



ФУНКЦИЯ ГРИНА В КОНТЕКСТЕ ОБРАБОТКИ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Ю. Ф. Болтов¹

¹ СПбГУТ, Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация
Адрес для переписки: ufb@edwer.spb.ru

Информация о статье

УДК 004.932

Язык статьи – русский.

Поступила в редакцию 31.03.16, принята к печати 29.04.16.

Ссылка для цитирования: Болтов Ю. Ф. Функция Грина в контексте обработки цифровых изображений // Информационные технологии и телекоммуникации. 2016. Том 4. № 2. С. 64–76.

Аннотация

Предмет исследования. Исследуется возможность представления цифровых изображений скалярными полями. **Метод.** Методом исследования является использование математической физики уравнений. **Основные результаты.** Применение функции Грина для обработки цифровых изображений. **Практическая значимость** заключается в повышении качества обработки цифровых изображений.

Ключевые слова

функция Грина, изображение, поле особых точек, скалярное поле, функция Дирака.

GREEN'S FUNCTION IN CONTEST OF PROCESSING DIGITAL IMAGE

Y. Boltov¹

¹ SPbSUT, St. Petersburg, 193232, Russian Federation
Corresponding author: ufb@edwer.spb.ru

Article info

Article in Russian.

Received 31.03.16, accepted 29.04.16.

For citation: Boltov Y.: Green's Function in Contest of Processing Digital Image // Telecom IT. 2016. Vol. 4. Iss. 2. pp. 64–76 (in Russian).



Abstract

Research subject. The possibility of presenting digital images scalar fields. **Method.** The method of research is the use of mathematical physics equations. **Core results.** The use of green's functions for processing digital images. **Practical relevance.** The practical significance is to improve the quality of the digital image processing.

Keywords

Green's function, image, scalar field, field of singular points, the Dirac's function.

Введение

В качестве основной модели для применения функции Грина при обработке изображений предлагается использовать двухмерный Лапласиан, в правой части которого имеется производная функции Дирака по координате x или (y), что соответствует диполю, который позволяет описать разрывы поля. Если коэффициент перед производной функции Дирака равен единице, то полученное решение для этого случая по определению является функцией Грина. Через функцию Грина можно задать «мощность» любого источника, умножив её на коэффициент, который будет стоять в правой части уравнения перед первой производной функции Дирака.

Процедура решения для линейных уравнений в скалярном пространстве хорошо изучена. В качестве первого шага определяется контурный интеграл в комплексной плоскости, который приведён на рис. 1.

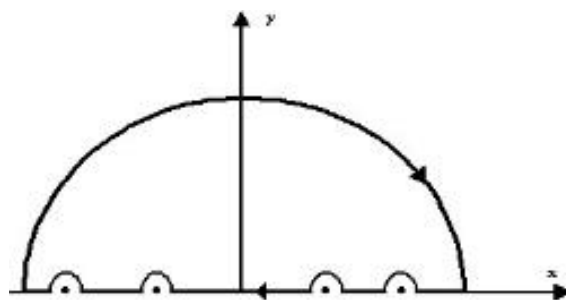


Рис. 1. Контур интегрирования для Лапласиана

Интеграл, значение которого требуется определить, расположен вдоль оси абсцисс. Контур интегрирования, который дополняет исходный интеграл до замкнутого контурного интеграла, в комплексной плоскости, оттянут в бесконечность и поэтому результат интегрирования вдоль этого контура равен нулю [1]. Контурный интеграл совпадает по значению с исходным интегралом, который интегрируется вдоль оси абсцисс и имеет конечное число вычетов. Так как значение контурного интеграла равно сумме вычетов, то и значение искомого интеграла также равно сумме тех же вычетов.

В результате решение интеграла определяется через источники, которые соответствуют точкам разрыва. При этом поле, которое возбуждается этими источниками, непрерывно во всей области существования кроме местоположения источников.

При решении этой и аналогичных задач операцию построения замкнутого контура, в виду её очевидности, можно опускать и переходить непосредственно к вычислению вычетов. В других случаях определение замкнутого контура (как,



например, при решении задачи применительно к векторному уравнению) может быть сложным и поэтому определяющим фактором.

