

Министерство информационных технологий и связи  
Российской Федерации

---

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ ИМ. ПРОФ. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА

А.Д. Андреев, Л.М. Черных

**ФИЗИКА**  
**ЭЛЕКТРОСТАТИКА**  
Конспект лекций

Санкт-Петербург  
2004

УДК 530.1

Андреев А. Д., Черных Л. М. Физика. Электростатика: Конспект лекций / СПб ГУТ. – СПб, 2004.

Содержится теоретический материал по разделу “Электростатика” курса общей физики. Предназначен для оказания помощи студентам всех форм обучения в самостоятельной работе, а также при подготовке к коллоквиумам и экзаменам.

Ответственный редактор А. А. Костин

Рецензент В. А. Подхалюзин

© Андреев А. Д., Черных Л. М., 2004

© Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, 2004

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Основные постулаты. Закон Кулона.....	5
2. Характеристики электрического поля в вакууме. ....	-
2.1. Принцип суперпозиции электрических полей.....	-
2.2. Графическое представление электрического поля. Поле неподвижного точечного заряда. ....	8
2.3. Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом. ....	9
2.4. Поток вектора напряженности электрического поля.....	11
3. Теорема Гаусса в интегральной форме. ....	14
4. Расчет электростатических полей.....	15
4.1. Поле сферической поверхности.....	-
4.2. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.....	17
4.3. Поле бесконечной равномерно заряженной цилиндрической поверхности.....	19
5. Электрический диполь.....	21
5.1. Диполь в однородном электрическом поле. ....	-
5.2. Электрический диполь в неоднородном электрическом поле.....	22
5.3. Полярные и неполярные молекулы. Явление поляризации диэлектриков.....	23
5.4. Характеристики электрического поля в диэлектрике.....	25
6. Теорема Гаусса для вектора электрической индукции. ....	27
7. Проводники в электростатическом поле.....	29
7.1. Емкость уединенного проводника.....	-
7.2. Емкость плоского конденсатора.....	30
7.3. Емкость цилиндрического конденсатора. ....	31
7.4. Энергия электрического поля. ....	32
Литература.....	35

## ВВЕДЕНИЕ

Мы начинаем изучение широкого круга явлений, получивших название "электромагнетизм". Относящиеся сюда явления очень разнообразны. Притяжение мелких предметов наэлектризованной палочкой и молния, ориентирующаяся стрелка компаса и магнитные бури – все это примеры явлений электромагнетизма. Чрезвычайно широко применение этих явлений в технике: современные электротехника, радиотехника, электроника основаны на использовании этих явлений.

Ввиду большого разнообразия электромагнитных явлений и их чрезвычайной важности с технической точки зрения их изучению посвящена значительная часть дисциплины физики. При изучении общей физики принят принцип "от простого к сложному". В связи с этим начнем изучение этого круга явлений с наиболее простых, получивших название "электростатика". Следует отметить, однако, что в этом разделе вводятся понятия (напряженность электрического поля, вектор электрической индукции, плотность заряда и т. д.) и рассматриваются законы (принцип суперпозиции, теорема Гаусса, закон сохранения заряда и т. д.), которые либо прямо, либо в обобщенном виде применимы к значительно более широкому кругу явлений электромагнетизма.

Подобно тому как участие тел в гравитационных явлениях обусловлено наличием у них массы, участие тел в электромагнитных явлениях связано с наличием у них электрического заряда. Наличие у тела электрического заряда приводит к появлению в окружающем пространстве особого рода материи, называемой электромагнитным полем. Если в этом поле находится другое тело, обладающее электрическим зарядом, то будет иметь место электромагнитное взаимодействие. Оно проявляется в том, что одно заряженное тело действует на другое с некоторой силой. В выбранной системе отсчета электромагнитное поле можно разделить на электрическое и магнитное поле. Соответственно упомянутую силу можно разделить на две части: одна обусловлена электрическим полем, а другая – магнитным. Если заряды, создающие поле, неподвижны, то остается только одно электрическое поле. Электростатика – учение об электрическом поле, созданном зарядами, неподвижными относительно избранной системы отсчета.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОСТУЛАТЫ. ЗАКОН КУЛОНА

Ниже перечислены основные положения, на которых основано учение о электрическом поле.

1. В природе существуют 2 типа зарядов – положительные "+" и отрицательные "-".

2. Заряд любого тела или частицы кратен элементарному заряду  $e$ :  $Q = \pm Ne$ , где  $N$  – целое число,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

3. Выполняется закон сохранения заряда в электрически изолированной системе (через границы которой не происходит переноса заряда): алгебраическая сумма зарядов электрически изолированной системы есть величина постоянная.

4. Имеет место инвариантность заряда: заряд системы инвариантен относительно системы отсчета, т. е. во всех системах отсчета заряд одинаковый.

5. **Закон Кулона: сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами пропорциональна величине зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними (в вакууме).** Закон установлен экспериментально для точечных зарядов французским физиком Кулоном в 1785 г. с помощью изобретенных им крутильных весов. *Точечный заряд* – заряженное тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

В системе СИ закон Кулона для точечных зарядов, находящихся в вакууме, записывается в следующем виде:

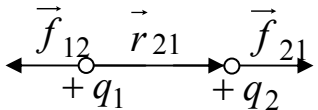
$$\boxed{\vec{f}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}}, \quad \vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21},$$


Рис. 1

где  $q_1, q_2$  – алгебраическая величина зарядов;

$\vec{f}_{21}$  – сила, действующая на заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$  (рис. 1);  $\vec{r}_{21}$  – радиус-вектор, характеризующий положение  $q_2$  относительно  $q_1$ ;

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \left[ \frac{\Phi}{\text{М}} \right]$  – электрическая постоянная.

## 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

### 2.1. Принцип суперпозиции электрических полей

Рассмотрим систему  $N$  неподвижных точечных зарядов:  $q_1, q_2, \dots, q_N$ .

Для исследования электростатического поля системы  $N$  неподвижных точечных зарядов будем использовать пробный заряд  $q_p$ . Пробный заряд – точечный заряд, малый по величине настолько, что он не влияет на исследуемое поле. Поместим пробный заряд в некоторую точку поля (рис. 2). Введем обозначения:  $\vec{f}_i$  – сила, действующая на  $q_p$  со стороны  $q_i$ ;  $\vec{F}$  – результирующая всех сил, действующих на пробный заряд со стороны зарядов системы. Тогда

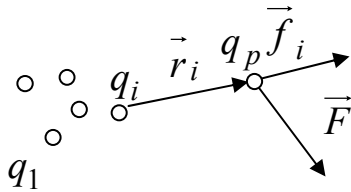


Рис. 2

$$\vec{f}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_p}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i},$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i = \frac{q_p}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i}.$$

Сила  $\vec{F}$  не может быть характеристикой поля системы  $N$  зарядов, так как зависит от величины  $q_p$ . Но если мы разделим  $\vec{F}$  на величину пробного заряда, то получим величину, характеризующую электрическое поле в исследуемой точке. Эта величина называется напряженностью электрического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i}. \quad (2.1)$$

*Напряженность* – силовая характеристика поля, равная силе, действующей на пробный заряд, помещенный в данную точку поля, деленной на величину этого заряда.

Полагая в формуле (2.1)  $N = 1$ , получим формулу для напряженности поля точечного заряда.

### Напряженность поля точечного заряда

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2.2)$$

Из сравнения (2.1) и (2.2) вытекает принцип суперпозиции для напряженности поля системы зарядов:  $\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$ ,  $\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i}$ .

**Принцип суперпозиции для напряженности:** напряженность поля, создаваемого системой точечных зарядов в данной точке, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов системы в отдельности в этой точке.

Рассмотрим работу сил электростатического поля, создаваемого системой  $N$  точечных зарядов, по перемещению пробного заряда из точки 1 в точку 2 (см. раздел "Механика"):

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 \sum_{i=1}^N \vec{f}_i d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \int_1^2 \vec{f}_i d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{q_p q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{1i}} - \frac{q_p q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{2i}} \right). \quad (2.3)$$

С другой стороны, эта работа связана с изменением потенциальной энергии пробного заряда:

$$A_{1 \rightarrow 2} = W_{п1} - W_{п2}. \quad (2.4)$$

Из сравнения равенств (2.3) и (2.4) видно, что потенциальная энергия взаимодействия заряда  $q_p$  со всеми зарядами системы имеет вид

$$W_{п} = \sum_{i=1}^N \frac{q_p q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}.$$

Потенциальная энергия  $W_{п}$  не может служить характеристикой поля, так как зависит от величины пробного заряда  $q_p$ . Разделив  $W_{п}$  на величину пробного заряда  $q_p$ , получим:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}, \quad (2.5)$$

которая не зависит от  $q_p$ .

Величина  $\varphi = \frac{W_{п}}{q_p}$  называется потенциалом электростатического

поля.

**Потенциал поля, создаваемый системой точечных зарядов в данной точке, равен потенциальной энергии взаимодействия пробного заряда со всеми зарядами, деленной на величину пробного заряда.**

Полагая в (2.5)  $N = 1$ , получаем, что потенциал поля точечного заряда

$$\boxed{\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}}. \quad (2.6)$$

Из сравнения формул (2.5) и (2.6) вытекает **принцип суперпозиции для потенциала:**

$$\boxed{\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i}, \quad \varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}.$$

**Потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов в данной точке, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым зарядом в отдельности в данной точке.**

Разделим обе части равенства (2.4) на  $q_p$ . Тогда получим

$$\boxed{\frac{A_{1 \rightarrow 2}}{q_p} = \varphi_1 - \varphi_2.} \quad (2.7)$$

**Разность потенциалов – величина, равная работе сил поля по перемещению пробного заряда из одной точки в другую, деленной на величину этого заряда.**

Последнее выражение применяют для нахождения работы сил поля по перемещению точечного заряда  $q$ :  $A_{1 \rightarrow 2} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

Если в равенстве (2.7) устремить точку 2 на бесконечность, то согласно (2.5),  $\varphi_2 \rightarrow 0$ . Тогда из (2.7) получим  $\frac{A_{1 \rightarrow \infty}}{q_p} = \varphi_1$ .

