ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»

А. Д. Андреев, С. Н. Колгатин, Л. М.Черных

ФИЗИКА

ВОЛНЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

СПб ГУТ)))

Санкт-Петербург
2015

УДК 537.8(075.8)
ББК 22.236я73
А 65

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры экспериментальной физики СПбГПУ *В. В. Романов*,
доцент кафедры физики СПбГУТ *М. О. Первушина*

Утверждено редакционно-издательским советом СПбГУТ в качестве учебного пособия

Андреев, А. Д.
А65 Физика. Волны : учебное пособие / А. Д. Андреев, С. Н. Колгатин, Л. М. Черных ; СПбГУТ. – СПб., 2015. – 40 с.

Написано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Физика». Содержится теоретический материал по разделу «Волны».

Рекомендуется для самостоятельной работы студентов при подготовке к выполнению упражнений, сдаче коллоквиумов и экзаменов.

Предназначено для студентов технических направлений подготовки всех форм обучения.

УДК 537.8(075.8)
ББК 22.236я73

© Андреев А. Д., Колгатин С. Н., Черных Л. М., 2015
© Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича», 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

1. ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ 5
   1.1. Характеристики волн 5
   1.2. Уравнение бегущей волны 7
   1.3. Волновое уравнение 10
   1.4. Скорость распространения продольной волны в твердом теле 12
   1.5. Скорость распространения поперечной волны в твердом теле 14
   1.6. Энергия, плотность энергии упругой волны 15
   1.7. Поток, плотность потока энергии. Интенсивность волны 16
   1.8. Стоячие волны 19

2. ЭЛЕМЕНТЫ АКУСТИКИ 23
   2.1. Характеристики звука 23
   2.2. Эффект Доплера для звуковых волн 26

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ 29
   3.1. Волновое уравнение для электромагнитных волн как следствие уравнений Максвелла 29
   3.2. Свойства плоской электромагнитной волны 30
   3.3. Энергия, плотность потока энергии электромагнитной волны 33
   3.4. Излучение электрического диполя 34

Список литературы 38

ВВЕДЕНИЕ

Волновые процессы играют огромную роль в природе. Звук, свет, упругие волны в жидкости или в твердом теле – все это примеры волн. Несмотря на существующее разнообразие, волновые процессы описываются математическими уравнениями, имеющими одинаковый вид, и демонстрируют похожие свойства вне зависимости от того, какова природа этих процессов.

Наиболее наглядными являются механические волны, которые каждый из нас наблюдал на поверхности воды. Их изучение позволяет ввести такие характеристики, как скорость и длина волны, волновое число или волновой вектор. Менее очевидна природа звука, который представляет собой волны давления с небольшой амплитудой. Еще труднее понять, почему свет иногда демонстрирует свойства, аналогичные таковым для волн другой природы, – дифракцию, интерференцию, поляризацию.

С развитием физики стало понятно, что единообразие волновых процессов объясняется тем, что описывающие эти процессы волновые уравнения имеют одинаковый вид. Несмотря на одинаковый математический вид окончательного волнового уравнения, исходные соотношения, из которых оно получается, различны для звука, света, упругих волн и определяют специфические свойства одних волн по сравнению с другими.

В этом разделе общей физики мы рассмотрим закономерности, связанные с распространением волн в упругой среде и распространением в пространстве электромагнитных волн.

1. ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

1.1. Характеристики волн

Распространяющиеся в упругой среде механические возмущения, связанные с передачей энергии колебаний от одних частиц среды к другим, называются **упругими волнами**. Внешние тела, вызывающие возмущения в среде, называются **источниками волн**. Распространение волны не сопровождается переносом вещества.

Если колебания частиц среды происходят в направлении распространения волны, то такая упругая волна называется **продольной.** Распространение продольной волны связано с упругими деформациями сжатия и растяжения, создаваемыми в прилегающих к источнику слоях среды. Эти деформации с течением времени под воздействием упругих сил возникают у все более удаленных частиц среды, вовлекая их в колебательное движение [1]. Продольные волны могут существовать в газах, жидкостях и твердых телах.

Если колебания частиц среды происходят в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны, то такая упругая волна называется **поперечной**. Распространение поперечной волны связано с упругими деформациями сдвига, создаваемыми в прилегающих слоях среды источником колебаний. Эти деформации с течением времени под воздействием упругих сил возникают у все более удаленных частиц среды, вовлекая их в колебательное движение [1]. Поперечные волны могут существовать только в твердых телах.

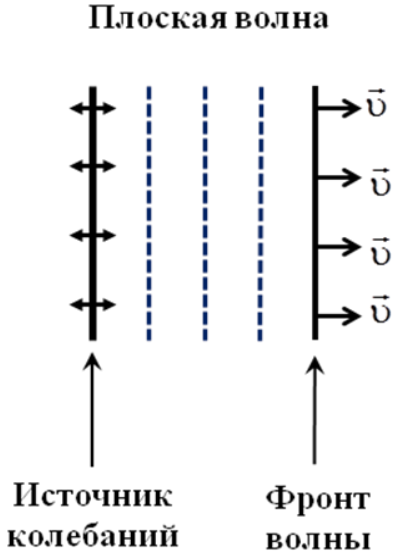

Рис. 1

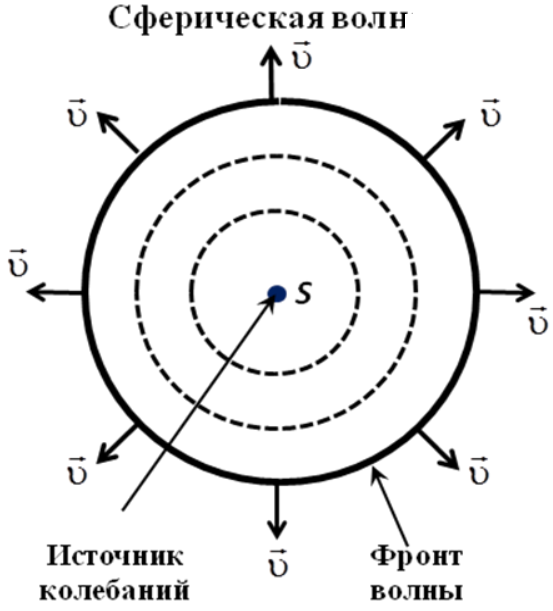

Рис. 2

На свободной поверхности жидкости могут образовываться поверхностные волны. При этом частицы жидкости совершают одновременно поперечные и продольные колебания, двигаясь по эллиптическим траекториям. Сложное движение частиц в поверхностных волнах обусловлено силами гравитации и силами поверхностного натяжения жидкости.