Постановка задачи

При представлении изображений используется дискретная топология, в каждой ячейке которой интенсивность задаётся одним значением. Резкий перепад интенсивности в виде особой точки в одной ячейке не может быть описан, ибо он представляется таким же образом, как и плавный перепад градации цветности, т. е. одним значением. Поэтому, несмотря на различную природу плавных и резких перепадов интенсивности в плоскости представления изображения обработать их различным образом не представляется возможным. Эти различия могут быть выявлены косвенным образом, например, в результате применения дискретного преобразования Фурье с последующим адекватным анализом. Представляется, что целесообразно обрабатывать резкие перепады цветности непосредственно в плоскости изображения, используя для этого функцию Грина. Однако дискретный характер изображения создаёт существенную преграду для реализации подобной обработки. *Для применения функции Грина требуется разработать механизм представления графической информации в виде скалярных полей, что даёт возможность отдельно обработать и хранить резкие и плавные перепады интенсивности.*

Обычно уравнения математической физики связаны с некоторой физической средой, и величина разрыва в точке источника, например, типа диполя определяется не только коэффициентом перед функцией Дирака в правой части уравнения, но и реакцией среды. В работе все параметры являются абстрактными и безразмерными. Для работы с изображениями такой подход является приемлемым и целесообразным.

Решение

На основе математической физики уравнений можно построить скалярные поля, являющихся непрерывными во всей области существования кроме источников (особых точек), в которых имеют место разрывы. Местоположение источников и их мощность задаётся в правой части уравнения. Источники представляются в виде функции Дирака (или её производных), при описании которых указываются их точки приложения. Коэффициенты, на которые умножаются функции Дирака, определяют мощность источника. Если коэффициент равен единице, то полученное решение по определению является функцией Грина. Определив функцию Грина для данного линейного уравнения, несложно получить суммарное поле всех источников.

Если научится представлять изображения в виде скалярных полей, то можно будет адаптировать эту технологию для обработки графической информации. Для этого, выбирая некоторое математической физики уравнение и интерпретируя резкие перепады яркости в изображении как источники, можно построить поле особых точек. Резкие перепады при этом целесообразно представлять в виде диполей, что соответствует первой производной функции Дирака. Вычитая из исходного изображения поле особых точек, получим остаточное поле, которое по определению не содержит резких перепадов цветности. Эта операция позволяет представлять изображение в виде двух частей.



Первую часть можно хранить в виде резких перепадов интенсивности, на основе которых можно восстановить поле особых точек, а вторая часть в силу построения не будет содержать резкие перепады.

При использовании функции Грина, варьируя параметрами среды, можно сформировать перепады в особых точках, совпадающие с коэффициентами, на которые умножается соответствующая производная функции Дирака, т. е., используя математические формулы, можно сформировать реальные перепады, имеющие место в изображениях, и записать эти данные для дальнейшей обработки.

В качестве уравнения выберем двухмерный Лапласиан. Первоначально изображение представляется в формате bmp, который соответствует дискретной топологии, а затем оно преобразуется в скалярное поле.

В рамках предложенной концепции обработки изображений приходится иметь дело с понятиями и приёмами, характерными для математической физики. Однако первоначальное представление изображений в виде дискретной топологии видоизменяет понятия и смысл этих приёмов. В частности, под особой точкой понимается источник, помещенный в рамки одного дискрета, в котором имеет место резкий перепад интенсивности.

Понятие функции Грина, как правило, связано с частным решением уравнений математической физики, которые характеризуются наличием вторых частных производных [2]. Для решения задач, связанных с обработкой изображения, целесообразно, как было отмечено выше, выбрать Лапласиан, в правой части которого находятся диполи, один из которых ориентирован по оси x :

$$G_x(x - x_0, y - y_0) = \frac{k_x(x - x_0)}{2\pi((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)}.$$

Аналогичным образом вычисляется поле диполя, ориентированного вдоль оси y . Чтобы получить его, достаточно в правой части последнего решения поменять местами x и y :

$$G_y(x - x_0, y - y_0) = \frac{k_y(y - y_0)}{2\pi((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)}.$$

В последних выражениях k_x – проекция нормали на ось x , а k_y – проекция нормали ось y , а x_0 и y_0 – координаты особой точки.

Неограниченное пространство в реальных изображениях сужается до его размеров. Но даже в этом случае число операций, необходимое для построения поля особых точек чрезвычайно велико. Оценим его. Для определения вклада в поле одного диполя нужно просканировать всё изображение. Число операций пропорционально числу особых точек, умноженных на число пикселей, содержащих в этом изображении. Например, при размере изображения 512×512 и числе особых точек порядка 5 % от общего числа пикселей затраты на построение поля особых точек сопоставимы с затратами, которые требуются для того, чтобы просканировать это изображение порядка 12 тысяч раз. Общее число операций при этом достигает величины $2^{36}/20$.

