

# АНАЛИЗ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ ДЛЯ УЗЛА СЕТИ ТИПА G/D/1 ПРИ НЕТОЧНОМ ЗНАНИИ ПАРАМЕТРОВ ТРАФИКА

М. А. Буранова<sup>1\*</sup>, В. Г. Карташевский<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики,  
Самара, 443010, Российская Федерация

\* Адрес для переписки: [mburanova@yandex.ru](mailto:mburanova@yandex.ru)

## Аннотация

В работе рассматривается метод определения среднего времени ожидания заявки в очереди в случае, когда параметры обрабатываемого трафика известны неточно. Метод основан на интервальном подходе, в котором неопределенность знания относительно параметров трафика характеризуется равной вероятностью любого значения параметра из заданного интервала его изменения. Анализ дан для случая, когда неизвестный параметр относится к гамма-распределению, которое характеризует случайные интервалы времени между поступлениями заявок на вход узла сети. Время обработки заявок предполагается постоянным.

## Ключевые слова

среднее время ожидания в очереди, интервальный метод, уравнение Линдли, программа ns2.

## Информация о статье

УДК 004.7: 621.39

Язык статьи – русский.

Поступила в редакцию 29.01.17, принята к печати 28.02.17.

**Ссылка для цитирования:** Буранова М. А., Карташевский В. Г. Анализ времени ожидания для узла сети типа G/D/1 при неточном знании параметров трафика // Информационные технологии и телекоммуникации. 2017. Том 5. № 1. С. 24–33.

# THE ANALYSIS OF THE LATENCY PERIOD FOR KNOT OF NETWORK OF THE G/D/1 TYPE AT INACCURATE KNOWLEDGE OF PARAMETERS OF THE TRAFFIC

M. Buranova<sup>1\*</sup>, V. Kartashevskiy<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Povolzhskiy state university of telecommunication and informatics,  
Samara, 443010, Russian Federation

\* Corresponding author: mburanova@yandex.ru

**Abstract**—A method for determining the average wait time of an application in a queue is considered in the case when the parameters of the processed traffic are known inaccurately. The method is based on the interval approach, in which the uncertainty of knowledge relative to traffic parameters is characterized by the equal probability of any parameter value from a given interval of its change. The analysis is given for the case when the unknown parameter belongs to the gamma distribution, which characterizes the random time intervals between the receipts of requests for the input of the node of the network.

**Keywords**—average waiting time in queue, interval method, Lindley equation, ns2 program.

## Article info

Article in Russian.

Received 29.01.17, accepted 28.02.17.

**For citation:** Buranova M., Kartashevskiy V.: The Analysis of the Latency Period for Knot of Network of the G/D/1 Type at Inaccurate Knowledge of Parameters of the Traffic // Telecom IT. 2017. Vol. 5. Iss. 1. pp. 24–33 (in Russian).

## Введение

На практике очень часто возникает ситуация, когда статистические параметры обрабатываемого в сетевом узле трафика известны неточно. Если известны границы изменения параметра, то, ориентируясь на случай полной неопределенности знания относительно конкретного значения параметра, можно использовать так называемый «интервальный подход», позволяющий решать задачу анализа работы узла сети, как устройства массового обслуживания.

## Работа узла сети типа G/D/1

Будем рассматривать работу узла сети, представляемого моделью G/D/1, считая постоянной длительность обслуживания каждой заявки, что характерно для сетей с реализацией протоколов криптографической защиты сообщений.

Известно [1], что трафик современных сетей обладает самоподобными свойствами, что характеризуется ярко выраженными корреляционными связями временных параметров трафика и распределениями с «тяжелыми» хвостами для мгновенных значений параметров. Если такие временные параметры как интервалы времени между заявками на обслуживание и интервалы времени обслуживания заявок независимы, то анализ работы узла сети можно провести методами

классической теории массового обслуживания, определяя среднее время ожидания заявки в очереди из решения интегрального уравнения Линдли [2, 3]. Необходимая информация для решения интегрального уравнения Линдли – это одномерные плотности вероятностей интервалов времени между заявками и интервалов времени обслуживания заявок. Для рассматриваемой системы G/D/1 предполагается, что для некоторого параметра плотности вероятностей интервалов времени между заявками известен лишь интервал его изменения.