После начала колебаний в источнике распространяющаяся от него волна занимает все новые и новые области пространства. **Фронт волны** представляет собой геометрическое место точек, отделяющих область пространства, занятую волной, от области пространства, в которую волна еще не дошла. Фронт волны перемещается в пространстве со скоростью распространения волны $\vec{\upsilon}$. **Волновая поверхность** – поверхность, проведенная через равновесные положения частиц среды, совершающих колебания в одинаковой фазе. Через каждую точку волнового поля (пространства, занятого волной) проходит одна волновая поверхность. Волновые поверхности неподвижны в отличие от фронта волны, перемещающегося со скоростью $\vec{\upsilon}$.

Если фронт волны и волновые поверхности имеют форму плоскости, то такая волна называется **плоской** (рис. 1). Если фронт волны и волновые поверхности имеют форму сферы, то такая волна называется **сферической** (рис. 2).

На рис. 1 и 2 представлены волны, распространяющиеся в однородной **изотропной** среде, т. е. среде, физические свойства которой одинаковы во всех направлениях. Волновые поверхности обозначены пунктирными линиями. В случае однородной **анизотропной** среды, свойства которой зависят от рассматриваемого направления, скорость волны различна в разных направлениях, что приводит к изменению формы фронта волны и волновых поверхностей по сравнению с изотропной средой. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением плоских и сферических волн, распространяющихся в однородной изотропной упругой среде.

Линия, вдоль которой волна переносит энергию, называется **лучом.** В однородной изотропной среде лучи являются прямыми линиями, перпендикулярными волновым поверхностям и фронту волны.

Волна называется **гармонической**, если колебания частиц среды являются гармоническими, т. е. описываются функциями синуса или косинуса [3]. Расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду (T) колебаний частиц среды, называется **длиной волны** (λ):

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu}, \qquad (1.1)$$

где υ – скорость распространения волны; ν – частота колебаний частиц среды. Из этого определения длины волны следует, что колебания, происходящие в точках, расстояние между которыми в направлении распространения волны равно целому числу (n) длин волн, отличаются по фазе на $n \cdot 2\pi$, рад (радиан).

Произвольная волна может быть представлена как совокупность плоских гармонических волн с различными амплитудами, частотами и скоростями распространения колебаний. Подобное представление основано на возможности разложения функции, описывающей волну, в ряд или интеграл Фурье и принципе суперпозиции. Принцип суперпозиции в данном случае означает, что результирующее движение частицы среды в волне является суммой движений, происходящих под действием гармонических волн, набор которых и представляет результирующую волну. Соответствующая совокупность гармонических волн представляется набором частот и соответствующих им амплитуд и называется амплитудно-частотным спектром. Отсюда следует, что вопросы, связанные с распространением гармонической волны, имеют фундаментальное значение.

1.2. Уравнение бегущей волны

Рассмотрим плоскую продольную гармоническую волну, распространяющуюся в однородной и изотропной упругой среде от источника колебаний S со скоростью $\vec{\upsilon}$ в направлении оси OZ. На рис. 3 на луче, идущем от источника колебаний с координатой $z = 0$ в направлении распространения волны, показана одна из множества частиц среды, совершающих гармонические продольные колебания, – частица A (z – координата положения равновесия рассматриваемой частицы). Пусть ξ – величина отклонения частицы от положения равновесия в данный момент времени.

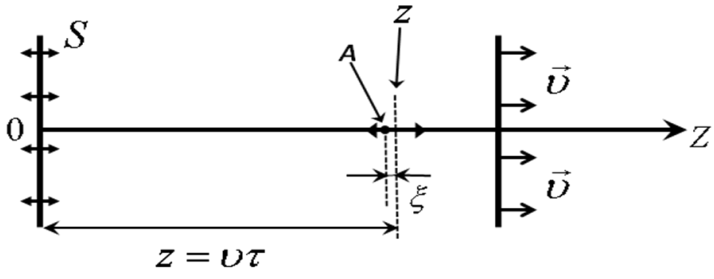

Рис. 3

Уравнение волны представляет собой зависимость смещения ξ некоторой частицы из положения равновесия от координаты положения равновесия z и времени t. Пусть колебания в источнике имеют вид

$$\xi = a\cos(\omega t + \alpha).$$

Колебания частицы A запаздывают по сравнению с колебаниями в источнике на время, равное времени распространения волны от источника

до этой частицы, т. е. на время $\tau = z/\upsilon$.Таким образом, для произвольной точки *A* смещение от положения равновесия можно записать в виде

$$\xi = a\cos\left[\omega(t-\tau)+\alpha\right], \tag{1.2}$$

где a – амплитуда волны; ω – циклическая частота колебаний; α – начальная фаза колебаний в источнике, которую часто полагают равной нулю.

Учтем, что $\tau = \frac{z}{\upsilon}$, и преобразуем уравнение (1.2), положив $\alpha = 0$:

$$\xi(z,t) = a\cos\omega\left(t-\frac{z}{\upsilon}\right). \tag{1.3}$$

Величина

$$\varphi(z,t) = \omega\left(t-\frac{z}{\upsilon}\right) \tag{1.4}$$

называется **фазой волны.** Фазу волны можно преобразовать:

$$\varphi(z,t) = \omega\left(t-\frac{z}{\upsilon}\right) = \omega t - \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{z}{\upsilon} = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda}z = \omega t - kz, \tag{1.5}$$

где величина

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\upsilon} \tag{1.6}$$

называется **волновым числом.**

Таким образом, уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся в направлении *OZ*, может быть записано в виде

$$\xi(z,t) = a\cos\omega(t-\frac{z}{\upsilon}) = a\cos(\omega t - kz). \tag{1.7}$$

Поверхность, во всех точках которой фаза волны одинакова и не меняется со временем, называется **поверхностью постоянной фазы**. В отличие от волновой поверхности, на которой смещение $\xi(z,t)$ переменно (совершает колебания со временем между значениями $+a$ и $-a$), на поверхности постоянной фазы смещение не меняется со временем, как это следует из (1.4). Еще одно существенное отличие поверхности постоянной фазы от волновой поверхности состоит в том, что поверхности постоянной фазы перемещаются в пространстве. Действительно, рассмотрим некоторую поверхность постоянной фазы, имеющую в момент времени t координату z:

$$\varphi(z,t) = \omega\left(t-\frac{z}{\upsilon}\right) = \text{const}. \tag{1.8}$$