Поле диполя в окне заданного размера

Для сокращения числа операций при построении поля особых точек, требуется, чтобы вклад диполя ограничивался зоной, размеры которой существенно меньше, чем размер изображения. Пусть зона, в центре которой располага-



ется источник, представляет собой квадрат со стороной, равной $2a$. Параметр a определяет размер зоны и задаётся пользователем. Чтобы «погасить» влияние диполя на изображение вне зоны требуется решить краевую задачу, в которой значение поля на краях зоны обращается в ноль. Наиболее простое (стандартное) решение данной краевой задачи связано с наращиванием числа окон, окружающих обрабатываемое окно. В центре каждого добавляемого окна расположен фиктивный источник, который при сложении с заданным источником формирует на ближайшей границе ноль. На рис. 2 схематично отображён двойной бесконечный ряд диполей, ориентированных вдоль оси y . Пусть начало координат совпадает с местоположением реального источника, который находится в центре выделенной зоны. Каждый фиктивный диполь расположен в центре соответствующей зоны и ориентирован, как показано на рис. 2. Рассмотрим каким образом поле обращается в ноль на линии $y = a$, частью которой является верхняя граница области существования. Относительно указанной горизонтали все источники можно разбить на пары. Каждая пара представляет собой диполи, симметрично расположенные относительно линии $y = a$, и поэтому суммарное поле всех пар на линии симметрии равно нулю. Аналогичным образом все диполи можно разбить на соответствующие пары относительно линий: $x = -a$, $x = a$ и $x = -a$.

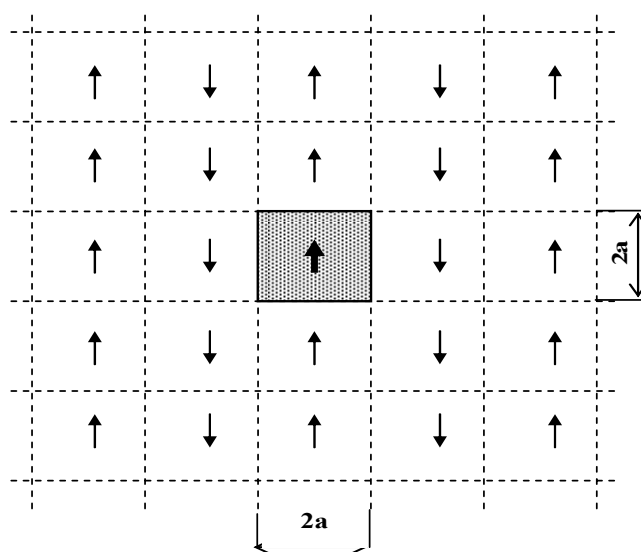


Рис. 2. Иллюстрация решения краевой задачи, основанного на аналитическом продолжении поля за пределы области существования

$$\vec{G}_0(x - x_0, y - y_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (i_0 \frac{(-1)^j k_x (x - x_{i0})}{((x - x_{i0})^2 + (y - y_{j0})^2)} + j_0 \frac{(-1)^i k_y (y - y_{i0})}{((x - x_{i0})^2 + (y - y_{j0})^2)}), \quad (1)$$

где $x_0 = x_0 + 2ia$, $y_0 = y_0 + 2ja$, i_0 – единичный вектор вдоль оси x , j_0 – единичный вектор вдоль оси y .

Чем дальше находится фиктивный источник от реального диполя, тем меньше его вклад в поле точечного диполя в заданном окне. Это позволяет на практике при расчёте поля особых точек ограничиться конечным числом



членов, которое определяется в соответствии с выбранной точностью. В контексте данной задачи достаточно учитывать только 528 фиктивных источников, сгруппированных вокруг реального диполя. Это соответствует замене в формуле (1) пределов суммирования соответственно на минус 11 и на 11. Дальнейшее увеличение фиктивных источников практически не влияет на значение поля источника.

Рассуждения, проведённые относительно диполей с осью вдоль оси y , с соответствующими поправками можно повторить для диполей, ориентированных вдоль оси x .