Это равенство может служить вторым определением потенциала: **потенциал в данной точке поля равен работе сил поля по перемещению пробного заряда из данной точки поля на бесконечность, деленной на величину этого заряда.**

## 2.2. Графическое представление электрического поля.

### Поле неподвижного точечного заряда

*Силовая линия (СЛ)* – линия, в каждой точке которой вектор напряженности поля направлен по касательной к этой линии.

Свойства силовых линий:

- начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных;
- не пересекаются.

*Эквипотенциальная поверхность (ЭПП)* – геометрическое место точек равного потенциала.

Следствие: если точки А и В находятся на ЭПП, то  $\varphi_A = \varphi_B$  и работа по перемещению заряда из точки А в точку В по любой траектории равна нулю.

В качестве примера рассмотрим поле точечного заряда, для которого характерна следующая симметрия: во всех точках поля, равноотстоящих от точечного заряда, свойства поля одинаковы (одинаковы  $E$  и  $\varphi$ ). В этом случае формулы для напряженности и потенциала и их графики имеют следующий вид:



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

На рис. 3–5 показаны зависимости потенциала  $\varphi$  и напряженности поля  $E$  от расстояния  $r$  между зарядом и точкой наблюдения.

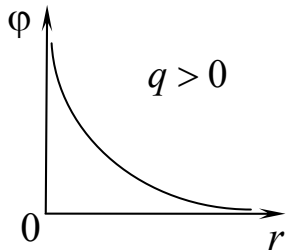


Рис. 3

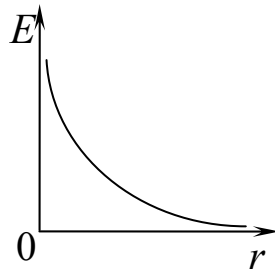


Рис. 4

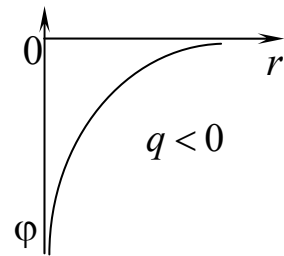


Рис. 5

Как показано на рис. 6 и 7 силовые линии поля точечного заряда радиальны, а ЭПП имеют вид сферических поверхностей.

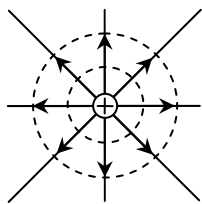


Рис. 6

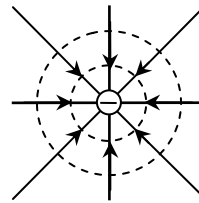


Рис. 7

### 2.3. Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом

#### 1. Разность потенциалов как интеграл от напряженности электростатического поля.

Рассмотрим перемещение заряда  $q$  из точки 1 в точку 2 в электростатическом поле (рис. 8).

На рис. 8  $d\vec{l}$  – элементарное перемещение,  $\vec{F}$  – электростатическая сила, действующая на заряд со стороны поля.

Из определения разности потенциалов следует

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1-2}}{q} = \frac{1}{q} \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 \frac{\vec{F}}{q} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl,$$

где  $E_l$  – проекция вектора напряженности электростатического поля на направление элементарного перемещения.

Таким образом,

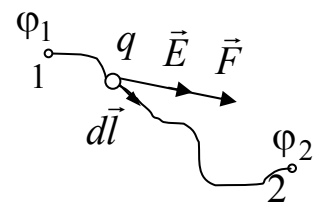


Рис. 8

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_1^2 E_l dl.$$

Следствие: если перемещать заряд по замкнутой траектории (рис. 9), то  $\Phi_1 = \Phi_2$ . Тогда

$$\oint_l E_l dl = 0.$$

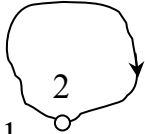


Рис. 9

Циркуляция вектора  $\vec{E}$  (интеграл по замкнутому контуру от проекции вектора  $\vec{E}$  на направление перемещения) равна нулю.

## 2. Напряженность поля как градиент потенциала.

В разделе "Механика" [6] была доказана формула, связывающая вектор консервативной силы и потенциальную энергию:

$$\vec{F} = -\text{grad}W_{\text{п}} = -\left(\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z} \vec{k}\right).$$

Разделим обе части этой формулы на  $q$ :

$$\frac{\vec{F}}{q} = -\text{grad} \frac{W_{\text{п}}}{q}.$$

По определению  $\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E}$  и  $\frac{W_{\text{п}}}{q} = \varphi$ , следовательно,

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}\right).$$

Знак "-" означает, что вектор  $\vec{E}$  направлен в сторону убывания потенциала.

В разделе "Механика" была получена формула  $F_l = -\frac{dW_{\text{п}}}{dl}$ , где  $F_l$  – проекция вектора консервативной силы на направление элементарного перемещения  $dl$ .

Разделим левую и правую части на  $q$ . Тогда получим

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl},$$

где  $E_l$  – проекция напряженности поля на направление элементарного перемещения,  $d\varphi$  – изменение потенциала при этом перемещении.

Рассмотрим ЭПП и направление, касательное к ЭПП в точке А (рис. 10).

Пусть  $d\vec{l}$  – элементарное перемещение вдоль этого направления. Так как в точке А

$$\frac{d\varphi}{dl} = 0, \text{ то } E_l = 0.$$

Следовательно,  $\vec{E}$  перпендикулярен ЭПП (ортогональность СЛ и ЭПП).

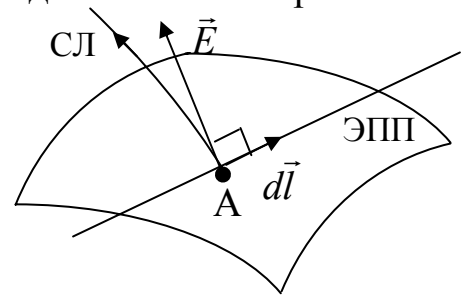


Рис. 10

## 2.4. Поток вектора напряженности электрического поля

Понятие потока вектора через некоторую поверхность встречается во многих разделах физики и имеет важное значение в математическом обеспечении описания физических закономерностей. Введем понятие потока вектора напряженности электрического поля, которое ниже будет использовано для доказательства теоремы Гаусса, применение которой, в свою очередь, позволит довольно просто рассчитывать напряженность электрического поля в случае заряженных тел простой геометрической формы.

Определим поток вектора напряженности через поверхность произвольной формы (рис. 11).

Для этого:

- 1) всю площадь поверхности  $S$  делим на элементарные площадки;
- 2) берем каждую площадку  $dS$  настолько малой, что ее можно считать плоской и  $\vec{E} = \text{const}$  в ее пределах;
- 3) проводим  $\vec{n}$  – вектор нормали к этой площадке ( $|\vec{n}| = 1$ ), который характеризует ориентацию площадки в пространстве.

Элементарным потоком вектора напряженности через  $dS$  называется следующая величина:

$$d\Phi_E = \vec{E}\vec{n}dS = E \cos \alpha ds = E_n dS,$$

где  $E_n$  – проекция вектора напряженности на направление нормали к площадке  $dS$ .

Потоком вектора напряженности через поверхность  $S$  называется сумма элементарных потоков через все площадки, на которые разбита поверхность  $S$ :

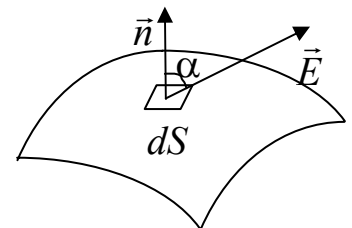


Рис. 11

$$\Phi_E = \int d\Phi_E = \int_S E_n dS.$$

**Пример вычисления потока в случае поля точечного заряда.**

1. Поток  $\vec{E}$  через произвольную поверхность  $S$

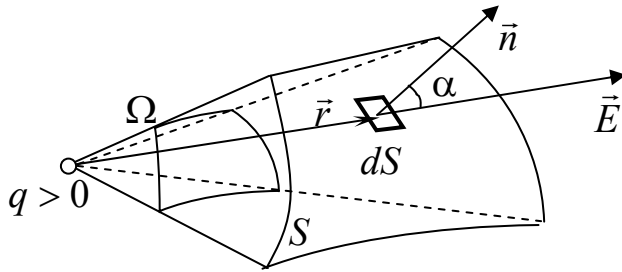


Рис. 12

Рассмотрим неподвижный точечный заряд  $q$ . Для определенности пусть  $q > 0$  (рис. 12).

Разобьем  $S$  на элементарные площадки  $dS$ . Поток напряженности через одну из таких площадок

$$d\Phi_E = E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}\vec{n}}{r} dS = \frac{q \cos \alpha \cdot dS}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Поток вектора  $\vec{E}$  является алгебраической величиной и может быть как положительным, так и отрицательным. Это зависит от знака  $q$  и  $\cos \alpha$ . Учтем, что

$$d\Omega = \frac{|\cos \alpha|}{r^2} dS \text{ — элементарный телесный угол, под которым видна}$$

площадка  $dS$  из точки, где помещен заряд  $q$ .