В работах [4, 5] для данной ситуации предлагается интервальный подход, при котором предполагается, что все значения параметра из возможного интервала равновероятны.

Рассмотрим систему G/D/1, которую обозначим как  $\Gamma/D/1$ , имея в виду, что  $\Gamma$  означает гамма-распределение. При этом запишем соответствующие распределения в виде:

$$f_{\Gamma}(x) = x^{z-1} e^{-\frac{x}{\theta}} \frac{1}{\theta^z \Gamma(z)}, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

$$f_D(x) = \delta(x - x_0), \quad x_0 > 0, \quad (2)$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция;  $z > 0, \theta > 0$  – параметры распределения;  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция, которая характеризует плотность вероятностей постоянного времени обслуживания  $x_0$ . В дальнейшем, не теряя общности, считаем  $\theta = 2$ .

В силу того, что среднее и дисперсия гамма-распределения определяются как  $m = z\theta$  и  $\sigma^2 = z\theta^2$ , для коэффициента вариации можно записать:

$$c = \frac{\sigma}{m} = \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad (3)$$

из чего следует, что значение  $c > 1$ , характеризующее наличие «тяжелого» хвоста у распределения, может быть реализовано только при  $z < 1$ .

Будем полагать, что значение  $z$  известно неточно в некоторых границах  $[a, b]$ , например,  $a = 0,2$  и  $b = 0,8$ . Наибольшая неопределенность знания относительно значения  $z$  будет характеризоваться равномерной плотностью вероятности  $f(z) = \frac{1}{b-a}$ . Поэтому безусловная (независящая от конкретного значения  $z$ ) плотность вероятности для гамма-распределения  $f_{\Gamma^*}(x)$  будет иметь вид:

$$f_{\Gamma^*}(x) = \int_a^b f_{\Gamma}(x) f(z) dz = \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b \left(\frac{x}{2}\right)^{z-1} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{\Gamma(z)} dz. \quad (4)$$

Учитывая, что на интервале  $0 < z < 1$   $\frac{1}{\Gamma(z)} \approx z$  и интегрируя по частям с использованием стандартного интеграла  $\int t^x dx = \frac{t^x}{\ln t}$ , имеем:

$$f_{\Gamma^*}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2(b-a)} \left[ \frac{1}{\ln \frac{x}{2}} \left( b \left(\frac{x}{2}\right)^b - a \left(\frac{x}{2}\right)^a \right) - \frac{1}{\left(\ln \frac{x}{2}\right)^2} \left( \left(\frac{x}{2}\right)^b - \left(\frac{x}{2}\right)^a \right) \right]. \quad (5)$$

График  $f_{\Gamma^*}(x)$  для значений  $a = 0,2$  и  $b = 0,8$  приведен на рис. 1.