Как следует из уравнения (1.8), уравнение поверхности постоянной фазы – это уравнение плоскости. Выразим из (1.8) координату поверхности этой постоянной фазы:

$$z = \upsilon \cdot t - \frac{\upsilon}{\omega} \cdot \text{const}. \qquad (1.9)$$

Для вычисления скорости распространения поверхности постоянной фазы колебаний в бегущей волне возьмем производную по времени от координаты фиксированной фазы колебаний (1.9):

$$\frac{dz}{dt} = \upsilon > 0.$$

Следовательно, поверхность постоянной фазы перемещается со скоростью υ вдоль положительного направления оси *Z*. Это скорость перемещения таких поверхностей постоянной фазы волны, как, например, гребни, впадины, нулевые значения смещения и т. п. Поэтому эту скорость называют **фазовой скоростью волны**. Волновое движение, при котором фазовые поверхности перемещаются с конечной скоростью, называют **бегущей волной**.

Таким образом, (1.7) представляет собой уравнение плоской бегущей гармонической волны, распространяющейся в положительном направлении оси *Z* со скоростью υ.

Для волны, распространяющейся во встречном направлении, т. е. в сторону уменьшения координаты *z*, получим:

$$\frac{dz}{dt} = -\upsilon.$$

Следовательно,

$$\xi(z,t) = a\cos\omega\left(t + \frac{z}{\upsilon}\right) = a\cos(\omega t + kz). \qquad (1.10)$$

Уравнение (1.10) описывает плоскую волну, распространяющуюся в направлении, противоположном положительному направлению оси *OZ*.

Совместим начало координат с источником колебаний (рис. 4). Уравнение бегущей плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении, имеет вид

$$\xi(\vec{r},t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}), \qquad (1.11)$$

где a – амплитуда колебаний; ω – циклическая частота колебаний; $\vec{r}$ – радиус-вектор относительно начала координат любой из точек фронта волны или поверхности постоянной фазы; $\vec{k}$ – **волновой вектор**, имеющий направление скорости распространения волны, т. е. вектора нормали $\vec{n}$ к поверхности постоянной фазы, и равный по величине волновому числу

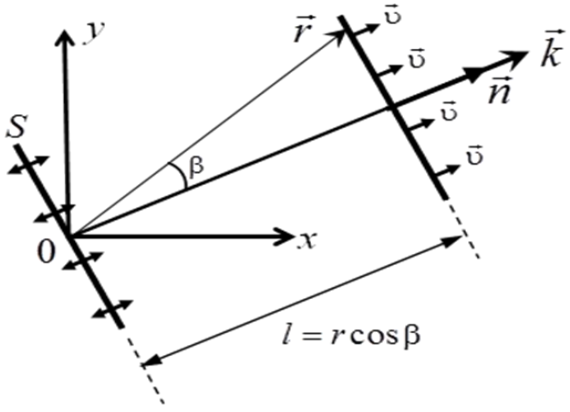

Рис. 4

$$\vec{k} = k\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}\,. \qquad (1.12)$$

Скалярное произведение волнового числа на радиус-вектор равно *kl*, одинаково для всех точек волновой поверхности (рис. 4) и представляет собой запаздывание фазы колебаний в этих точках относительно фазы колебаний в источнике:

$$\vec{kr} = k\vec{n}\vec{r} = kr\cos\beta = kl\,. \qquad (1.13)$$

Найдем уравнение сферической волны. Реальные источники имеют конечные размеры. Рассматривая волны на больших расстояниях от источника, значительно превышающих его линейные размеры, источник можно считать точечным. Испускаемые точечным источником волны в однородной изотропной упругой среде являются сферическими волнами. Если фаза колебаний в источнике равна $\omega t + \alpha$, то фаза колебаний в точках, лежащих на волновой поверхности радиуса *r,* будет следующей:

$$\omega\left(t - r/\upsilon\right) + \alpha = \omega t - kr + \alpha\,,$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; α – начальная фаза колебаний в источнике, которую будем считать равной нулю. Амплитуда сферической волны, как будет показано в п. 1.7, обратно пропорциональна расстоянию *r* от источника. Таким образом, уравнение сферической волны имеет вид

$$\xi(r,t) = \frac{a_0}{r}\cos(\omega t - kr)\,, \qquad (1.14)$$

где a_0 – постоянная величина, численно равная амплитуде колебаний на расстоянии от источника, равном единице.

1.3. Волновое уравнение

Уравнение волны подчиняется дифференциальному уравнению, которое называется **волновым уравнением**. Оно может быть получено с помощью физических законов, описывающих процессы при распространении волн. Волновое уравнение, описывающее распространение волн в однородной изотропной среде, имеет вид

$$\Delta\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\,, \qquad (1.15)$$

где Δ – оператор Лапласа, тогда

$$\Delta\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\,. \qquad (1.16)$$

Покажем, что уравнение бегущей волны

$$\xi = a\cos\omega\left(t - \frac{z}{\upsilon}\right). \qquad (1.17)$$

удовлетворяет волновому уравнению (1.15).

Пусть в однородной и изотропной упругой среде распространяется продольная бегущая волна. Выделим в упругой среде физически малый элемент объема в виде прямого цилиндра, левое основание которого в состоянии равновесия (при отсутствии волны) имеет координату z, а правое основание – координату $z+dz$ (рис. 5). Если вдоль оси z распространяется волна, то рассматриваемый элемент объема совершает колебания около положения равновесия, сопровождающиеся деформациями элемента. В нижней части рис. 5 показано положение этого элемента в некоторый момент времени. Левое основание цилиндра смещено от положения равновесия на величину ξ, а правое основание – на величину $\xi+d\xi$ (рис. 5). Величина $d\xi$ представляет собой абсолютную деформацию цилиндра, вызванную прохождением продольной волны.