При увеличении  $dS$  увеличивается и  $d\Omega$ ;  $d\Omega$  максимально при  $\alpha = 0$ ;  $d\Omega = 0$  при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Величина  $d\Omega$  измеряется в стерadianах и по определению является положительной.

Поток через площадку  $dS$ :

$$d\Phi_E = \pm \frac{q d\Omega}{4\pi\epsilon_0}.$$

Поток через поверхность  $S$ :

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \pm \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d\Omega = \pm \frac{q\Omega}{4\pi\epsilon_0}.$$

$$\Phi_E = \pm \frac{q\Omega}{4\pi\epsilon_0}.$$

Знак "+" берется, когда  $\alpha$  — острый, "-" берется, когда  $\alpha$  — тупой.

2. Поток через сферическую поверхность с зарядом, находящимся в ее центре (рис. 13)

Телесный угол, под которым виден элемент сферы,

$$d\Omega = \frac{|\cos \alpha|}{r^2} dS = \frac{1}{r^2} dS.$$

Телесный угол, под которым видна вся сфера,

$$\Omega = \int \frac{dS}{r^2} = \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi$$

является полным телесным углом.

Поток через сферу

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.6)$$

Вектор нормали  $\vec{n}$  принято направлять наружу по отношению к замкнутой поверхности.

3. Поток через замкнутую поверхность  $S$  произвольной формы (рис. 14)

Докажем, что поток через замкнутую поверхность произвольной формы тоже определяется (2.6), если  $q$  находится внутри замкнутой поверхности.

Разделим ее на три поверхности:  $S_1$  – часть поверхности  $S$ , которая видна из точки расположения заряда под полным телесным углом;  $S_2$  – часть поверхности  $S$ , которую силовые линии пересекают под тупым углом  $\alpha_2$ ;  $S_3$  – та часть  $S$ , которую силовые линии пересекают под острым углом  $\alpha_3$ . Заметим также, что поверхности  $S_2$  и  $S_3$  видны из точки расположения заряда под одним и тем же телесным углом.

Поток через поверхность  $S$

$$\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} = \frac{q}{\epsilon_0} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_2 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_3.$$

Так как  $\Omega_2 = \Omega_3$ , то  $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$ .

Поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен  $\frac{q}{\epsilon_0}$ , если заряд находится внутри объема, ограниченного этой поверхностью.

4. Поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность (заряд находится вне замкнутой поверхности (рис. 15))

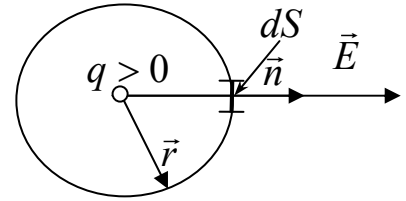


Рис. 13

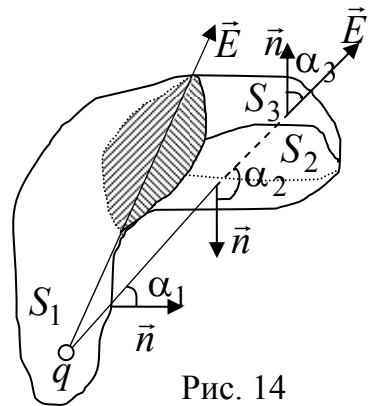


Рис. 14

Докажем, что в этом случае поток равен нулю.

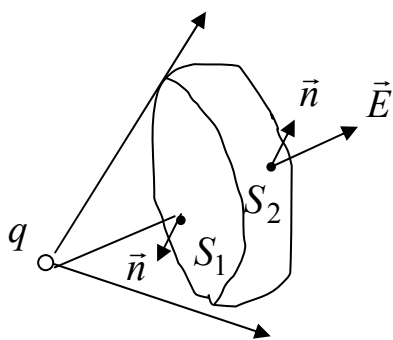


Рис. 15

Замкнутую поверхность  $S$  произвольной формы разделим на две поверхности  $S_1$  и  $S_2$ . Силовые линии пересекают поверхность  $S_1$  под тупым углом, а поверхность  $S_2$  – под острым углом. При этом обе поверхности  $S_1$  и  $S_2$  видны из точки расположения заряда под одним и тем же телесным углом. Поток напряженности через поверхность  $S$

$$\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Omega_1 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Omega_2 = 0,$$

так как  $\Omega_1 = \Omega_2$ .

### 3. ТЕОРЕМА ГАУССА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

**Теорема:** поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на  $\epsilon_0$ .

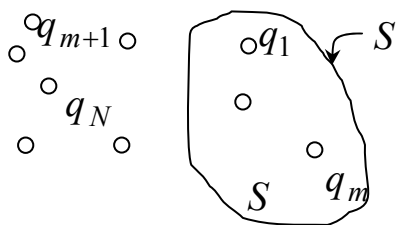


Рис. 16

Рассмотрим систему  $N$  точечных зарядов и некоторую замкнутую поверхность  $S$  (рис. 16). Пронумеруем все заряды, находящиеся внутри замкнутой поверхности, от 1 до  $m$ . Заряды с индексами от  $m+1$  до  $N$  находятся вне этой поверхности. Поток напряженности через поверхность  $S$

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E} \vec{n} dS,$$

где  $\vec{E}$  – напряженность поля, создаваемого системой  $N$  точечных зарядов.

По принципу суперпозиции  $\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$ . Следовательно,

$$\Phi_E = \oint_S (\sum_{i=1}^N \vec{E}_i) \vec{n} dS = \sum_{i=1}^m \oint_S \vec{E}_i \vec{n} dS + \sum_{i=m+1}^N \oint_S \vec{E}_i \vec{n} dS = \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{\epsilon_0} + 0 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^m q_i.$$

Что и требовалось доказать.

В случае непрерывно распределенного заряда в объеме  $V$  можно ввести понятие объемной плотности заряда  $\rho = \frac{dq}{dV}$ ,  $\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$ , где  $dq$  – заряд в элементарном объеме  $dV$ .

Так как  $dq = \rho \cdot dV$ , в рассматриваемом объеме  $V$

$$q = \int_V \rho dV.$$

В этом случае теорема Гаусса может быть записана в виде

$$\oint_S E_n ds = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

где  $V$  – объем, заключенный внутри поверхности  $S$ .

В главе 4 теорема Гаусса применяется для определения напряженности поля некоторых заряженных тел простой геометрической формы.

## 4. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

### 4.1. Поле сферической поверхности

1. Поле вне равномерно заряженного шара, равномерно заряженной сферической поверхности

Пусть  $q$  – заряд шара (сферической поверхности) радиуса  $R$ . Возьмем  $q > 0$  для определенности.

Так как поле является центрально-симметричным, то во всех точках, равноотстоящих от центра шара (сферической поверхности), свойства поля одинаковы:  $E = \text{const}$  и  $\varphi = \text{const}$ .

Следовательно, эквипотенциальными поверхностями являются сферы с центром в точке  $O$ . Из ортогональности СЛ и ЭПП следует, что силовые линии имеют радиальное направление относительно центра.

В качестве произвольной замкнутой поверхности возьмем сферу радиуса  $r$ , при этом  $r > R$  (рис. 17). Поток  $\vec{E}$  через замкнутую сферическую поверхность:  $\Phi_E = \oint_S E_n dS$ . Во всех точках сферической поверхности радиуса  $r$ :  $E_n = E = \text{const}$ .

Следовательно,  $\Phi_E = ES = E4\pi r^2$ . По теореме

Гаусса  $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$ . Приравняем два полученных

выражения:  $\frac{q}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2$ .

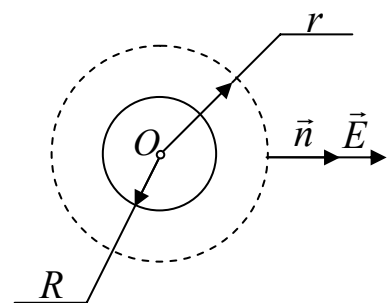


Рис. 17

Таким образом,  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ . В векторном виде эта формула принимает вид

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

где  $\vec{E}$  – напряженность поля вне заряженного шара (сферической поверхности).

Для расчета разности потенциалов возьмем две произвольные точки 1 и 2, через которые построим две сферические поверхности радиуса  $r_1$  и  $r_2$  с центром в точке  $O$ . Рассчитывая разность потенциалов, как линейный интеграл от напряженности электростатического поля, учтем, что результат интегрирования не зависит от пути, по которому производится интегрирование. Следовательно, мы можем выбрать любой удобный для нас путь. Таким путем, например, может быть путь от точки 1 до 1' по сферической поверхности радиуса  $r_1$ , затем из точки 1' до точки 2 в радиальном направлении (рис. 18). Тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_l E_l dl = \int_1^{1'} E_l dl + \int_{1'}^2 E_l dl = 0 + \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

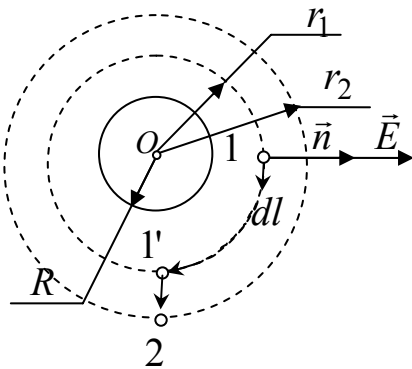


Рис. 18

На участке  $1 \rightarrow 1'$   $\vec{E} \perp d\vec{l}$ , следовательно,  $E_l = 0$ .

Устремим точку 2 в бесконечность, тогда  $r_1 = r$ ;  $\varphi_1 = \varphi$ ;  $\varphi_2 = 0$ .

Таким образом,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где  $\varphi$  – потенциал поля вне заряженного шара (сферической поверхности).

