Практические занятия по дисциплине «Оптические сенсоры и измерительные системы»

Ход занятия.

В ходе проведения занятия необходимо рассмотреть ряд качественных задач и далее решить несколько расчетных задач по мере возрастания их сложности. Прежде чем приступить к решению задач, необходимо повторить основные понятия и определения.

Пример качественных задач:

1. Что такое когерентные и некогерентные электромагнитные волны?
2. Что представляют собой когерентные источники в опыте Юнга?
3. В максимумах интерференционной картины от двух когерентных источников освещенность в 4 раза превышает освещенность от одного. Нет ли здесь нарушения закона сохранения энергии?

Примеры решения расчетных задач:

Задача 1.

В опыте Юнга два когерентных источника S_1 и S_2 расположены на расстоянии d = 1 мм друг от друга. На расстоянии L = 1 м от источника помещается экран. Найдите расстояние между соседними интерференционными полосами вблизи середины экрана (точка А), если источники посылают свет длины волны λ = 600 нм.

Решение:

Интерференционная картина на экране состоит из чередующихся темных и светлых полос, параллельных щелям S_1 и S_2. Интерференционная картина симметрична относительно центральной полосы, проходящей через точку А (рис. 1). Центральная полоса светлая, она соответствует разности хода $\Delta = 0$.

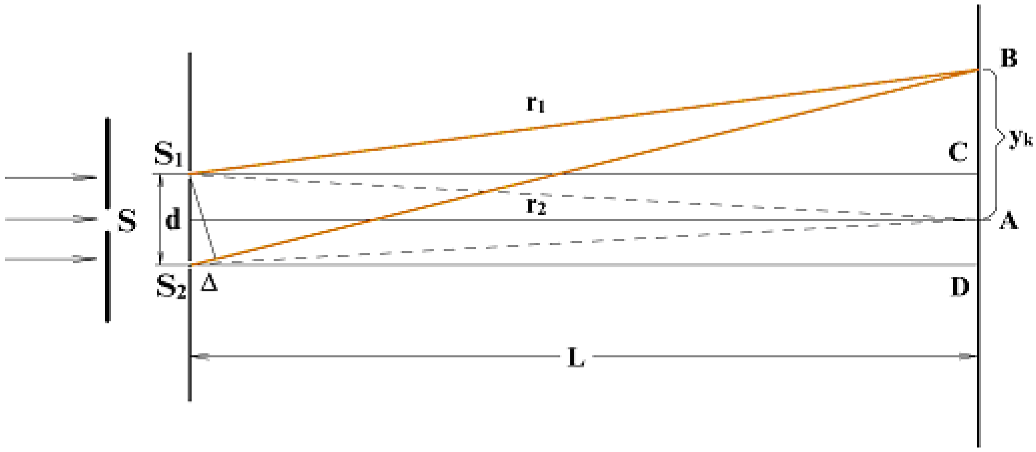

Рис.1

В точках интерференционных максимумов оптическая разность хода

$\Delta = k\lambda$, где k=0, 1, 2,... ; (1)

Условие интерференционных минимумов имеет вид:

$\Delta = k\lambda + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$; (2)

Предположим, что в точке B находится k-й максимум на расстоянии y_kот центральной полосы. Ему соответствует разность хода $\Delta = r_2 - r_1 = k\lambda$.

Из треугольника S_1BC видно, что $r_1^2 = L^2 + \left(y_k - \frac{d}{2}\right)^2$, а из треугольника S_2BD видно, что $r_2^2 = L^2 + \left(y_k + \frac{d}{2}\right)^2$.

Из двух последних уравнений получим:

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = \left(y_k + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(y_k - \frac{d}{2}\right)^2.$$

Учтём , что $r_2 \approx r_1 \approx L$; $r_2 - r_1 = \Delta$. Тогда $2L \cdot \Delta = 2y_k \cdot d$, откуда:

$$y_k = \frac{\Delta}{d} \cdot L$$; (3)

Используя для максимумов условие (1), получим:

$$y_{k_{max}} = \frac{k\lambda}{d} \cdot L$$;

где k = 1, 2, 3, … соответствуют интерференционным максимумам, расположенным выше точки А, а максимумам, расположенным ниже точки А, соответствуют k = -1, -2, -3, … Точке А соответствует центральный максимум (k = 0).

