; это означает, что при увеличении частоты в 10 раз модуль уменьшается также в 10 раз. Действительно, определим изменение модуля на десятикратном интервале изменения частоты в любом месте частотного диапазона:

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(10\omega_i) - L(\omega_i) = 20\lg R(10\omega_i) - 20\lg R(\omega_i) = \\ &= (20\lg K - 20\lg(10) - 20\lg(\omega_i)) - (20\lg K - 20\lg(\omega_i)) = -20 \text{ дБ}. \end{aligned}$$

Для определения местоположения ЛАХ найдем точку её пересечения с осью частот. Данная точка называется частотой среза; при этом имеем $R(\omega_{cp})=1$, а $L(\omega_{cp})=0$ дБ. Из (3.10) видно, что $R(\omega)=1$ при $\omega=K$. Проведенная через эту точку прямая линия с наклоном -20 дБ/дек и является ЛАХ интегратора с коэффициентом передачи K . Найдем еще одну характерную точку при $\omega=1$. Из (3.11) следует, что на данной частоте $L(\omega)|_{\omega=1}=20\lg K$. Прямая, проведенная через эту точку и через точку на оси частот $\omega=K$ будет иметь наклон -20 дБ/дек. Заметим, что для интегратора с $K=1$ обе характерные точки совпадают ($\omega_{cp}=1$).

ФЧХ интегрирующего звена, как следует из (3.12), представляет собой прямую линию, параллельную оси частот – см. рис. 3.5.

При изменении коэффициента передачи (единственного параметра интегратора) ЛАХ будет смещаться параллельно самой себе: подниматься при увеличении K или опускаться при уменьшении K . Величина смещения ЛАХ ΔL при изменении K в ΔK раз будет составлять $\Delta L=20\lg(\Delta K)$ дБ. Например, при увеличении K в 10 раз ЛАХ поднимется на 20 дБ, а при уменьшении K в 4 раза опустится на 12 дБ.

3.3. Идеальное дифференцирующее звено (дифференциатор)

Дифференциальное уравнение звена имеет следующий вид:

$$y(t) = T_d \frac{df(t)}{dt} = K \frac{df(t)}{dt} . \quad (3.13)$$

Передаточная функция дифференциатора:

$$W(s) = \frac{T_d s}{1} = \frac{Ks}{1} = Ks , \quad (3.14)$$

где $K=T_d$. Параметр T_d называется *постоянной дифференцирования*, K – *коэффициентом передачи* дифференциатора. Далее будет использоваться запись ПФ дифференциатора в виде $W(s)=Ks$.

Подадим на вход дифференцирующего звена единичное ступенчатое воздействие $f(t)=1(t)$. Изображение такой функции $F(s)=1/s$. Изображение сигнала на выходе дифференциатора $Y(s)=F(s)W(s)=K$. Обратное преобразование Лапласа дает реакцию в виде δ -функции с площадью, равной K , т. е. $y(t)=K\delta(t)$.

Запишем частотный оператор дифференцирующего звена:

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega) = 0 + jK\omega. \quad (3.15)$$

АЧХ

$$R(\omega) = \sqrt{\text{Re}(\omega) + \text{Im}(\omega)} = K\omega. \quad (3.16)$$

Модуль ЛАЧХ (дБ)

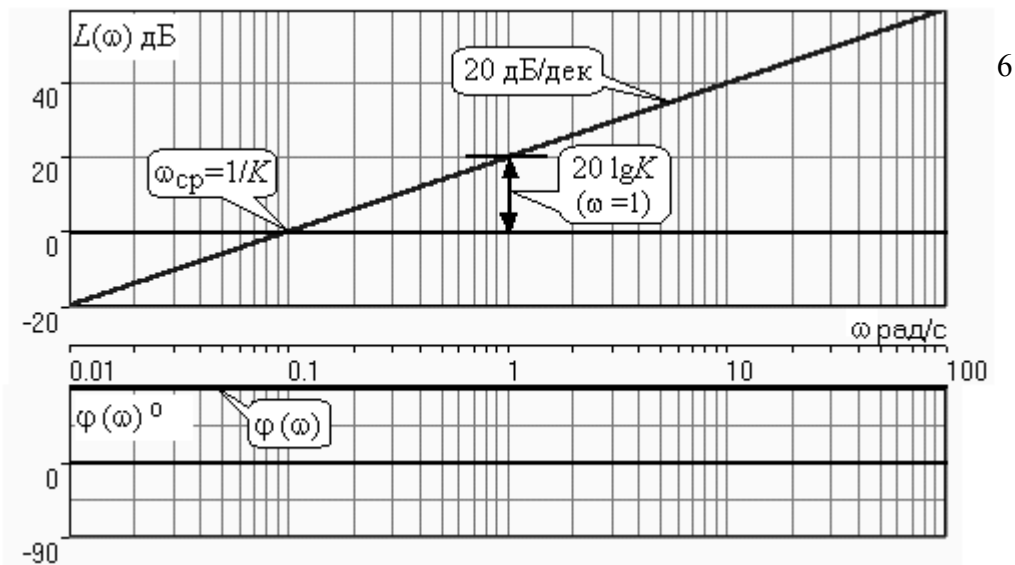
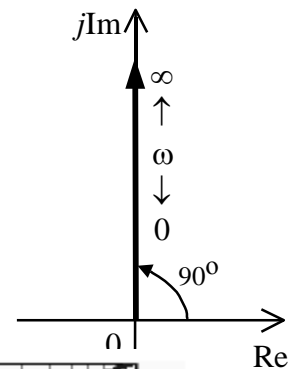
$$L(\omega) = 20\lg R(\omega) = 20\lg K + 20\lg \omega. \quad (3.17)$$

ФЧХ интегрирующего звена

$$\varphi(\omega) = \arctg(\text{Im}(\omega)/\text{Re}(\omega)) = \arctg(\infty) = \pi/2. \quad (3.18)$$

Рассмотрим АФХ, которая определяется выражением (3.15) – см. рис. 3.6.

Все точки АФХ располагаются на положительной части оси мнимых. При $\omega = 0$ дифференциатор имеет нулевое усиление, а при увеличении частоты модуль ЧХ $R(\omega)$, как видно из (3.16), монотонно увеличивается.



Фазовый сдвиг на всех частотах составляет $+\pi/2$.

ЛЧХ дифференциатора (выражения (3.16), (3.17), (3.18)) приведены на рис. 3.7 (построены при $K = 10$).

Рис. 3.7

ЛАХ представляет собой прямую, имеющую наклон $+20$ дБ/дек; это означает, что при увеличении частоты в 10 раз модуль ЧХ увеличивается также в 10 раз. Действительно, определим изменение модуля на десятикратном интервале изменения частоты в любом месте диапазона:

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(10\omega_i) - L(\omega_i) = 20\lg R(10\omega_i) - 20\lg R(\omega_i) = \\ &= (20\lg K + 20\lg(10) + 20\lg(\omega_i)) - (20\lg K + 20\lg(\omega_i)) = +20 \text{ дБ} . \end{aligned}$$

Для определения местоположения ЛАХ найдем точку $L(\omega_{\text{ср}}) = 0$ дБ, т. е. место пересечения ЛАХ с осью частот. Из (3.16) видно, что $R(\omega) = 1$ при $\omega = 1/K$. Проведенная через эту точку прямая линия с наклоном $+20$ дБ/дек и является ЛАХ дифференциатора с заданным коэффициентом передачи K . Найдем также характерную точку при $\omega = 1$. Из (3.17) следует, что на данной частоте, как и у интегратора $L(\omega)|_{\omega=1} = 20\lg K$.

Прямая, проведенная через эту точку и через точку на оси частот $\omega = 1/K$, будет иметь наклон $+20$ дБ/дек. Заметим, что для дифференциатора с $K = 1$ обе характерные точки совпадают ($\omega_{\text{ср}} = 1$).

ФЧХ дифференцирующего звена, как следует из (3.18), представляет собой прямую линию, параллельную оси частот – см. рис. 3.7.

При изменении коэффициента передачи (единственного параметра дифференциатора) ЛАХ будет смещаться параллельно самой себе: подниматься при увеличении K или опускаться при уменьшении K . Величина ΔL смещения ЛАХ при изменении K в ΔK раз будет составлять $\Delta L = 20\lg(\Delta K)$ дБ. Например, при увеличении K в 20 раз ЛАХ поднимется на 26 дБ, а при уменьшении K в 5 раз опустится на 14 дБ.

3.4. Апериодическое звено первого порядка

Дифференциальное уравнение имеет следующий вид

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kf(t). \quad (3.19)$$

Передаточная функция

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1}. \quad (3.20)$$

Параметр K называется *коэффициентом передачи*, T (с) – *постоянной времени*.

Изображение сигнала на выходе звена при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия

$$Y(s) = F(s)W(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}. \quad (3.21)$$

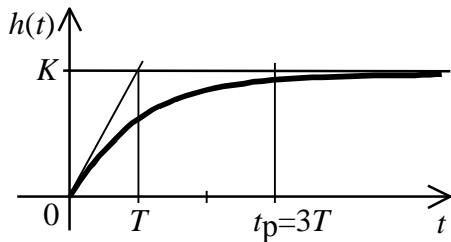


Рис. 3.8

Обратное преобразование Лапласа дает переходный процесс:

$$y(t) = K(1 - e^{-\frac{1}{T}t}). \quad (3.22)$$

Таким образом, при реакции на единичное ступенчатое воздействие выходная координата стремится к установившемуся значению K по экспоненциальной зависимости – см. рис. 3.8. За $t = 3T$ выходной сигнал достигает 95% от своего установившегося значения и переходный процесс принято считать законченным.

Частотный оператор апериодического звена:

$$W(j\omega) = W(s) |_{s=j\omega} = K / (j\omega T + 1). \quad (3.23)$$

Для получения АФХ выделим вещественную и мнимую части этой комплексной функции, для чего дробь в (3.23) домножим и разделим на комплексно-сопряженное знаменателю выражение. Выполнив соответствующие преобразования, получим:

$$W(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega) = K / (T^2\omega^2 + 1) + jKT\omega / (T^2\omega^2 + 1). \quad (3.24)$$

Можно показать [3], что на комплексной плоскости (3.24) представляет собой уравнение окружности с центром в точке $(\text{Re} = K/2, \text{Im} = 0)$.

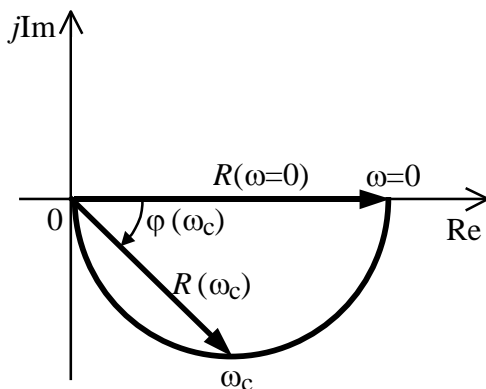


Рис. 3.9

При изменении частоты ω от 0 до ∞ конец вектора $R(\omega)$ описывает полуокружность в первом квадранте комплексной плоскости – см. рис. 3.9.

Используя (3.24), получим выражение для модуля и фазы ЧХ звена:

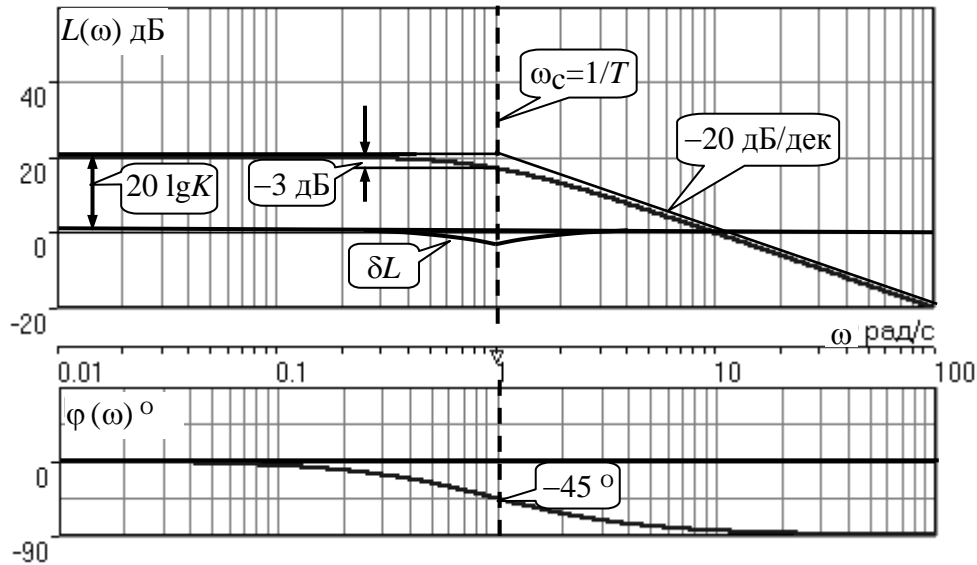
$$R(\omega) = \sqrt{\text{Re}(\omega) + \text{Im}(\omega)} = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \quad (3.25)$$

и

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} = -\text{arctg}(\omega T). \quad (3.26)$$

Из этих выражений видно, что на нулевой частоте $R(0) = K$, $\varphi(0) = 0^\circ$, т. е. апериодическое звено ведет себя как пропорциональное звено. При

увеличении частоты модуль монотонно убывает и стремится к нулю, а фазовый сдвиг стремится к $-\pi/2$.



Модуль ЛАЧХ (дБ)

$$L(\omega) = 20 \lg R(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{T^2 \omega^2 + 1} . \quad (3.27)$$

ЛЧХ для апериодического звена с параметрами $K = 10$, $T = 1$ с приведены на рис. 3.10.

Рис. 3.10

Рассмотрим подробно способ построения ЛАЧХ без вычисления множества точек этой характеристики.

Определим так называемую *частоту сопряжения* $\omega_c = 1/T$. На ЛЧХ проведем вертикальную штриховую линию при значении частоты $\omega = \omega_c$ (для рассматриваемого примера $\omega_c = 1$ рад/с – см. рис. 3.10). Будем отдельно строить участки ЛАХ для $\omega < \omega_c$ и $\omega > \omega_c$.

Рассмотрим диапазон *низких частот*, который для апериодического звена определим как $\omega \ll \omega_c$. При этом, с учетом (3.25) имеем $\omega^2 T^2 \ll 1$ и из (3.27) получаем $L(\omega) \cong 20 \lg K$ – см. рис. 3.10.

Проведем прямую линию – *асимптоту* – параллельно оси частот на расстоянии $20 \lg K$ от оси частот влево от линии сопряжения $\omega_c = 1/T$.

Теперь рассмотрим диапазон *высоких частот* $\omega \gg \omega_c$. При этом имеем $\omega^2 T^2 \gg 1$ и из (3.27) получаем $L(\omega) \cong 20 \lg(K/T\omega) = 20 \lg((K/T)/\omega)$. Последнее выражение соответствует зависимости модуля ЧХ для интегрирующего

звена с коэффициентом передачи (K/T) – см. (3.10), (3.11). Его ЛАХ представляет собой прямую линию с наклоном -20 дБ/дек; частота среза для такой характеристики $\omega_{cp} = (K/T)$. На частоте сопряжения имеем $L(\omega_c) = 20 \lg K$. В соответствии со сказанным из точки $L(\omega_c) = 20 \lg K$ в сторону высоких частот проведем прямую линию с наклоном -20 дБ/дек.

Полученная ЛАХ, состоящая из двух отрезков прямой линии, которые сопрягаются на частоте ω_c , называется *асимптотической ЛАХ* – см. рис. 3.10.

Существенные с позиции расчетов отличия точной ЛАХ от асимптотической ЛАХ будут проявляться в окрестности ω_c , где значения составляющей $\omega^2 T^2$ будут соизмеримы с единицей (см. выражение (3.27)). На рис. 3.10 изображены асимптотическая ЛАХ (тонкие прямые линии) и точная ЛАХ (жирная кривая). Разница $\delta L(\omega)$ между точной и асимптотической ЛАХ называется *поправкой*, которая также изображена на этом рисунке. Максимальное отличие имеет место на частоте сопряжения и составляет $\delta L(\omega_c) \cong -3$ дБ. На логарифмической ЧХ поправка симметрична относительно линии сопряжения. С достаточной для практических целей точностью можно считать, что $\delta L(\omega) \cong 0$ для диапазонов частот $\omega < (\omega_c/3)$ и $\omega > 3\omega_c$. При построении ЛАХ без вычисления точных значений $L(\omega)$ в этом диапазоне достаточно наметить две точки на асимптотических ЛАХ при $\omega \cong (\omega_c/3)$ и при $\omega \cong 3\omega_c$, а также смещенную на -3 дБ точку сопряжения асимптот, и соединить эти три точки плавной линией – см. рис. 3.10. Полученная таким образом уточненная ЛАХ будет иметь достаточную для практических расчетов точность построения.

ФЧХ на частоте сопряжения $\omega_c = 1/T$, как следует из (3.26), имеет значение $\varphi(\omega_c) = -45^\circ$. Как видно из рис. 3.10, при логарифмическом масштабе оси частот ФЧХ апериодического звена симметрична относительно точки $\varphi(\omega_c) = -45^\circ$.

При смещении на декаду влево от $\omega_c = 1/T$, имеем $\varphi(0.1\omega_c) \cong -6^\circ$, при смещении на декаду вправо $\varphi(10\omega_c) \cong -84^\circ$. Таким образом, на частотный диапазон $[0.1\omega_c, 10\omega_c]$ приходится основное изменение фазы ЧХ апериодического звена.

В выражение (3.26) не входит параметр K . При построении ЛЧХ в одном и том же масштабе, для любого апериодического звена ЛФЧХ представляет собой одну и ту же кривую, точка $\varphi(\omega_c) = -45^\circ$ которой устанавливается под частотной осью на значении $\omega_c = 1/T$.

В операторе звена (3.20) зафиксируем постоянную времени T и будем варьировать коэффициент передачи K . В ЛЧХ не изменится местоположение частоты сопряжения; ФЧХ также останется без изменений. ЛАХ будет смещаться параллельно самой себе: подниматься при увеличении K или опускаться при уменьшении K . Смещение ЛАХ ΔL при изменении K в ΔK раз будет составлять $\Delta L = 20 \lg(\Delta K)$ дБ. Например, при увеличении K в 5 раз ЛАХ поднимется на 14 дБ, а при уменьшении K в 10 раз опустится на 20 дБ.

В операторе звена (3.20) зафиксируем коэффициент передачи K и будем варьировать постоянную времени T , определяющую инерционность апериодического звена. Это вызовет смещение линии сопряжения при $\omega_c = 1/T$. Увеличение T приводит к уменьшению частоты сопряжения и, как следствие, полосы пропускания звена. Переходный процесс будет затягиваться – см. (3.22). Уменьшение T вызывает обратную картину.

Параллельный оси частот низкочастотный участок асимптотической ЛАХ (слева от частоты сопряжения) остается без изменений при варьировании постоянной времени T .

ФЧХ при изменении постоянной времени T будет смещаться влево при увеличении T , или вправо при его уменьшении, следуя точкой $\varphi(\omega_c) = -45^\circ$ за линией сопряжения на $\omega_c = 1/T$.

Отдельно заметим, что при $K = 1$ низкочастотный участок асимптотической ЛАХ проходит по оси частот, так как $20 \lg(1) = 0$ дБ. Эта особенность будет использована при построении ЛАХ последовательного соединения типовых звеньев СУ.

3.5. Пропорционально-дифференцирующее звено

Дифференциальное уравнение имеет следующий вид

$$y(t) = KT_d \frac{df(t)}{dt} + Kf(t). \quad (3.28)$$

Передаточная функция

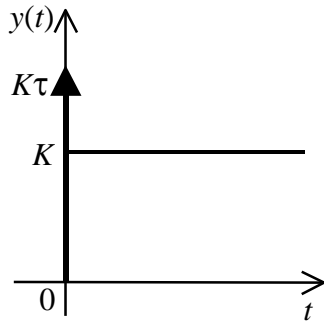


Рис. 3.11

$$W(s) = \frac{K(T_d s + 1)}{1} = \frac{K(\tau s + 1)}{1} = K(\tau s + 1) \quad (3.29)$$

Параметр K называется коэффициентом передачи, $T_d = \tau$ (с.) – постоянная времени.

Изображение сигнала на выходе звена при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия

$$Y(s) = F(s)W(s) = K\tau + K/s \quad (3.30)$$

Обратное преобразование Лапласа дает переходный процесс:

$$y(t) = K\tau\delta(t) + K1(t) \quad (3.31)$$

Таким образом, при реакции на единичное ступенчатое воздействие выходная координата содержит две составляющие:

δ -функцию с площадью, равной $K\tau$, и постоянный сигнал величины K – см. рис. 3.11.

Частотный оператор пропорционально-дифференцирующего звена:

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega) = K + jK\tau\omega \quad (3.32)$$

Это выражение позволяет сразу сделать выводы о виде АФХ. Действительно,

$\text{Re}(\omega) = \text{Const} = K$, $\text{Im}(0) = 0$, $\text{Im}(\omega) > 0$ при $\omega > 0$ и возрастает пропорционально частоте – см. рис. 3.12.