Как следует из (1), при равенстве $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ и при $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ подынтегральное выражение в интеграле (1) стремится к бесконечности. Однако это обстоятельство на сходимость интеграла не влияет. Техника взятия подобных интегралов в теории аналитических функций хорошо разработана (см. введение).

Поле диполей в дискретном пространстве

Формула (1) позволяет рассчитать в заданном окне поле точечного источника, расположенного в центре окна. Чтобы этой формулой можно было воспользоваться при обработке изображения, её нужно перевести в цифровой формат.

В качестве первого шага, связанного с переходом в дискретное пространство, следует интеграл (1) заменить рядом:

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{x_0, y_0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta U_n^x (-1)^j k_x (x-x_n)}{((x-x_n)^2 + (y-y_n)^2)} + \frac{\Delta U_n^y (-1)^i k_y (y-y_n)}{((x-x_n)^2 + (y-y_n)^2)} \right), \quad (2)$$

где ΔU_n^x и ΔU_n^y – перепады градиентов цветности по x и y в соответствующих особых точках $x_n = x_0^n + 2ia$ и $y_n = y_0^n + 2ja$, x_0^n и y_0^n – координаты особых точек.

В последнем выражении в качестве промежуточного преобразования произведено скалярное произведение, в результате чего в отличие от (1) в нём пропала зависимость от единичных векторов \hat{i}_0 и \hat{j}_0 .

Для вычисления ряда теперь нельзя воспользоваться контурными интегралами. Подобная ситуация связана с конечными размерами дискретной особой точки в том плане, что реальный пиксель не является бесконечно малой величиной, с которой оперирует функция Дирака.

Расхождение ряда можно избежать, если «спрятать» особенность в середину пикселя. В этом случае выражение (2) принимает следующий вид:

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{x_0, y_0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta U_n^x (-1)^j k_x (x-x_n^0)}{((x-x_n^0)^2 + (y-y_n^0)^2)} + \frac{\Delta U_n^y (-1)^i k_y (y-y_n^0)}{((x-x_n^0)^2 + (y-y_n^0)^2)} \right), \quad (3)$$

где $x_n^0 = x_n - 0,5$, $y_n^0 = y_n - 0,5$.

Выражение (3) не содержит особенностей и поэтому данный ряд сходится. Этот шаг не решает все проблемы, возникающие при обработке особых точек на изображениях.

Следующий шаг, связанный с переводом обобщённых функций с локальными носителями из непрерывного пространства в дискретное пространство, требует пояснений. Цель построения поля особых точек в дискретном пространстве – это выделение из изображения особых точек. В непрерывном пространстве указанная цель эффективно достигается использованием функции Грина, которая непрерывна (вместе со всеми производными) во всём простран-



стве кроме особых точек. Говоря другими словами, если на нулевом фоне (общее решение Лапласиана равно нулю) существует область особых точек, то, определив частное решение этого уравнения и вычтя его из исходного поля, в результате получим нулевой остаток. Приемлемое поле особых точек в реальном изображении должно себя вести аналогичным образом.

В модели на основе непрерывного пространства функция Дирака и её производные сосредоточены в одной точке. Это обстоятельство способствует в точке скачка производной к качественному отличию непрерывного пространства от дискретного формата. Снять это различие для источников типа диполей позволяет введение поправок, предназначение которых – скорректировать значение поля, создаваемой особой точкой, «спрятанной» в центр пикселя. При этом введение поправок также должно быть произведено в рамках модели скалярного поля и должно обладать следующими свойствами:

– поддерживать полюс первого порядка в середине пикселя, в котором размещена особая точка;

– в интервале от центра пикселя до его границы иметь зависимость, качественно совпадающую с поведением поля точечного источника в непрерывном пространстве вблизи особенности.

Поправки, которые удовлетворяют этим свойствам, могут быть заданы в следующем виде [3]:

$$x_n^* = x_n^0 + \frac{c}{x - x_n - 0,5}, \quad y_n^* = y_n^0 + \frac{c}{y - y_n - 0,5}, \quad (4)$$

где c – коэффициент, который определяется на основе программного моделирования.

Значение коэффициента « c » подбиралось таким образом, чтобы разность остаточного поля и фона исходного изображения была минимальна:

$$\sum (U_{\text{ост}}(x, y) - U_{\text{фон}})^2,$$

где $U_{\text{ост}}(x, y)$ – значение остаточного поля в точке с координатами x, y (суммирование осуществляется по всем точкам изображения).