Используя условие интерференционных минимумов (2), можно найти их расстояния от центральной полосы по формуле (3):

$$y_{k_{min}} = (2k+1)\frac{\lambda L}{2d}$$;

Расстояние между соседними интерференционными максимумами (минимумами) называется шириной полосы и соответствует изменению k на единицу, то есть :

$$\Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{\lambda L}{d} = 0.6\,мм$$;

Ширина темных и светлых полос одинакова.

Ответ:

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{d} = 0.6\,мм$$;

Задача 2.

В опыте Юнга интерференционная картина по мере удаления от середины размывается, и при k = 4 полосы исчезают. Почему?

Решение:

В опыте Юнга интерференционная картина представляет чередование интерференционных максимумов и минимумов в виде полос, параллельных щелям S_1 и S_2. В центре интерференционной картины расположена светлая полоса (k = 0). По обе стороны от центральной полосы расположены максимумы ±1, ±2, ±3, ±4 порядков интерференции. Разность хода между интерферирующими волнами по мере удаления от центральной полосы увеличивается. При этом по мере удаления от центра ухудшается видность и четкость интерференционной картины, полосы размываются и исчезают, по условию последний максимум наблюдается при k = 4. Исчезновение полос означает, что колебания, пришедшие от двух источников S_1 и S_2, некогерентны. Пока их разность хода не превышала 4 λ, они были когерентны. Следовательно, максимальная разность хода, при которой наблюдается интерференция, будет равна:

$$\ell_{\text{ког}} = m_{max}\lambda = 4\lambda;$$

Величина $\ell_{\text{ког}}$ называется длиной когерентности. Если оптическая разность хода превышает длину когерентности, интерференционная картина не наблюдается.

Задача 3.

Покажите, что при преломлении в призме с малым преломляющим углом α и показателем преломления n луч отклоняется на угол $\delta \approx (n - 1)\alpha$ независимо от угла падения, если угол падения также мал. Призма находится в воздухе, $n_0 = 1$.

Решение:

По построению δ-внешний угол треугольника DCB (рис. 2), он равен сумме внутренних углов, не смежных с ним:

$\delta = \varphi - \beta + \beta_1 - \varphi_1$;

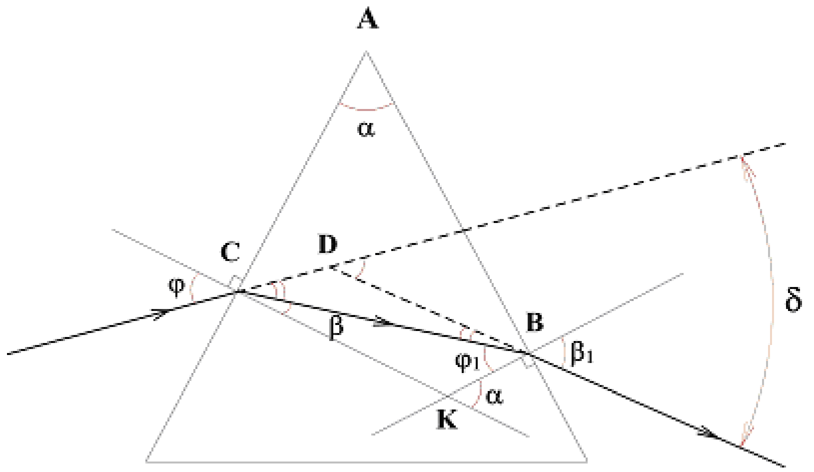

Рис.2

Согласно закону преломления,

$$n = \frac{\sin\varphi}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\varphi_1}.$$

По условию угол φ, а значит и β малы, то есть $\sin\varphi \approx \varphi$, $\sin\beta \approx \beta$, (выраженному в радианах), тогда $n\beta = \varphi$, $n\varphi_1 = \beta_1$. Подставив значения φ и β_1 в формулу для δ, получим :

$$\delta = \varphi - \beta + \beta_1 - \varphi_1 = n\beta - \beta + n\varphi_1 - \varphi_1 = (n-1)(\beta + \varphi_1).$$

Из треугольника СВК: $\beta+\varphi_1=\alpha$ (α- внешний угол, равный преломляющему углу призмы по построению). Таким образом,

$$\delta \approx \alpha(n-1).$$

Задача 4.