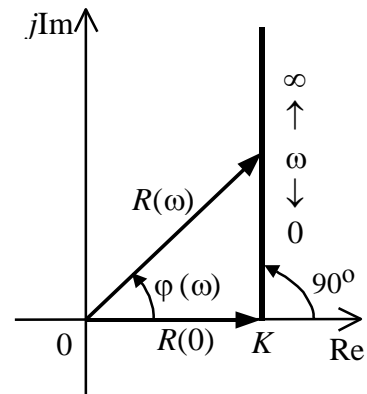


Рис. 3.12

Из (3.32) получим выражение для модуля и фазы ЧХ звена:

$$R(\omega) = \sqrt{\text{Re}(\omega) + \text{Im}(\omega)} = K\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}, \quad (3.33)$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(\text{Im}(\omega)/\text{Re}(\omega)) = \text{arctg}(\omega\tau). \quad (3.34)$$

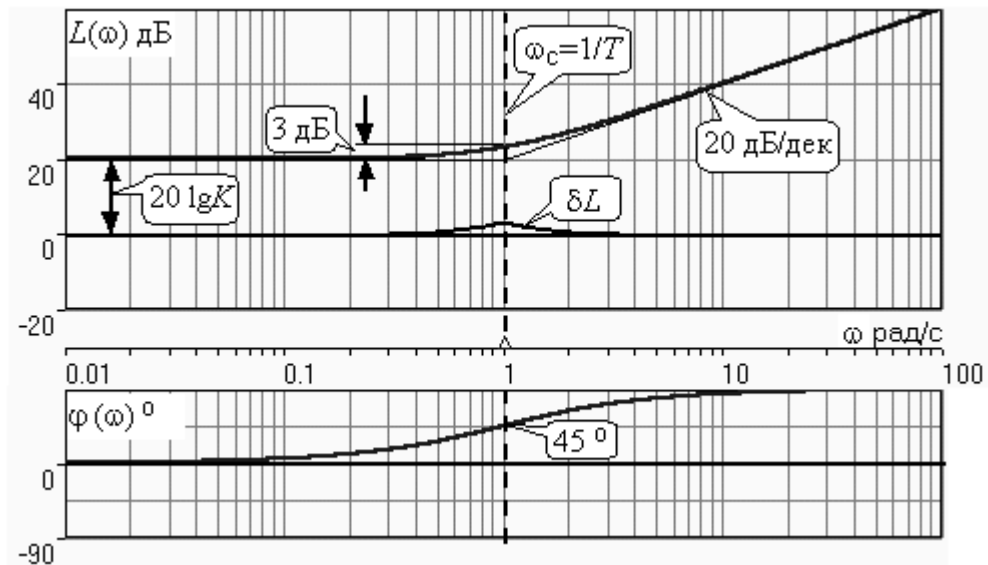
Из этих выражений видно, что на нулевой частоте $R(0) = K$, $\varphi(0) = 0^\circ$, то есть пропорционально-дифференцирующее звено ведет себя как пропорциональное звено. При увеличении частоты модуль монотонно возрастает до ∞ , а фазовый сдвиг стремится к $\pi/2$.

Модуль ЛАЧХ (дБ)

$$L(\omega) = 20\lg R(\omega) = 20\lg K\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1} = 20\lg K + 20\lg \sqrt{\tau^2\omega^2 + 1} \quad (\text{дБ}). \quad (3.35)$$

ЛЧХ для пропорционально-дифференцирующего звена с параметрами $K=10$, $\tau=1$ с приведены на рис. 3.13.

О виде ЛАХ можно судить, сравнив выражения (3.35) и (3.27) и



ознакомившись со способом построения ЧХ апериодического звена – см. подразд. 3.4.

Частота сопряжения $\omega_c = 1/\tau$. Также отдельно строятся участки ЛАХ для $\omega < \omega_c$ и $\omega > \omega_c$. Видно, что ЛАХ пропорционально-дифференцирующего звена является зеркальным отображением (относительно линии $20 \lg K$) ЛАХ звена апериодического с совпадающими параметрами – коэффициентами передачи и постоянными времени.

Рис. 3.13

При сопоставлении (3.34) с (3.26) видно, что зависимости фазы от частоты пропорционально-дифференцирующего и апериодического звеньев отличаются только знаком. Поэтому их ФЧХ являются зеркальным отображением друг друга относительно линии $\varphi(\omega) = 0^\circ$ – см. рис. 3.13.

Вариации параметров пропорционально-дифференцирующего звена вызывают изменения в ЛЧХ, аналогичные апериодическому звену.

Также отдельно заметим, что при $K=1$ низкочастотный участок асимптотической ЛАХ проходит по оси частот, так как $20 \lg 1 = 0$ дБ; это обстоятельство будет использовано при построении ЛАХ последовательного соединения типовых звеньев СУ.

3.6. Колебательное звено 2-го порядка

Звено 2-го порядка может описывать колебательные процессы.

Дифференциальное уравнение звена

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2T\zeta \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kf(t). \quad (3.36)$$

Передаточная функция звена:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1}, \quad (3.37)$$

где K – коэффициент передачи, T – постоянная времени. Параметр ζ – коэффициент демпфирования – определяет колебательность процесса.

Корни квадратного уравнения – знаменателя ПФ – определяют вид переходного процесса. При $\zeta > 1$ имеем пару разных действительных корней и (3.37) может быть приведено к виду

$$W(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}. \quad (3.38)$$

В этом случае звено второго порядка можно представить как последовательное соединение двух апериодических звеньев первого порядка; реакция на ступенчатое воздействие будет представлять собой апериодический процесс.

При $\zeta = 1$ выражение (3.37) приводится к виду

$$W(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^2}. \quad (3.39)$$

Знаменатель ПФ в (3.39) имеет пару кратных действительных корней $s_{1,2} = -1/T$. Апериодический переходный процесс, соответствующий этому случаю для звена с параметрами $K=10$, $T=1$ с представлен на рис. 3.14 (кривая обозначена соответствующим значением коэффициента демпфирования $\zeta = 1$).

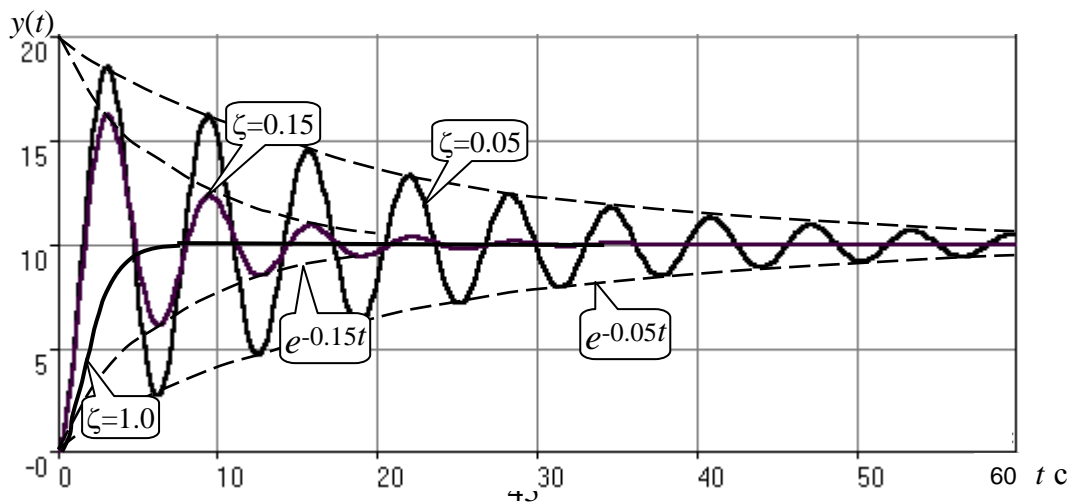


Рис. 3.14

В диапазоне значений коэффициента демпфирования $0 < \zeta < 1$ знаменатель ПФ (характеристический полином звена) имеет пару комплексно-сопряженных корней

$$s_{1,2} = \alpha \pm j\omega = -\zeta/T \pm j(\sqrt{1-\zeta^2})/T. \quad (3.40)$$

Реакция на единичное ступенчатое воздействие будет определяться выражением [2], [4]

$$y(t) = K(1 - Ce^{\alpha t} \text{Sin}(\omega t + \varphi)), \quad (3.41)$$

где

$$C = 1/\sqrt{1-\zeta^2}, \quad \varphi = \text{arctg}(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta). \quad (3.42)$$

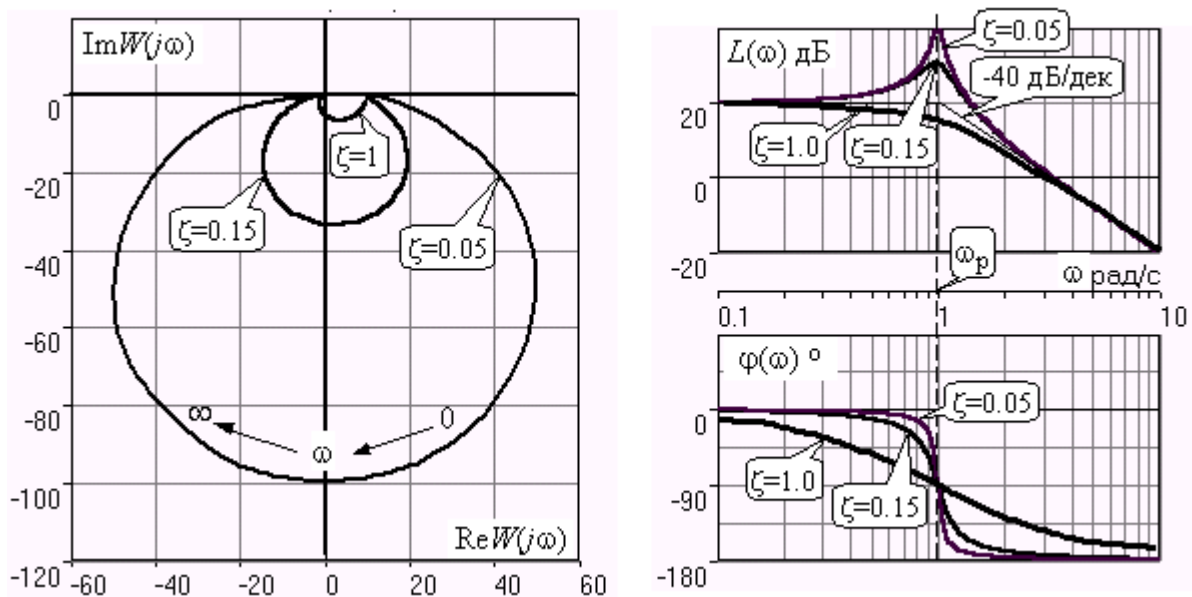
На рис. 3.14 представлены два колебательных процесса для звена с параметрами $K=10$, $T=1$ с. при значениях коэффициента демпфирования $\zeta = 0.15$ и $\zeta = 0.05$. Видно, что время окончания процессов определяет огибающая $e^{\alpha t}$. Количество периодов колебаний за время протекания процесса определяется соотношением мнимой и вещественной частей.

На рассматриваемом примере колебательного звена 2-го порядка определим *корневые* показатели качества процессов в СУ.

η – *абсолютное затухание*. Определяется как расстояние от мнимой оси до ближайшего корня. Если корень действительный (для рассматриваемого примера это имеет место при $\zeta \geq 1$), то $\eta = \min|s_i|$. Если ближайшей к мнимой оси оказывается пара комплексно-сопряженных корней $s_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\omega_i$ (для данного примера – при $\zeta < 1$), то $\eta = \min|\alpha_i|$. Абсолютное затухание определяет время окончания переходного процесса – см. рис. 3.14. Значению $\zeta = 0.15$ соответствует пара $s_{1,2} = -0.15 \pm j 0.989$. Ограничивающая экспонента $e^{-0.15t}$ “давит” колебания до значения $\pm 5\%$ от начального за три своих постоянных времени, что определяет время окончания процесса $t_p = 3(1/0.15) = 20$ с. Для случая $\zeta = 0.05$ имеем пару корней $s_{1,2} = -0.05 \pm j 0.999$ и $t_p = 3(1/0.05) = 60$ с – см. рис. 3.14.

μ – *относительное затухание*, или *колебательность*. Определяется как отношение мнимой части к вещественной части той пары комплексно-сопряженных корней, для которой это отношение максимально, т. е. $\mu = \max(\text{Im}s_i / \text{Re}s_i) = \max(\omega_i / \alpha_i)$. Относительное затухание характеризует

количество периодов колебаний с частотой ω , которые “успеют” уложиться за время t_p . Само значение μ приблизительно равно числу экстремумов (т. е.



числу полупериодов) процесса за время его протекания t_p . Для рассматриваемого примера при $\zeta = 0.15$ имеем $\mu \approx 6.6$ и за время $t_p = 20$ с уложились три полных периода колебаний переходного процесса. При $\zeta = 0.05$ имеем $\mu \approx 20$ и за время $t_p = 60$ с. успели уложиться десять периодов.

a

б

Рис. 3.15

На рис. 3.15,*a* представлены АФХ, а на рис. 3.15,*б* – ЛЧХ рассматриваемого колебательного звена. В диапазоне низких частот $\omega \ll 1/T$ звено ведет себя как пропорциональное. При $\omega \gg 1/T$ модуль ЧХ убывает со скоростью -40 дБ/дек, а фаза стремится к $-\pi$. Комплексно-сопряженные корни порождают на ЧХ резонанс при $\omega \approx 1/T$, степень проявления которого увеличивается с ростом μ (т. е. при уменьшении коэффициента ζ). С уменьшением ζ резонанс на ЛЧХ становится более узким и высоким, а изменение фазы более резким – см. рис. 3.15.*б*.

ЛЧХ могут быть построены следующим образом. Сначала строится асимптотическая ЛАХ для значения $\zeta=1$ – см. рис. 3.15,*б*. Затем в окрестности частоты сопряжения $\omega_c = 1/T$ вводится поправка, зависящая от величины коэффициента ζ . Эта поправка может быть взята из таблиц, в которых представлено семейство таких поправок при различных значениях ζ

при изменении частоты ω относительно частоты сопряжения ω_c [3], [4]. В этих таблицах также приводится семейство ФЧХ для разных значений ζ – см. рис. 3.15,б.

На примере колебательного звена введем также следующие частотные показатели качества СУ.

ω_p – частота резонанса, на которой имеет место резонанс на ЧХ; с этой круговой частотой и проявляется колебательная составляющая переходного процесса.

M – показатель колебательности (не путать с корневым показателем колебательности или относительное затухание μ); определяется по АЧХ:

$$M = \frac{R_{\max}(\omega)}{R(0)}. \quad (3.43)$$

Значение M говорит о числе периодов колебаний за время протекания переходного процесса. Например, для рассматриваемого звена при $\zeta=0.15$ имеем $M=3.36$; из рис. 3.14 видно, что за время процесса имеют место приблизительно три периода колебаний. При $\zeta=0.05$ показатель колебательности $M=10$ и переходный процесс содержит приблизительно десять периодов колебаний на частоте резонанса.

3.7. Неминимально-фазовые звенья

Рассмотренные выше в этом разделе типовые звенья имеют *полюсы* (корни полинома знаменателя ПФ) или *нули* (корни полинома числителя ПФ), которые либо принадлежат левой полуплоскости комплексной плоскости корней, либо равны нулю, как в случае интегрирующего и идеального дифференцирующего звеньев. ПФ, имеющие такие полюсы и нули, называются *минимально-фазовыми*. Эти ПФ имеют наименьшие по модулю фазовые сдвиги по сравнению с такими передаточными функциями, которые содержат нули и/или полюсы справа от мнимой оси.

Звенья, содержащие правые полюсы или нули, называются *неминимально-фазовыми* [2], [3], [4], [6], [7]. Например, звено первого порядка с ПФ $W(s) = K/(Ts-1)$ имеет правый полюс $s = 1/T$ и расходящийся переходный процесс, как это будет видно, если получить его с использованием (3.21), (3.22). Такое звено называется *неустойчивым апериодическим звеном 1-го порядка*. Если провести выкладки, аналогичные

приведенным в выражениях (3.23) – (3.27), то будет видно, что неустойчивое аperiodическое звено имеет одинаковую АЧХ с рассмотренным в подразд. 3.4 устойчивым аperiodическим звеном $W(s) = K/(Ts+1)$, а фазовый сдвиг определяется соотношением $\varphi(\omega) = -\pi + \arctg(\omega T)$ – см. рис. 3.16.

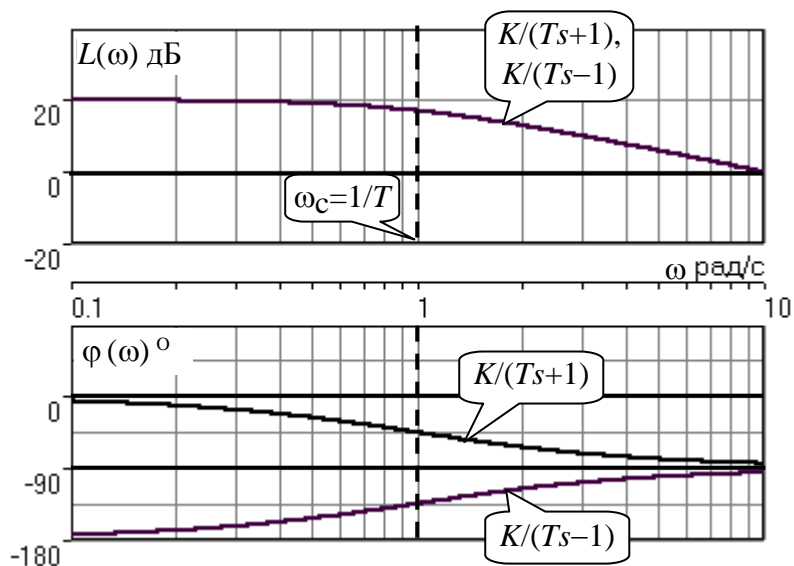


Рис. 3.16

Звено с ПФ $W(s) = K(\tau s - 1)$ отличается от рассмотренного выше пропорционально-дифференцирующего звена наличием правого нуля $s = 1/\tau$. Соответствующие этому звену ЧХ приведены на рис.3.17.

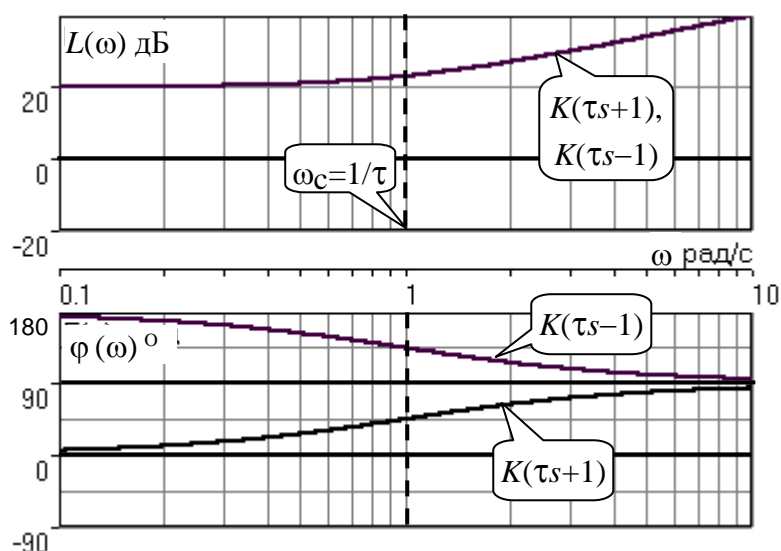


Рис. 3.17

Если сделать выкладки, соответствующие выражениям (3.32) – (3.35) для этого звена, то как и в предыдущем случае получим совпадающую со

звеном $W(s) = K(\tau s + 1)$ АЧХ, а фазовый сдвиг будет определяться выражением $\varphi(\omega) = \pi - \arctg(\omega\tau)$ – см. рис. 3.17.

4. ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СОЕДИНЕНИЙ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Для анализа и синтеза СУ широко используются частотные характеристики. Частотная область обладает высокой информативностью в плане выявления зависимости свойств и показателей качества СУ от операторов отдельных звеньев и значений их параметров.

В подразд. 2.5 приведена типовая структура одноконтурной СУ с единичной отрицательной обратной связью. Будем считать, что прямой канал передачи управляющего воздействия образован последовательным соединением типовых звеньев, рассмотренных в разд. 3. Ряд важных свойств *замкнутых* СУ может быть выявлен при анализе и сформирован при синтезе по частотным характеристикам *разомкнутых* систем, то есть по оператору прямого канала без обратной связи.

Целью раздела является описание процесса построения ЧХ СУ без использования компьютера, так как это позволяет установить влияние оператора каждого звена на вид ЧХ и, в конечном счете, на свойства СУ.

4.1. Логарифмические частотные характеристики последовательного соединения типовых звеньев

Рассмотрим последовательное соединение нескольких звеньев, операторы которых заданы передаточными функциями. Как сказано в подразд. 2.5, ПФ такого соединения равна произведению ПФ звеньев.

Построение *логарифмических* ЧХ соединения основано на следующих двух положениях.