## 2. Поле внутри заряженной сферической поверхности

Поток  $\vec{E}$  через замкнутую сферическую поверхность  $S$  радиуса  $r < R$  (рис. 19)

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = E \oint_S dS = E 4\pi r^2.$$

По теореме Гаусса:  $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{0}{\epsilon_0}$ .



Следовательно,  $E \cdot 4\pi r^2 = 0$ , откуда получаем,  $E = 0$ .

Таким образом, поле внутри равномерно заряженной сферической поверхности отсутствует, и разность потенциалов между любыми двумя точками равна нулю:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_l E_l dl = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

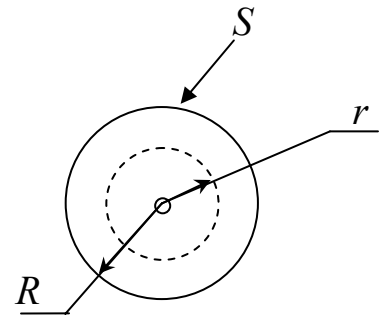


Рис. 19

Графическое представление поля сферической поверхности показано на рис. 20 и 21.

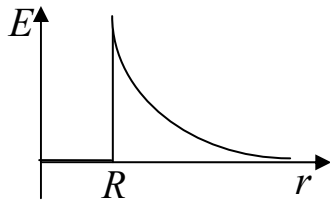


Рис. 20

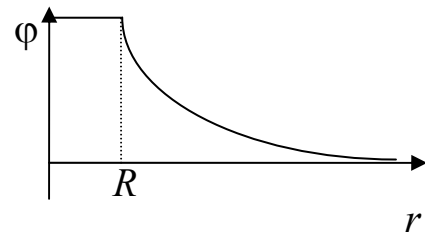


Рис. 21

#### 4.2. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

Для характеристики заряженной плоскости введем понятие поверхностной плотности заряда:  $\sigma = \frac{dq}{dS}$ , Кл/м<sup>2</sup>, где  $dq$  – заряд, находящийся на элементарной площадке  $dS$ .

Будем считать, что поверхностная плотность заряда постоянна и положительна (для определенности).

Поле обладает симметрией: во всех точках, равноотстоящих от заряженной плоскости, свойства поля одинаковы, т. е. одинаковы потенциал и напряженность поля. Поэтому ЭПП имеют вид плоскостей, параллельных заряженной плоскости. Из ортогональности силовых линий и ЭПП следует, что силовые линии перпендикулярны заряженной плоскости.

В качестве произвольной замкнутой поверхности рассмотрим цилиндрическую поверхность в виде прямого цилиндра одинаковой длины слева и справа от бесконечной заряженной плоскости. Ось цилиндра параллельна силовым линиям (рис. 22). Площадь основания цилиндра –  $S_0$ , площадь боковой по-

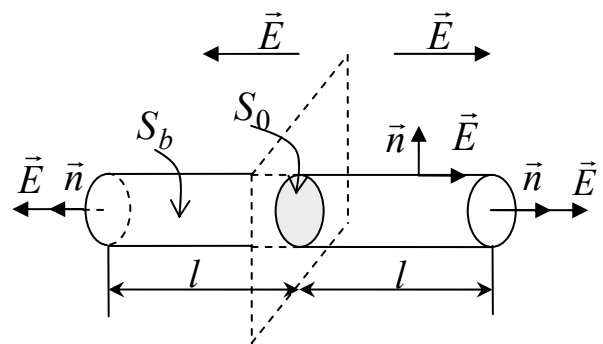


Рис. 22

верхности цилиндра –  $S_b$ .

Поток через замкнутую цилиндрическую поверхность

$$\Phi_E = \int_{S_b} E_n dS + 2 \int_{S_0} E_n dS = 0 + 2E \int_{S_0} dS = 2ES_0.$$

По теореме Гаусса  $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S_0}{\epsilon_0}$ , следовательно,  $2ES_0 = \frac{\sigma S_0}{\epsilon_0}$ .

Отсюда получаем  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \text{const}$ . Поле однородно.

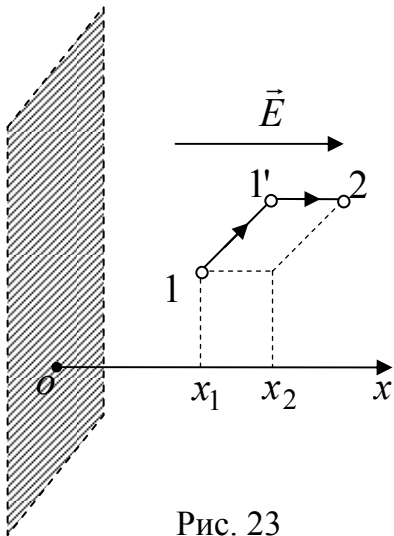


Рис. 23

Для расчета разности потенциалов возьмем две произвольные точки 1 и 2 (рис. 23). Направим ось  $x$  перпендикулярно заряженной плоскости. Рассчитывая разность потенциалов как линейный интеграл от напряженности электростатического поля, учтем, что результат интегрирования не зависит от пути, по которому оно производится. Следовательно, можно выбрать любой удобный путь. Таким путем, например, может быть путь от точки 1 до 1' по прямой, параллельной заряженной плоскости, т.е. вдоль ЭПП, затем из точки 1' до точки 2 в направлении, параллельном оси  $x$  (рис. 23). Тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_l E_l dl = \int_1^{1'} E_l dl + \int_{1'}^2 E_l dl = 0 + \int_{x_1}^{x_2} E_x dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1).$$

Таким образом,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1),$$

где  $\sigma$  следует брать с учетом ее знака.

*Поле двух параллельных равномерно разноименно заряженных бесконечных плоскостей*

Введем обозначения:  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  – поверхностная плотность положительно и отрицательно заряженных плоскостей;  $\vec{E}_+$  – напряженность поля, создаваемая положительно заряженной плоскостью;  $\vec{E}_-$  – напряженность поля, создаваемая отрицательно заряженной плоскостью.

Пусть  $\sigma_+ = |\sigma_-| = \sigma = \text{const}$ . Тогда

$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Рассмотрим три области (рис. 24). По принципу суперпозиции  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ .

В 1-й и 3-й областях  $E = 0$ , во 2-й области  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  совпадают по направлению и результирующее поле

$$E = E_+ + E_- = 2 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \text{const.}$$

Таким образом, поле двух параллельных равномерно разноименно заряженных бесконечных плоскостей однородно и сосредоточено в пространстве между плоскостями.

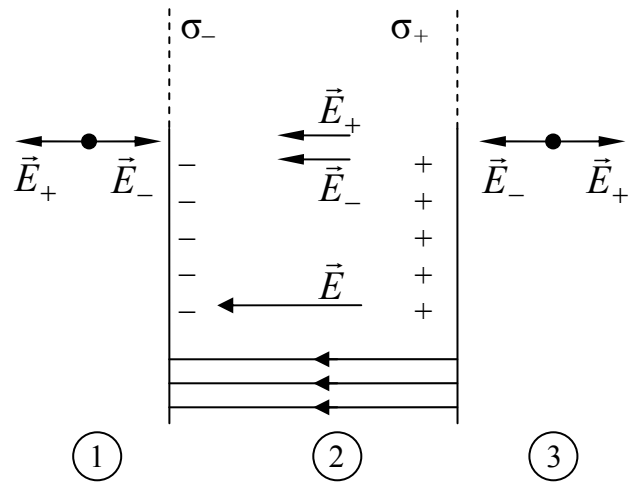


Рис. 24

### 4.3. Поле бесконечной равномерно заряженной цилиндрической поверхности

#### 1. Поле вне равномерно заряженной цилиндрической поверхности

Для характеристики заряженной цилиндрической поверхности введем линейную плотность заряда:  $\lambda = \frac{dq}{dl} = \text{const}$ ,  $\frac{\text{Кл}}{\text{м}}$ , где  $dq$  – заряд на элементе длины  $dl$  цилиндра. Примем  $\lambda > 0$  для определенности.

Из симметрии следует, что в точках, равноотстоящих от оси, свойства поля одинаковы. ЭПП должны иметь вид цилиндрических поверхностей, соосных с нашей. Силовые линии должны идти радиально, перпендикулярно оси цилиндра.

В качестве произвольной замкнутой поверхности  $S$  возьмем цилиндрическую поверхность, имеющую вид прямого цилиндра длиной  $l$  радиуса  $r$ , соосную с заряженной поверхностью радиуса  $R$  (рис. 25). Пусть  $S_0$  – площадь основания цилиндра радиуса  $r$ ,  $S_b$  – площадь боковой поверхности цилиндра.

Тогда поток напряженности через поверхность  $S$

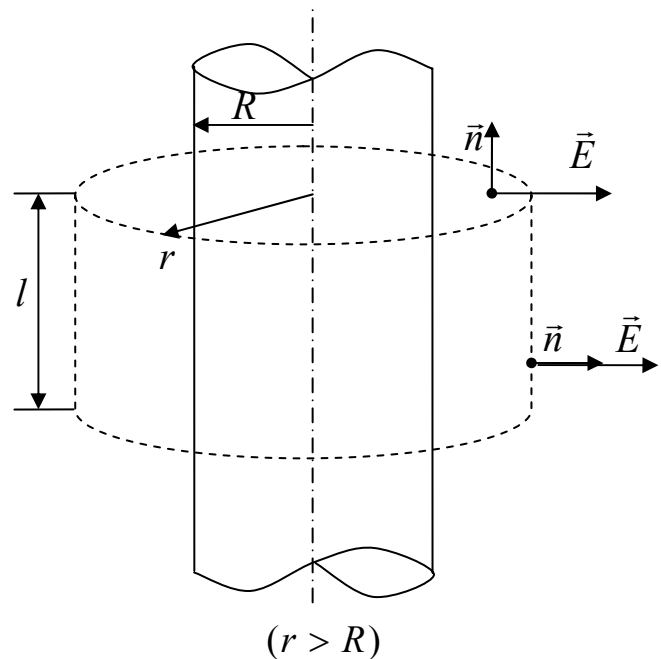


Рис. 25

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = 2 \int_{S_0} E_n dS + \int_{S_b} E_n dS = 0 + E \int_{S_b} dS = E 2\pi r l.$$

По теореме Гаусса  $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$ .