Найдите число полос интерференции N, получающихся с помощью бипризмы, если показатель преломления бипризмы n = 1,5, преломляющий угол $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ рад, длина волны источника λ=600 нм. Расстояние от источника до бипризмы равно а = 1 м, расстояние от бипризмы до экрана равно b = 4 м.

Решение:

Лучи от источника S, падающие на бипризму, после преломления отклоняются от первоначального направления на угол $\delta \approx \alpha(n-1)$ (см. Задача 3). Продолжение этих лучей до точки пересечения дает изображение двух мнимых источников S_1 и S_2 (рис. 3). Они являются когерентными источниками, поэтому в области перекрытия AB когерентных волн, распространяющихся от этих источников, на экране наблюдается интерференционная картина в виде чередующихся темных и светлых полос, как и в опыте Юнга. Центральный максимум интерференционной картины (k = 0) проходит через точку O экрана. Максимумы более высоких порядков находятся на расстоянии y_k от центра (см. Задача 1).

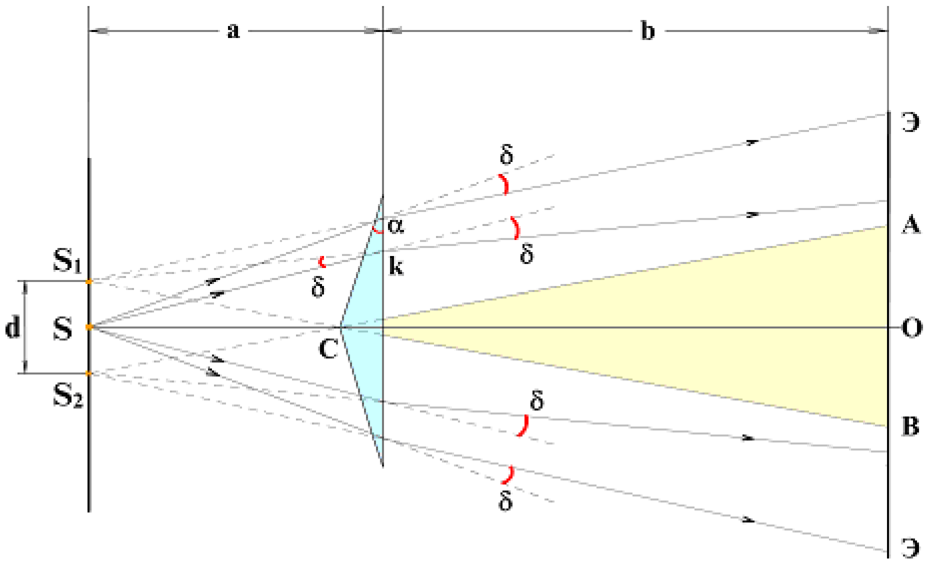

Рис.3

Ширина полосы :

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{d}.$$

Здесь $L=a+b$ расстояние от источников до экрана, d - расстояние между мнимыми источниками. Из треугольника SS_1K:

$$S_1S = d/2 \approx a \cdot \delta \approx a \cdot \alpha(n-1),\ \ d \approx 2 \cdot a \cdot \alpha(n-1).$$

Тогда ширина интерференционной полосы:

$$\Delta y = \frac{\lambda \cdot (a+b)}{2a \cdot \alpha(n-1)}.$$

Число интерференционных полос в области интерференции *AB* равно:

$$N = \frac{AB}{\Delta y}.$$

Величину области перекрытия *AB* найдем из подобных треугольников CS_1S и *COB*:

$$AB = \frac{b \cdot d}{a} = 2b \cdot \alpha(n-1).$$

Число наблюдаемых полос интерференции будет равно:

$$N = \frac{4ab\alpha^2(n-1)^2}{\lambda(a+b)} \approx 5.$$

Ответ: $N = \dfrac{4ab\alpha^2(n-1)^2}{\lambda(a+b)} \approx 5$.