1. Используется то обстоятельство, что логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей. С учетом того, что ПФ звеньев являются комплексными дробно-рациональными функциями, отдельно ЛАЧХ разомкнутой системы есть сумма ЛАЧХ звеньев соединения; ЛФЧХ разомкнутой системы также есть сумма ЛФЧХ отдельных звеньев.

2. По асимптотическим ЛАХ отдельных звеньев может быть построена асимптотическая ЛАХ системы, а уточненная ЛАХ системы может быть

получена путем учета поправок. При этом необходимо заметить, что в зависимости от решаемой задачи учет всех поправок может и не понадобится.

Построим частотные характеристики СУ, структурная схема которой представлена на рис. 4.1.

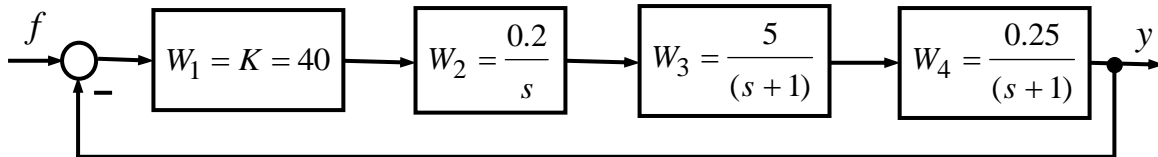


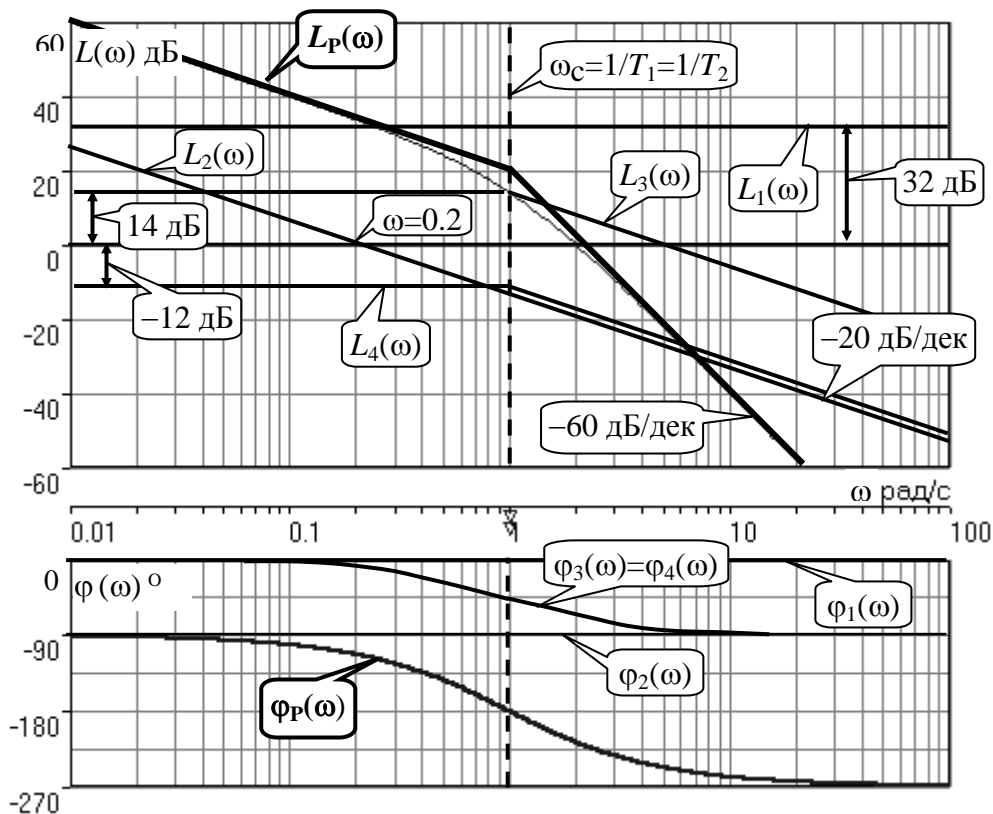
Рис. 4.1

Прямой канал передачи управляющего воздействия представляет собой последовательное соединение типовых звеньев: пропорциональное $W_1(s) = K_1 = 40$, интегрирующее $W_2(s) = K_2/s = 0.2/s$, два аperiodических звена $W_3(s) = K_3/(T_1s+1) = 5/(s+1)$, $W_4(s) = K_4/(T_2s+1) = 0.25/(s+1)$. В данном случае аperiodические звенья имеют совпадающие постоянные времени $T_1 = T_2 = 1$ с.

Построение ЛАХ. На рис. 4.2. построены асимптотические ЛАХ $L_i(\omega)$, $i = 1, 2, 3, 4$ отдельно каждого звена, а также ЛАХ $L_p(\omega)$ последовательного соединения.

Рис. 4.2

ЛАХ пропорционального звена $L_1(\omega)$ проходит параллельно оси частот



на расстоянии $20\lg K_1 = 20\lg 40 = 20\lg(10 \cdot 2 \cdot 2) = 20\text{дБ} + 6\text{дБ} + 6\text{дБ} = 32\text{дБ}$.

ЛАХ интегратора $L_2(\omega)$ представляет собой прямую с наклоном -20дБ/дек , которая пересекает ось частот при $\omega = 0.2$ рад/с.

Асимптотическая ЛАХ $L_3(\omega)$ апериодического звена с ПФ $W_3(s)$ слева от частоты сопряжения $1/T_1=1$ рад/с проходит параллельно оси частот на расстоянии $20\lg K_3 = 20\lg 5 = 20\lg(10/2) = 20\lg 10 - 20\lg 2 = 20\text{ дБ} - 6\text{ дБ} = 14\text{ дБ}$; справа от линии сопряжения имеет наклон -20дБ/дек .

Асимптотическая ЛАХ $L_4(\omega)$ апериодического звена с ПФ $W_4(s)$ слева от частоты $\omega_c=1/T_2=1$ рад/с проходит параллельно оси частот на расстоянии $20\lg K_4 = 20\lg(0.25) = 20\lg((1/2) \cdot (1/2)) = (-6\text{ дБ}) + (-6\text{ дБ}) = -12\text{ дБ}$; справа от линии сопряжения имеет наклон -20дБ/дек .

Сумма этих четырех асимптотических ЛАХ $L_p(\omega)$ представляет собой асимптотическую ЛАХ разомкнутой системы, то есть ЛАХ последовательного соединения всех звеньев прямого канала. На рис. 4.2 приведена и уточненная ЛАХ $L_p(\omega)$ (тонкая линия). Максимальное значение поправки $\delta L(\omega_c) = 2 \cdot (-3\text{ дБ}) = -6\text{ дБ}$.

Построение ФЧХ. Для пропорционального звена $\varphi_1(\omega) = 0$ во всем диапазоне частот.

ФЧХ интегрирующего звена $\varphi_2(\omega) = -\pi/2$ во всем диапазоне частот.

ФЧХ обоих апериодических звеньев совпадают и имеют значение $-\pi/4$ на частоте сопряжения $\omega_c = 1/T_1 = 1/T_2 = 1$ рад/с.

Результирующая ФЧХ $\varphi_p(\omega)$ для рассматриваемого примера представляет собой смещенную на $-\pi/2$ удвоенную характеристику апериодического звена с $\omega_c = 1$ рад/с. На частоте сопряжения в данном случае имеем фазовый сдвиг $\varphi_p(\omega_c) = (-\pi/2) + 2 \cdot (-\pi/4) = -\pi$.

4.2. Алгоритм построения логарифмической амплитудной

характеристики последовательного соединения типовых звеньев

Как следует из разд. 3 и подразд. 4.1, построение асимптотической ЛАХ последовательного соединения типовых звеньев сводится к суммированию на графике отрезков прямых линий с наклонами, кратными 20 дБ/дек .

Используем более эффективный способ построения ЛАХ последовательного соединения звеньев, который не требует построения ЛАХ отдельно каждого звена и последующего суммирования этих ЛАХ.

Для рассмотренного в подразд. 4.1. примера представим ПФ $W_P(s) = W_1(s) W_2(s) W_3(s) W_4(s)$ в следующем виде

$$W_P(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{1}{(T_1s + 1)} \cdot \frac{1}{(T_2s + 1)} = \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{(s + 1)} \cdot \frac{1}{(s + 1)}. \quad (4.1)$$

Основным в данном случае является то обстоятельство, что коэффициенты передач всех звеньев сосредоточены в одном (первом) сомножителе $10/s$; оба апериодических звена имеют единичный коэффициент передачи. Очевидно, что результирующая ЛАХ от такого перераспределения параметров должна остаться без изменений.

Построим ЛАХ звеньев-сомножителей из (4.1) – см. рис. 4.3.

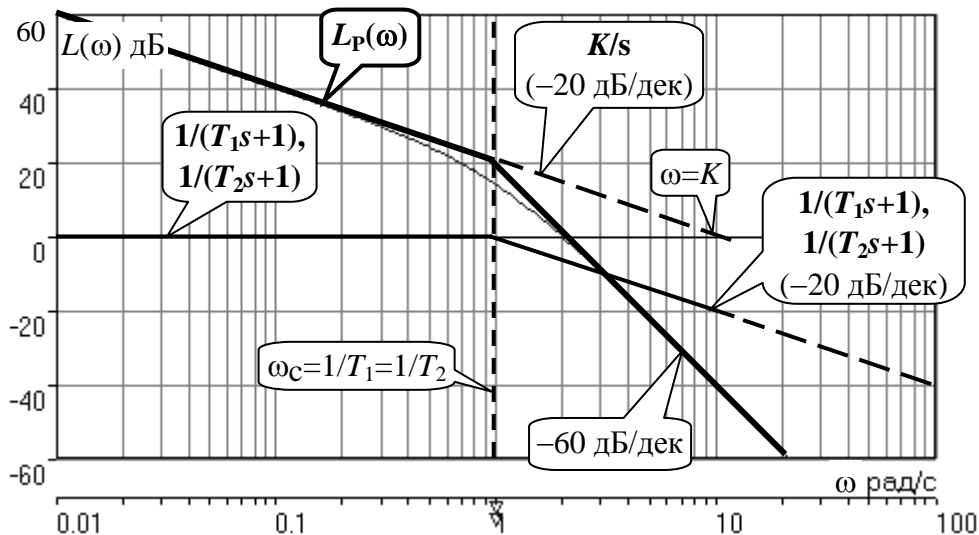


Рис. 4.3

Проведем вертикальную штриховую линию сопряжения на частоте $\omega_c = 1/T_1 = 1/T_2 = 1$ рад/с. Заметим, что частоты сопряжения позволяют оцифровать ось частот.

Построим ЛАХ первого сомножителя в (4.1). Этот сомножитель соответствует интегрирующему звену с коэффициентом передачи $K = 10$; его ЛАХ представляет собой прямую с наклоном -20 дБ/дек, пересекающую ось частот при $\omega = 10$. От левой границы частотного диапазона до частоты сопряжения ω_c этот участок ЛАХ проведем сплошной линией, а справа от ω_c до $\omega = K = 10$ наметим ее штрихами – см. рис. 4.3.

Теперь построим ЛАХ звеньев $1/(s+1)$. Слева от ω_c асимптотическая ЛАХ этих звеньев проходит по оси частот, так как $20\lg(1) = 0$ дБ.

Очевидно, что характеристики апериодических звеньев с $K=1$ не изменят при суммировании построенную ранее характеристику интегратора на диапазоне $\omega < \omega_c$. На диапазоне частот $\omega > \omega_c$ сформировавшийся наклон -20 дБ/дек будет изменен на $2*(-20)$ дБ/дек. Продолжение вправо от ω_c прямой с наклоном -60 дБ/дек образует результирующую асимптотическую ЛАХ всего соединения звеньев – см. рис. 4.3.

Сформируем алгоритм построения ЛАХ последовательного соединения любых типовых звеньев, позволяющий получить характеристику без предварительного построения и суммирования ЛАХ отдельных звеньев.

1. Оператор последовательного соединения звеньев приводится к виду

$$W_P(s) = \frac{K}{s^v} \cdot \frac{\prod_j (\tau_j s + 1)}{\prod_i (T_i s + 1)}, \quad (4.2)$$

$$v = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Первый сомножитель в (4.2) определит наклон низкочастотного участка ЛАХ (слева от крайней левой линии сопряжения).

При $v = 0$ имеем “статическую систему”; наклон низкочастотного участка ЛАХ будет равен 0 дБ/дек – ЛАХ пройдет параллельно оси частот.

При $v = 1$ имеем “систему с астатизмом первого порядка”; наклон низкочастотного участка ЛАХ будет равен -20 дБ/дек.

При $v = 2$ имеем “систему с астатизмом второго порядка”; наклон низкочастотного участка ЛАХ будет равен -40 дБ/дек.

Значения $v = -1$ или $v = -2$ соответствуют наличию в соединении одного или двух идеальных дифференцирующих звеньев; наклон низкочастотного участка ЛАХ будет равен $+20$ дБ/дек или $+40$ дБ/дек.

2. На частотной оси помечаются частоты сопряжения; при этом оцифровывается вся шкала частот. Проводятся вертикальные штриховые линии сопряжения. Каждая линия помечается в соответствии со своей постоянной времени $1/T_i$ или $1/\tau_j$. Важным фактором является четкое разграничение, принадлежит линия сопряжения постоянной времени T_i знаменателя, или постоянной времени τ_j числителя ПФ.

3. Для диапазона частот $\omega \leq \omega_{c, \min}$, то есть левее самой левой линии сопряжения, строится ЛАХ сомножителя (K/s^v).

4. Далее построение результирующей ЛАХ производится от $\omega_{c, \min}$ вправо, т. е. в сторону увеличения частоты. Пересечение ранее сформированного участка ЛАХ с очередной линией сопряжения изменяет наклон ЛАХ на -20 дБ/дек, если линия сопряжения помечена $1/T_i$, или на $+20$ дБ/дек, если линия сопряжения помечена $1/\tau_j$. Необходимо иметь ввиду, что постоянные времени некоторых звеньев могут совпадать, как это имеет место в рассмотренном примере подразд. 4.1 и 4.2. В этом случае изменение наклона асимптотической ЛАХ будет иметь величину, кратную 20 дБ/дек.

Описанный способ в значительно меньшей степени подвержен возникновению ошибок при построении ЛАХ по сравнению со способом, основанном на построении ЛАХ отдельно каждого звена с последующим суммированием характеристик. Единственным требованием для получения достоверной результирующей ЛАХ является точное соблюдение кратным 20 дБ/дек величин наклонов отрезков асимптотической характеристики.

4.3. Пример построения логарифмических частотных характеристик астатической системы управления

Рассмотрим подробно процесс построения ЛЧХ по предложенному в подразд. 4.2 алгоритму для СУ, имеющей ПФ

$$W_P(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{(\tau_1 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} = \frac{10}{s} \cdot \frac{(20s + 1)}{(500s + 1)(0.2s + 1)(0.2s + 1)}. \quad (4.3)$$

Построение ЧХ отображено на рис. 4.4. Проводим линии сопряжения на частотах $\omega_{c1} = 1/T_1 = 0.002$ рад/с, $\omega_{c2} = 1/\tau_1 = 0.05$ рад/с, $\omega_{c3} = 1/T_2 = 1/T_3 = 5$ рад/с и помечаем их. На шкале частот эти значения отмечены треугольными метками – острием вверх на частоте, равной значению нуля $1/\tau_1$, и острием вниз на частотах, равных значениям полюсов $1/T_i$. Направление метки показывает, в какую сторону происходит “излом” асимптотической ЛАХ.

Для диапазона частот $\omega \leq \omega_{c, \min} = \omega_{c1} = 1/T_1 = 0.002$ рад/с строим участок ЛАХ, соответствующий сомножителю $10/s$. Слева от ω_{c1} сразу проводим сплошную линию; ее продолжение штриховой линией до $\omega = 10$ рад/с используется только для построения ЛАХ интегратора.

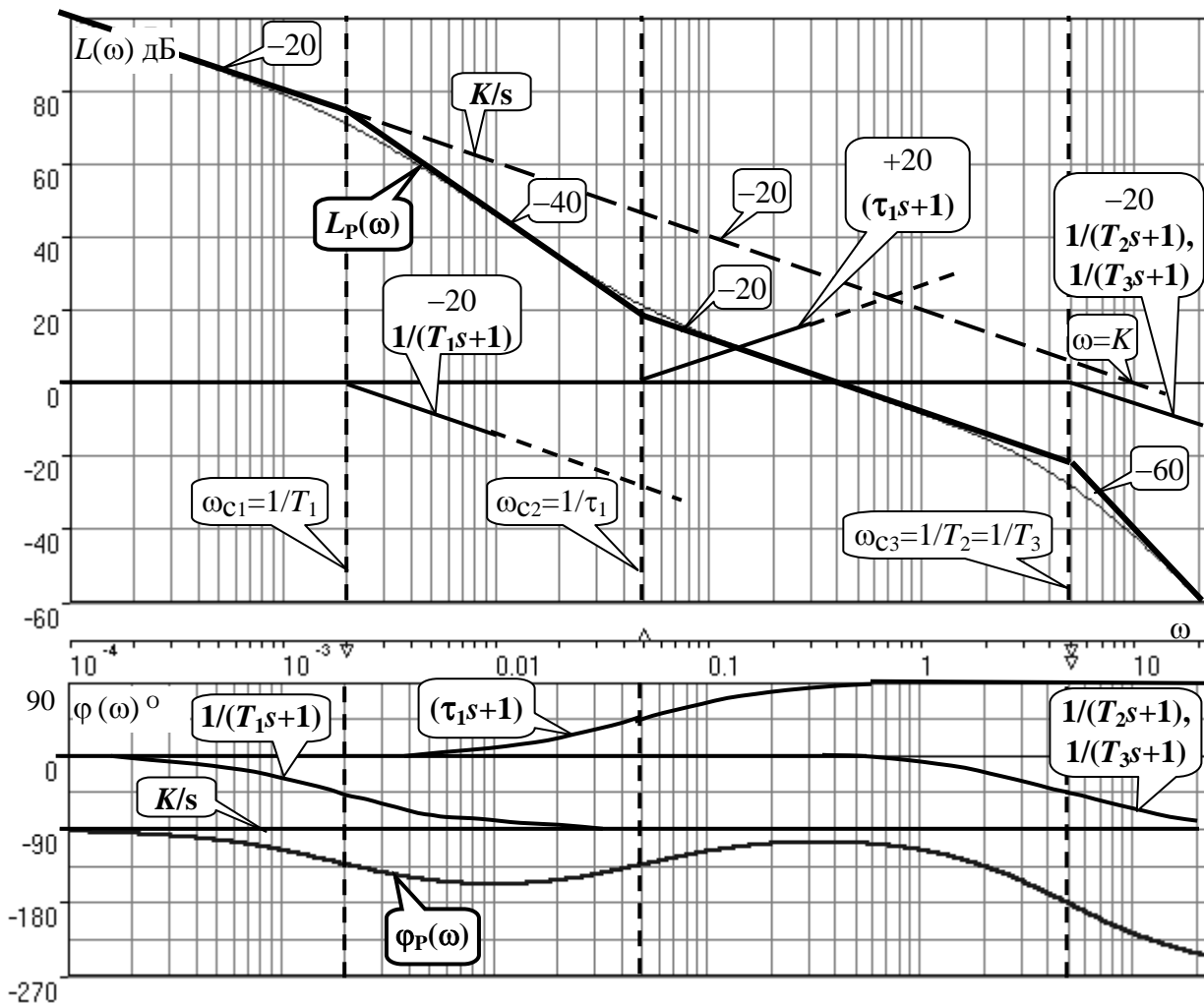


Рис. 4.4

Частота ω_{c1} “помечена полюсом”, поэтому справа от нее (то есть в сторону увеличения частоты) наклон изменится на -20 дБ/дек и будет составлять -40 дБ/дек. Прямую с таким наклоном следует провести до ω_{c2} .

Частота ω_{c2} “помечена нулем”, поэтому справа от нее наклон изменится на $+20$ дБ/дек и будет составлять -20 дБ/дек. Этот наклон следует сохранить до ω_{c3} .

Частота ω_{c3} помечена сразу двумя полюсами; справа от нее наклон изменится на $2 \cdot (-20$ дБ/дек) и будет составлять -60 дБ/дек. Этот наклон останется неизменным при $\omega \rightarrow \infty$.

На рис. 4.4 показаны ЛАХ звеньев $1/(T_i s+1)$ и $1/(\tau_j s+1)$. Видно, что каждое такое звено имеет модуль 0 дБ слева от своей частоты сопряжения; прибавление его характеристики на $\omega \leq \omega_c$ не изменяет ранее сформированного участка ЛАХ соединения. Справа от своей частоты

сопряжения такое звено “срабатывает”, изменяя наклон асимптотической ЛАХ соединения.

ФЧХ $\varphi_P(\omega)$ формируется путем построения ФЧХ отдельных звеньев и последующего их суммирования – см. рис. 4.4.