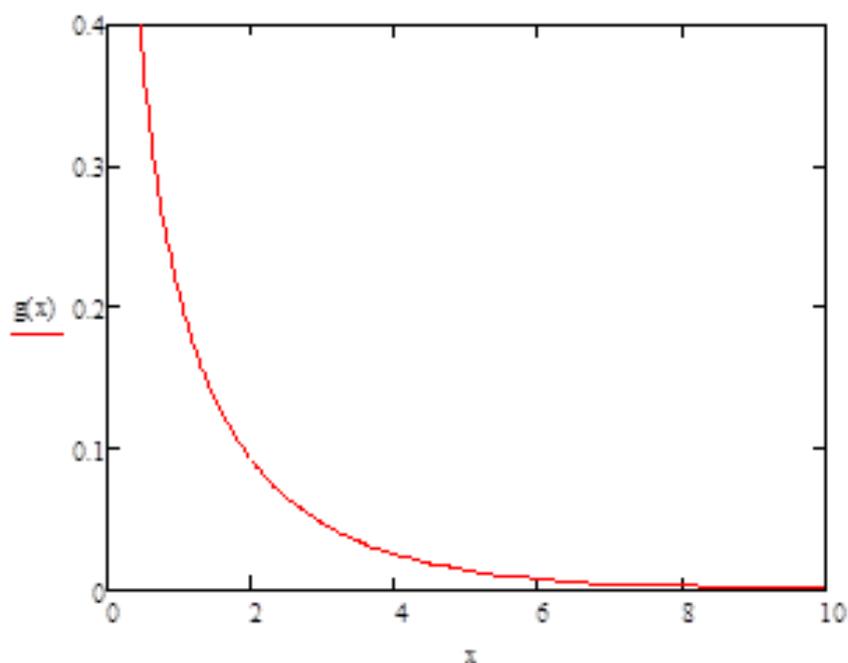


Рис. 1. Распределение  $g(x) = f_{\Gamma^*}(x)$

Исследование системы Г/D/1 связано с решением уравнения Линдли спектральным методом, для реализации которого требуется найти преобразование Лапласа плотностей  $f_{\Gamma^*}(x)$  и  $f_D(x)$ , обозначаемых соответственно  $A(s)$  и  $B(s)$ , где  $s$  – комплексная переменная. Следующим шагом необходимо найти некоторые функции  $\Psi_+(s)$  и  $\Psi_-(s)$ , удовлетворяющие соотношению

$$\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} = A(-s)B(s) - 1 \quad (6)$$

и условиям:

1) функция  $\Psi_+(s)$  является аналитической без нулей в области  $\text{Re}(s) > 0$ , где  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\Psi_+(s)}{s} = 1$ ;

2) функция  $\Psi_-(s)$  является аналитической без нулей в области  $\text{Re}(s) < D$  при некотором  $D > 0$ , и  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\Psi_-(s)}{s} = -1$ .

Найти функции  $\Psi_+(s)$  и  $\Psi_-(s)$ , удовлетворяющие данным условиям, достаточно несложно, если отношение (6) можно представить дробно-рациональной функцией. Одна из возможностей реализации такого представления возникает в случае, когда плотности, характеризующие систему G/G/1, представляются аппроксимируемыми рядами затухающих экспонент. Примеры процедур, позволяющих получить такие аппроксимации, приведены в работах [6, 7, 8].

Здесь воспользуемся непосредственным вычислением  $A(s)$  и  $B(s)$ . Для вычисления преобразования Лапласа  $A(s) = \int_0^{\infty} f_{\Gamma^*}(x)e^{-sx} dx$  воспользуемся интегральным представлением плотности согласно (4) и изменим порядок вычисления интегралов:

$$A(s) = \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{z-1} e^{-\frac{x}{2}} e^{-sx}}{\Gamma(z)} dx dz. \quad (7)$$

С использованием стандартного интеграла [10]

$$\int_0^{\infty} t^{\nu-1} e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\mu^{\nu}} \Gamma(\nu), \quad \operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0,$$

из (7) можно получить:

$$A(s) = 1 - \frac{b+a}{2} \ln(1+2s). \quad (8)$$

Так как  $B(s) = e^{-sx_0}$ , то выражение (6) можно переписать в виде:

$$\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} = \left[ 1 - \frac{b+a}{2} \ln(1-2s) \right] e^{-sx_0} - 1. \quad (9)$$

Из (9) следует, что, во-первых, уравнение в правой части нелинейное, и во-вторых, выделить функции  $\Psi_+(s)$  и  $\Psi_-(s)$ , удовлетворяющие вышеприведенным условиям, из уравнения (9) практически невозможно. Для приближенного решения можно линеаризовать уравнение (9), разлагая в ряд экспоненту и логарифм, присутствующие в уравнении. Возможность такого разложения допускалась в [3], однако ошибка оценивания среднего времени ожидания заявки в очереди при этом не может быть определена.

Ограничившись тремя членами ряда для экспоненты и двумя членами для логарифма, можно записать:

$$e^{sx_0} \approx 1 + sx_0 + \frac{(sx_0)^2}{2} + \dots,$$

$$\ln t \approx 2 \left[ \frac{t-1}{t+1} + \frac{(t-1)^3}{3(t+1)^3} + \dots \right], \quad (10)$$

где  $t = 1 - 2s$ .