Задача 5.

В опыте Ллойда (рис. 4) световая волна, исходящая непосредственно из источника *S* (узкой щели), интерферирует с волной, отраженной от зеркала 3. В результате на экране Э образуется система интерференционных полос. Расстояние от источника до экрана *L* = 100 см. При некотором положении источника ширина интерференционной полосы на экране Δy = 0,25 мм, а после того как источник отодвинули от плоскости зеркала на h = 0,6 мм, ширина полос уменьшилась в η= 1,5 раза. Найдите длину λ световой волны.

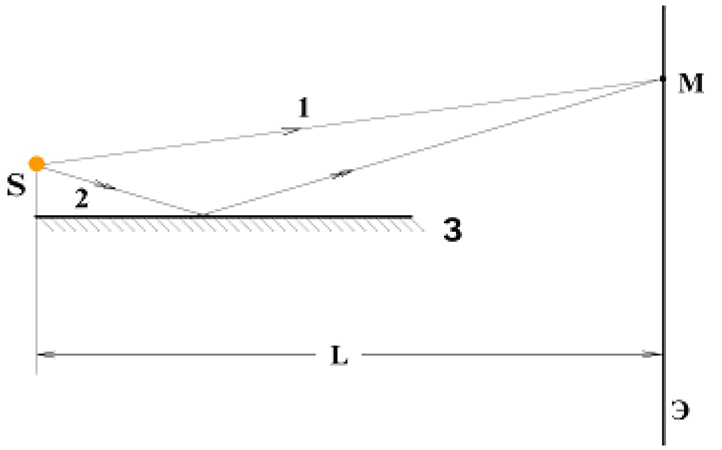

Рис.4

Решение: В точке *M* интерферируют две когерентные волны 1 и 2, исходящие из источника *S*. По построению волну 2 можно считать исходящей из источника , S', являющегося мнимым изображением источника *S* в зеркале 3. Они симметрично расположены относительно плоскости зеркала, обозначим расстояние между ними $SS' = d$. Если зеркало *S* отодвинуть на *h*, то новое расстояние между $S_1 S_1'$ равно $d_1 = d + 2h$ (рис. 5). Для определения длины волны λ используем выражение для ширины полосы из опыта Юнга, применив его для двух расстояний между источниками.

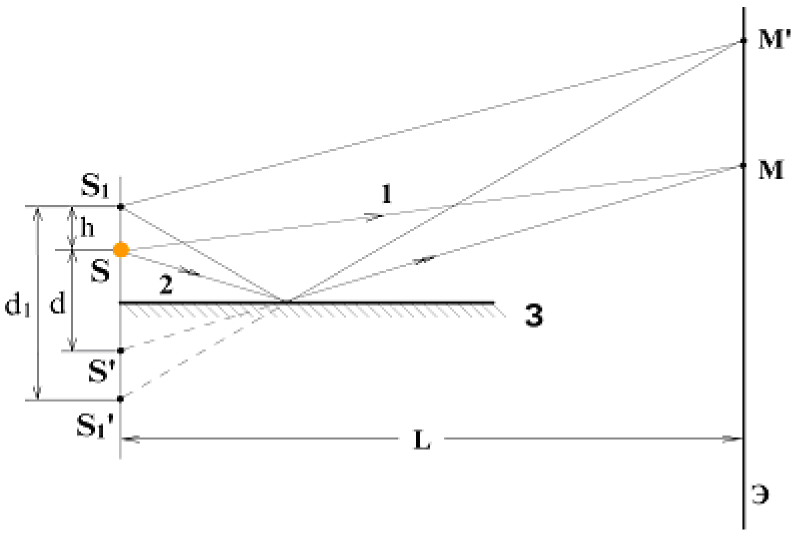

Рис.5

Δ y = λL / d; (4).

$$\Delta y_1 = \frac{\lambda L}{d_1} = \frac{\lambda L}{d + 2h}$$; (5).