Приравняв два полученных выражения, получим  $\frac{\lambda l}{\epsilon_0} = E 2\pi r l$ , откуда

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}.$$

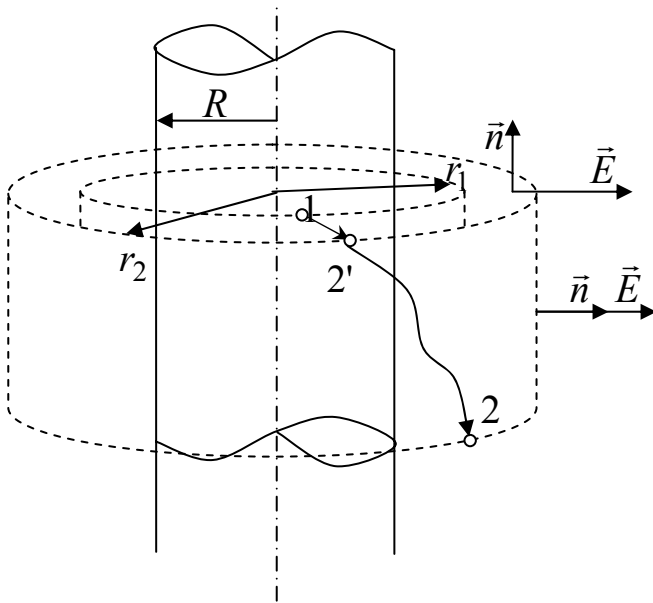


Рис. 26

Для расчета разности потенциалов возьмем две произвольные точки 1 и 2 (рис. 26). Через эти точки построим цилиндрические поверхности радиуса  $r_1$  и  $r_2$ . Рассчитывая разность потенциалов как линейный интеграл от напряженности электростатического поля, учтем, что результат интегрирования не зависит от пути, по которому производится интегрирование. Следовательно можно выбрать любой удобный путь. Таким путем, например, может быть путь от точки 1 до 2' по прямой в радиальном направлении, затем из точки 2' до точки 2 по поверхности цилиндра радиуса  $r_2$  (рис. 26). Тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_l E_l dl = \int_1^{2'} E_l dl + \int_{2'}^2 E_l dl = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr + 0 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi \epsilon_0}.$$

Таким образом,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

где  $\lambda$  следует брать с учетом ее знака.

2. Поле внутри равномерно заряженной цилиндрической поверхности

Рассмотрим случай  $r < R$ . Как и ранее,  $\Phi_E = 2\pi r l E$  (вывод см. выше).

По теореме Гаусса  $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = 0$ , откуда следует  $E = 0$  т.е. поле не

существует.

Так как напряженность электрического поля равна нулю,  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ .

Пространство внутри равномерно заряженной цилиндрической поверхности эквипотенциально.

Графическое представление напряженности электростатического поля заряженной цилиндрической поверхности показано на рис. 27.

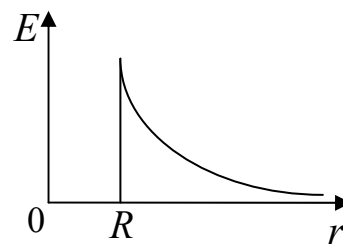


Рис. 27

## 5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ

### 5.1. Диполь в однородном электрическом поле

*Электрический диполь* – система, состоящая из двух разноименных и равных по величине точечных зарядов:  $q_+ = |q_-| = q$ . Расстояние  $l$  между зарядами мало по сравнению с расстоянием до точки наблюдения и называется плечом диполя.

Характеристикой диполя является электрический момент диполя – векторная величина  $\vec{p}_l$ . Вектор  $\vec{p}_l$  направлен от минуса к плюсу и численно равен  $|\vec{p}_l| = ql$  (рис. 28).

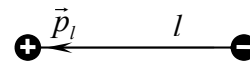


Рис. 28

Рассмотрим электрический диполь, помещенный в однородное электрическое поле. Сила  $\vec{F}$ , действующая на заряд  $q$ , помещенный в электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , равна:  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ . Силы  $\vec{F}_+$  и  $\vec{F}_-$ , действующие на положительный и отрицательный заряды соответственно, равны по величине:

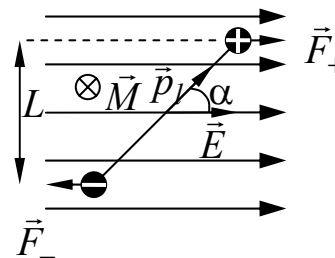


Рис. 29

$|\vec{F}_-| = |\vec{F}_+| = F$ . Являясь противоположными по направлению, эти силы образуют пару сил, приводящую диполь к вращению (рис.29).

*Момент этих сил* равен  $M = FL = Fl \sin \alpha = qEl \sin \alpha = p_l E \sin \alpha$ .

Его можно представить как векторное произведение  $\vec{p}_l$  и  $\vec{E}$ :  $\vec{M} = [\vec{p}_l \vec{E}]$

Наиболее характерные положения диполя:

- 1)  $\alpha = 0$ ,  $\vec{p}_l \uparrow \uparrow \vec{E}$ . Положение устойчивого равновесия;
- 2)  $\alpha = \pi$ . Положение неустойчивого равновесия;
- 3)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Соответствует максимальной величине момента сил  $M$ .

Вращающий момент  $\vec{M}$  стремится развернуть диполь в направлении силовых линий напряженности поля  $\vec{E}$ .

### Потенциальная энергия электрического диполя

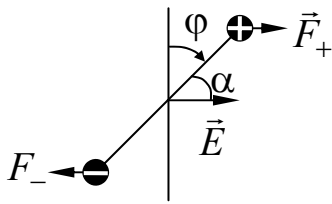


Рис.30

Подсчитаем работу электростатических (консервативных) сил поля по повороту диполя, от  $\alpha = \alpha_1$  до  $\alpha = \alpha_2$ . Элементарная работа сил при вращательном движении:  $\delta A = M d\phi$ . Так как при увеличении  $\phi$  уменьшается  $\alpha$  (рис. 30), то  $d\phi = -d\alpha$ . Поэтому  $\delta A = -M d\alpha = -p_l E \sin \alpha d\alpha$ .

Работа сил поля по повороту диполя на конечный угол

$$A_{\text{к.с}} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -p_l E \sin \alpha d\alpha = -p_l E \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = p_l E (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1).$$

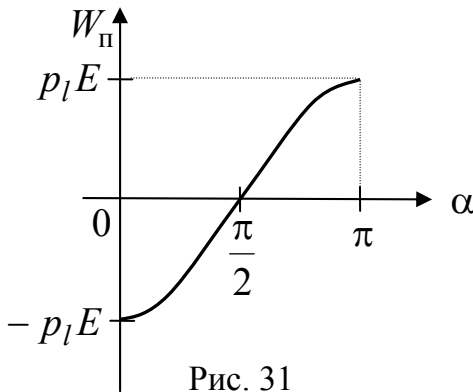


Рис. 31

Эту формулу можно представить в следующем виде:

$$A_{\text{к.с}} = (-p_l E \cos \alpha_1) - (-p_l E \cos \alpha_2) = W_{\pi 1} - W_{\pi 2},$$

где  $W_{\pi}$  – потенциальная энергия диполя,  $W_{\pi} = -p_l E \cos \alpha$ .

На графике рис. 31 самая нижняя точка соответствует положению устойчивого равновесия, а самая верхняя точка – положению неустойчивого равновесия.

## 5.2. Электрический диполь в неоднородном электрическом поле

В неоднородном электрическом поле на электрический диполь действуют разные по величине и направлению силы  $\vec{F}_+ \neq \vec{F}_-$ , приводящие к сложному движению диполя, которое можно рассматривать как суперпозицию вращательного и поступательного движений.

Результирующая сила  $\vec{F}$  – консервативная сила, величина которой определяется градиентом потенциальной энергии, взятым со знаком минус:

$$\vec{F} = -\text{grad} W_{\pi} = +\text{grad}(p_l E \cos \alpha).$$

В первом случае  $F_+ < F_-$  (рис. 32),  $\alpha$  – острый угол,  $\cos \alpha \geq 0$ . Поворот диполя сопровождается его

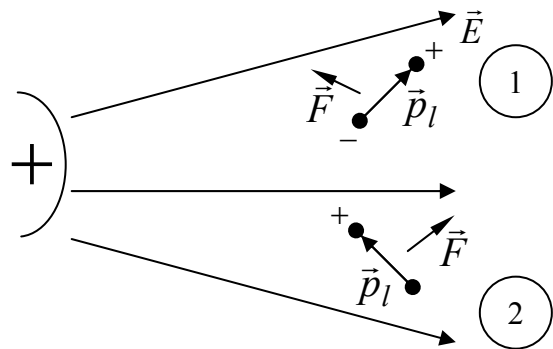


Рис. 32

втягиванием в область более сильного поля.