Теперь, подставляя выражения (10) в (9), получаем:

$$\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} = \frac{3x_0s^2(1-s)^3 + 6x_0s(1-s)^3 - 4ks^3 - 12ks(1-s)^2}{6(s-1)^3 \left( 1 + sx_0 + \frac{(sx_0)^2}{2} \right)}, \quad (11)$$

где  $k = \frac{a+b}{2}$ .

Выражение (11) позволяет однозначно разделить функции  $\Psi_+(s)$  и  $\Psi_-(s)$  в соответствии с обозначенными выше условиями.

Функция  $\Psi_+(s)$  играет ключевую роль в определении среднего времени ожидания заявки в очереди, т. к. через неё выражается преобразование Лапласа  $f(s)$  плотности вероятностей (характеристической функции) искомого времени ожидания. В [2] показано, что  $f(s)$  определяется в виде:

$$f(s) = \frac{s}{\Psi_+(s)} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi_+(s)}{s}. \quad (12)$$

При известной  $f(s)$  среднее время ожидания заявки в очереди может быть определено согласно формуле:

$$T_{cp} = \left. \frac{df(s)}{ds} \right|_{s=0}.$$

Расчеты показывают, что для рассматриваемого примера при выбранных параметрах  $a = 0,2$ ;  $b = 0,8$ ;  $x_0 = 200$  (время, соответствующее обработке заявки, размером 200 байт) среднее время ожидания заявки в очереди составляет  $T_{cp} = 2,67$  (условных единиц времени).

Для оценки достоверности результатов, полученных при использовании приближенного определения спектральных функций  $\Psi_+(s)$  и  $\Psi_-(s)$ , было проведено моделирование работы узла сети с использованием гамма-распределения с параметром  $z = 0,5$ .

Моделирование рассматриваемой системы Г/D/1 реализовано в программе ns2 согласно схеме, изображенной на рис. 2.

В программе ns2 задается поток с гамма-распределением интервалов времени между пакетами, длины пакетов задаются фиксированной длины размером 200 байт. В качестве модуля транспортного уровня выбран модуль UDP.

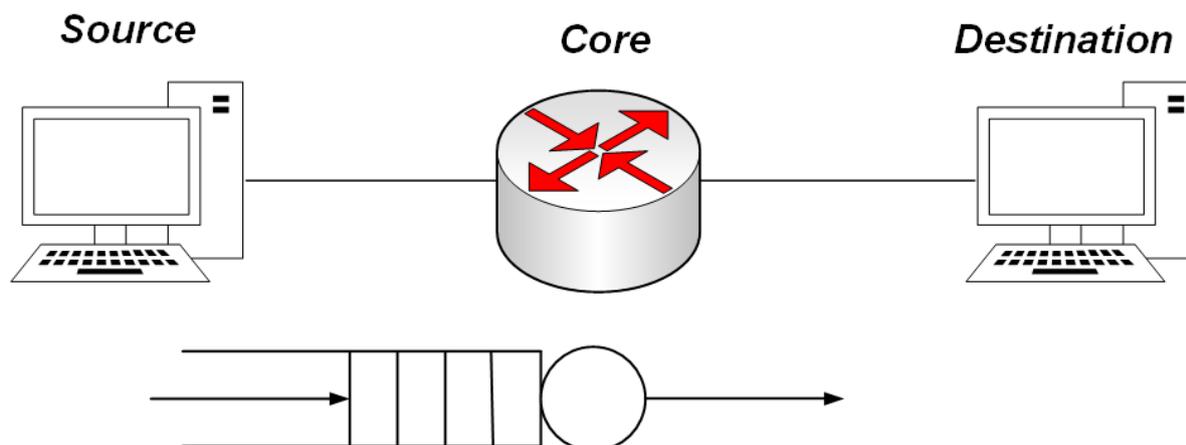


Рис. 2. Схема моделирования в ns2

Наблюдение за поведением очереди в процессе моделирования, оценку размеров очереди и задержки заявки в очереди в ns2 можно реализовать с использованием следующих стандартных команд:

```
# queue monitoring
set qmon [$ns monitor-queue $n0 $n1 [open pw.out w] 0.01]
$link1 queue-sample-timeout

proc finish {} {
    global ns tf nf
    $ns flush-trace
    close $tf
    close $nf
    exit 0
}

proc sendpacket {} {
    global ns src InterArrivalTime pktSize
    set time [$ns now]
    $ns at [expr $time + [$InterArrivalTime value]] "sendpacket"
    set bytes [expr round ([$pktSize value])]
    $src send $bytes
}
```