4.4. Пример построения логарифмических частотных характеристик статической системы управления

Проведем построение ЛЧХ для статической СУ, имеющей ПФ

$$W_P(s) = K \cdot \frac{(\tau_1 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} = 200 \cdot \frac{(5s + 1)}{(100s + 1)(0.25s + 1)^2}. \quad (4.4)$$

Построение ЧХ отображено на рис. 4.5. После оцифровки оси частот и нанесения на сетку ЛАХ вертикальных штриховых линий сопряжения начинается построение собственно ЛАХ $L_P(\omega)$. Слева от минимальной частоты сопряжения $\omega_{c, \min} = \omega_{c1} = 1/T_1 = 0.01$ рад/с, определяемой самой большой постоянной времени в СУ, формируем низкочастотный участок ЛАХ. В данном случае это прямая, параллельная оси частот и проходящая на расстоянии $20 \lg 200 = 20 \lg(10 \cdot 10 \cdot 2) = 20 \lg 10 + 20 \lg 10 + 20 \lg 2 = 20 \text{ дБ} + 20 \text{ дБ} + 6 \text{ дБ} = 46 \text{ дБ}$.

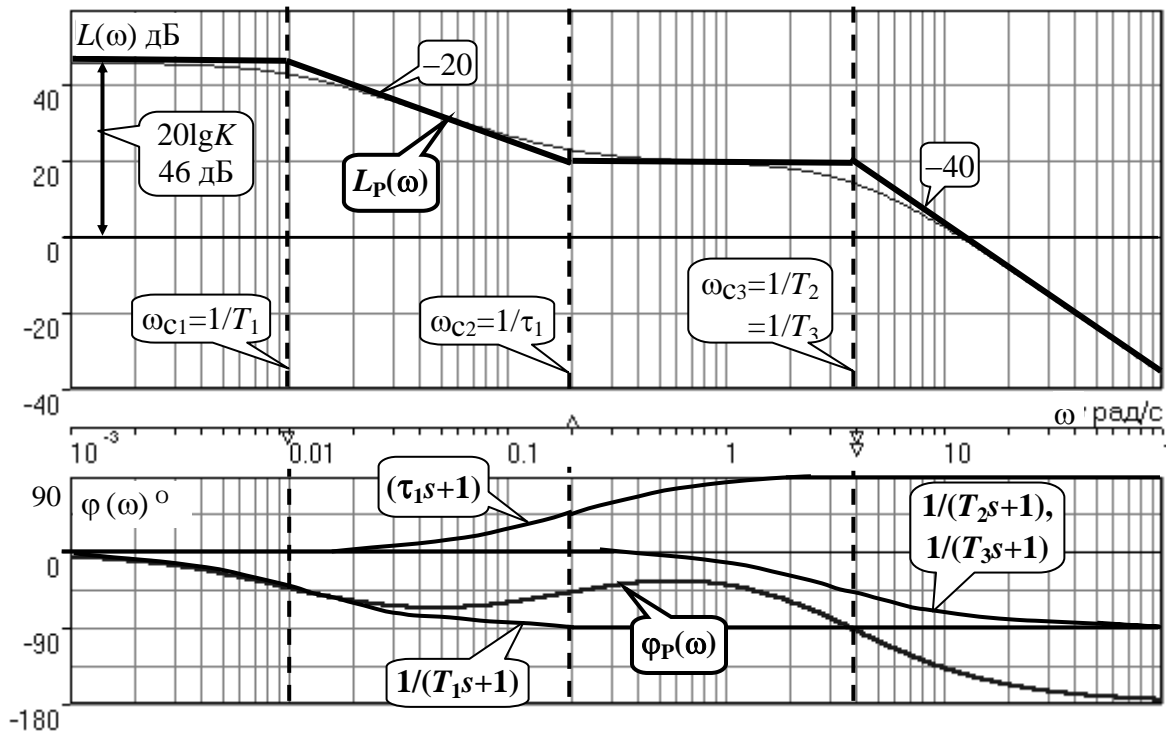


Рис. 4.5

Линия сопряжения ω_{c1} соответствует полюсу $1/T_1$. Поэтому переход через нее асимптотической ЛАХ в сторону увеличения частоты сопровождается изменением наклона на -20 дБ/дек. Прямую с таким наклоном проводим до следующей частоты сопряжения $\omega_{c2} = 0.2$ рад/с, которая соответствует нулю $1/\tau_1$, и переход через нее асимптотической ЛАХ в сторону увеличения частоты сопровождается изменением наклона на $+20$ дБ/дек. В результате суммарный наклон следующего участка ЛАХ будет составлять 0 дБ/дек; параллельный оси частот участок ЛАХ следует продолжить до частоты сопряжения $\omega_{c3} = 4$ рад/с. На линии сопряжения этой частоты “срабатывают” два полюса, так как “включаются” два апериодических звена с одинаковыми постоянными времени. Переход через эту линию сопровождается изменением наклона на $2 \cdot (-20$ дБ/дек) $= -40$ дБ/дек. В результате окончательный наклон ЛАХ справа от $\omega_{c3} = 4$ рад/с равен -40 дБ/дек.

ФЧХ $\varphi_R(\omega)$ формируется путем построения ФЧХ отдельных звеньев и последующего их суммирования – см. рис. 4.5.

4.5. Пример построения логарифмических частотных характеристик реального дифференцирующего звена

Идеальное дифференцирующее звено (см. подразд. 3.3) имеет равномерно возрастающий модуль $R(\omega)$ во всем диапазоне частот $\omega \in [0, \infty)$; при $\omega \rightarrow \infty$, модуль $R(\omega) \rightarrow \infty$. Такая идеальная модель звена может соответствовать реальности только в ограниченном диапазоне частот. В связи с этим часто используют так называемое *реальное дифференцирующее звено*, у которого, начиная с некоторой частоты, рост модуля $R(\omega)$ ограничивается. ПФ такого звена

$$W(s) = \frac{Ks}{(Ts + 1)} = Ks \cdot \frac{1}{(Ts + 1)} \quad (4.5)$$

можно рассматривать как ПФ последовательного соединения двух ранее рассмотренных типовых звеньев – идеального дифференцирующего и апериодического первого порядка (4.5).

На рис. 4.6 представлено построение ЛАХ реального дифференцирующего звена с $K = 0.1$ и $T = 0.25$ с.

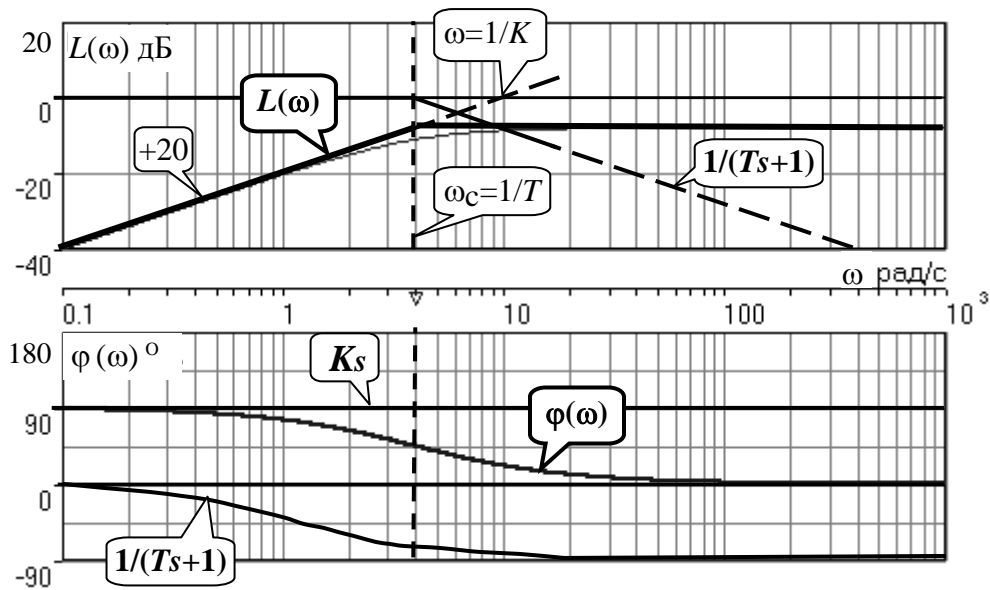


Рис. 4.6

Единственная частота сопряжения $\omega_c = 1/T = 4$ рад/с определяется аperiодическим звеном $1/(Ts+1) = 1/(0.25s+1)$.

До частоты сопряжения $\omega_c = 1/T$ наклон ЛАХ определяется наличием дифференциатора и составляет +20 дБ/дек; этот участок ЛАХ (в данном случае – его продолжение за ω_c) пересечет ось частот при $\omega = 1/K = 10$ рад/с. На частоте ω_c “включается” асимптотическая ЛАХ аperiодического звена, изменяя имеющийся слева от ω_c наклон на –20 дБ/дек. В результате получаем суммарный наклон ЛАХ справа от частоты сопряжения, равный 0 дБ/дек и при $\omega \in [\omega_c, \infty)$ ЛАХ будет параллелен оси частот.

Результирующая ФЧХ $\varphi(\omega)$ представляет собой ФЧХ аperiодического звена, смещенную на $+\pi/2$, так как такой фазовый сдвиг вносит идеальное дифференцирующее звено во всем диапазоне частот – см. рис. 4.6.

4.6. Предельные соотношения логарифмических частотных характеристик. Влияние вариаций параметров на частотные характеристики соединений звеньев

Предельные соотношения ЛЧХ соединений звеньев. При построении ЛЧХ последовательного соединения типовых звеньев целесообразно предварительно определить особенности и некоторые параметры ЛЧХ и ФЧХ на низкой частоте (при $\omega \rightarrow 0$) и на высокой частоте (при $\omega \rightarrow \infty$). Сделать это можно по виду оператора $W_P(s)$:

$$W_P(s) = \frac{K}{s^v} \cdot \frac{\prod_j (\tau_j s + 1)}{\prod_i (T_i s + 1)} = \frac{B_m(s)}{A_n(s)}, \quad (4.6)$$

где m и n – общие степени полиномов числителя и знаменателя ПФ $W_P(s)$, включая интеграторы или дифференциаторы (при их наличии).

Сформулируем следующие правила.

На низкой частоте (при $\omega \rightarrow 0$):

- Наклон ЛАХ составляет $v^*(-20 \text{ дБ/дек})$,
- Значение ФЧХ составляет $v^*(-\pi/2)$ рад = $v^*(-90^\circ)$.

На высокой частоте (при $\omega \rightarrow \infty$):

- Наклон ЛАХ составляет $(n-m)^*(-20 \text{ дБ/дек})$
- Значение ФЧХ составляет $(n-m)^*(-\pi/2)$ рад = $(n-m)^*(-90^\circ)$.

Знание и использование этих правил позволяет сразу наметить асимптотику ЛЧХ соединений типовых звеньев и уменьшить вероятность появления качественных ошибок при построении ЛЧХ.

Влияние вариаций параметров на ЛЧХ соединений звеньев. Рассмотрим по-отдельности влияние вариаций общего коэффициента передачи K и постоянных времени T_i или τ_j – см. (4.2).

При изменении коэффициента передачи ЛАХ всего соединения будет подниматься при увеличении K или опускаться при его уменьшении. Величина ΔL смещения ЛАХ при изменении K в ΔK раз будет составлять $\Delta L = 20 \lg \Delta K$ (дБ). ФЧХ останется без изменений.

Все перечисленные выше в подразд. 4.6 правила останутся без изменений.

При изменении какой либо постоянной времени T_i или τ_j будет перемещаться влево или вправо соответствующая этой постоянной времени частота сопряжения. Это вызовет изменение вида обеих ЧХ. Все перечисленные выше в подразд. 4.6 правила останутся без изменений. Кроме этого, не только наклон, но и местоположение низкочастотного участка асимптотической ЛАХ слева от $\omega_{c, \min}$ останутся без изменений.

Все рассмотренные в подразд. 4.6 соотношения и правила следуют из особенностей характеристик типовых звеньев СУ – см. разд. 3.

5. ВЗАИМОСВЯЗЬ ЧАСТОТНЫХ И ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В разделе рассматривается следующий круг вопросов:

- действие обратной связи на разных частотных диапазонах;
- связь частотных характеристик разомкнутой и замкнутой СУ;
- связь частотной полосы пропускания с быстродействием СУ.

Установление соответствия между характеристиками и показателями качества в частотной и временной областях позволяет более корректно решать задачи анализа и синтеза СУ.

5.1. Действие обратной связи в системах управления

Будем рассматривать СУ с типовой структурой, представленной на рис. 5.1 (см. также подразд. 2.5).

Для выяснения характера действия обратной связи на динамическую систему рассмотрим сначала пример охвата пропорционального (то есть безынерционного) звена единичной отрицательной обратной связью. Положим $W_p(s) = K$ и определим передачу $\Phi(s)$ замкнутой системы при разных значениях K – табл. 5.1.

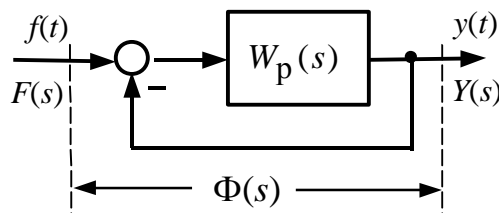


Рис. 5.1

Связь ПФ разомкнутой и замкнутой типовой СУ получена в подразд. 2.6. Для случая безынерционного звена имеем

$$\Phi(s) = \Phi = K / (K + 1). \quad (5.1)$$

Таблица 5.1

K	Φ	$K/\Phi * 100$ (%)
1000	$0.999 \approx 1$	10^5
100	$0.99 \approx 1$	10^4
10	0.9091	1100
1	0.5	200
0.1	0.091	10
0.01	$0.0099 \approx 0.01 \approx K$	1
0.001	$0.00099 \approx 0.001 \approx K$	0.1

Суть приведенных в таблице значений заключается в следующем. Степень влияния обратной связи зависит от коэффициента передачи охватываемого звена. При больших коэффициентах изменение значительно.

При $K > 10$ имеем $\Phi \approx 1$. При малых коэффициентах передачи охватываемого звена характеристики разомкнутого и замкнутого звеньев отличаются незначительно, то есть обратная связь “не действует”. При $K < 0.1$ имеем $\Phi \approx K$.

АЧХ некоторого динамического звена или всей СУ представляет собой зависимость коэффициента передачи от частоты. Поэтому обратная связь будет по-разному проявлять свое действие на разных частотах ЧХ.

Рассмотрим случай охвата единичной отрицательной обратной связью интегрирующего звена $W_p(s) = K/s$. Используя (2.21), получим

$$\Phi(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)} = \frac{K}{s + K} = \frac{1}{(1/K)s + 1} = \frac{1}{Ts + 1}. \quad (5.2)$$

Таким образом, в результате охвата интегратора обратной связью образуется апериодическое звено с единичным коэффициентом передачи (вне зависимости от K) и с постоянной времени $T = 1/K$.

На рис. 5.2 построены ЛАХ разомкнутой системы (в данном случае – интегрирующего звена с $K = 1$) и замкнутой системы.

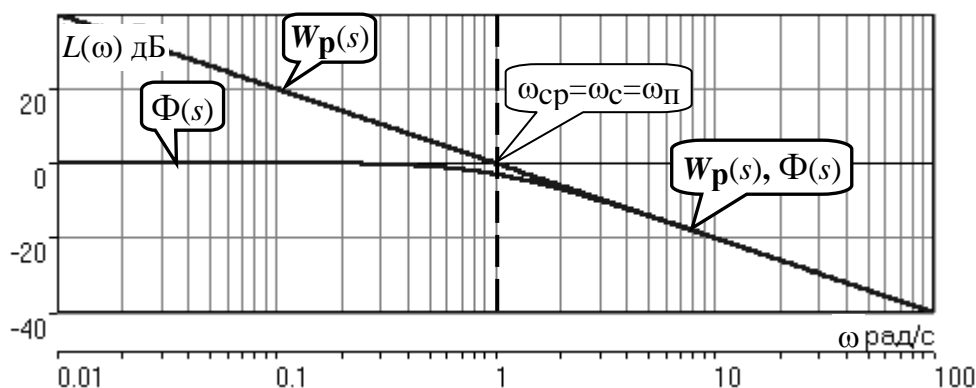


Рис. 5.2

Из графиков видно, что при значительных усилениях в прямой цепи ($L_p(\omega) > 16$ дБ) различия между ЛАХ разомкнутой и замкнутой системами велики и логарифмический модуль ЧХ замкнутой системы $L(\omega) \approx 0$ дБ ($R(\omega) \approx 1$). На высоких частотах, где $L_p(\omega) < -16$ дБ, ЛАХ разомкнутой и замкнутой систем практически совпадают.

По АЧХ замкнутой системы определяют тот диапазон частот $[0, \omega_{\text{п}}]$, при котором $R(\omega) \approx 1$ и выходная координата $y(t)$ “воспроизводит” входной управляющий сигнал $f(t)$. Этот диапазон частот называется *полосой пропускания* системы. Правая граница этого диапазона – частота

пропускания ω_{Π} – обычно определяется из условия $R(\omega_{\Pi}) = 0.707 R(0)$ (изменение модуля на -3 дБ).

Для рассматриваемого случая $\omega_{\Pi} = \omega_c = \omega_{\text{ср}}$, то есть совпадает с частотой сопряжения апериодического звена и частотой среза интегратора (см. подразд. 3.2, 3.4).

Рассмотренное на данном примере действие обратной связи является закономерным для любых систем, образованных соединением различных звеньев. Это будет проиллюстрировано на примерах в подразд. 5.3.

5.2. Полоса пропускания и быстродействие систем управления

Продолжим рассмотрение примера из подразд. 5.1. Переходная характеристика апериодического звена является экспонентой со временем окончания процесса $t_p = 3T$ (см. подразд. 1.4 и 3.4). В этом случае:

$$t_p = t_1 = \delta / \omega_{\Pi} = 3 / \omega_{\Pi} \text{ (с)}. \quad (5.3)$$

В выражении (5.3) коэффициент δ связывает быстродействие системы с ее частотной полосой пропускания; в данном случае $\delta = 3$.

Экспонента является апериодическим процессом; время первого согласования t_1 , характеризующее быстродействие, и время регулирования t_p , т. е. время окончания процесса, совпадают – подразд. 1.4.

Таким образом, полоса пропускания ω_{Π} и быстродействие системы находятся в обратно-пропорциональной зависимости – см. рис. 5.3.

На рис. 5.3,*а* показана АЧХ замкнутой системы при $K = 1$ – кривая 1. Эта ЧХ соответствует апериодическому звену $\Phi(s) = 1/(Ts+1)$, $T = 1$ с. В отличие от рассмотренных ранее ЧХ, в данном случае построены АЧХ не логарифмического модуля $R(\omega)$. При $K = 1$ имеем $\omega_{\Pi} = 1$ рад/с.

На рис. 5.3,*б* построена переходная характеристика замкнутой системы при $K = 1$ – кривая 1. Время процесса $t_{p1} = 3/\omega_{\Pi 1} = 3$ с.

Увеличим в два раза коэффициент передачи в прямом канале системы и положим его значение $K = 2$. При этом ЛАХ $L_p(\omega)$ (прямая с наклоном, равным -20 дБ/дек) поднимется вверх на 6 дБ, в результате получим $\omega_{\text{ср}} = \omega_c = \omega_{\Pi} = 2$ рад/с.

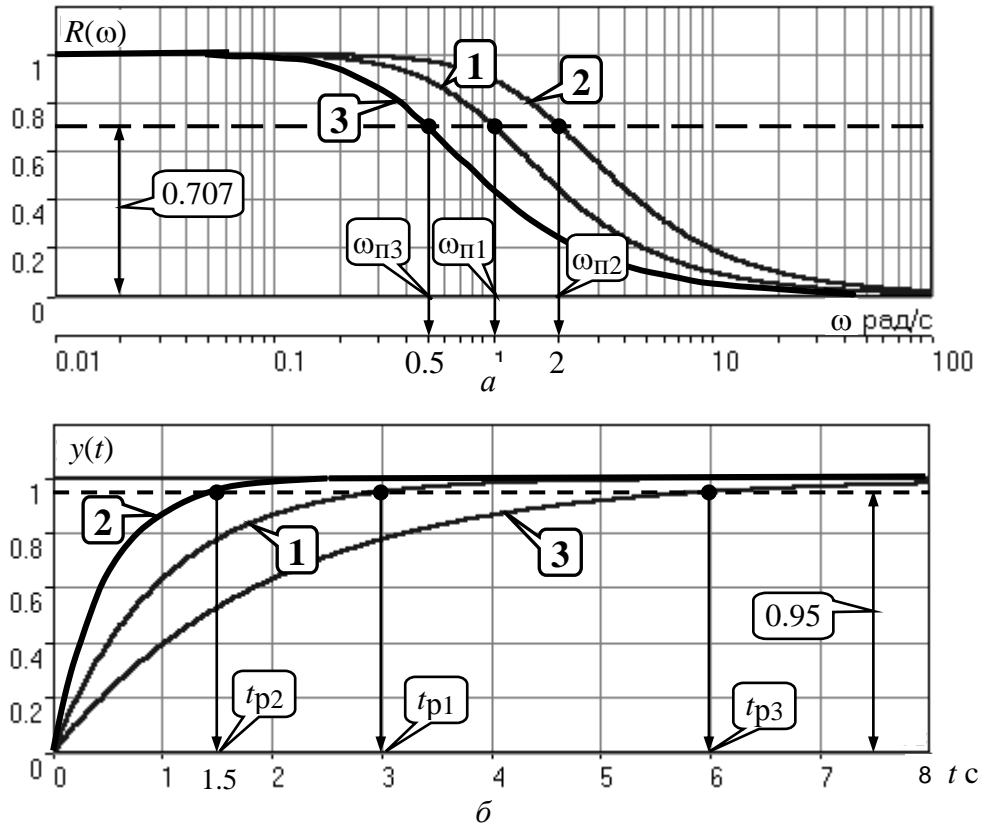


Рис. 5.3

Этому будет соответствовать кривая 2 на АЧХ (рис. 5.3,а) с увеличенной в два раза полосой пропускания. Время переходного процесса наоборот уменьшится в два раза: $t_{p2} = 3/\omega_{п2} = 1.5$ с – кривая 2 на рис. 5.3,б.