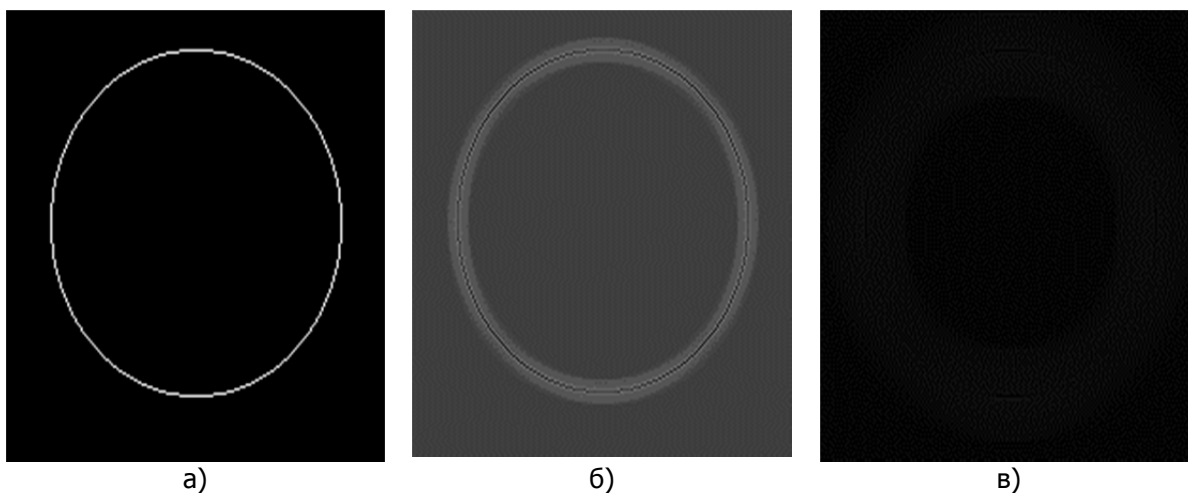


Рис. 3. Исходное изображение (а); разность исходного изображения и поля диполей с учетом первой поправки (б); разность исходного изображения и поля диполей с учетом первой и второй поправки (в)



На рис. 3а приведён один из испытуемых экземпляров матрицы интенсивности, значение фона в которой равно трём градациям цветности. Светимость в контуре равна 157 градациям цветности. Отметим, что замкнутая и тонкая в один пиксель линия из особых точек является с точки зрения решаемой задачи проблемным фрагментом, так как положительные и отрицательные перепады разделяет только один пиксель. На рис. 3б представлена матрица интенсивности, которая представляет собой матрицу, полученную вычитанием поля особых точек, построенного по формуле (3), из исходного изображения. Из этого рисунка видно, что на расстоянии 2–4 пикселей от фрагмента, создающего поле, разность стремится к фону. Однако в окрестностях распределённых источников отличие от фона вряд ли можно назвать приемлемым – оно достигает 43 градаций цветности и далеко от эталона, которым может служить модель для непрерывного пространства.

Моделирование параметра «с» в формуле (4) показало, что независимо от размеров окна обработки его оптимальное значение для всех испытуемых изображений было одинаковым и равно 0,068 (четвёртый знак после запятой практически не влиял на результат). При $c = 0,068$ разность исходного изображения и поля особых точек имеет вид, представленный на рис. 3в, что соответствует полному совпадению поля особых точек и исходного изображения.

Результаты программного моделирования доказывают, что суммарные поправки Δx_n и Δy_n к координатам особой точки x_0^n и y_0^n можно записать в виде:

$$\Delta x_n = \frac{0,068}{x - x_n - 0,5} - 0,5, \quad \Delta y_n = \frac{0,068}{y - y_n - 0,5} - 0,5.$$

Поправки, определённые таким образом, практически не влияют на значение поля при удалении от особой точки на 1–2 пикселя, но оказывают существенную коррекцию в её окрестностях.