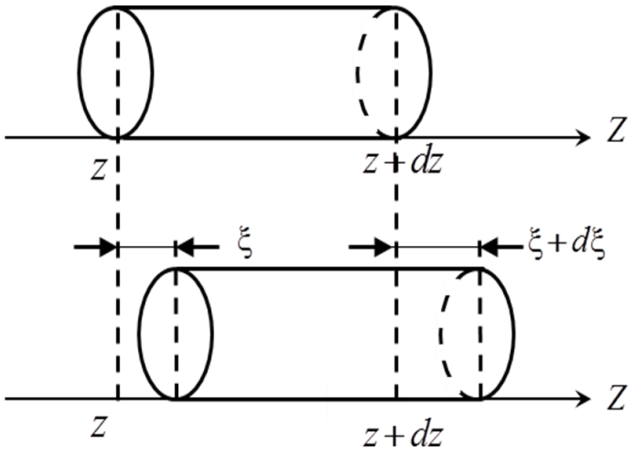

Рис.5

Отношение деформации элемента объема $d\xi$ к длине dz недеформированного элемента (частицы) называется **относительной деформацией** ε:

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dz}. \qquad (1.18)$$

При деформации растяжения (рис. 5) $\varepsilon > 0$. При деформации сжатия $\varepsilon < 0$. Чтобы получить выражение для относительной деформации, следует взять производную от уравнения волны (1.17) по z:

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial z} = \varepsilon_m \sin\omega\left(t - \frac{z}{\upsilon}\right), \qquad (1.19)$$

где $\varepsilon_m = \dfrac{\omega a}{\upsilon}$ – амплитуда относительной деформации.

Вторая производная ξ по координате z определяется формулой

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\frac{a\omega^2}{\upsilon^2}\cos\omega\left(t - \frac{z}{\upsilon}\right). \qquad (1.20)$$

Первая производная ξ по времени характеризует **колебательную скорость** рассматриваемого элемента объема, которую не следует путать со скоростью распространения волны

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \dot{\xi} = -\dot{\xi}_m \sin\omega\left(t - \frac{z}{\upsilon}\right), \qquad (1.21)$$

где $\dot{\xi}_m = \omega a$ – амплитуда колебательной скорости.

Вторая производная ξ по времени характеризует ускорение частицы упругой среды:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -a\omega^2 \cos\omega\left(t - \frac{z}{\upsilon}\right). \qquad (1.22)$$

Сравнивая правые части (1.20) и (1.22), получим волновое уравнение для плоской продольной волны, распространяющейся в направлении оси *Z*,

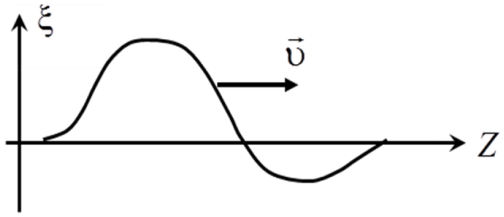

Рис.6

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \qquad (1.23)$$

Полученный результат означает, что уравнение бегущей волны (1.7) удовлетворяет волновому уравнению.

Можно показать, что волновому уравнению (1.23) удовлетворяют любые функции от аргументов $t - z/\upsilon$ и $t + z/\upsilon$, т. е. функции вида $\xi(t - z/\upsilon)$ и $\xi(t + z/\upsilon)$. Такие функции описывают распространение в среде со скоростью υ возмущений произвольной формы (рис. 6). Функция $\xi(t - z/\upsilon)$ соответствует возмущению, движущемуся в положительном направлении оси *Z* (рис. 6), а функция $\xi(t + z/\upsilon)$ – возмущению, движущемуся в противоположном направлении.

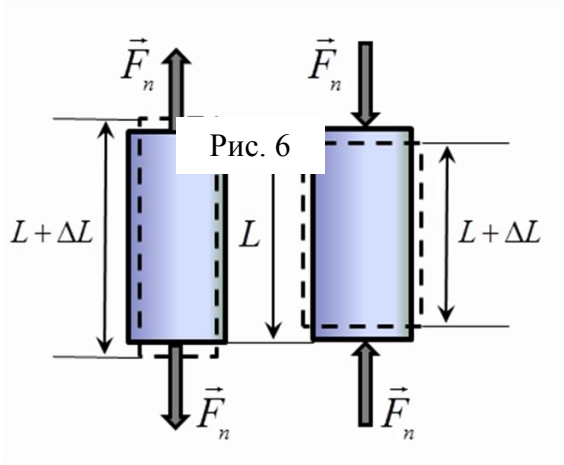

Рис. 7

Рис. 6

1.4. Скорость распространения продольной волны в твердом теле

Распространение продольной волны в твердом теле связано с упругими деформациями сжатия и растяжения. На рис. 7 изображены деформации растяжения (слева) и сжатия (справа) цилиндра длиной *L*, площадью сечения *S* под действием сил F_n, направленных вдоль оси цилиндра перпендикулярно его основанию.

Как показывает опыт, при небольших упругих деформациях относительная деформация ε с хорошей степенью точности оказывается пропорциональной величине **нормального напряжения** $\sigma = F_n / S$:

$$\varepsilon = \alpha\sigma = \frac{1}{E^*}\sigma, \qquad (1.24)$$

где α – коэффициент пропорциональности, зависящий от материала твердого тела. Коэффициент α называется **коэффициентом упругости**, а обратная ему величина E^* – **модулем Юнга**. Равенство (1.24), выражающее закон Гука, может быть записано в виде

$$\sigma = E^* \varepsilon . \qquad (1.25)$$

Для силы нормального напряжения получим

$$F_n = \sigma S = E^* S \varepsilon . \qquad (1.26)$$

Найдем связь скорости распространения продольной волны со свойствами среды, в которой она распространяется.