Во втором случае  $F_+ > F_-$  (рис. 32),  $\alpha$  – тупой угол,  $\cos\alpha < 0$ . Поворот диполя сопровождается его выталкиванием в область менее сильного поля. Затем в результате поворота угол  $\alpha$  становится острым и происходит втягивание диполя в область более сильного поля.

Получим более простое выражение для силы  $\vec{F}$ :

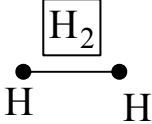
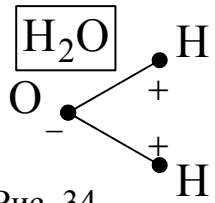
$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = ql \frac{\vec{E}_+ - \vec{E}_-}{l},$$

где  $\vec{E}_+$ ,  $\vec{E}_-$  – напряженности поля в точках расположения соответственно положительного и отрицательного зарядов диполя.

Теперь учтем, что  $ql = p_l$ , и ввиду малости  $l$  справедливо  $\frac{\vec{E}_+ - \vec{E}_-}{l} = \frac{d\vec{E}}{dl}$ .

Тогда получим  $\vec{F} = p_l \frac{d\vec{E}}{dl}$ , где  $d\vec{E}$  – изменение напряженности поля на расстоянии  $dl$ , взятом вдоль направления дипольного момента  $\vec{p}_l$ .

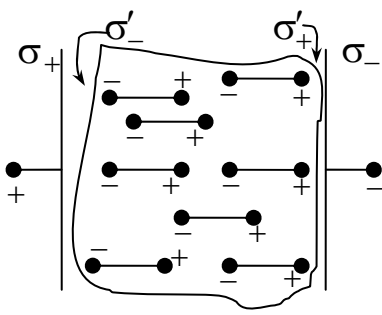
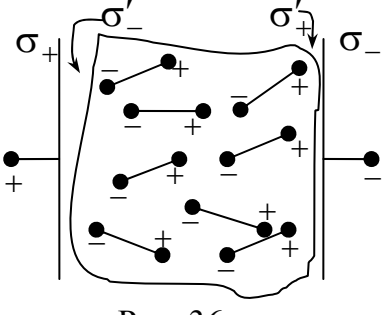
### 5.3. Полярные и неполярные молекулы. Явление поляризации диэлектриков

Неполярные молекулы	Полярные молекулы
<p>Молекулы, у которых заряды расположены симметрично и «центры» положительного и отрицательного зарядов совпадают.</p>  <p>Рис. 33</p>	<p>Молекулы, у которых наблюдается асимметричное распределение положительного и отрицательного зарядов.</p>  <p>Рис. 34</p>
<p>При <math>\vec{E} = 0</math> дипольный момент <math>\vec{p}_l = 0</math>.</p> <p>При <math>\vec{E} \neq 0</math> молекула будет испытывать деформацию. Центры положительного и отрицательного зарядов не будут совпадать: <math>\vec{p}_l \neq 0</math>.</p>	<p>При <math>\vec{E} = 0</math> дипольный момент <math>\vec{p}_l \neq 0</math>.</p> <p>При <math>\vec{E} \neq 0</math> молекула будет испытывать ориентационное влияние: <math>\vec{p}_l \uparrow \uparrow \vec{E}</math>.</p>

Неполярные молекулы	Полярные молекулы
Возникает индуцированный электрический момент, равный $\vec{p}_l = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$ , где $\alpha$ – полярizуемость (характеристика молекулы); $\vec{p}_l \sim \vec{E}$ – упругий диполь.	

Твердое вещество содержит в  $1 \text{ см}^3 \sim 10^{22}$  атомов. В проводнике концентрация свободных носителей заряда (электронов) примерно  $10^{22} \text{ см}^{-3}$ . В диэлектрике практически нет свободных носителей заряда – один свободный электрон на  $10^{14} - 10^{16}$  атомов. Таким образом, в диэлектрике можно пренебречь влиянием свободных электронов. Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются связанными.

Рассмотрим диэлектрик в электрическом поле.

Диэлектрик, состоящий из неполярных молекул	Диэлектрик, состоящий из полярных молекул
 <p style="text-align: center;">Рис. 35</p> <p>Происходит деформация молекул вдоль силовых линий поля. При этом <math>\vec{p}_l \uparrow \uparrow \text{СЛ}</math>.</p>	 <p style="text-align: center;">Рис. 36</p> <p>Происходит два процесса:  1) ориентация диполей вдоль силовых линий поля под действием вращающего момента <math>\vec{M} = [\vec{p}_l \vec{E}]</math>;  2) дезориентация диполей вследствие теплового движения.  Таким образом, происходит преимущественная ориентация диполей по полю.</p>

При помещении диэлектрика в электрическое поле не происходит переноса заряда из одной части диэлектрика в другую. На поверхности диэлектрика появляются нескомпенсированные связанные заряды, характеристикой которых является их поверхностная плотность  $\sigma'$ .

Поляризацией называется процесс, в результате которого сумма электрических дипольных моментов молекул  $\sum_i \vec{p}_{li}$  диэлектрика стано-



вится отличной от нуля.

Для характеристики явления поляризации вводят *вектор поляризации* (измеряется в Кл/м<sup>2</sup>)

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_{li}}{\Delta V},$$

где  $\Delta V$  – физически малый объем (малый в том плане, что поле в нем можно считать однородным, а концентрацию молекул – одинаковой, но в то же время содержащий достаточно большое число молекул);  $\vec{p}_{li}$  – электрический момент  $i$ -го диполя.

Формулу для  $\vec{P}$  можно преобразовать к следующему виду:

$$\vec{P} = \frac{N\vec{p}_l}{\Delta V} = n\vec{p}_l,$$

где  $N$  – число молекул в объеме  $\Delta V$ ;  $\vec{p}_l$  – дипольный момент молекулы;  $n$  – концентрация молекул.

Принимая во внимание, что для неполярных молекул  $\vec{p}_l = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$ , получим прямо пропорциональную зависимость между  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$ :  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$ , где  $\kappa$  – диэлектрическая восприимчивость (безразмерная величина, большая нуля). Такая же связь между  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  справедлива и для диэлектриков, состоящих из полярных молекул.

Для диэлектриков, состоящих из неполярных молекул,  $\kappa$  не зависит от температуры.

Для диэлектриков, состоящих из полярных молекул,  $\kappa \sim \frac{1}{T}$ .

Для ионных кристаллов (представляющих собой гигантскую неполярную молекулу, например NaCl)  $\kappa$  не зависит от температуры.

Материалы, для которых  $\kappa = f(E)$ , называются сегнетоэлектриками.

#### 5.4. Характеристики электрического поля в диэлектрике

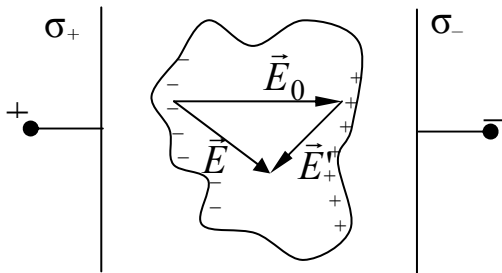


Рис. 37

Рассмотрим диэлектрик, помещенный в электрическое поле, например в поле плоского конденсатора (рис. 37).

Пусть  $\vec{E}_0$  – напряженность поля свободных зарядов,  $\vec{E}'$  – напряженность поля связанных зарядов,  $\vec{E}$  – напряженность результирующего поля в диэлектрике. По принципу суперпозиции  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ .

Для характеристики электрического поля в диэлектрике наряду с вектором напряженности вводится вектор электрической индукции (измеряется в Кл/м<sup>2</sup>):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Учитывая связь вектора поляризации с напряженностью электрического поля  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$ , выражение в определении вектора  $\vec{D}$  можно переписать так:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \kappa \epsilon_0 \vec{E} = (1 + \kappa) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E},$$

где  $1 + \kappa = \epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды. Так как  $\kappa \geq 0$ , то  $\epsilon \geq 1$  (для вакуума  $\kappa = 0$  и  $\epsilon = 1$ ).

Для определения поля внутри диэлектрика и выяснения физического смысла  $\epsilon$  и  $D$  рассмотрим частный случай однородно поляризованного диэлектрика в однородном электрическом поле, напряженность которого равна  $E_0$  (рис. 38),

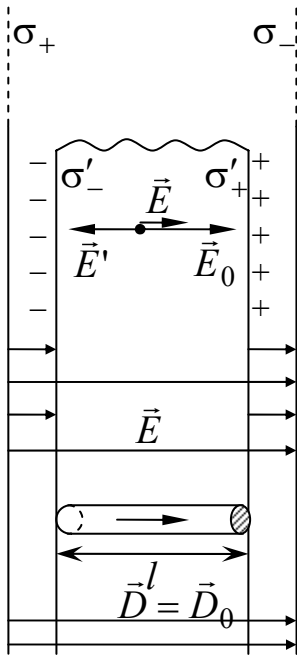


Рис. 38

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

$\sigma_+ = |\sigma_-| = \sigma$  – поверхностная плотность свободного заряда. При этом  $\sigma'_+ = |\sigma'_-| = \sigma'$  – поверхностная плотность связанных зарядов однородно поляризованного диэлектрика.