По условию Δ y = η Δ y_1, тогда $\frac{\lambda L}{d} = \eta \frac{\lambda L}{d + 2h}$. Выразим от сюда

$$d = \frac{2h}{\eta - 1}$$; (6)

Подстановка (6) в (4) дает:

$$\lambda = \frac{2h\Delta y}{L(\eta - 1)} = 6 \cdot 10^{-7}\,м = 600нм$$;

Ответ: $\lambda = \frac{2h\Delta y}{L(\eta - 1)} = 600нм$.

Задача 6.

На рис. 6 показана схема интерферометра для измерения показателей преломления прозрачных веществ. Здесь *S* - узкая щель, освещаемая монохроматическим светом λ = 589 нм, *К* - коллиматор, дающий параллельный пучок лучей, 1 и 2 - две одинаковые трубки с воздухом, длина каждой из которых $\ell = 10{,}0$ см, Д - диафрагма с двумя щелями S_1 и S_2 . Когда воздух в трубке 1 заменили аммиаком, то интерференционная картина на экране Э сместилась вверх на N = 17 полос. Показатель преломления воздуха n = 1,000277. Определите показатель преломления аммиака.

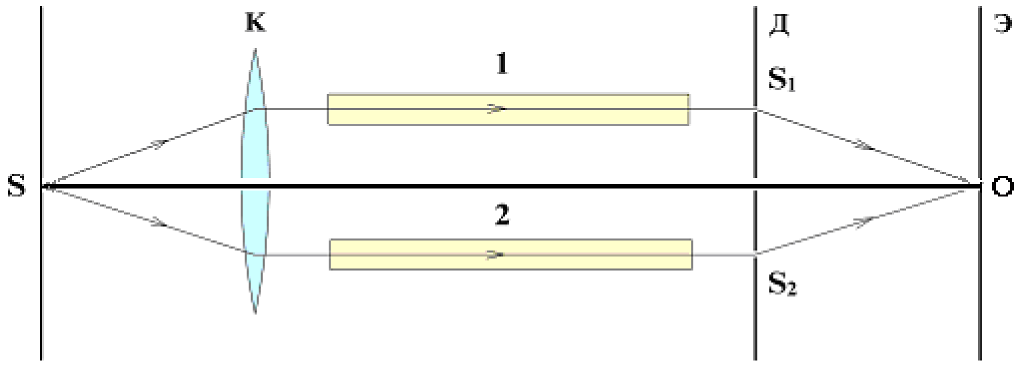

Рис.6

Решение: Волны, распространяющиеся от щелей S_1 и S_2, являются когерентными. На экране Э наблюдается интерференционная картина чередующихся темных и светлых полос. Центральная светлая полоса проходит через точку *О* и соответствует оптической разности хода Δ = 0, если трубки 1 и 2 заполнены воздухом. Если в трубке 1 воздух заменить аммиаком, показатель преломления n_1 которого больше n, то центр интерференционной картины сместится вверх на N полос в точку, соответствующую разности хода, равной нулю, то есть

$$(n_1 - n)\ell = N\lambda .$$

Отсюда

$$n_1 = N\frac{\lambda}{\ell} + n = 1{,}000377 .$$

Заметим, что интерференционный метод определения показателя преломления является высокоточным методом.

Ответ: $n_1 = N\dfrac{\lambda}{\ell} + n = 1{,}000377$.

Задача 7.

Собирающая линза с фокусным расстоянием F = 10 см разрезана пополам и половинки раздвинуты на расстояние d = 0,5 мм (билинза Бийе). Оцените число интерференционных полос на экране, расположенном за линзой на расстоянии D = 60 см, если перед линзой имеется точечный источник монохроматического света с длиной волны λ= 500 нм, удаленный от нее на расстояние a = 15 см.