Пусть в однородном твердом теле распространяется продольная плоская упругая волна в направлении оси Z со скоростью $\vec{\upsilon}$. Выделим в этом теле физически малый объем (рис. 8) в форме прямого цилиндра с осью, совпадающей с осью Z. Введем обозначения: dm – масса цилиндра; dz – длина рассматриваемого цилиндра. Тогда силу $\vec{F}_1$, создающую нормальное напряжение в точках сечения с координатой z, согласно формуле (1.26) можно определить так:

$$F_1 = E^* \cdot S \cdot \varepsilon(z) . \qquad (1.27)$$

Сила $\vec{F}_2$, создающая нормальное напряжение в точках сечения с координатой $z + dz$, в соответствии с (1.26) определяется формулой

$$F_2 = E^* \cdot S \cdot \varepsilon(z + dz) . \qquad (1.28)$$

Относительная деформация среды в точках сечения с координатой $z + dz$ отличается от относительной деформации среды в точках сечения с координатой z и может быть представлена в виде разложения в ряд Тейлора. Ограничившись первыми двумя членами разложения, получим

$$\varepsilon(z + dz) = \varepsilon(z) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \cdot dz + ... \qquad (1.29)$$

Деформация физически малого объема, изображенного на рис. 8, соответствует растяжению: силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлены в противоположные стороны. При деформации сжатия эти силы также направлены в противоположные стороны, но навстречу друг другу. Поэтому, применяя второй закон Ньютона к рассматриваемому физически малому объему и учитывая соотношения (1.27)–(1.29), для результирующей силы, равной $F_2 - F_1$, получим

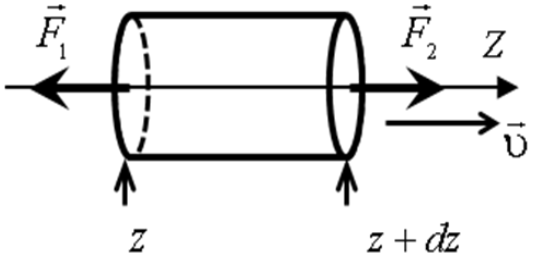

Рис. 8

$$dm\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = F_2 - F_1 = E^* S\left[\varepsilon(z) + \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}dz - \varepsilon(z)\right] = E^* S\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}dz = E^* S\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}dz. \quad (1.30)$$

При переходе к последнему равенству в (1.30) учтено, что $\varepsilon = \frac{d\xi}{dz}$.

Найдем массу dm рассматриваемого объема dV:

$$dm = \rho \cdot dV = \rho S \cdot dz, \quad (1.31)$$

где ρ – плотность материала твердого тела.

После подстановки (1.31) в (1.30) и сокращений приходим к соотношению

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = E^*\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}. \quad (1.32)$$

Сравнивая (1.32) с волновым уравнением

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \quad (1.33)$$

можно сделать вывод, что распространение продольной волны в однородном изотропном твердом теле происходит со скоростью

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E^*}{\rho}}. \quad (1.34)$$

Как видно из (1.34), скорость распространения плоской продольной бегущей волны зависит от упругих свойств и плотности материала, из которого состоит тело.

1.5. Скорость распространения поперечной волны в твердом теле

Распространение поперечной волны в твердом теле связано с упругими деформациями сдвига. На рис. 9 представлена деформация сдвига, при которой все слои твердого тела, параллельные плоскости сдвига *AD*, не искривляясь и не изменяясь в размерах, смещаются параллельно друг другу. Сдвиг происходит под действием силы $\vec{F}_\tau$, приложенной касательно к грани *BC*, параллельной плоскости сдвига. Мерой деформации в этом случае является угол сдвига Ψ, который при малых упругих деформациях пропорционален

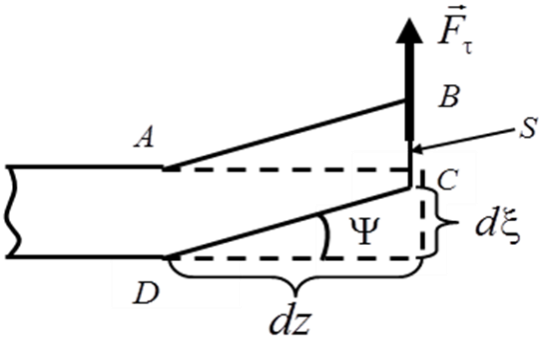

Рис.9

касательному напряжению $\frac{F_\tau}{S}$:

$$\Psi = \frac{1}{G}\frac{F_\tau}{S}, \qquad (1.35)$$

где величина G **называется модулем сдвига** и является характеристикой упругих свойств материала, из которого состоит твердое тело. Как видно из рис. 9, при малых деформациях

$$\Psi \approx \mathrm{tg}\Psi \approx \frac{d\xi}{dz} = \varepsilon. \qquad (1.36)$$

Подставляя в (1.35) вместо Ψ величину ε, получаем выражение для силы

$$F_\tau = G \cdot S \cdot \varepsilon. \qquad (1.37)$$

Равенство (1.36) имеет вид, аналогичный выражению (1.26).

Проводя рассуждения, аналогичные сделанным для продольной волны (1.27)–(1.33) в п. 1.4, приходим к следующей формуле для скорости поперечной волны:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \qquad (1.38)$$

1.6. Энергия, плотность энергии упругой волны

Рассмотрим однородную упругую среду, в которой распространяется продольная плоская бегущая волна в направлении оси Z со скоростью $\vec{\upsilon}$. Выделим в этой среде физически малый объем в форме прямого цилиндра с осью, параллельной оси Z (рис. 8). Используем ранее введенные обозначения: dz – длина, S – площадь поперечного сечения рассматриваемого цилиндра, ρ – плотность упругой среды. Масса рассматриваемого объема dV цилиндра определяется формулой

$$dm = \rho S \cdot dz = \rho \cdot dV. \qquad (1.39)$$

Пусть величина $\partial\xi/\partial t$ представляет собой усредненное по всему физически малому объему dV значение колебательной скорости частиц. Определим кинетическую энергию $dW_к$ в объеме dV:

$$dW_к = \frac{1}{2}dm\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho \cdot dV\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2. \qquad (1.40)$$

Объемная плотность кинетической энергии

$$w_{\text{к}} = \frac{dW_{\text{к}}}{dV} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 . \qquad (1.41)$$

Рассматриваемый объем обладает также потенциальной энергией упругой деформации $dW_{\text{п}}$, для рассмотрения которой вспомним свободные колебания пружины под действием упругой силы $\left(\vec{F}_{\text{упр}}\right)_x = -kx$, где k – жесткость пружины [3]. Потенциальная энергия колебаний, связанная с упругими деформациями пружины, определяется по формуле

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}|Fx|. \qquad (1.42)$$

Учитывая, что в случае упругого объема выражение для силы имеет вид (1.26) и что роль деформации пружины x в данном случае играет деформация объема $d\xi$ (рис. 5), получаем

$$dW_{\text{п}} = \frac{1}{2}E^*S\varepsilon\cdot d\xi = \frac{1}{2}E^*\varepsilon\frac{d\xi}{dz}S\cdot dz = \frac{1}{2}E^*\varepsilon^2\cdot dV . \qquad (1.43)$$