Получаемый в процессе моделирования текстовый файл позволяет получить искомые значения параметров работы узла сети, определяющих качество обслуживания. К примеру, изменение очереди во времени, как реализация случайного процесса, представлено на рис 3.

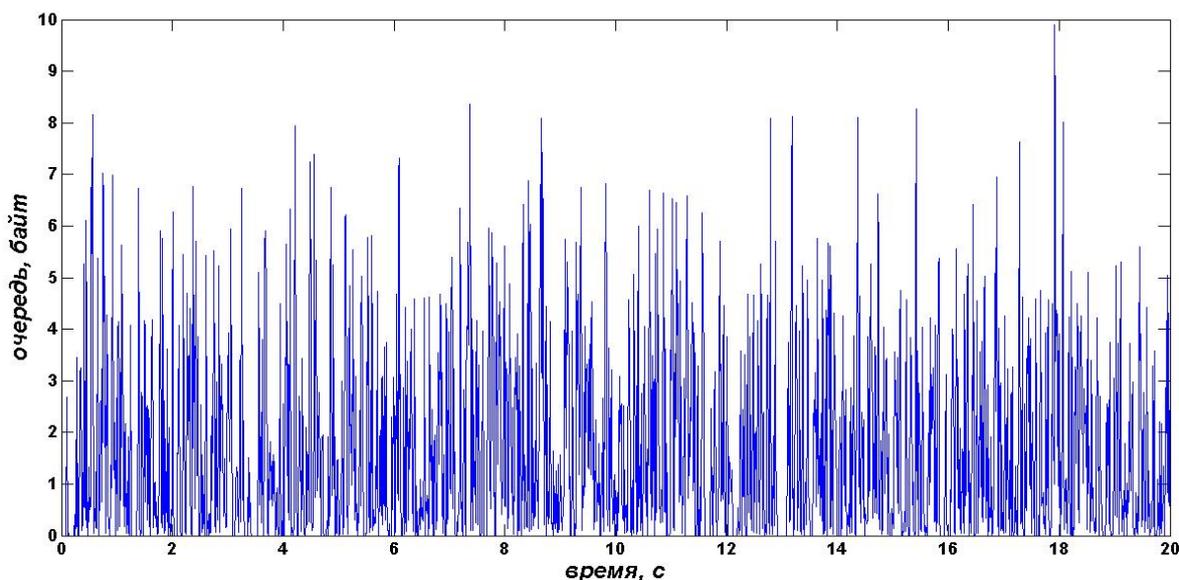


Рис. 3. Изменение размера очереди в процессе моделирования системы Г/Д/1

Анализ представленной на рис. 3 реализации дал среднее значение задержки в очереди, равное 0,005 с.

Если отождествить используемые выше «условные единицы времени» с секундами, то можно констатировать двукратное различие абсолютных значений средней задержки заявки в очереди. Сами же абсолютные значения задержки, полученные из модельного эксперимента и аналитического расчета, указывают на допустимость такого сравнения, т. к., во-первых, характеристическая функция времени ожидания в очереди (выражение (12)) получена приближенно без оценки ошибки приближения, во-вторых, моделирование проведено для фиксированного значения параметра гамма-распределения  $z = 0,5$  и, наконец, в-третьих, нельзя не учитывать определенные неточности, характерные для любой моделирующей системы, в том числе и для ns2.

### Заключение

Итак, задача анализа характеристик сетевого узла, моделируемого системой массового обслуживания общего вида, при неопределенности знания о конкретных значениях вероятностно-временных параметров узла может быть решена на основе интервального подхода.