Составим систему уравнений. Напряженность электростатического поля в диэлектрике

$$E = E_0 - E'. \quad (5.1)$$

Поле, создаваемое связанными зарядами,

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \quad (5.2)$$

Для вычисления модуля вектора поляризации выделим в диэлектрике физически малый объем  $\Delta V$  в виде прямого цилиндра, ось которого параллельна силовым линиям поля, длина равна  $l$ , площадь основания  $dS$ . Рассматриваемый объем можно представить как электрический диполь с зарядом  $\sigma' dS$  и плечом диполя, равным  $l$  (рис. 39). Тогда модуль вектора поляризации

$$P = \frac{\left| \sum_i \vec{p}_{li} \right|}{\Delta V} = \frac{(\sigma' dS)l}{ldS} = \sigma'. \quad (5.3)$$

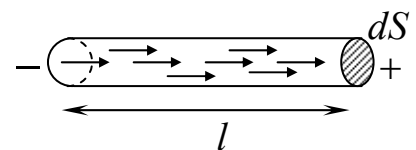


Рис. 39

Таким образом, модуль вектора поляризации численно равен поверхностной плотности свя-

занного заряда. С учетом этого

$$P = \kappa \varepsilon_0 E = \sigma'. \quad (5.4)$$

Подставим (5.4) в (5.2):

$$E' = \frac{\kappa \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} = \kappa E.$$

Подставим полученное выражение в (5.1):

$$E = E_0 - \kappa E,$$

т.е.  $(1 + \kappa)E = E_0$ . Отсюда

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}. \quad (5.5)$$

Следовательно, диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon > 1$  показывает во сколько раз диэлектрик ослабляет электрическое поле.

С учетом (5.5):

$$D = \varepsilon \varepsilon_0 E = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_0}{\varepsilon} = \varepsilon_0 E_0 = D_0. \\ D = D_0. \quad (5.6)$$

Силовые линии вектора электрической индукции непрерывны в диэлектрике, т.е. они начинаются и заканчиваются на свободных зарядах.

В общем случае формулы (5.5) и (5.6) верны только тогда, когда диэлектрик заполняет пространство, ограниченное эквипотенциальными поверхностями.

Можно показать, что в общем случае на границе раздела диэлектрика и вакуума для нормальных составляющих выполняются условия:

$$D_n = D_{0n}, \quad E_n = \frac{E_{0n}}{\varepsilon}.$$

Для тангенциальных составляющих на границе раздела диэлектрика и вакуума выполняются условия:  $E_\tau = E_{\tau 0}$ ,  $D_\tau = \varepsilon \cdot D_{\tau 0}$ .

Силовые линии вектора  $D$  идут непрерывно, силовые линии вектора  $E$  терпят разрыв (рис. 40).

## 6. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ВЕКТОРА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

При наличии диэлектрика электрическое поле создается как свободными, так и связанными зарядами, поэтому теорема Гаусса принимает вид

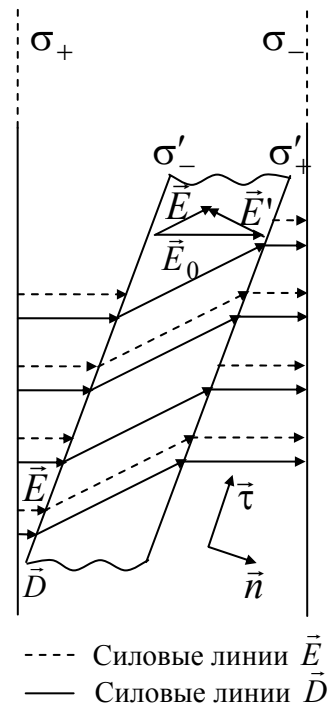


Рис. 40

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q'), \quad (6.1)$$

где  $q$ ,  $q'$  – соответственно свободный и связанный заряды в объеме  $V$ , заключенном внутри произвольной поверхности  $S$  (рис. 41). Теорема в таком виде неудобна для применения из-за наличия в ней связанных зарядов  $q'$ . Но их можно исключить из равенства (6.1).

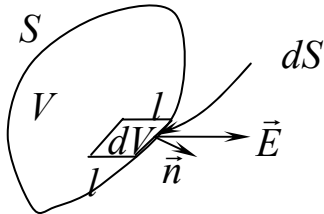


Рис. 41

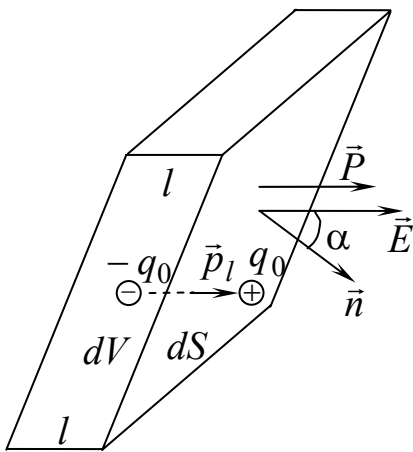


Рис. 42

На рис. 41 и 42 показан элемент  $dS$  поверхности  $S$  с внешней нормалью  $\vec{n}$  и направление электрического поля  $\vec{E}$ . Ограничимся рассмотрением диэлектрика с неполярными молекулами. Для простоты считаем, что при поляризации у каждой молекулы смещается только положительный заряд  $q_0$ . Тогда при поляризации пересекут площадку  $dS$  все положительные заряды, находящиеся в слое на расстоянии длины диполя  $l$  от  $dS$ . Объем, который они покинули, равен  $dV = ldS \cos \alpha$ . Он показан на рис. 41 и в увеличенном виде на рис. 42.

Если концентрация молекул в этом объеме равна  $n$ , то вышедший из объема  $V$  через  $dS$  заряд равен  $dq = q_0 n dV = q_0 n l dS \cos \alpha$ . Учитывая, что  $q_0 l = p_l$  – момент диполя,  $p_l n = P$  – модуль вектора поляризации,  $P \cos \alpha = P_n$  – проекция этого вектора на направление нормали  $\vec{n}$ , получаем  $dq = P_n dS$ . Следовательно, внутри  $V$  останется нескомпенсированный связанный заряд  $dq' = -P_n dS$ . Полный нескомпенсированный связанный заряд, образовавшийся внутри  $V$  вследствие поляризации, выражается так:

$$q' = -\oint_S P_n dS. \quad (6.2)$$

Это равенство представляет собой теорему Гаусса для вектора поляризации: поток вектора поляризации через произвольную замкнутую поверхность  $S$ , взятый со знаком « $\leftarrow$ », равен алгебраической сумме связанных зарядов, заключенных внутри этой поверхности. Подставив (6.2) в (6.1) и объединив поверхностные интегралы, получаем

$$\oint_S (\epsilon_0 E_n + P_n) dS = q.$$

Учитывая, что  $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$  – вектор электрической индукции, приходим к равенству

$$\oint_S D_n dS = q. \quad (6.3)$$

Это равенство представляет собой теорему Гаусса для вектора электрической индукции (вектора электрического смещения): поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен алгебраической сумме свободных зарядов, заключенных внутри этой поверхности.

Учитывая, что  $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$  и что в однородной среде  $\varepsilon$  одинакова во всех точках, теорему Гаусса для однородной среды можно записать в виде

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} q.$$

Пусть свободные заряды распределены по пространству с объемной плотностью  $\rho = \frac{dq}{dV}$ . Тогда в элементарном объеме  $dV$  находится заряд  $dq = \rho dV$ . В этом случае теорему Гаусса (6.3) удобно представить в виде

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV,$$

где  $V$  – объем, заключенный внутри замкнутой поверхности  $S$ .

## 7. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### 7.1. Емкость уединенного проводника

Основными являются следующие типы проводников: металлы, электролиты, плазма.

Остановимся более подробно на металлах. Число свободных носителей заряда (электронов) в металлах  $n \sim 10^{22}$  см<sup>3</sup>, что составляет примерно один свободный электрон на один атом.

Рассмотрим заряженный проводник или незаряженный проводник, находящийся в электростатическом поле (рис. 43). В состоянии равновесия  $E = 0$  внутри проводника. Если  $E \neq 0$ , то свободные носители заряда придут в движение, пока  $E$  не станет равно 0. Из связи разности потенциалов с напряженностью поля следует:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_l E_l \cdot dl = 0 \rightarrow \varphi_1 = \varphi_2,$$

где 1 и 2 – две произвольные точки проводника, т.е. в равновесии все точки проводника эквипотенциальны.

Так как у проводника  $\varphi = \text{const}$ , то  $\vec{E}$  перпендикулярен поверхности проводника (силовые линии ортогональны эквипотенциальной поверхности проводника).

Применим теорему Гаусса для любого объема внутри проводника:

$$\oint_S E_n \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV = 0.$$

Отсюда следует, что  $\rho = 0$  внутри проводника в равновесии. Таким образом, индуцированный или избыточный заряд в равновесии может находиться только на поверхности проводника. На рис. 43 показаны силовые линии электростатического поля при помещении в него проводника.

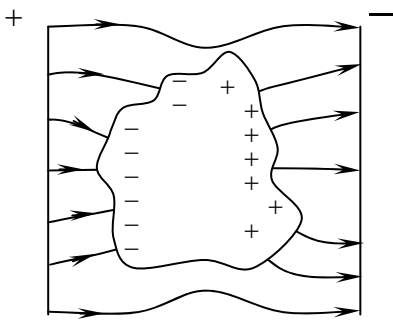


Рис. 43

Можно показать, что между зарядом проводника  $Q$  и его потенциалом  $\varphi$  существует прямо пропорциональная зависимость:  $Q = C\varphi$ , где  $C$  – коэффициент пропорциональности, который называется емкостью уединенного проводника. Таким образом, величина  $C$  численно равна заряду, который необходимо сообщить проводнику, чтобы его потенциал стал равен 1 В.

## 7.2. Емкость плоского конденсатора

Конденсатор – система двух разноименно заряженных равными по абсолютной величине зарядами проводников, таких, что поле, создаваемое ими, сосредоточено между ними. Эти проводники называют обкладками конденсатора.