Используя ранее полученное соотношение (1.34), определим объемную плотность потенциальной энергии:

$$w_{\text{п}} = \frac{dW_{\text{п}}}{dV} = \frac{1}{2}E^*\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon^2\varepsilon^2 . \qquad (1.44)$$

Выражение для объемной плотности полной энергии волнового поля получим суммированием плотности кинетической (1.41) и плотности потенциальной (1.44) энергий:

$$w = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon\varepsilon\right)^2 . \qquad (1.45)$$

Используя выражения (1.19) и (1.21), можно показать, что оба слагаемых в (1.45) равны друг другу:

$$w = \frac{1}{2}\rho\omega^2a^2\sin^2(\omega t - kz) + \frac{1}{2}\rho\omega^2a^2\sin^2(\omega t - kz) = \rho\omega^2a^2\sin^2(\omega t - kz) . \qquad (1.46)$$

Таким образом, объемные плотности кинетической и потенциальной энергии в волновом поле бегущей волны одинаковы и зависят одинаково от времени и координаты.

Найдем среднее по времени значение объемной плотности энергии. В случае гармонической волны (1.17) в качестве промежутка времени, по которому проводится усреднение, удобно взять период колебаний. Так как среднее за период значение квадрата синуса равно 0,5, то из (1.46) получаем для среднего за период значения плотности энергии

$$\bar{w} = \frac{1}{2}\rho\omega^2a^2 . \qquad (1.47)$$

Как видно из (1.46) и (1.47), максимальное и среднее значения плотности энергии волны пропорциональны плотности упругой среды ρ, квадрату частоты и квадрату амплитуды колебаний.

1.7. Поток, плотность потока энергии. Интенсивность волны

Для описания процесса переноса волной энергии вводятся величины: **поток энергии, плотность потока энергии, интенсивность волны.**

Потоком энергии через произвольную поверхность S называется величина

$$\Phi = \frac{dW}{dt}, \qquad (1.48)$$

где dW – энергия, перенесенная волной через эту поверхность за время dt. Если за одинаковые промежутки времени Δt волна переносит через поверхность S одинаковую энергию ΔW, то можно сказать, что поток энергии – это энергия, переносимая волной через эту поверхность за единицу времени.

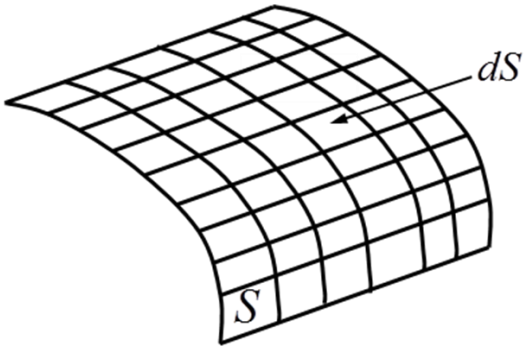

Рис. 10

Через одинаковые по площади участки поверхности S волна может переносить разное количество энергии за один и тот же промежуток времени. Для описания этого различия вводится понятие плотности потока энергии. Разделим поверхность S на элементарные площадки dS (рис. 10), настолько малые, чтобы в пределах выбранной площадки характеристики волны и среды можно было считать одинаковыми. Рассмотрим перенос энергии через одну из таких площадок dS (рис. 11). Проведем ось Z в направлении переноса энергии волной в точках этой площадки. Проведем нормаль $\vec{n}$ к площадке. Пусть α – угол между осью Z и нормалью $\vec{n}$ (рис. 11). Проекция площадки dS на плоскость, перпендикулярную оси Z, определяется формулой

$$dS_{\perp} = dS \cdot \cos\alpha. \qquad (1.49)$$

Площадка $dS_{\perp}$ перпендикулярна направлению переноса энергии волной. Очевидно, что поток энергии через площадки dS и $dS_{\perp}$ одинаков.

Плотностью потока энергии (**вектором Умова**) называется вектор $\vec{j}$, направление которого совпадает с направлением переноса энергии волной, а модуль определяется равенством

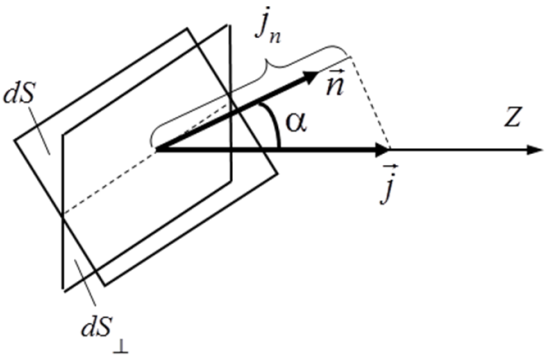

Рис. 11

$$j = \left| \frac{d\Phi}{dS_{\perp}} \right|, \tag{1.50}$$

где $d\Phi$ – поток энергии, перенесенной волной через площадку $dS_{\perp}$, перпендикулярную направлению переноса энергии. Из определения потока энергии (1.48) следует, что модуль плотности потока энергии можно записать следующим образом:

$$j = \left| \frac{dW}{dt \cdot dS_{\perp}} \right|, \tag{1.51}$$

где dW – энергия, перенесенная волной за время dt через площадку $dS_{\perp}$. Из равенств (1.50) и (1.49) следует

$$d\Phi = j \cdot dS_{\perp} = j \cdot dS \cdot \cos\alpha . \tag{1.52}$$

Учтем, что

$$j \cdot \cos\alpha = j_n \tag{1.53}$$

является проекцией плотности потока энергии на направление нормали $\vec{n}$ к площадке dS (рис. 11). Тогда поток через площадку dS можно записать в виде

$$d\Phi = j_n \cdot dS . \tag{1.54}$$

Полный поток через поверхность S может быть найден как сумма потоков через все элементарные площадки dS, на которые разделена эта поверхность (рис. 10):

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S j dS_{\perp} = \int_S j_n dS . \tag{1.55}$$

Найдем связь между плотностью потока энергии $\vec{j}$ и объемной плотностью w этой энергии в бегущей волне. Пусть вектор $\vec{j}$ направлен вдоль оси Z (рис. 12). Через площадку dS, перпендикулярную этой оси, за время dt волна перенесет энергию