Решение:

Каждая из половинок билинзы Бийе дает изображение источника S. Верхняя половина дает изображение S_1, нижняя дает изображение S_2 (рис. 7). Чтобы получить изображение S_1, выберем два луча: первый луч SC после преломления в линзе пересечет фокальную плоскость PP в точке K, получившейся от пересечения с фокальной плоскостью побочной оптической оси O_1O_1, параллельной лучу SC. Второй луч SA проходит, не преломляясь, через точку A до пересечения с первым лучом в точке S_1, являющейся изображением S в верхней половине билинзы Бийе. Аналогично построим изображение S_2.

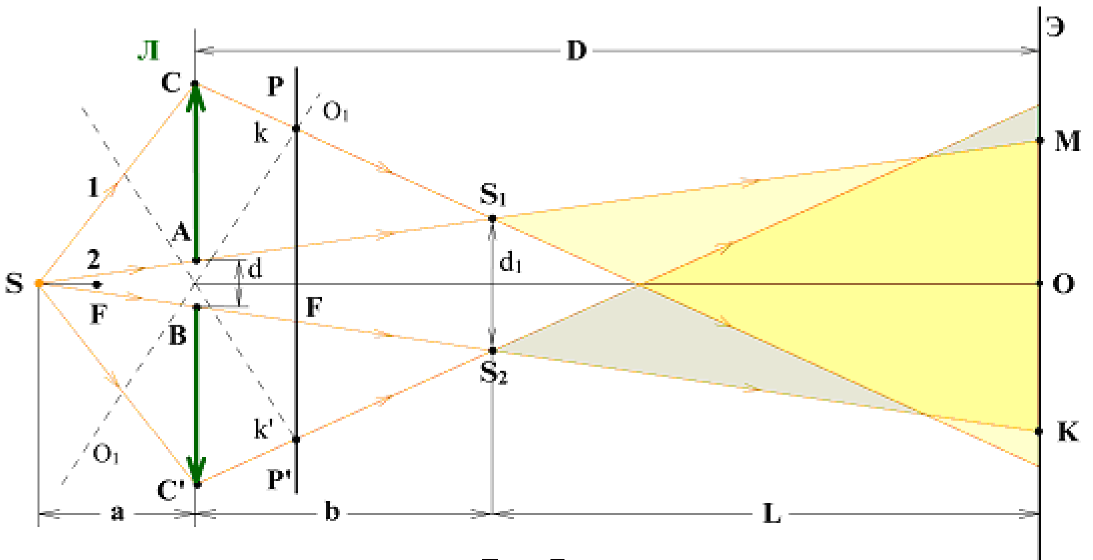

Рис.7

Источники S_1 и S_2 когерентны, поэтому в области пересечения световых волн от этих источников на экране получим интерференционную картину как в опыте Юнга.

Число полос на экране будет равно :

$$N = \frac{MK}{\Delta y}.$$

Ширина полосы $\Delta y = \frac{\lambda \cdot L}{d_1}$ (см. Задача 1) ,), где $L = D - b$. Величину b найдем из формулы линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$, откуда $b = \frac{F \cdot a}{a - F}$, где a - расстояние от источника S до линзы, b - расстояние от линзы до изображения S_1, F - фокусное расстояние линзы.

Из подобия треугольников SAB и SS_1S_2 получим:

$$\frac{d_1}{d} = \frac{a + b}{a} = \frac{a + \frac{Fa}{a - F}}{a}$$

откуда $d_1 = \frac{d \cdot a}{a - F}$.

Подставляя d_1 и L в формулу для Δy, получим:

$$\Delta y = \frac{\lambda}{d \cdot a}\left(D \cdot a - D \cdot F - a \cdot F\right).$$

Треугольники SAB и SMK подобны, отсюда величина области перекрытия волн

$$MK = \frac{d}{a} \cdot (a + D).$$

Тогда число наблюдаемых полос

$$N = \frac{MK}{\Delta y} = \frac{d^2(a + D)}{\lambda(Da - DF - aF)} = 25.$$

Ответ: $N = \frac{d^2(a + D)}{\lambda(Da - DF - aF)} = 25$.