Уменьшим в два раза усиление в прямом канале системы, то есть положим $K = 0.5$. При этом ЛАХ $L_p(\omega)$ опустится на 6 дБ (относительно исходной ситуации при $K = 1$) и $\omega_{ср} = \omega_c = \omega_{п} = 0.5$ рад/с. Этому соответствует кривая 3 на АЧХ (рис. 5.3,а) с уменьшенной в два раза полосой пропускания. Время переходного процесса наоборот увеличится в два раза: $t_{p3} = 3/\omega_{п3} = 6$ с.

Заметим, что быстродействие системы мы изменяли не за счет варьирования какой-либо инерционности (постоянной времени). В исходной системе – рис. 5.1, $W_p(s) = K/s$ – такого параметра вообще не присутствует. Полоса пропускания, а следовательно, и быстродействие, обеспечивались усилением в прямом канале системы. Так как рассматриваем СУ с единичной обратной связью, то это усиление совпадает с контурным усилением, то есть коэффициентом передачи контура обратной связи.

5.3. Примеры сопоставления частотных и временных характеристик систем управления

Проверим выявленные выше закономерности на примерах СУ, рассмотренных в подразд. 4.3 и 4.4, где описаны модели и подробно рассмотрен процесс построения ЛЧХ этих систем.

Астатическая система управления. Модель СУ приведена в подразд. 4.3. Оператор $W_p(s)$ задан выражением (4.3). На рис. 4.4 подробно отображены ЛЧХ и процесс их построения.

На рис. 5.4 показаны ЛЧХ разомкнутой и замкнутой СУ.

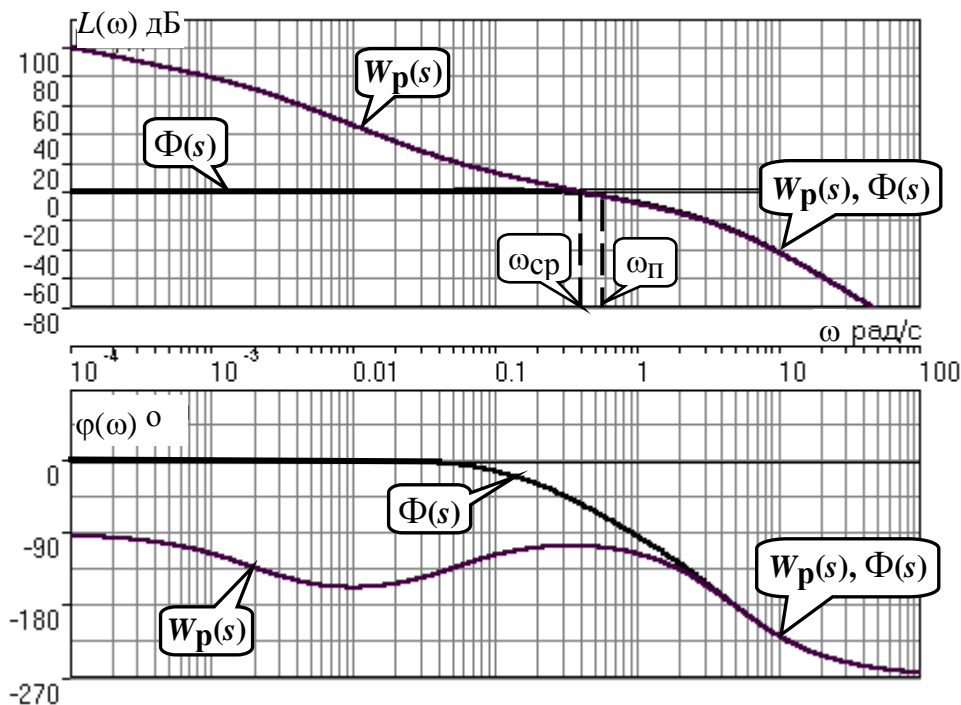


Рис. 5.4

В диапазоне частот, где усиления в разомкнутом контуре большие, ЧХ разомкнутой и замкнутой систем существенно различаются; модуль ЧХ замкнутой системы $R(\omega) \approx 1$ ($L(\omega) \approx 0$ дБ). При $L_p(\omega) < 0$, ЧХ разомкнутой и замкнутой систем совпадают – обратная связь здесь “не работает”.

Частота среза разомкнутой системы $\omega_{cp} = 0.4$ рад/с. Полоса пропускания замкнутой системы $\omega_{п} = 0.54$ рад/с. Отметим, что для рассматриваемой системы частоты ω_{cp} и $\omega_{п}$ связаны соотношением:

$$\omega_{cp} = 0.74 \omega_{п} \quad (5.4)$$

Переходная характеристика приведена на рис.5.5. Заметим, что время окончания процесса t_p превосходит время первого согласования t_1 в пять раз.

Коэффициент связи быстродействия и полосы пропускания:

$$t_1 = \delta / \omega_{\Pi} = 2.6 / \omega_{\Pi} \text{ (с)}. \quad (5.5)$$

Некоторое отклонение от значения $\delta = 3$ объясняется отличием вида процесса от экспоненты.

Статическая система управления. Модель СУ приведена в подразд. 4.4. Оператор $W_p(s)$ задан выражением (4.4). Рис. 4.5 иллюстрирует процесс построения ЛЧХ системы.

На рис. 5.6 показаны ЛЧХ разомкнутой и замкнутой СУ.

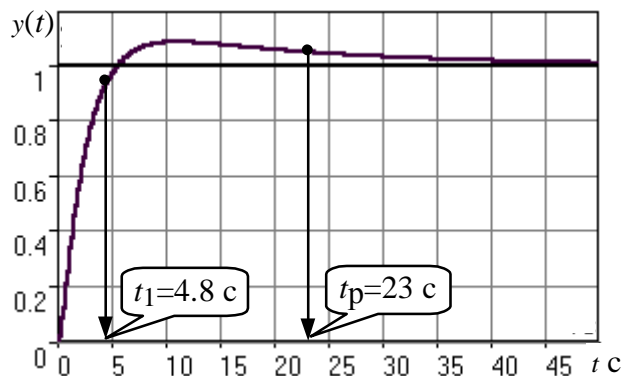


Рис. 5.5

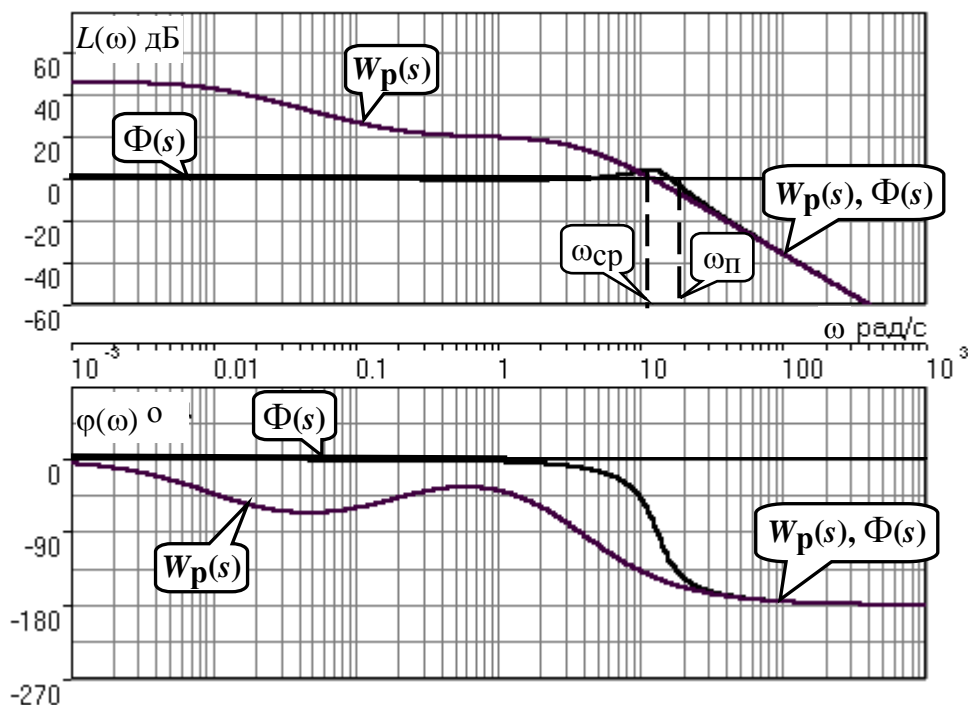


Рис. 5.6

В диапазоне частот, где усиления в разомкнутом контуре большие, ЧХ разомкнутой и замкнутой систем существенно различаются; модуль ЧХ замкнутой системы $R(\omega) \approx 1$ ($L(\omega) \approx 0$ дБ). На частотах, где $L_p(\omega) < 0$, ЧХ разомкнутой и замкнутой систем совпадают – обратная связь здесь “не работает”. Частота среза разомкнутой системы $\omega_{cp} = 12$ рад/с. Полоса пропускания замкнутой системы $\omega_{\Pi} = 18.5$ рад/с.

Переходная характеристика СУ приведена на рис. 5.7. Заметим, что время окончания процесса t_p превосходит время первого согласования t_1 почти в

17 раз! Это связано со значительной колебательностью, а также с “затягиванием” приближения координаты к установившемуся значению.

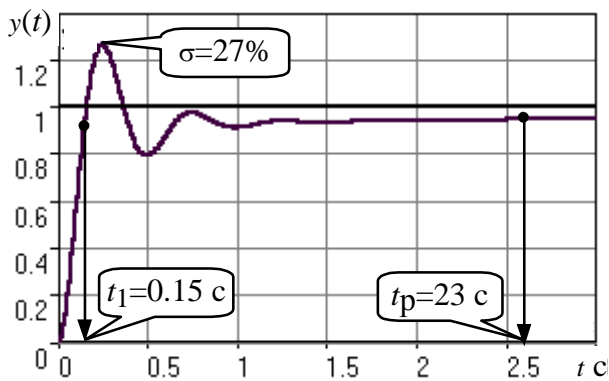


Рис. 5.7

Оценим коэффициент δ для этого процесса:

$$t_1 = \delta / \omega_{\Pi} = 2.8 / \omega_{\Pi} \text{ (с)}. \quad (5.6)$$

Несмотря на отличие процесса от экспоненты, получили выражение, близкое к (5.3). Для этой системы

$$\omega_{\text{ср}} = 0.65 \omega_{\Pi} . \quad (5.7)$$

Таким образом, с достаточной достоверностью можно оценить

быстродействие СУ по ее ЧХ, воспользовавшись соотношением

$$t_1 = \delta / \omega_{\Pi} , \quad (5.8)$$

где $\delta \approx (2.5 \div 3.3)$. Указанный для (5.8) диапазон значений δ учитывает также и результаты расчета других СУ.

5.4. Синтез систем управления по требованиям к быстродействию

Выявленные в этом разделе зависимости между параметрами частотных и временных характеристик позволяют определить при синтезе контурное усиление для обеспечения требуемого быстродействия СУ.

Соотношение (5.6) позволяет найти необходимую полосу пропускания ω_{Π} замкнутой СУ по времени первого согласования t_1 .

Как будет показано в разд.7, для обеспечения “хорошего” переходного процесса типового вида с ограниченной колебательностью (см. подразд. 1.4), ЛАЧХ синтезируемой разомкнутой системы также должна иметь типовой вид. В данном контексте это означает наличие достаточно длинного участка асимптотической ЛАХ с наклоном -20 дБ/дек в окрестности частоты $\omega_{\text{ср}}$. Именно такой типовой вид имеет ЧХ СУ, рассмотренной в подразд. 4.3 и в подразд. 5.3 (см. рис. 4.4 и рис. 5.4). С учетом (5.4), (5.7) и результатов расчета многих других СУ, можем с достаточной степенью приближения определить требуемую частоту среза разомкнутой синтезируемой системы

$$\omega_{\text{ср}} \approx (0.7 \div 0.8) \omega_{\Pi} . \quad (5.8)$$

Низкочастотный участок ЛАХ однозначно определит требуемое общее усиление в контуре СУ – см. разд. 4.

6. ВЫНУЖДЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

В разделе рассматриваются вынужденные движения в СУ, которые проявляются после затухания свободной составляющей, т. е. после окончания переходного процесса. Рассматривается ряд типовых тестовых воздействий. Анализируется возможность обработки разных сигналов в зависимости от степени астатизма СУ. Определяются установившиеся ошибки, характеризующие точность работы СУ в установившемся режиме.

6.1. Типовые входные воздействия для систем управления.

Установившиеся движения в системах управления

Как уже говорилось в подразд. 1.4, реакция любой СУ на входное воздействие определяется двумя составляющими: характеристиками входного воздействия и свойствами собственно самой СУ. Например, на рис. 1.10 представлена реакция некоторой устойчивой СУ на постоянный сигнал (ступенчатое воздействие).

Можно выделить две составляющие реакции СУ на входной сигнал: переходный режим (переходный процесс) и установившийся режим. Решение линейного ДУ как раз содержит две составляющих – свободную и вынужденную – см. (2.8), подразд. 2.3. Будем анализировать вынужденную составляющую, считая, что рассматриваемые здесь СУ – устойчивы.

Используем модель СУ типовой структуры – подразд. 2.5, рис. 2.3. В данном случае будем оперировать с ПФ $\Phi_e(s)$ по ошибке замкнутой системы, то есть используем модель, представленную на рис. 2.4,б.

Будем считать, что ПФ прямого канала (то есть разомкнутой системы)

$$W_p(s) = \frac{KB_p(s)}{s^\nu A_p(s)} = \frac{K(b_m s^m + \dots + b_1 s + 1)}{s^\nu (a_n s^n + \dots + a_1 s + 1)}. \quad (6.1)$$

Младшие коэффициенты полиномов $B_p(s)$ и $A_p(s)$ равны единице; это означает, что усиление контура сосредоточено в одном параметре K .

Параметр ν – степень астатизма – определяется числом интеграторов в прямом канале СУ.

Рассмотрим три варианта СУ:

$\nu = 0$ – статическая система;

$\nu = 1$ – система с астатизмом 1-го порядка;

$\nu = 2$ – система с астатизмом 2-го порядка.

В подразд 2.6 получена связь ПФ замкнутой системы по ошибке через полиномы числителя и знаменателя ПФ разомкнутой системы – см. (2.24), (2.25). С учетом (6.1) получим

$$\Phi_e(s) = \frac{s^v A_p(s)}{s^v A_p(s) + KB_p(s)}. \quad (6.2)$$

Установившиеся режимы будем анализировать при так называемых *типовых* воздействиях, к которым предъявляются следующие требования:

- воздействия должны быть адекватны реальным сигналам, подаваемым на СУ в процессе их функционирования;
- воздействия должны иметь простое математическое описание.

Используем следующие *типовые* сигналы.

1. Единичная δ -функция $f(t) = \delta(t)$, $F(s) = 1$.
2. Единичное ступенчатое воздействие $f(t) = 1(t)$, $F(s) = 1/s$.
3. Линейно нарастающий сигнал, или – воздействие с постоянной скоростью $f(t) = at$, $F(s) = a/s^2$.
4. Воздействие с постоянным ускорением $f(t) = at^2/2$, $F(s) = a/s^3$.

В соответствии с определением ПФ по ошибке (см. подразд. 2.5)

$$E(s) = F(s) \Phi_e(s). \quad (6.3)$$

Вынужденное (установившееся) значение ошибки

$$e_{\text{вын}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (6.4)$$

можно получить по теореме о конечном значении оригинала (2.13):

$$e_{\text{вын}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s). \quad (6.5)$$

Используя выражения (6.2) – (6.5), можно определить, будет ли установившаяся ошибка нулевой, конечной либо будет стремиться к бесконечности. Последнее будет означать, что СУ “не справляется” с входным воздействием.

6.2. Расчет установившихся ошибок

Статическая СУ. В прямом канале системы отсутствуют интегрирующие звенья, т. е. $v = 0$. В этом случае (6.2) приводится к виду:

$$\Phi_e(s) = \frac{A_p(s)}{A_p(s) + KB_p(s)}. \quad (6.6)$$

С использованием (6.6) будем находить вынужденные ошибки при разных входных воздействиях.

1. δ -функция $f(t) = \delta(t)$.

$$e_{\text{вын}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A_p(s)}{A_p(s) + KB_p(s)} = 0. \quad (6.7)$$

Результат получен с учетом (6.1), где раскрыта запись полиномов $B_p(s)$ и $A_p(s)$.

2. Ступенчатое воздействие $f(t) = 1(t)$.

$$e_{\text{вын}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{A_p(s)}{A_p(s) + KB_p(s)} = \frac{1}{1 + K}. \quad (6.8)$$

3. Линейное воздействие $f(t) = at$.

$$e_{\text{вын}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{a}{s^2} \frac{A_p(s)}{A_p(s) + KB_p(s)} = \infty. \quad (6.9)$$

Из (6.9) видно, что аналогичный результат будет получен и при параболическом воздействии, изображение которого $F(s) = a/s^3$.

Система с астатизмом первого порядка. В прямом канале системы присутствует одно интегрирующее звено, т. е. $\nu = 1$. В этом случае (6.2) приводится к виду:

$$\Phi_e(s) = \frac{sA_p(s)}{sA_p(s) + KB_p(s)}. \quad (6.10)$$

С использованием (6.10) также определим вынужденные ошибки.

1. δ -функция $f(t) = \delta(t)$.

$$e_{\text{вын}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{sA_p(s)}{sA_p(s) + KB_p(s)} = 0. \quad (6.11)$$

2. Ступенчатое воздействие $f(t) = 1(t)$.

$$e_{\text{вын}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{sA_p(s)}{sA_p(s) + KB_p(s)} = 0. \quad (6.12)$$

3. Линейное воздействие $f(t) = at$.

$$e_{\text{вын}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{a}{s^2} \frac{sA_p(s)}{sA_p(s) + KB_p(s)} = \frac{a}{K}. \quad (6.13)$$

4. Воздействие с постоянным ускорением $f(t) = at^2/2$.

$$e_{\text{вын}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{a}{s^3} \frac{sA_p(s)}{sA_p(s) + KB_p(s)} = \infty. \quad (6.14)$$

Система с астатизмом второго порядка. В прямом канале системы присутствуют два интегрирующих звена, т. е. $v = 2$. В этом случае (6.2) приводится к виду:

$$\Phi_e(s) = \frac{s^2 A_p(s)}{s^2 A_p(s) + KB_p(s)}. \quad (6.15)$$

С использованием (6.15) также определим вынужденные ошибки при разных входных воздействиях.

1. δ -функция $f(t) = \delta(t)$.

$$e_{\text{вын}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 A_p(s)}{s^2 A_p(s) + KB_p(s)} = 0. \quad (6.16)$$

2. Ступенчатое воздействие $f(t) = 1(t)$.

$$e_{\text{вын}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 \cdot s^2 A_p(s)}{s (s^2 A_p(s) + KB_p(s))} = 0. \quad (6.17)$$

3. Линейное воздействие $f(t) = at$.

$$e_{\text{вын}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{a \cdot s^2 A_p(s)}{s^2 (s^2 A_p(s) + KB_p(s))} = 0. \quad (6.18)$$

4. Воздействие с постоянным ускорением $f(t) = at^2/2$.

$$e_{\text{вын}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{a \cdot s^2 A_p(s)}{s^3 (s^2 A_p(s) + KB_p(s))} = \frac{a}{K}. \quad (6.19)$$

6.3. Анализ соответствия астатизма системы управления и ее функционального назначения

Обобщим полученные выше результаты. Сведем вычисленные по (6.7) – (6.9), (6.11) – (6.14) и (6.16) – (6.19) ошибки в табл. 6.1.

Таблица 6.1

	$v = 0$	$v = 1$	$v = 2$
$f(t) = \delta(t)$	0	0	0
$f(t) = 1(t)$	$1/(K+1)$	0	0
$f(t) = at$	∞	a/K	0
$f(t) = at^2/2$	∞	∞	a/K

Для наглядности аналогичная таблица с изображениями процессов приведена на рис. 6.1.