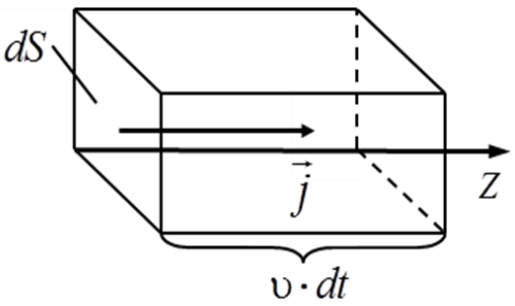

Рис. 12

$$dW = j \cdot dS \cdot dt . \tag{1.56}$$

За это же время dt фронт волны переместится на расстояние $\upsilon \cdot dt$, и волна заполнит энергией объем

$$dV = dS \cdot \upsilon \cdot dt . \tag{1.57}$$

Определим энергию, заключенную в этом объеме:

$$dW = w \cdot dV = w \cdot dS \cdot \upsilon \cdot dt . \tag{1.58}$$

Приравнивая (1.56) и (1.58) и сокращая на $dS \cdot dt$, получаем

$$j = w \cdot \upsilon. \tag{1.59}$$

Учитывая, что вектор плотности потока энергии $\vec{j}$ и вектор скорости волны $\vec{\upsilon}$ в бегущей волне направлены одинаково, можем записать:

$$\vec{j} = w \cdot \vec{\upsilon}. \tag{1.60}$$

В частности, для плоской бегущей гармонической волны, используя выражение (1.46), получаем

$$j = \rho\omega^2 a^2 \upsilon \cdot \sin^2 \omega\left(t - \frac{z}{\upsilon}\right). \tag{1.61}$$

Интенсивностью волны I называется среднее по времени (за период колебаний) значение плотности потока энергии. Из (1.61) получаем

$$I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2 \upsilon. \tag{1.62}$$

Рассмотрим сферическую волну в однородной среде и покажем, что у нее зависимость амплитуды колебаний от расстояния r до источника имеет вид, соответствующий выражению (1.14). Потерями энергии в среде на нагревание и излучение будем пренебрегать. Источник волны считаем расположенным в начале координат: $r = 0$.

Рассмотрим две концентрические сферы, в центре которых находится источник волны: одна радиуса r_0, другая радиуса r. Пусть $r > r_0$. Очевидно, средний за период поток энергии, проходящий через эти две сферы, должен быть одинаков ввиду отсутствия потерь энергии:

$$\Phi(r) = \Phi(r_0). \tag{1.63}$$

Интенсивность волны и ее амплитуда во всех точках каждой из этих сфер должны быть одинаковыми ввиду одинаковой удаленности точек от источника. Используя выражение (1.55) для потока, учитывая, что в данном случае плотность потока направлена по нормали к поверхностям сфер и, следовательно, $j_n = j$, получаем из (1.63)

$$I(r) \cdot 4\pi r^2 = I(r_0) \cdot 4\pi r_0^2, \tag{1.64}$$

где $I(r)$ и $I(r_0)$ – интенсивность на расстояниях соответственно r и r_0 от источника. Отсюда

$$I(r) = \frac{r_0^2}{r^2} \cdot I(r_0), \tag{1.65}$$

т. е. плотность потока энергии и интенсивность в сферической волне убывают обратно пропорционально квадрату расстояния от источника волны. Формула (1.62), связывающая интенсивность с амплитудой волны, была получена для плоской волны. Однако все выкладки, с помощью которых она была получена, остаются справедливыми и для сферической

волны с заменой координаты z на r. Подставляя теперь (1.62) в равенство (1.65), для амплитуды волны получим

$$a(r) = \frac{r_0}{r} \cdot a(r_0), \tag{1.66}$$

где $a(r)$ и $a(r_0)-$ амплитуды колебаний в сферической волне на расстояниях соответственно r и r_0 от источника. Обозначая $r_0 \cdot a(r_0) = a_0$, получаем амплитуду, как в формуле (1.14). Таким образом, амплитуда колебаний в сферической волне убывает обратно пропорционально расстоянию от источника волны.

1.8. Стоячие волны

Стоячая волна образуется при наложении двух распространяющихся навстречу друг другу плоских волн с одинаковым направлением колебаний с равными частотами и амплитудами. Так происходит, например, при сложении падающей и отраженной от преграды бегущей волны.

Рассмотрим основные особенности стоячей волны.

Пусть вдоль оси Z распространяются навстречу друг другу две волны, уравнения которых имеют вид

$$\xi_1(z,t) = a\cos(\omega t - kz); \tag{1.67}$$

$$\xi_2(z,t) = a\cos(\omega t + kz). \tag{1.68}$$

Результирующее колебание является суммой этих колебаний:

$$\xi(z,t) = \xi_1(z,t) + \xi_2(z,t) = a[\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz)]. \tag{1.69}$$

Применяя известную тригонометрическую формулу, приходим к выражению

$$\xi(z,t) = 2a \cdot \cos kz \cdot \cos \omega t = 2a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \cdot \cos \omega t. \tag{1.70}$$

При переходе к последнему выражению учтена формула (1.6), дающая связь волнового числа k и длины волны λ. Полученное выражение называется уравнением стоячей волны.

Величину

$$A(z) = \left|2a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right)\right| \tag{1.71}$$

называют амплитудой стоячей волны. Из выражения (1.70) следует, что колебания в стоячей волне происходят с частотой ω, равной частоте складываемых волн. Амплитуда волны (1.71) зависит от координаты z. В точках среды, где

$$\frac{2\pi z}{\lambda} = \pm m\pi, \quad m = 0, 1, 2, ..., \tag{1.72}$$

амплитуда стоячей волны максимальна: $A_{\max} = 2a$. Такие точки называются пучностями стоячей волны. Как следует из (1.72), пучности имеют следующие координаты:

$$z_{\max} = \pm m\frac{\lambda}{2}. \tag{1.73}$$

В точках среды, где

$$\frac{2\pi z}{\lambda} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad m = 0, 1, 2, ..., \tag{1.74}$$

амплитуда стоячей волны равна нулю: $A_{\min} = 0$. Такие точки называются узлами стоячей волны. Координаты узлов стоячей волны следующие:

$$z_{\min} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}. \tag{1.75}$$

Расстояния между двумя соседними узлами или между двумя соседними пучностями одинаковы и равны половине длины бегущей волны.