Окончательная формула для построения поля особых точек с учётом всех определённых поправок теперь выглядит следующим образом:

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_n^{(x_0, y_0)} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta U_n^x (-1)^j k_x (x - x_n + \Delta x_n)}{(x - x_n + \Delta x_n)^2 + (y - y_n)^2} + \frac{\Delta U_n^y (-1)^j k_y (y - y_n + \Delta y_n)}{(x - x_n)^2 + (y - y_n + \Delta y_n)^2} \right). \quad (5)$$

Выражение (5) является основой для вычисления поля особых точек и, следовательно, для получения остаточного поля. Происходит это следующим образом: пользователь выбирает перепад интенсивности (порог), при превышении которого данная точка интерпретируется как особая, и определяет размер матрицы, которой обрабатываются все особые, образуя при этом поле особых точек. Остаточное поле формируется на основе разности исходного изображения и поля особых точек. В силу построения остаточное поле не содержит резких перепадов градаций интенсивности.

Размеры матрицы для вычисления поля диполя определяются вдоль оси x по формуле $(2 \times Win - 1) \times (2 \times Win)$ и вдоль оси y $(2 \times Win) \times (2 \times Win - 1)$, где Win – половина оси диполя. Значения вычисляемых компонент зависят от величины перепада в особой точке, а также от расстояния и направления от диполя, который всегда расположен в центре окна. Вклад данного диполя в общее поле ΔU в окне определяется по формуле:

$$\Delta U = \Delta U_n^x X_{xy} + \Delta U_n^y Y_{xy},$$



где компоненты матрицы X_{xy} соответствуют полю диполя, ориентированному вдоль оси x ; компоненты матрицы Y_{xy} – соответствуют полю диполя, ориентированного вдоль оси y .

На рис. 4 представлен результат построения функции Грина.