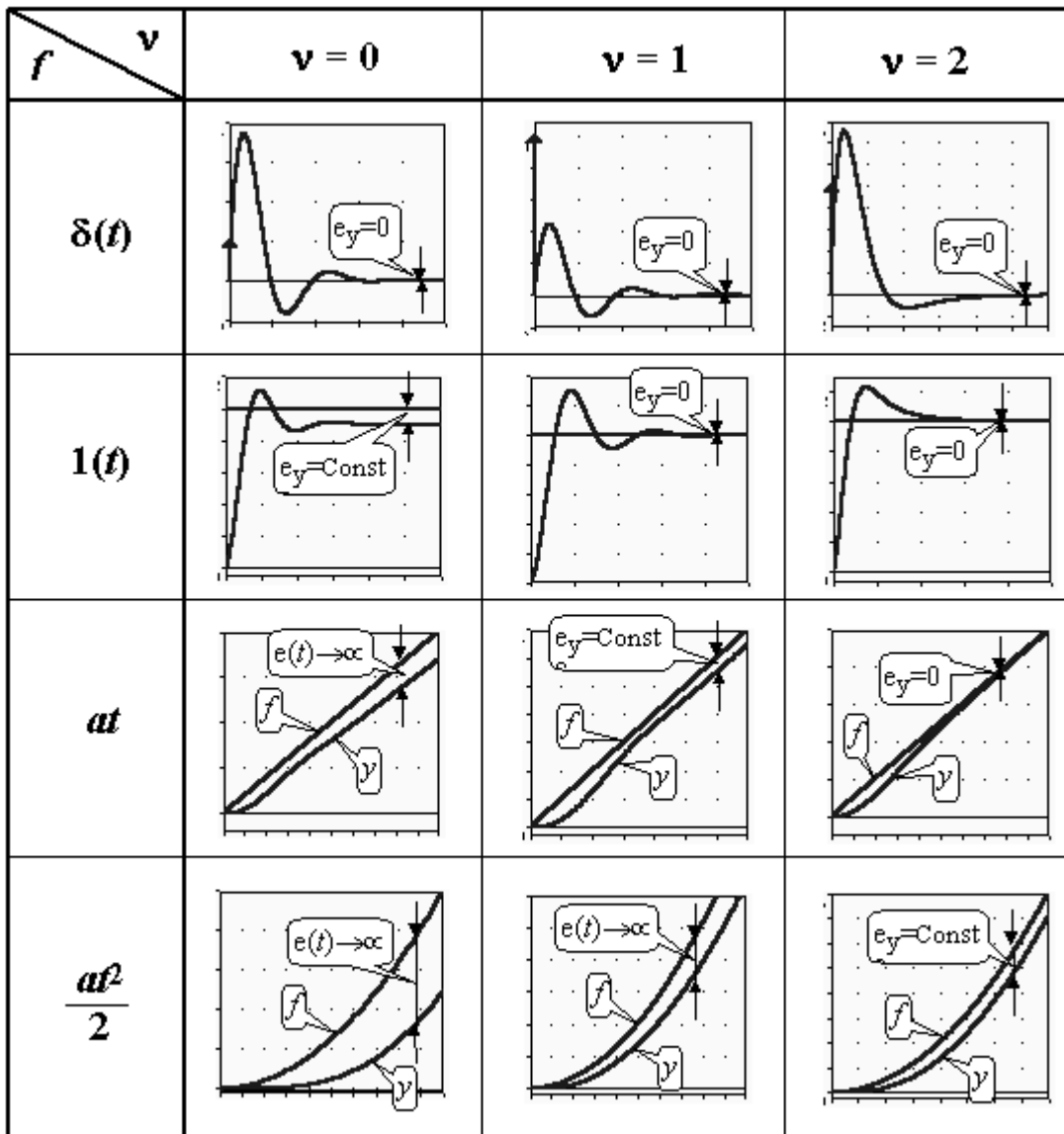


Рис. 6.1

Рассмотрим верхнюю строку таблиц. Статическая и, тем более, астатические системы “отрабатывают” δ -функцию с нулевой установившейся ошибкой (при $t \rightarrow \infty$, $f(t) = y(t) = 0$).

Вторая строка таблиц соответствует подаче на вход ступенчатого воздействия, то есть постоянного сигнала. Статическая система обрабатывает его с конечной ошибкой, определяемой усилением в контуре. Астатические системы справляются с этим сигналом с нулевой установившейся ошибкой.

Третья строка показывает реакции систем уже на меняющийся сигнал, в данном случае – с постоянной скоростью. Статическая система с таким сигналом не справляется – выходная координата не может “следить” за таким сигналом, рассогласование будет накапливаться. Система с астатизмом 1-го порядка имеет конечную установившуюся ошибку, прямопропорциональную скорости изменения входного сигнала и обратнопропорциональную контурному усилению. Система с астатизмом 2-го порядка справляется с таким сигналом с нулевой установившейся ошибкой.

Последняя строка таблиц показывает реакции систем на наиболее “сложный” из приведенных входных сигналов – с изменяющейся скоростью (но с постоянным ускорением). С таким сигналом справляется только система с астатизмом 2-го порядка, с конечной ошибкой, прямопропорциональной ускорению изменения входного сигнала и обратнопропорциональной усилению в контуре.

6.4. Синтез систем управления по требованиям к установившимся процессам

Реакция СУ на входное воздействие содержит две составляющих – переходный процесс и вынужденный режим. В соответствии с этим и решение линейного дифференциального уравнения также содержит две составляющих – см. (2.8), подразд. 2.3.

Обеспечение качества СУ может быть разделено на два этапа: синтез вынужденных режимов (установившихся процессов) и синтез переходных процессов, причем в указанной последовательности. Синтез вынужденных режимов и синтез переходных процессов может быть осуществлен разными мерами – см. подразд. 7.3. Второй этап, т. е. синтез динамики системы, можно и необходимо осуществлять таким образом, чтобы не ухудшить обеспеченное на первом этапе качество установившегося режима.

Обеспечение возможности отработки системой управления входного воздействия. Для того, чтобы СУ смогла “справиться” с входным воздействием определенного типа, установим соответствие степени астатизма характеристикам этого воздействия – см. табл. 6.1, подразд. 6.3.

Для систем стабилизации, которые должны поддерживать выходную координату с заданной конечной ошибкой при постоянном входном воздействии, могут быть использованы статические СУ.

Для *следающих систем*, которые должны воспроизводить (отслеживать) меняющиеся во времени входные сигналы, необходимо использовать астатические СУ. Порядок астатизма определяется характеристиками (“сложностью”) входных сигналов.

Астатизм определенного порядка в СУ может также потребоваться для обеспечения нулевой установившейся ошибки. Например, для СУ, которая по функциональному назначению является системой стабилизации, для получения $e_{уст} = 0$ при постоянном входном сигнале необходимо обеспечить $\nu = 1$. Также для следящей СУ при отработке сигналов с постоянной скоростью необходимо иметь $\nu = 2$ в случае требования $e_{уст} = 0$.

Обеспечение необходимого контурного усиления в системе управления. Для тех случаев, когда задана требуемая (допустимая) конечная установившаяся ошибка, может и должно быть определено необходимое усиление в контуре обратной связи – см. табл. 6.1, подразд. 6.3.

Для статической системы необходимый коэффициент контурного усиления

$$K = \frac{1}{e_{уст,тр}} - 1. \quad (6.20)$$

В (6.20) $e_{уст,тр}$ – требуемая (допустимая) установившаяся ошибка.

Для СУ с астатизмом 1-го и 2-го порядков необходимый коэффициент контурного усиления определяется из соотношения

$$K = \frac{a}{e_{уст,тр}}. \quad (6.21)$$

В (6.21) a – скорость линейного воздействия для системы с астатизмом 1-го порядка или ускорение параболического воздействия для системы с астатизмом 2-го порядка.

Отметим, что нулевые установившиеся ошибки определяются наличием интеграторов и не зависят от усиления в контуре обратной связи или от других параметров системы. В таких случаях контурное усиление конкретизируется, исходя из других требований, например, необходимого быстродействия – см. подразд. 5.4.

7. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В разделе исследуется устойчивость замкнутых СУ. Рассматриваются алгебраические и частотные критерии устойчивости. Вводятся оценки запасов устойчивости. Формируется типовая частотная характеристика, соответствующая типовому поведению СУ. Описан “частотный” синтез звена коррекции для обеспечения достаточных запасов устойчивости и типового поведения СУ.

7.1. Характеристический полином замкнутой системы управления.

Алгебраические критерии устойчивости

В подразд. 1.4 вводится понятие устойчивых объектов и СУ с позиции их поведения. Показано, что устойчивость является необходимым условием функционирования СУ.

В подразд. 2.3 понятие устойчивости связывается в решением ДУ, которое описывает поведение СУ. Там же сформулированы необходимые и достаточные условия устойчивости, а именно: *для устойчивости СУ необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического полинома принадлежали левой полуплоскости плоскости корней.*

Для СУ, построенных по принципу обратной связи, устойчивость определяет характеристический полином замкнутой СУ. Если модель типовой СУ задана структурной схемой (подразд. 2.5, рис. 2.2), то по ПФ звеньев прямого канала легко определяется оператор $W_p(s)$ и структура СУ приводится к виду, изображенному на рис. 2.3. В подразд. 2.6 определяются ПФ по управлению и по ошибке замкнутой СУ через оператор $W_p(s)$ разомкнутой системы. В обоих случаях ПФ замкнутой системы имеют одинаковый знаменатель – характеристический полином.

С учетом обозначений $W_p(s) = B_p(s) / A_p(s)$, характеристический полином $A(s)$ замкнутой системы определяется выражением:

$$A(s) = A_p(s) + B_p(s). \quad (7.1)$$

Таким образом, *характеристический полином замкнутой системы равен сумме полиномов знаменателя и числителя ПФ разомкнутой системы.*

Принадлежность корней характеристического полинома левой части комплексной плоскости можно определить непосредственным вычислением корней. Также могут быть использованы *критерии устойчивости.*

Алгебраические критерии устойчивости позволяют установить факт принадлежности корней полинома левой полуплоскости по соотношениям коэффициентов a_i полинома $A_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$.

Необходимым (но не достаточным) условием устойчивости является требование, чтобы все коэффициенты $a_i, i = 0, \dots, n$, были одного знака (например, положительные). Если хотя бы один коэффициент полинома имеет противоположный знак относительно других коэффициентов, то это уже является достаточным условием принадлежности одного или нескольких корней правой полуплоскости.

Для полинома первого порядка $A_1(s) = a_1 s + a_0$ приведенное условие устойчивости является не только необходимым, но и достаточным, так как единственный действительный корень $s_1 = -a_0/a_1$.

Для полинома второго порядка $A_2(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ приведенное условие устойчивости также является не только необходимым, но и достаточным, что следует из анализа формулы решения квадратного уравнения:

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}. \quad (7.2)$$

Для полиномов выше второго порядка это необходимое условие уже не является достаточным.

Здесь ограничимся рассмотрением критерия устойчивости Гурвица для полинома 3-го порядка.

Для полинома $A_3(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ имеют место следующие соотношения, получаемые из сравнения произведений “средних” коэффициентов $a_2 a_1$ и “крайних” коэффициентов $a_3 a_0$:

- при $a_2 a_1 > a_3 a_0$ все три корня – левые (система устойчива);
- при $a_2 a_1 < a_3 a_0$ пара комплексно-сопряженных корней – правые (система неустойчива);
- при $a_2 a_1 = a_3 a_0$ пара сопряженных корней – чисто мнимые, то есть корни располагаются на оси мнимых (система находится на колебательной границе устойчивости).

Проведем анализ устойчивости СУ, модель которой показана на рис. 4.1 (подразд. 4.1). В общем виде оператор $W_P(s)$ записан в выражении (4.1) – см. подразд. 4.2. Приведем его к одной дробно-рациональной функции:

$$W_P(s) = \frac{B_P(s)}{A_P(s)} = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}. \quad (7.3)$$

Запишем теперь в общем виде характеристический полином замкнутой СУ

$$A(s) = A_P(s) + B_P(s) = s(T_1s + 1)(T_2s + 1) + K = T_1T_2s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K. \quad (7.4)$$

В результате имеем

$$a_3 = T_1T_2, \quad a_2 = T_1 + T_2, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = K. \quad (7.5)$$

Определим устойчивость этой СУ при $K = 10$, $T_1 = T_2 = 1$ с. При таких значениях параметров имеем $a_2a_1 < a_3a_0$ – система неустойчива.

Проанализируем влияние на устойчивость этой СУ усиления в контуре. Зафиксируем значения постоянных времени и будем варьировать параметр K . Из (7.5) видно, что этот параметр входит только в младший коэффициент характеристического полинома ($a_0 = K$). При достаточном уменьшении коэффициента усиления неравенство $a_2a_1 < a_3a_0$ поменяет знак: $a_2a_1 > a_3a_0$.

Коэффициент усиления контура обратной связи, при котором система оказывается на границе устойчивости, называется *критическим коэффициентом усиления*. Для данной СУ, с учетом (7.5), получим

$$K_{кр} = \frac{T_1 + T_2}{T_1T_2}. \quad (7.6)$$

Для установленных параметров ($T_1 = T_2 = 1$ с) получаем $K_{кр} = 2$.

Для всех $K < K_{кр}$ имеем устойчивую СУ.

На рис. 7.1 изображены переходные процессы в рассматриваемой системе при различных коэффициентах усиления.

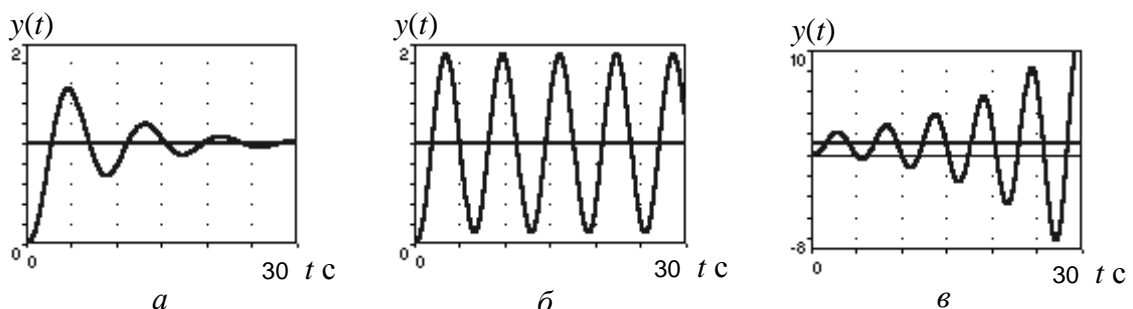


Рис. 7.1

На рис. 7.1,а приведен процесс при $K = 0.5K_{кр} = 1$, на рис. 7.1,б – при $K = K_{кр} = 2$, и на рис. 7.1,в – процесс при $K = 1.5K_{кр} = 3$.

7.2. Частотные критерии устойчивости систем управления

Эти критерии позволяют судить об устойчивости СУ по виду ЧХ. Рассмотрим наиболее часто используемый частотный критерий Найквиста, который *позволяет анализировать устойчивость замкнутой системы по ЧХ разомкнутой системы*.

Здесь рассматривается формулировка и использование критерия Найквиста для СУ, образованных неминимально-фазовыми звеньями.

Формулировка критерия Найквиста для АФХ. Критерий устойчивости Найквиста изначально сформулирован для АФХ $W_p(j\omega)$. На комплексной плоскости фиксируется так называемая *критическая точка* с координатами $(-1, j0)$ – см. рис. 7.2.

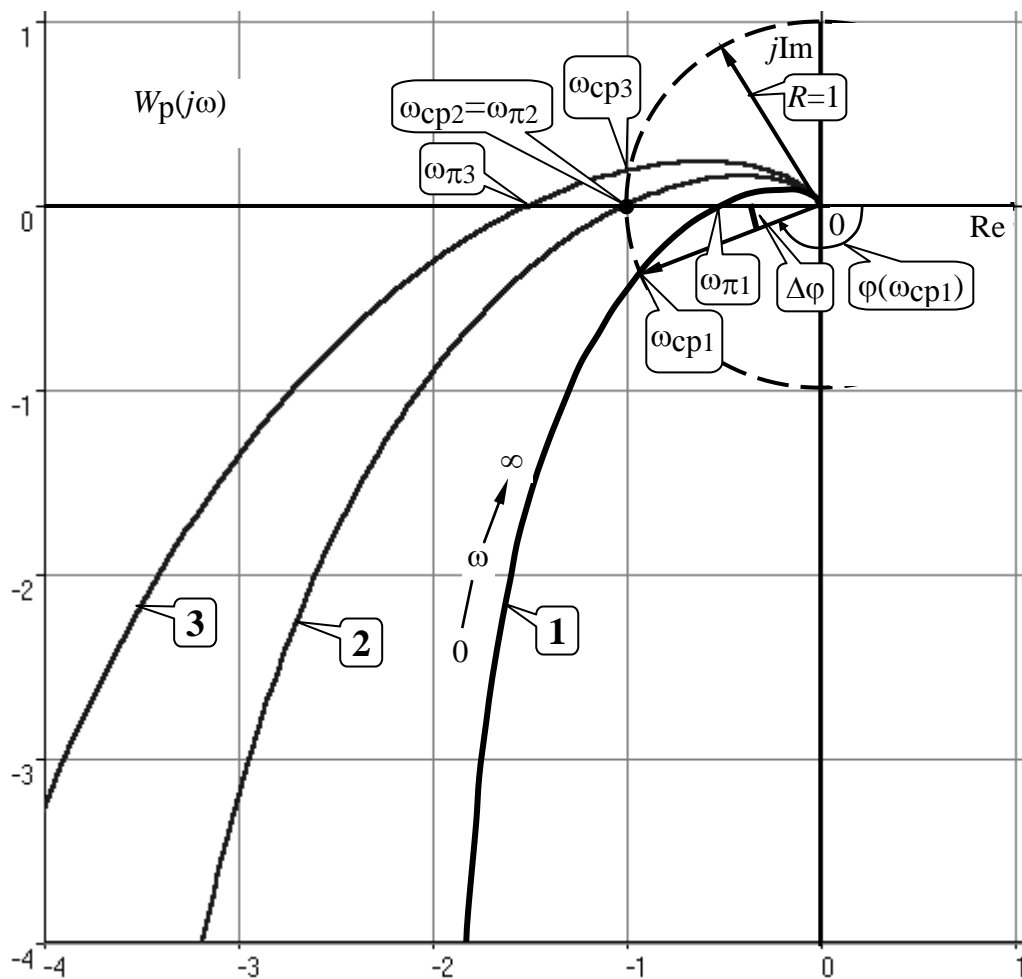


Рис. 7.2

При изменении частоты ω от 0 до ∞ , прохождение годографа $W_p(j\omega)$ через отрицательную часть оси действительных означает, что точке пересечения годографа с осью соответствует фазовый сдвиг $-\pi$. Частота на АФХ в точке пересечения обозначается " ω_π ".

Критерий Найквиста определяет устойчивость по соотношению положения точки пересечения $W_p(j\omega_\pi)$ и критической точки $(-1, j0)$.

Если точка АФХ $W_p(j\omega_\pi)$ находится слева от точки $(-1, j0)$, то говорят, что АФХ “охватила” критическую точку. Модуль АФХ $R_p(\omega_\pi) > 1$.

Если точка АФХ $W_p(j\omega_\pi)$ находится справа от точки $(-1, j0)$, то говорят, что АФХ “не охватила” критическую точку. Модуль АФХ $R_p(\omega_\pi) < 1$.

Теперь можем сформулировать простые правила критерия Найквиста.

- Если при изменении частоты ω от 0 до ∞ АФХ $W_p(j\omega)$ не охватывает критическую точку, то замкнутая система устойчива.
- Если при изменении частоты ω от 0 до ∞ АФХ $W_p(j\omega)$ охватывает критическую точку, то замкнутая система неустойчива.
- Если при изменении частоты ω от 0 до ∞ АФХ $W_p(j\omega)$ проходит через критическую точку, то замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости.

На рис. 7.2 изображена комплексная плоскость, на которой построена полуокружность единичного радиуса и помечена точка $(-1, j0)$.

Построены АФХ для той же СУ, устойчивость которой исследовалась алгебраическим критерием (см. предыдущий подразд. 7.1).

Кривая “1” соответствует значению коэффициента усиления $K = 1 < K_{кр}$. Действительно, в этом случае АФХ $W_p(j\omega)$ не охватила критическую точку, то есть замкнутая система устойчива – см. рис. 7.1,а.

Кривая “2” построена при значении коэффициента усиления $K = 2 = K_{кр}$. В этом случае АФХ $W_p(j\omega)$ прошла через критическую точку и замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости – см. рис. 7.1,б.

Кривая “3” соответствует значению коэффициента усиления $K = 3 > K_{кр}$. В этом случае АФХ $W_p(j\omega)$ охватила критическую точку, то есть замкнутая система неустойчива – см. рис. 7.1,в.

Точка пересечения АФХ $W_p(j\omega)$ с окружностью единичного радиуса (то есть единичного модуля ЧХ) соответствует частоте $\omega_{ср}$. Поэтому можно дать другую формулировку частотному критерию (см. рис. 7.2):

- при $\omega_{ср} < \omega_\pi$ система устойчива;
- при $\omega_{ср} > \omega_\pi$ система неустойчива;

- при $\omega_{\text{ср}} = \omega_{\text{л}}$ система находится на границе устойчивости.