При использовании безусловного распределения интервалов времени между заявками, преобразование Лапласа которого не выражается дробно-рациональными функциями, для преодоления вычислительных сложностей и повышения точности оценивания целесообразно при решении уравнения Линдли спектральным методом использовать аппроксимацию безусловной плотности рядами затухающих экспонент [7, 8] вместо разложения спектральных функций в ряды на комплексной плотности.

### Литература

1. Шелухин О. И., Тенякшев А. М., Осин А. В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях / Под ред. О. И. Шелухина. М.: Радиотехника, 2003, 480 с.

2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания: пер. с англ. / Под ред. В. И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
3. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями: пер. с англ. / Под ред. Б. С. Цыбакова. М.: Мир, 1979. 600 с.
4. Гончаренко В. А. Анализ реактивности узла вычислительной сети в условиях интервальной неопределенности // Изв. Вузов. Приборостроение. 2008. Т. 51, № 7. С. 34–39.
5. Кузнецов В. П. Интервальные статистические модели. М.: Радио и связь, 1991. 352 с.
6. Грешилов А. А. Некорректные задачи цифровой обработки информации и сигналов. М.: Радио и связь, 1984. 160 с.
7. Блатов И. А., Карташевский В. Г., Киреева Н. В., Чупахина Л. Р. Метод аппроксимации произвольной плотности распределения суммами экспонент // Вестник ВГУ. 2013. № 2. С. 53–57.
8. Блатов И. А., Карташевский В. Г., Киреева Н. В., Чупахина Л. Р. Решение уравнения Линдли спектральным методом для систем массового обслуживания общего вида // Электросвязь. 2014. № 11. С. 48–50.
9. Справочник по специальным функциям / Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган / Пер. с англ. под ред. В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. М.: Наука, 1979. 832 с.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

### References

1. Sheluhin, O. I., Tenyakshev, A. M., Osin, A. V. Fractal Processes in Telecommunications. M.: Radiotekhnika, 2003, 480 p.
2. Kleinrock Leonard. Queueing Systems. Volume I: Theory. New York, Wiley Interscience, 1975, 417 p.
3. Kleinrock Leonard. Queueing Systems. Volume II: Computer applications. A Wiley-Interscience Publication, 1976, 600 p.
4. Gontcharenko, V. A. Analysis of reactivity of a node in a computer network under conditions of interval uncertainty // Izvestia Vuzov. Priborostroenie. 2008. V. 51, № 7. pp. 34–39.
5. Kuznetsov, V. P. Interval statistical models. M.: Radio i Sviaz, 1991. 352 p.
6. Greshilov, A. A. Incorrect tasks of digital processing of information and signals. M.: Radio i Sviaz, 1984. 160p.
7. Blatov, I. A., Kartashevskiy, V. G., Kireeva, N. V., Chupakhina, L. R. The method of approximating an arbitrary density distribution of the sum of exponents [Metod approksimacii proizvolnoi plotnosti raspredeleniya summami eksponent] // Vestnik VGU. 2013. No. 2. pp. 53–57.
8. Blatov, I. A., Kartashevskiy, V. G., Kireeva, N. V., Chupakhina, L. R. Solution of the Lindley equation by the spectral method for general-purpose queueing systems // Elektrosviaz. 2014. No. 11. pp. 48–50.
9. Handbook of Mathematical Functions / Edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series-55, 1964, 832 p.
10. Gradshteyn, I. S., Ridzik, I. M. Tables of integrals, sums, series and products. M.: Nauka, 1971. 1108 p.

***Буранова Марина Анатольевна***

– кандидат технических наук, доцент, ПГУТИ,  
Самара, 443010, Российская Федерация,  
mburanova@yandex.ru

***Карташевский Вячеслав Григорьевич***

– доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой, ПГУТИ, 443010,  
Российская Федерация, kartash@psati.ru

***Buranova Marina***

– Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, PSUTI, Samara, 443010, Russian Federation, mburanova@yandex.ru

***Kartashevskiy Vyacheslav***

– Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of the Department, PSUTI, Samara, 443010, Russian Federation, kartash@psati.ru