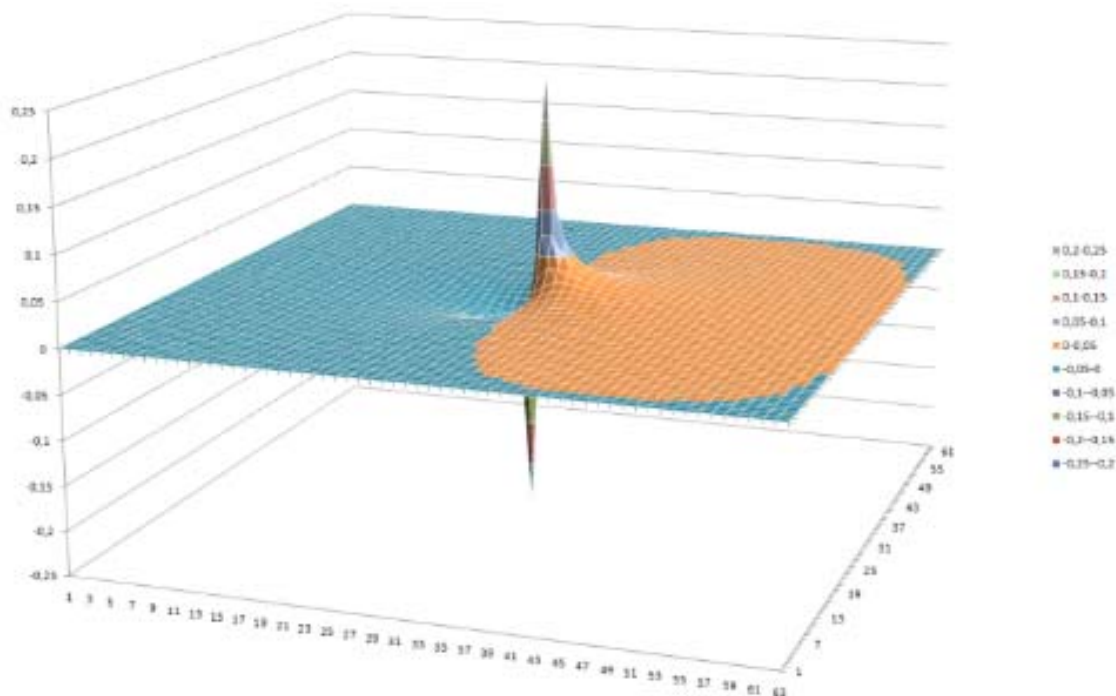


Рис. 4. Результаты вычисления функции Грина для $Win = 32$

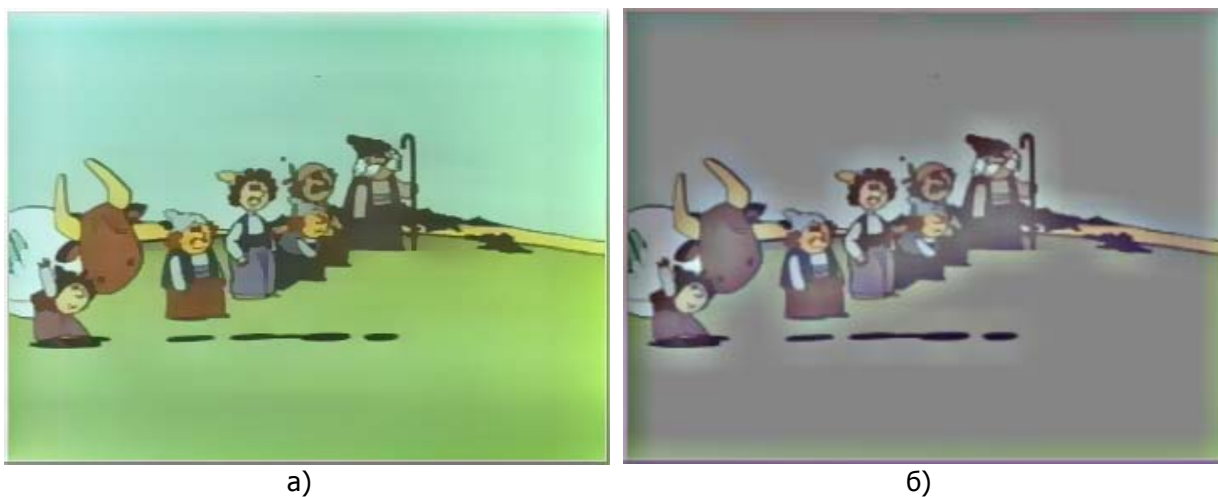
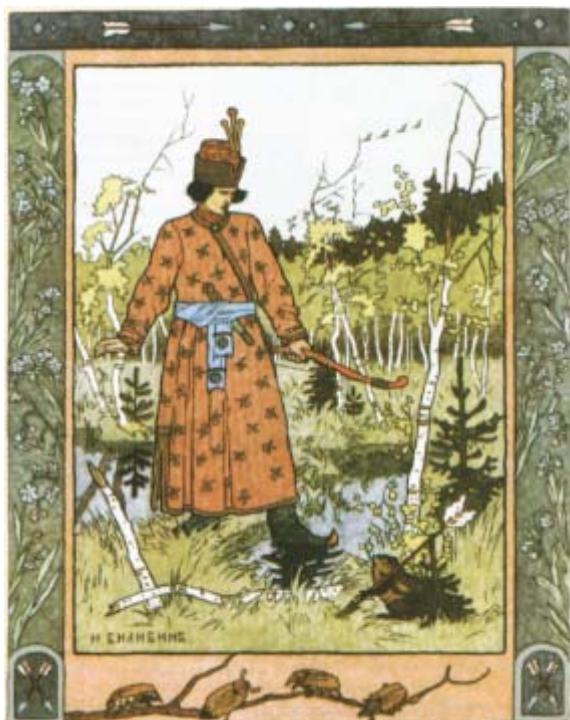


Рис. 5. Кадр из мультфильма; размер 360×261 (285 Кбайт):
исходное изображение (а); поле особых точек при пороге, равном 8 (б)

На рис. 5б представлено поле особых точек, которое может применяться или обрабатываться независимо от исходного изображения (рис. 5а).





а)



б)



в)

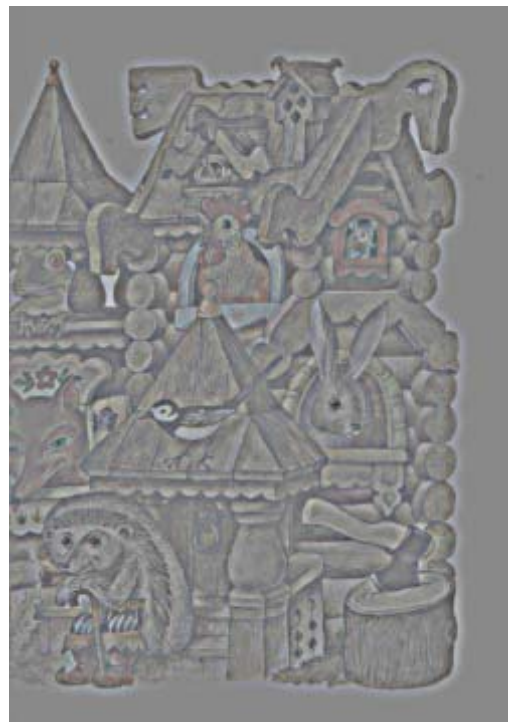
Рис. 6. Копия картины И. Билибина;
размер 719×970 (1990 Кбайт):
исходное изображение (а);
поле особых точек,
порог = 16, Win = 16 (б);
разность исходного поля
и поля особых точек (в)

Исходное изображение (рис. 6а) разложено на два фрагмента: поле особых точек (рис. 6б) и остаточное поле (рис. 6в).