Для устойчивых СУ с использованием критерия Найквиста вводятся количественные оценки “запасов” устойчивости. Наиболее распространенная оценка – *запас по фазе* $\Delta\varphi$. Под ним понимают значение угла, на который следует “довернуть” вектор $R(\omega_{\text{ср}})$ до значения $-\pi$ (см. рис. 7.2). Для “хороших” СУ с переходным процессом, имеющим перерегулирование $\sigma < 15\%$, должно выполняться $\Delta\varphi > (55 \div 60^\circ)$.

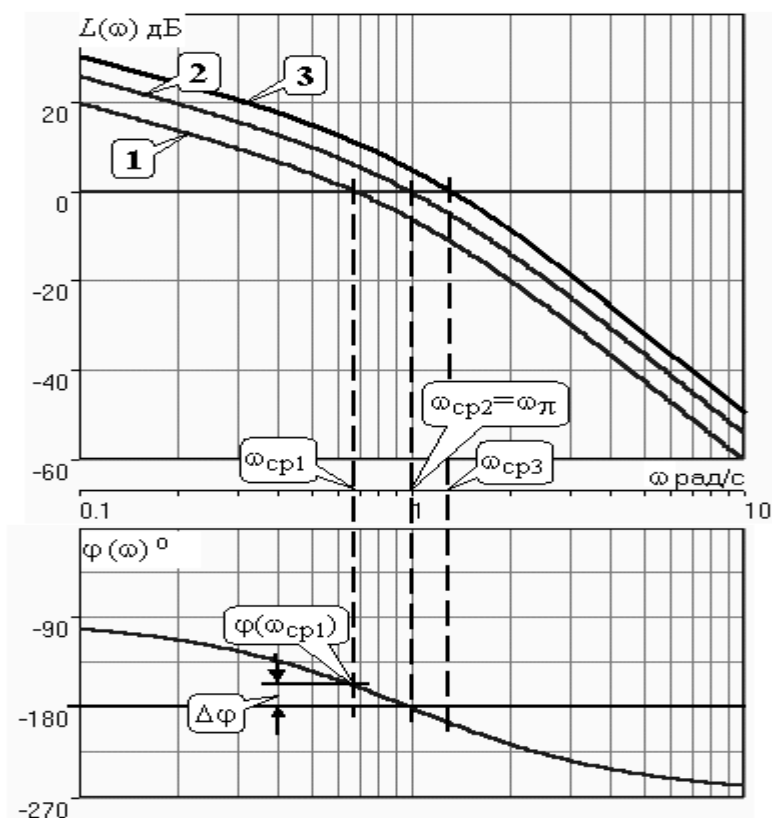
Применение критерия Найквиста для ЛЧХ. Построим ЛЧХ для рассмотренного выше примера СУ – рис. 7.3.

Рис. 7.3

В данном случае удобнее вторая формулировка критерия Найквиста.

Для кривой “1” имеет место $\omega_{\text{ср}} < \omega_{\text{л}}$ и система устойчива. При этом на рисунке показан запас по фазе $\Delta\varphi$.

Также видно, что кривой “3” соответствует $\omega_{\text{ср}} > \omega_{\text{л}}$ и система



неустойчива.

При $\omega_{\text{ср}} = \omega_{\text{л}}$ имеем кривую “2” и систему на границе устойчивости.

Можно дать формулировку критерия для ЛЧХ:

- если $L_p(\omega_\pi) < 0$, то система устойчива;
- если $L_p(\omega_\pi) > 0$, то система неустойчива;
- если $L_p(\omega_\pi) = 0$, то система находится на границе устойчивости.

Критерий устойчивости Найквиста при использовании ЛЧХ позволяет легко определить критический коэффициент усиления для СУ высокого порядка. Действительно, при вариациях усиления в контуре ФЧХ остается неизменной, а ЛАХ смещается параллельно самой себе вверх (при увеличении усиления) или вниз (при уменьшении усиления). Необходимо расположить ЛАХ таким образом, чтобы выполнялось $\omega_{ср} = \omega_\pi$ или, что то же самое, $L_p(\omega_\pi) = 0$. После фиксации ЛАХ по ее низкочастотному участку определяется коэффициент усиления в контуре (см. разд. 4).

7.3. Синтез систем управления с целью обеспечения устойчивости и качества переходных процессов

В подразд. 1.4 вводится понятие “типового” поведения СУ. Показаны слабоколебательный переходный процесс с перерегулированием $\sigma \approx 10\%$, а также аperiodический процесс.

Как следует из подразд. 7.1 и подразд. 7.2, можно добиться устойчивости СУ простым ограничением контурного усиления с запасом, обеспечивающим слабоколебательный или даже аperiodический процесс. Однако, обеспечение требований по быстродействию системы (см. разд. 5) и/или требований для установившихся режимов (см. разд. 6) определяет контурное усиление, которое не подлежит уменьшению. При этом СУ может оказаться либо с малыми запасами устойчивости, либо неустойчивой. В этом случае встает задача динамической коррекции, которая должна обеспечить устойчивость и требуемый переходный процесс при сохранении качества вынужденных движений.

В данном подразделе рассматривается частотный метод синтеза динамической коррекции, основанный на формировании “типовой” ЧХ.

Типовая частотная характеристика СУ. Типовому поведению СУ во временной области соответствует определенный вид ЛАХ в окрестности частоты $\omega_{ср}$. Основное требование к типовой ЛАХ заключается в том, чтобы в достаточно широком диапазоне частот в окрестности $\omega_{ср}$ наклон асимптотической ЛАХ составлял -20 дБ/дек. Длинный участок ЛАХ с

наклоном -20 дБ/дек обеспечивает “подтягивание” ФЧХ к линии $-\pi/2$. В результате этого образуется запас по фазе $\Delta\varphi$.

Если сформировать участок ЛАХ с наклоном -20 дБ/дек в диапазоне $\omega \in [0.1\omega_{\text{ср}}, 10\omega_{\text{ср}}]$ (т. е. длиной в две декады), то получается гарантированный запас по фазе $\Delta\varphi > (55 \div 60^\circ)$.

СУ с типовой ЛЧХ, изображенной на рис. 4.4, рассмотрена в подразд. 4.3. Видно, что в окрестности $\omega_{\text{ср}} = 0.4$ рад/с имеем максимальное превышение ФЧХ над линией $-\pi$. Запас по фазе $\Delta\varphi = 74^\circ$. Переходный процесс в этой СУ показан на рис. 5.5. Перерегулирование $\sigma = 8.5\%$.

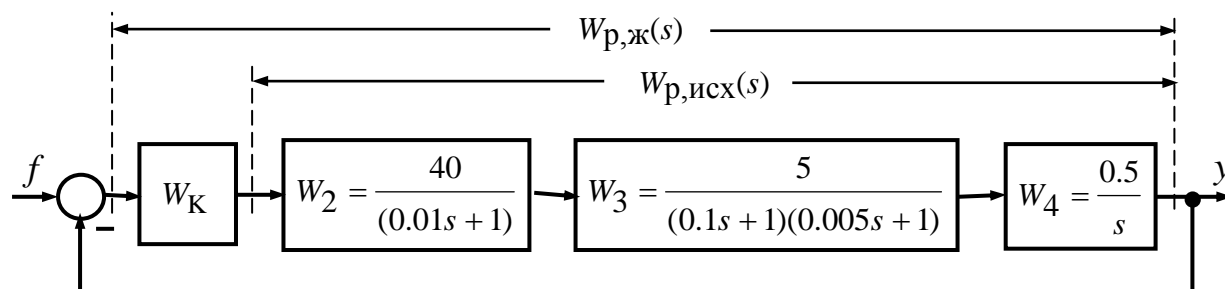
Формирование типовой частотной характеристики с учетом свойств исходной системы. ЛАХ типовой или, как ее еще называют, “желаемой” системы, формируют путем “пристыковки” к ЛАХ исходной системы. При этом используются следующие правила.

- В диапазоне низких частот ЛАХ исходной и желаемой систем совпадают.
- В диапазоне высоких частот ЛАХ желаемой системы проходит параллельно исходной ЛАХ или совпадает с ней.
- Во всем диапазоне частот ЛАХ желаемой системы проходит не выше исходной ЛАХ.

Является целесообразным следующий способ построения ЛАХ желаемой системы. На исходной ЛАХ фиксируется точка $L_{\text{исх}}(\omega) = -20$ дБ. Из этой точки влево на две декады изменения частоты проводится среднечастотный участок $L_{\text{ж}}(\omega)$ с наклоном -20 дБ/дек. Далее в сторону уменьшения частоты проводится участок $L_{\text{ж}}(\omega)$ с наклоном, кратным -20 дБ/дек, до стыковки с исходной ЛАХ.

Такой способ формирования желаемой ЛАХ минимизирует диапазон частот, в котором различаются $L_{\text{исх}}(\omega)$ и $L_{\text{ж}}(\omega)$, а также обеспечивает максимальную частоту $\omega_{\text{ср}}$ желаемой системы.

Рассмотрим пример формирования желаемой ЛАХ для СУ, заданной структурной схемой на рис. 7.4.



Звено W_k предусмотрено для введения динамической коррекции; положим начальный оператор $W_k(s)=1$, при котором, очевидно, последовательная коррекция не изменяет характеристик исходной системы.

Анализ исходной системы дает расходящийся переходный процесс $y_{исх}(t)$ – см. рис. 7.5.

ЛАХ $L_{исх}(\omega)$ и ФЧХ $\varphi_{исх}(\omega)$ исходной разомкнутой системы приведены на рис. 7.6. Выполняются соотношения $L_{исх}(\omega_{\pi}) > 0$, $\omega_{ср,исх} > \omega_{\pi,исх}$, что по критерию Найквиста подтверждает факт неустойчивости СУ.

Сформированная по приведенным выше правилам ЛАХ желаемой системы $L_{ж}(\omega)$ и соответствующая ей ФЧХ $\varphi_{ж}(\omega)$ также изображены на рис. 7.6. По ЧХ видно, что желаемая система устойчива: $L_{ж}(\omega_{\pi}) < 0$, $\omega_{ср,ж} < \omega_{\pi,ж}$. Желаемая система обладает значительным запасом устойчивости $\Delta\varphi = 70.6^\circ$. Такой запас обеспечит в скорректированной системе переходный процесс без колебательной составляющей.

Рис. 7.4

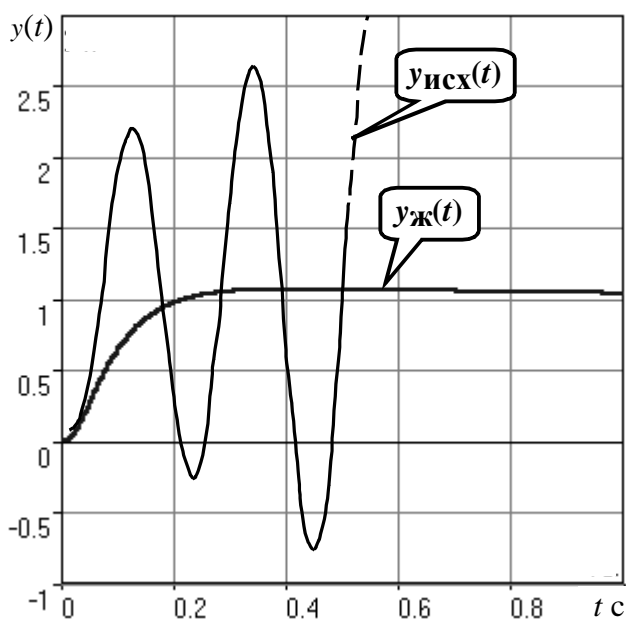


Рис. 7.5

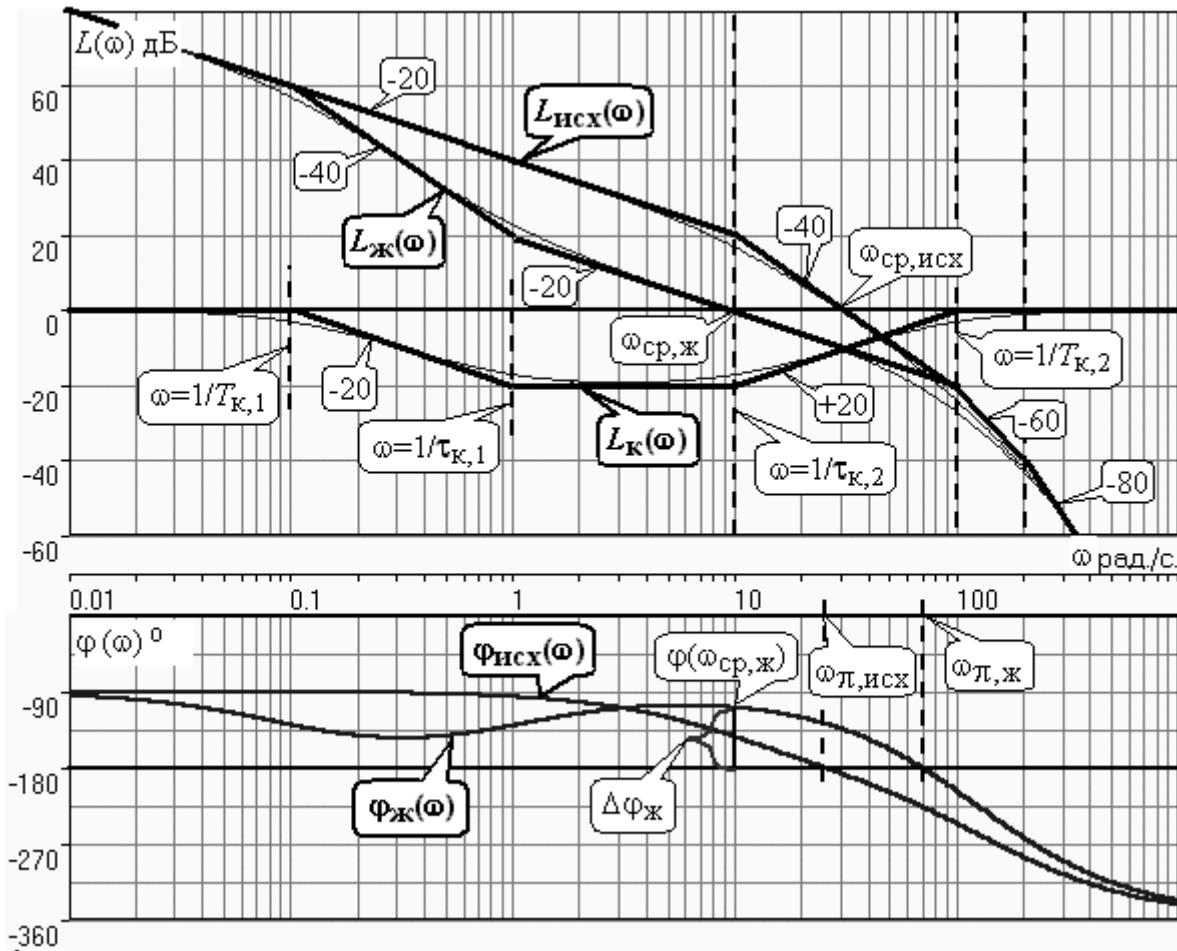


Рис. 7.6

На рис. 7.7 качественно построены АФХ разомкнутых исходной $W_{p,исх}(j\omega)$ и желаемой $W_{p,ж}(j\omega)$ систем. Видно, как на комплексной плоскости АФХ $W_{p,исх}(j\omega)$ охватывает критическую точку с координатами $(-1, j0)$, что говорит о неустойчивости исходной системы. АФХ желаемой системы обходит точку с координатами $(-1, j0)$, что соответствует устойчивой системе. На рис. 7.7 также обозначен запас по фазе сформированной желаемой системы.

Нахождение оператора звена последовательной коррекции. Найдем оператор звена коррекции, включение которого образует систему с ЧХ, соответствующей желаемой. Звено коррекции W_k включается последовательно со звеньями, образующими ПФ исходной разомкнутой системы $W_{p,исх}(s)$ – см. рис. 7.4. Поэтому имеем

$$W_{p,ж}(s) = W_k(s) W_{p,исх}(s). \quad (7.7)$$

Для ЛЧХ с учетом (7.8) выполняется

$$L_{p,ж}(\omega) = L_K(\omega) + L_{p,исх}(\omega). \quad (7.8)$$

Из (7.8) получаем

$$L_K(\omega) = L_{p,ж}(\omega) - L_{p,исх}(\omega). \quad (7.9)$$

Таким образом, в соответствии с (7.9) ЛАХ звена коррекции может быть построена графическим вычитанием двух характеристик.

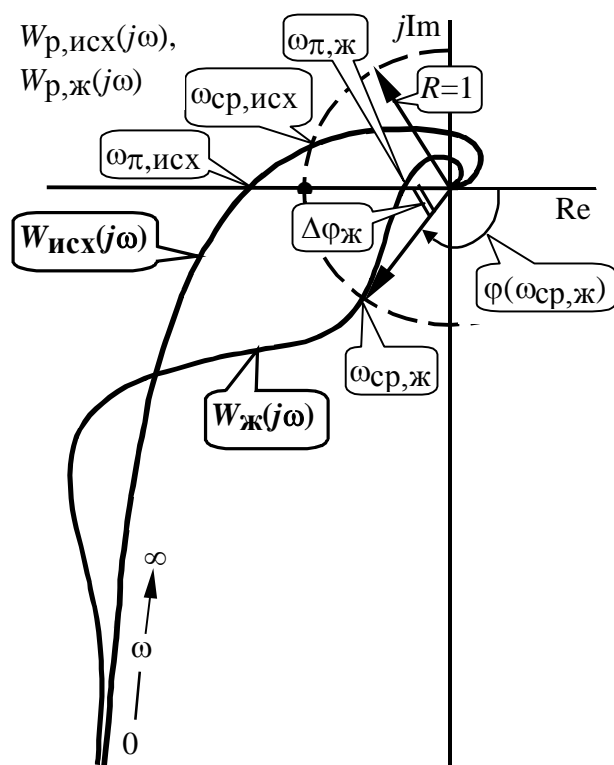


Рис. 7.7

Для получения оператора $W_K(s)$ необходимо иметь асимптотическую ЛАХ звена. Для этого следует аппроксимировать построенную $L_K(\omega)$ отрезками прямых с наклонами, кратными 20 дБ/дек. По этой характеристике записывается ПФ $W_K(s)$.

Заметим, что при построении асимптотических характеристик $L_{p,исх}(\omega)$ и $L_{p,ж}(\omega)$ процедура построения ЛАХ звена коррекции упрощается; в результате получается сразу и асимптотическая $L_K(\omega)$.

Для рассматриваемого примера (рис. 7.4) построена ЛАХ $L_K(\omega)$ –

см. рис. 7.6. По ней запишем оператор ПФ:

$$W_K(s) = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{(s + 1)(0,1s + 1)}{(10s + 1)(0,01s + 1)}. \quad (7.10)$$

В результате введения оператора (7.10) в звено коррекции получаем СУ с переходным процессом $y_ж(t)$ – см. рис. 7.5. Этот переходный процесс имеет следующие показатели качества: время первого согласования $t_1 = 0.19$ с, время регулирования $t_p = 0.8$ с, перерегулирование $\sigma = 7\%$, что соответствует динамической системе с достаточным запасом устойчивости.

8. СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ СО СЛОЖНОЙ СТРУКТУРОЙ

В разделе изучаются СУ, имеющие отличающуюся от типовой организацию. Рассмотрен следующий круг вопросов:

- задача преобразования моделей со сложной структурой;

- необходимые сведения из теории графов;
- характеристики собственно системы со сложной структурой;
- получение ПФ по структурной схеме сложной СУ.

8.1. Задача преобразования моделей со сложной структурой

В предыдущих разделах рассматривались СУ с типовой структурой. Под это понятие попадают одноконтурные системы с единичной отрицательной обратной связью. Модели в форме структурных схем обычно выступают в качестве исходной информации. Действительно, в таких моделях (с раскрытой внутренней организацией) в явном виде присутствуют звенья и связи между ними, а также операторы звеньев со своими параметрами. При каких-либо изменениях в структуре (например, подключение или отключение связи) или вариациях параметров (настройка коэффициента усиления в регуляторе) используются модели именно этого вида.

С другой стороны, характеристики и показатели качества определяются как раз по моделям со свернутой структурой, то есть типа “вход-выход”. Такие модели в виде математического оператора содержат характеристический полином, отвечающий за устойчивость СУ. По операторам в виде ПФ определяются временные и частотные характеристики.

В связи с этим расчеты линейных СУ содержат, как правило, процедуру перехода от структурной схемы к характеристическому полиному и ПФ, о чем свидетельствует также материал, изложенный в предыдущих разделах.

Для СУ с типовой структурой характеристический полином и ПФ выражаются через ПФ звеньев прямого канала по простым соотношениям (см. подразд. 2.5, 2.6).

Для динамических систем с произвольной структурой для получения характеристического полинома и ПФ можно использовать алгоритм, который описан ниже. Этот алгоритм основан на некоторых понятиях теории графов. Структурная схема также представляет собой разновидность ориентированного сигнального графа. Вершинами (узлами) такого графа являются звенья со своими операторами (ПФ), а в качестве дуг (ветвей) выступают направленные связи между звеньями.