Рассмотрим систему, состоящую из двух параллельных разноименно заряженных пластин, расстояние между которыми  $d$  много меньше линейных размеров пластин (рис. 44). Такой конденсатор называется плоским конденсатором. Заряды на пластинах удовлетворяют условию  $Q_1 = -Q_2$ ,  $Q_1 = |Q_2| = Q$ .

Разность потенциалов между двумя произвольными точками на одной и другой пластинах выражается формулой

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_l E_l dl = \int_1^{2'} \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} dl + \int_{2'}^2 0 dl = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} d = \frac{Qd}{S\varepsilon \varepsilon_0}.$$

Следовательно, заряд конденсатора пропорционален разности потенциалов между обкладками конденсатора:  $Q = C_k(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

Коэффициент пропорциональности  $C_k$  называется *электроемкостью конденсатора*. Следовательно,

$$C_k = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Таким образом, величина  $C_k$  численно равна заряду, который необходимо сообщить обкладкам конденсатора, чтобы разность потенциалов между ними равнялась 1В.

Для электроемкости плоского конденсатора получаем формулу

$$C_k = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где  $S$  – площадь пластин,  $d$  – расстояние между ними.

Электроемкость  $C_k$  зависит от:

- 1) диэлектрических свойств среды;
- 2) расстояния между пластинами;
- 3) площади пластин.

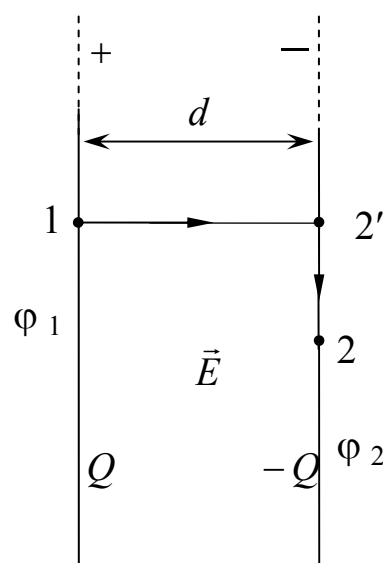


Рис. 44

### 7.3. Электроемкость цилиндрического конденсатора

Цилиндрический конденсатор представляет собой систему двух проводников, в виде коаксиальных цилиндров (рис. 45). На рис. 45  $l$  – длина цилиндров;  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы цилиндров.

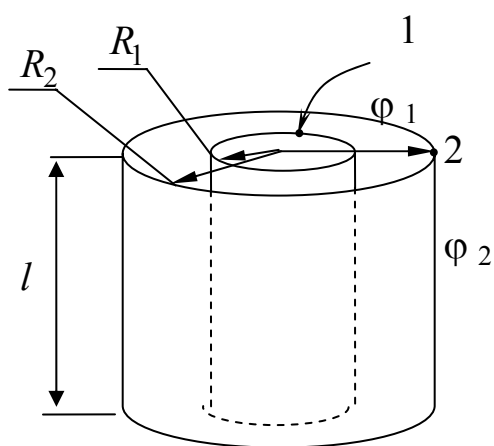


Рис. 45

Пусть  $l \gg R_2 - R_1$ . Тогда можно использовать результат вычисления напряженности поля бесконечно равномерно заряженной цилиндрической поверхности.

Примем во внимание, что поле в пространстве между цилиндрами создается только цилиндрической поверхностью меньшего радиуса  $R_1$ , так как поле, создаваемое поверхностью большего радиуса  $R_2$ , отсутствует. Вследствие этого напряженность поля между обкладками цилиндрического конденсатора выражается так:

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Для разности потенциалов между двумя произвольными точками на одном и другом проводнике запишем равенство:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{Q \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l},$$

где  $\lambda = \frac{Q}{l}$  – линейная плотность заряда внутреннего цилиндра, создающего поле между обкладками конденсатора.

Следовательно, заряд конденсатора и разность потенциалов между его обкладками связаны прямо пропорциональной зависимостью:  $Q = C_k (\varphi_1 - \varphi_2)$ .

Коэффициент пропорциональности  $C_k$  – это емкость цилиндрического конденсатора:

$$C_k = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Емкость  $C_k$  зависит от:

- 1) диэлектрических свойств среды;
- 2) радиусов цилиндров;
- 3) их длины.

#### 7.4. Энергия электрического поля

Рассмотрим потенциальную энергию взаимодействия точечных зарядов. Для двух зарядов  $q_1$  и  $q_2$  эта энергия  $W_3 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}$ , где  $r$  – расстояние между ними.

Рассмотрим систему  $N$  точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . Величина  $\vec{r}_{ik}$  – характеризует положение  $q_k$  относительно  $q_i$ . Тогда:

$$W_{3ik} = \frac{q_i q_k}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{ik}} \text{ – потенциальная энергия взаимодействия } q_k \text{ с } q_i;$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{q_i q_k}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{ik}} \text{ – потенциальная энергия взаимодействия } k\text{-го заряда со}$$

всеми остальными зарядами системы;

$$W_3 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{q_i q_k}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{ik}} \text{ – полная потенциальная энергия взаимодейст-$$

вия системы зарядов.



Множитель  $\frac{1}{2}$  учитывает, что  $W_{\text{э}ik} = W_{\text{э}ki}$ . Преобразуем выражение для  $W_{\text{э}}$ :

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N q_k \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N q_k \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \Phi_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N q_k \Phi_k, \quad (7.1)$$

где  $\Phi_{ik}$  – потенциал, создаваемый  $q_i$  в точке расположения  $q_k$ ;  $\Phi_k$  – потенциал, создаваемый в точке расположения  $q_k$  всеми остальными зарядами системы.

Применим (7.1) к плоскому конденсатору. Для этого разделим пластины конденсатора на заряженные элементарные площадки, которые можно считать точечными зарядами, и пронумеруем их. В этом случае под  $q_k$  следует понимать заряд элементарной площадки с номером  $k$ , а под  $\Phi_k$  – потенциал в точках этой площадки, созданный зарядами всех остальных площадок, кроме площадки с номером  $k$ . Можно показать, что потенциал, создаваемый зарядами площадки в точках, находящихся на этой площадке, стремится к нулю, если площадь ее стремится к нулю. Но тогда  $\Phi_k$  равняется полному потенциалу в точках площадки с номером  $k$ , т.е. потенциалу пластины, на которой находится площадка.

Таким образом, сумму в (7.1) можно представить в виде двух слагаемых:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N q_k \Phi_k = \frac{1}{2} Q' \Phi' + \frac{1}{2} Q'' \Phi'',$$

где  $Q'$  и  $Q''$ ,  $\Phi'$  и  $\Phi''$  – суммарные заряды и потенциалы одной и другой пластины соответственно.

Для плоского конденсатора  $Q' = -Q'' = Q$ .

Формула для энергии электрического поля плоского конденсатора может быть представлена в следующем виде:

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} Q(\Phi' - \Phi'') = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} C_k U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_k}, \quad (7.2)$$

где  $U$  – разность потенциалов между обкладками конденсатора;  $C_k$  – емкость плоского конденсатора. Формула (7.2) оказывается справедливой для конденсатора любой формы.

Получим другое выражение для  $W_{\text{э}}$ . Для этого снова рассмотрим плоский конденсатор и преобразуем формулу для его энергии:

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} C_k (\Phi_1 - \Phi_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} (\Phi_1 - \Phi_2)^2 \frac{d}{d}.$$

Так как  $\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{d} = E$  и  $Sd = V$ , получаем следующее выражение для энергии однородного электрического поля:

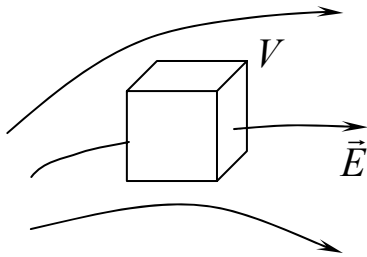


Рис. 46

$$W_э = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V.$$

Введем величину  $w = \frac{W_э}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}$ , которая называется *объемной плотностью энергии*. Тогда  $W_э = wV$ . Это равенство указывает,

что энергия электрического поля распределена по объему, в пределах которого существует электрическое поле, с объемной плотностью  $w$ .

В общем случае неоднородного электрического поля для определения  $W_э$  в объеме  $V$  разобьем его на  $dV$ , такие малые, что в пределах  $dV$  можно считать поле однородным. Тогда  $dW_э = wdV$ .

Таким образом, в общем случае неоднородного электрического поля энергия этого поля, заключенная в объеме  $V$ , будет иметь следующее выражение:

$$W_э = \int_V wdV = \int_V \frac{ED}{2} dV = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И. В. Курс общей физики: Кн.2. – М.: Наука, 1998.
2. Иродов И. Е. Основные законы электромагнетизма. – М.: Высшая школа, 1983 и более поздние издания.
3. Трофимова Т. И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1997 и более поздние издания.
4. Дмитриева В. Ф., Прокофьев В. Л. Основы физики: [Учебник для студентов –заочников]. – М.: Высшая школа, 2001.
5. Калашников С. Г. Электричество. – М.: Наука, 1970 и более поздние издания.
6. Андреев А. Д., Черных Л. М. Физика. Механика: Конспект лекций/ СПбГУТ. – СПб, 2004.

**Андреев Александр Давидович  
Черных Леонид Михайлович**

**ФИЗИКА  
ЭЛЕКТРОСТАТИКА  
Конспект лекций**

**Редактор И.И. Щенсяк**

---

Подписано к печати 29.12.04.  
Объем 2,25 печ. л. Тираж 1830 экз. Зак. 325

---

РИО СПбГУТ. 191186 СПб, наб. р. Мойки, 61  
СТ «Факультет ДВО». 191186 СПб, наб. р. Мойки, 61