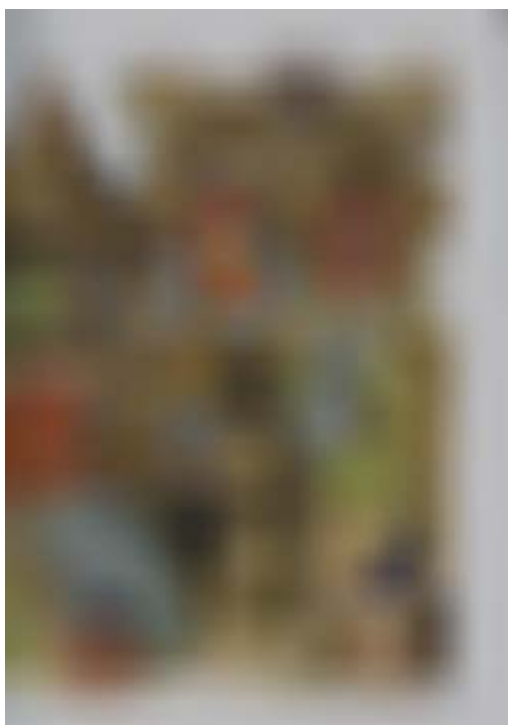




а)



б)



в)

Рис. 7. Цветная иллюстрация
С. Р. Ковалёва;
размер 774×1099 (2430 Кбайт):
исходное изображение (а);
поле особых точек,
порог = 16, Win = 64 (б);
разность исходного изображения
и поля особых точек (в)

Поле особых точек (рис. 7б) сохраняет контура, которые имеют место в исходном изображении (рис. 7а), а остаточное поле (рис. 7в) сохраняет цветность из исходного изображения.





Рис. 8. Черно-белое изображение объёмом 32 Кбайт (шарж Кукрыниксов): исходное изображение (а); поле особых точек, порог = 8, $Win = 16$ (б)

В черно-белых изображениях поле особых точек (рис. 8б) совпадает с исходным изображением (рис. 8а).

Выводы

В работе рассмотрен подход к обработке изображений, который базируется на представлении, что резкие перепады градаций цветности целесообразно обрабатывать непосредственно в плоскости изображения. Предложенный подход осуществляется на основе представления изображений скалярными полями, что позволяет использовать модернизированную функцию Грина и сохранить тем самым в процессе обработки значения резких перепадов цветности.

Поле особых точек для всех испытуемых изображений сохранило первоначальные значения резких перепадов цветности.

Раздельная обработка графической информации вследствие применения функции Грина открывает новые возможности при работе с изображениями, например, при их сжатии и выделении контуров. Сохранения значений резких перепадов цветности может быть использовано в «техническом зрении».

Литература

1. Картан Г. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. М. : Иностранная литература, 1963, 295 с.
2. Математическая энциклопедия в 5 т. М. : Советская энциклопедия, 1977. Т. 1. С. 916–917.
3. Болтов Ю. Ф. Сжатие графической информации на основе её представления в виде полевой структуры // Телекоммуникации. 2008. № 12. С. 30–35.

References

1. Cartan, H. Elementary Theory of Analytic Functions of One and Several Complex Variables M. : Foreign Literature, 1963. 295 p.
2. Encyclopedia of Mathematics in 5 vol. M. : Soviet Encyclopedia, 1977. Vol. 1. pp. 916–917.
3. Boltov, Yu. F. Compression of Graphical Information based on its Representation in the form of Field-Effect Structure // Telekommunikacii. 2008. No. 12. pp. 30–35.



Болтов Юрий Федорович

– кандидат технических наук, доцент, СПбГУТ,
Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация,
ufb@edwer.spb.ru

Boltov Yuriy

– Ph.D., assistant professor, SPbSUT, St. Petersburg,
193232, Russian Federation, ufb@edwer.spb.ru