8.2. Необходимые сведения из теории графов

Как было отмечено в подразд. 8.1, структурная схема представляет собой ориентированный граф (“орграф”). С помощью примера (рис. 8.1) рассмотрим некоторые понятия и определения из теории графов, которые будут необходимы для решения приведенных далее задач расчета структурно-сложных СУ.

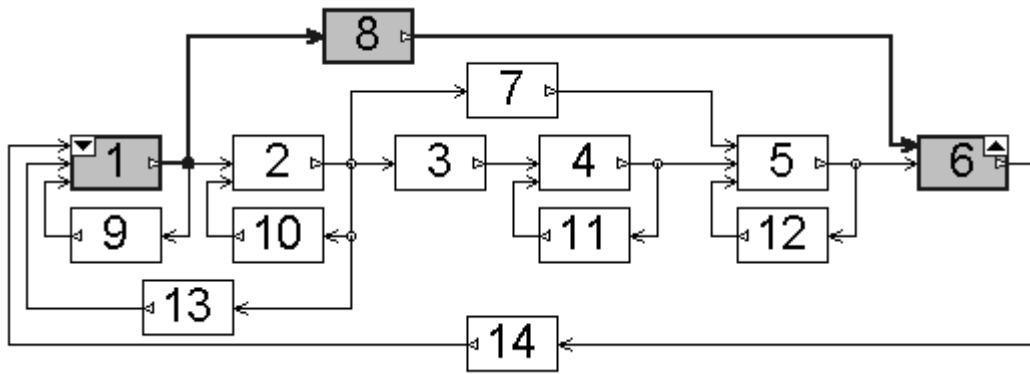


Рис. 8.1

Путь $P_{q \rightarrow r}$ от блока (вершины графа) под номером q к блоку (вершине) под номером r – последовательность блоков, попарно соединенных связями.

Элементарный путь – путь, в котором каждый блок и каждая связь встречаются по одному разу.

В данном контексте будут использованы только элементарные пути (слово “элементарный” в дальнейшем изложении материала опускается).

Перечислим номерами блоков состав всех путей от блока 1 к блоку 6:

$$P_{1 \rightarrow 6}^1: \{ 1 8 6 \} \text{ (выделен на рис. 2.1);}$$

$$P_{1 \rightarrow 6}^2: \{ 1 2 7 5 6 \};$$

$$P_{1 \rightarrow 6}^3: \{ 1 2 3 4 5 6 \}.$$

Передача пути – произведение операторов блоков пути.

Обозначив W_i оператор i -го блока, запишем передачи этих путей:

$$P_{1 \rightarrow 6}^1 = W_1 W_8 W_6; \quad P_{1 \rightarrow 6}^2 = W_1 W_2 W_7 W_5 W_6; \quad P_{1 \rightarrow 6}^3 = W_1 W_2 W_3 W_4 W_5 W_6.$$

Контур K_i – замкнутый путь. Здесь также подразумеваются элементарные контуры.

Контуры графа не связаны с назначенными входами или выходами. Любая вершина контура может быть принята за начальную; эта же вершина будет и конечной при “обходе” контура. Граф (структурная схема) содержит конечное число элементарных контуров.

Передача контура – произведение операторов блоков этого контура.

Покажем состав контуров приведенной на рис. 2.1 блок-схемы перечислением множеств номеров блоков, входящих в состав каждого контура:

$$K_1: \{ 1 8 6 14 \};$$

$$K_5: \{ 1 9 \};$$

$$K_2: \{ 1 2 7 5 6 14 \};$$

$$K_6: \{ 5 12 \};$$

$$K_3: \{ 1 2 3 4 5 6 14 \};$$

$$K_7: \{ 2 10 \};$$

$$K_4: \{ 1 2 13 \};$$

$$K_8: \{ 4 11 \}.$$

Запишем передачи перечисленных контуров:

$$K_1 = W_1 W_8 W_6 W_{14};$$

$$K_5 = W_1 W_9;$$

$$K_2 = W_1 W_2 W_7 W_5 W_6 W_{14};$$

$$K_6 = W_5 W_{12};$$

$$K_3 = W_1 W_2 W_3 W_4 W_5 W_6 W_{14};$$

$$K_7 = W_2 W_{10};$$

$$K_4 = W_1 W_2 W_{13};$$

$$K_8 = W_4 W_{11}.$$

Отметим следующие особенности изображенного на рис. 2.1 графа. Во-первых, все вершины графа (блоки структурной схемы) и все связи входят в состав хотя бы одного контура. Во-вторых, между любой парой вершин есть по крайней мере один путь в обоих направлениях. Такой граф называется “*сильно связным*”. Эти особенности отвечают за ряд важных свойств динамических систем.

Отношение некасания пары контуров: $K_i \bar{r} K_j$. Два контура считаются *некасающимися*, если они не имеют общих блоков (и, следовательно, связей).

Перечислим множества номеров контуров, которых не касается каждый i -й контур приведенного на рис. 2.1 графа. При этом будем четко придерживаться “лексикографического” порядка следования номеров, при котором каждый последующий индекс “мажорирует” предыдущий, т. е. он больше предыдущего:

$$K_1: \{ 6 7 8 \};$$

$$K_5: \{ 6 7 8 \};$$

$$K_2: \{ 8 \};$$

$$K_6: \{ 7 8 \};$$

$$K_3: \{ \emptyset \};$$

$$K_7: \{ 8 \};$$

$$K_4: \{ 6 8 \};$$

$$K_8: \{ \emptyset \}.$$

Отношение некасания коммутативно, т. е. из $K_i \bar{r} K_j$ следует $K_j \bar{r} K_i$. Лексикографический порядок позволяет оптимизировать процесс поиска пар некасающихся контуров и избежать повторений при их перечислении.

Аналогичным образом вводится отношение некасания пути и контура $P_{q \rightarrow r} \bar{r} K_i$. Путь и контур считаются *некасающимися*, если они не имеют общих блоков (и, следовательно, связей).

8.3. Определитель графа. Характеристический полином сложной системы управления

Рассмотрим модель СУ, структурная схема которой представляет собой сильно связный граф (см. рис. 8.1). Кроме этого, будем считать, что отсутствует (либо игнорируется) информация о входах и/или о выходах системы. Таким образом, в данном случае имеем дело с моделью “собственно системы”. При задании модели СУ дифференциальным уравнением аналогом модели собственно системы является однородное уравнение. Оно образуется приравниванием нулю правой части исходного уравнения, в которой как раз и присутствует входная координата. Решение же однородного уравнения определяет собственные движения системы и, следовательно, устойчивость СУ (см. разд. 2).

Фундаментальной характеристикой такой модели, формируемой на основе анализа структуры системы, является *определитель графа*.

Определитель графа Δ представляет собой следующую конструкцию, составленную из передач контуров:

$$\Delta = 1 - \sum_i K_i + \sum_{i,j} K_i K_j - \sum_{i,j,l} K_i K_j K_l + \dots \quad (8.1)$$

В этом выражении присутствуют следующие группы слагаемых:

- $\sum_i K_i$ – сумма передач всех контуров графа;
- $\sum_{i,j} K_i K_j$ – сумма произведений передач всех пар некасающихся контуров;
- $\sum_{i,j,l} K_i K_j K_l$ – сумма произведений передач всех троек попарно

Формирование определителя заканчивается, когда перечислены все возможные комбинации из попарно некасающихся контуров; четные

комбинации (пары, четверки и т. д.) суммируются со знаком “+”, а нечетные (одиначные контуры, тройки, пятерки и т. д.) – со знаком “-”.

В качестве примера сформируем и запишем в символьном виде определитель графа, структурная схема которого представлена на рис. 8.1:

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - K_1 - K_2 - K_3 - K_4 - K_5 - K_6 - K_7 - K_8 + \\ & + K_1K_6 + K_1K_7 + K_1K_8 + K_2K_8 + K_4K_6 + K_4K_8 + K_5K_6 + K_5K_7 + K_5K_8 + K_6K_7 + K_6K_8 + K_7K_8 - \\ & - K_1K_6K_7 - K_1K_6K_8 - K_1K_7K_8 - K_4K_6K_8 - K_5K_6K_7 - K_5K_6K_8 - K_5K_7K_8 - K_6K_7K_8 \\ & + K_1K_6K_7K_8 + K_5K_6K_7K_8 . \end{aligned}$$

В результате, определитель этого графа содержит 31 слагаемое.

Можно заметить, что для формирования троек и последующих слагаемых определителя уже можно обойтись без состава контуров; достаточная информация заложена в перечне пар некасающихся контуров. Действительно, для того чтобы пары K_iK_j и K_iK_l образовали тройку $K_iK_jK_l$, необходимо в перечне пар найти также и K_jK_l . Причем строгий лексикографический порядок следования индексов позволяет при генерации последующих слагаемых анализировать только те комбинации, которые отличаются последними индексами. Эти особенности дают возможность существенно повысить эффективность формирования определителя графа.

При задании операторов блоков структурной схемы передаточными функциями $W_i(s) = B_i(s) / A_i(s)$ передача каждого контура является дробно-рациональной функцией. Если в (8.1) подставить передачи контуров и произвести необходимые алгебраические действия, то определитель графа также будет приведен к дробно-рациональной функции:

$$\Delta = \Delta(s) = A(s) / A_p(s) . \quad (8.2)$$

В выражении (8.2) $A_p(s)$ – “характеристический полином полностью разомкнутой системы”; он равен произведению знаменателей передаточных функций всех звеньев рассматриваемого графа.

Полином числителя $A(s)$ определителя графа Δ представляет собой характеристический полином контурной части системы. Поэтому определитель графа является характеристикой, отвечающей за устойчивость СУ.

8.4. Получение передаточных функций по структурной схеме сложной системы управления

При назначении в СУ конкретных входа и выхода может быть получена “передача” – оператор связи входной и выходной координат. По сути такая процедура является переходом от модели с раскрытой структурой к модели со свернутой структурой, то есть к модели “вход-выход”, которую можно

представить одним блоком (см. разд. 2). Для системы дифференциальных уравнений различных порядков, составленных относительно координат-выходов блоков структурной схемы, переход к такой модели сопровождается исключением всех внутренних переменных и заменой системы уравнений одним дифференциальным уравнением.

Если операторы блоков заданы передаточными функциями, то и оператор передачи в конечном счете также будет представлен в виде передаточной функции СУ.

Рассмотрим способ получения передачи по графу системы с использованием формулы Мэзона. Достоинствами этого способа являются его четкая формализация и возможность составления единого алгоритма для произвольных структур любой сложности.

Формула Мэзона имеет следующий вид:

$$\Phi_{q \rightarrow r} = \frac{\sum P_{qr}^n \Delta_{qr}^n}{\Delta} . \quad (8.3)$$

Здесь $\Phi_{q \rightarrow r}$ оператор передачи от входного блока с номером q к выходному блоку с номером r ; P_{qr}^n – передача n -го пути от входа q к выходу r ; Δ_{qr}^n – “минор” n -го пути от входа q к выходу r ; Δ – определитель графа.

Видно, что знаменатель формулы составляется единожды при расчетах множества передач конкретной СУ.

Числитель формулы содержит столько слагаемых, сколько имеется возможных путей от входа к выходу. Каждое слагаемое представляет собой произведение передачи n -го пути на минор этого пути.

Минор пути (как и определитель, обозначаемый индексом “ Δ ”), формируется по (8.1), но только из тех контуров, которых путь не касается.

В качестве примера найдем числитель передачи $\Phi_{1 \rightarrow 6}$ для СУ, структурная схема которой приведена на рис. 8.1. По количеству путей числитель формулы (8.3) будет содержать три слагаемых.

Путь 1. Передача этого пути $P_{1 \rightarrow 6}^1 = W_1 W_8 W_6$. Этот путь выделен на рис. 8.1. Для нахождения минора пути можно образовать частную

неизбыточную модель, удалив из графа все блоки пути с “инцидентными” им связями (связями, которые входят в названные блоки и выходят из них), а также блоки, оставшиеся в “разрушенных” контурах. Оставшиеся элементы образуют контуры, которых не коснулся удаленный путь.

На рис. 8.2 изображен подграф, образующий минор первого пути.

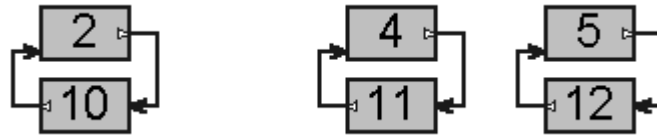


Рис. 8.2

В результате получим:

$$\Delta_{1 \rightarrow 6}^1 = 1 - K_6 - K_7 - K_8 + K_6K_7 + K_6K_8 + K_7K_8 - K_6K_7K_8 .$$

Путь 2. Передача пути $P_{1 \rightarrow 6}^2 = W_1 W_2 W_7 W_5 W_6$. Этот путь выделен на рис. 8.3.

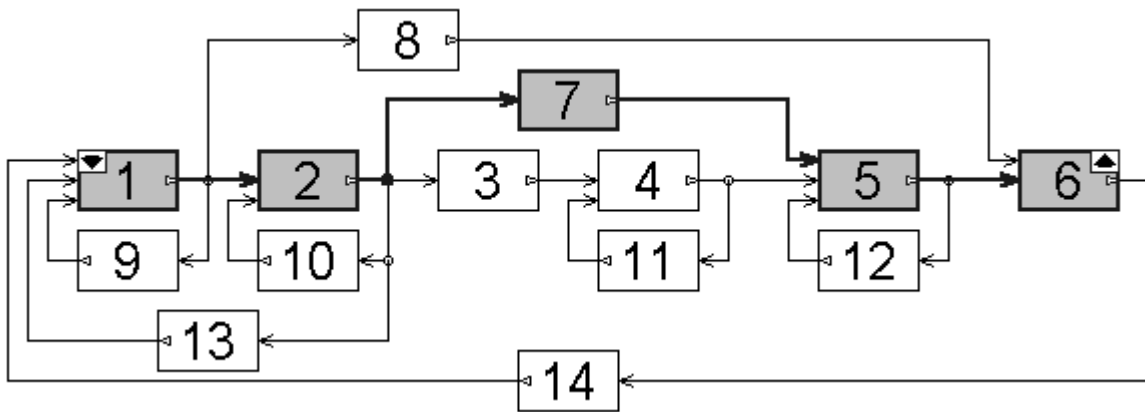


Рис. 8.3

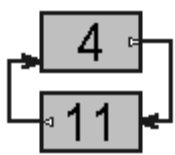


Рис. 8.4

Подграф, состоящий из единственного контура, которого не коснулся второй путь, изображен на рис. 8.4. Таким образом, минор второго пути $\Delta_{1 \rightarrow 6}^2 = 1 - K_8$.

Путь 3. Передача этого пути $P_{1 \rightarrow 6}^3 = W_1 W_2 W_3 W_4 W_5 W_6$.

Данный путь выделен на рис. 8.5. Видно, что указанный путь коснулся всех контуров графа, т. е. подмножество тех контуров, которых этот путь не касается – пусто.

В таком случае имеем единичный минор пути $\Delta_{1 \rightarrow 6}^3 = 1$.

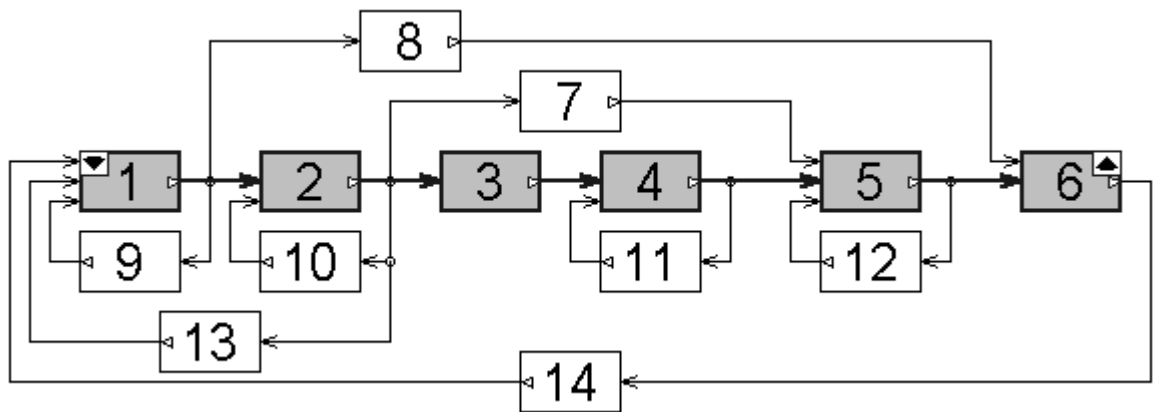


Рис. 8.5

Таким образом, в символьном виде можем записать выражение для оператора передачи:

$$\Phi_{1 \rightarrow 6} = \frac{P_{16}^1 \Delta_{16}^1 + P_{16}^2 \Delta_{16}^2 + P_{16}^3 \Delta_{16}^3}{\Delta} .$$

Все составляющие этого выражения приведены ранее.

Найдем теперь передачу $\Phi_{3 \rightarrow 6}$ для той же СУ. Пересчитать необходимо только числитель формулы. На рис. 8.6 выделен единственный путь от блока 3 к блоку 6. Передача этого пути $P_{3 \rightarrow 6}^1 = W_3 W_4 W_5 W_6$.

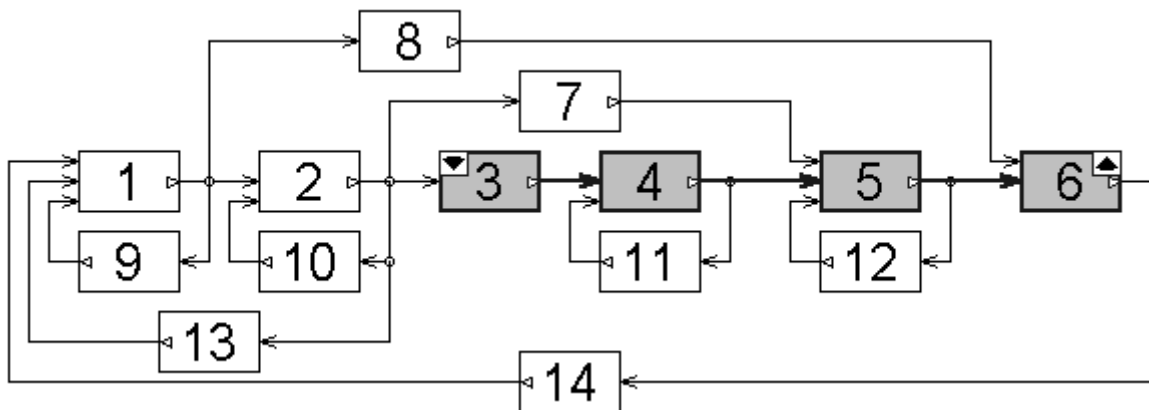


Рис. 8.6

На рис. 8.7 изображен подграф, образующий минор данного пути, который равен:

$$\Delta_{3 \rightarrow 6}^1 = 1 - K_4 - K_5 - K_7 + K_5 K_7 .$$

Таким образом, можем записать:

$$\Phi_{3 \rightarrow 6} = \frac{P_{36}^1 \Delta_{36}^1}{\Delta} ,$$

где все составляющие приведенного выражения получены ранее.

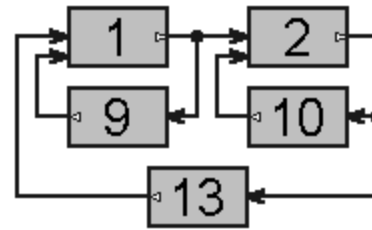


Рис. 8.7

Следует отметить, что если сформировано и сохранено полное выражение для определителя всего графа, то минор любого пути может быть получен из выражения для определителя путем удаления всех слагаемых, содержащих контуры, которых коснулся данный путь.

Список литературы

1. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн.2. Анализ и синтез линейных непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования/ Под ред. В. В. Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1967.
2. Задачник по теории автоматического регулирования/ Ю. И. Топчеев, А. П. Ципляков. М.: Машиностроение, 1977.
3. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем/ Н. Н. Иващенко – Изд. 4-е, перераб. и доп. - М.: Машиностроение, 1978.
4. Теория систем автоматического управления/ В. А. Бесекерский, Е. П. Попов – Изд. 4-е, перераб. и доп. - СПб.: Изд-во «Профессия», 2003.
5. Анализ и синтез систем управления. Теория, методы, примеры решения типовых задач с использованием персонального компьютера/ Д. Х. Имаев, З. Ковальски, Л. Б. Пошехонов, В. Б. Яковлев и др. СПб, Гданьск, Сургут, Томск, 1998.
6. Теория управления/А. А. Алексеев, Д. Х. Имаев, Н. Н. Кузьмин, В. Б. Яковлев. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 1999.
7. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов/ С. Е. Душин, Н. С. Зотов, Д. Х. Имаев и др. Под ред. В. Б. Яковлева – М.: Высш. шк., 2003.
8. Дьяконов В., Круглов В. Математические пакеты расширения MATLAB: Спец. справ. СПб.: Питер, 2001.
9. Гультаев А. Визуальное моделирование в среде MATLAB: Учеб. курс. СПб.: Питер, 2000.
10. Дэбни Дж., Харман Т. Simulink 4. Секреты мастерства/Пер. с англ. М.: БИНОМ, 2003.