Из уравнения (1.70) следует, что фаза колебаний в стоячей волне одинакова для всех точек между двумя ближайшими узлами. В точках, разделенных узлом, колебания происходят в противофазе, т. е. их фаза колебаний отличается на π.

Рассмотрим распределение энергии упругих колебаний в стоячей волне. Для вычисления объемной плотности кинетической и потенциальной энергии получим выражение для колебательной скорости частиц, взяв от смещения (1.70) производную по времени, и выражение для относительной деформации в упругой среде, взяв от смещения (1.70) производную по координате z:

$$\dot{\xi}(z,t) = \frac{\partial\xi}{\partial t} = -2a\omega \cdot \cos kz \cdot \sin\omega t; \tag{1.76}$$

$$\varepsilon(z,t) = \frac{\partial\xi}{\partial z} = -2ak \cdot \sin kz \cdot \cos\omega t. \tag{1.77}$$

Теперь напишем уравнения для объемной плотности кинетической энергии, используя выражения (1.41) и (1.76), и для объемной плотности потенциальной энергии в стоячей волне, используя выражения (1.44) и (1.77):

$$w_к(z,t) = \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 = w_m \cdot \cos^2 kz \cdot \sin^2\omega t; \tag{1.78}$$

$$w_п(z,t) = \frac{\rho}{2}\upsilon^2\varepsilon^2 = w_m \cdot \sin^2 kz \cdot \cos^2\omega t, \tag{1.79}$$

где

$$w_m = 2\rho a^2\omega^2 \tag{1.80}$$

– максимальное значение объемных плотностей кинетической и потенциальной энергии.

На рис. 13 построены зависимости отклонения частиц от положения равновесия ξ(z) и их относительной деформации ε(z) в момент времени, когда они достигают максимальных по модулю значений. Как видно из выражений (1.70) и (1.77), это происходит одновременно у всех частиц среды. Через время, кратное периоду колебаний, ситуация, представленная на рис. 13, повторяется. Будем считать, что рис. 13 соответствует начальному моменту времени $t=0$. В этот момент времени, как следует из (1.79), потенциальная энергия частиц максимальна, колебательная скорость частиц (1.76) и их кинетическая энергия (1.78) равны нулю. При этом, как видно из рис. 13, наибольших значений величина ε достигает в окрестности узлов, где $\xi(z)=0$. Потенциальная энергия также максимальна в окрестности узлов.

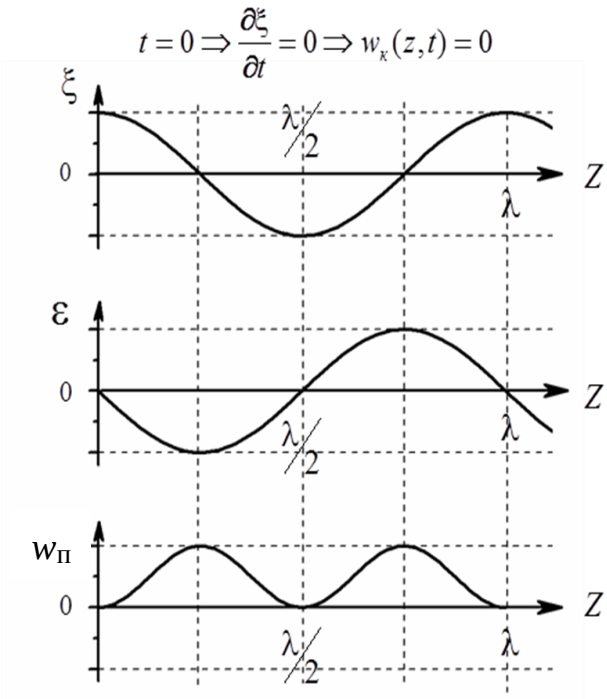

Рис. 13

На рис. 14 показан один из моментов, например при $t=T/4$, когда частицы проходят через положения равновесия ($\xi=0$). При этом модуль колебательной скорости всех частиц достигает максимальных значений. Относительная деформация равна нулю. Кинетическая энергия частиц достигает максимума, а их потенциальная энергия равна нулю.

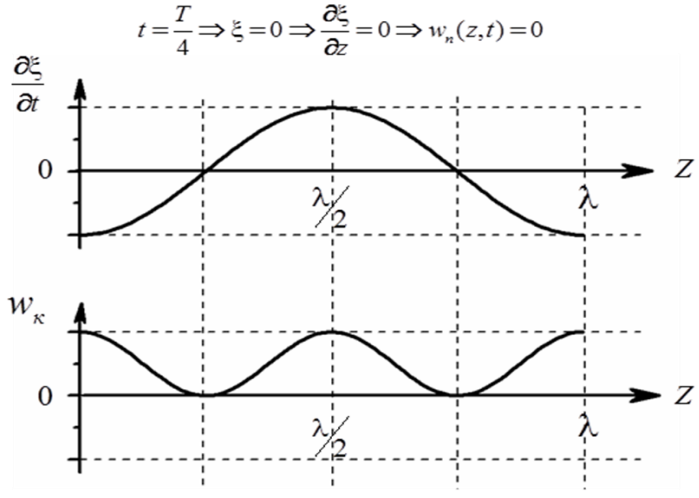

Рис. 14

Как следует из рис. 14, наибольшие значения колебательной скорости имеют место в пучностях, соответственно и кинетическая энергия концентрируется в окрестности пучностей.

Таким образом, в те моменты времени, когда кинетическая энергия частиц среды принимает максимальные значения, потенциальная энергия частиц равна нулю. И наоборот, когда потенциальная энергия частиц среды

принимает максимальные значения, их кинетическая энергия равна нулю. В этом существенное отличие стоячей волны от бегущей. Максимальные значения кинетической и потенциальной энергий частиц равны по величине.

В стоячей волне происходит периодический обмен энергией между пучностями и узлами. Перенос энергии в одном направлении отсутствует: стоячая волна не переносит энергию.

Стоячая волна образуется, например, в закрепленной с обеих сторон струне (рис. 15). При возбуждении поперечных колебаний в струне на ее концах образуются узлы. Таким образом, на длине струны ℓ может укладываться целое число полуволн:

$$\ell = \frac{\lambda}{2} n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (1.81)$$

Используя (1.1), выразим частоту через длину волны:

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda}, \qquad (1.82)$$

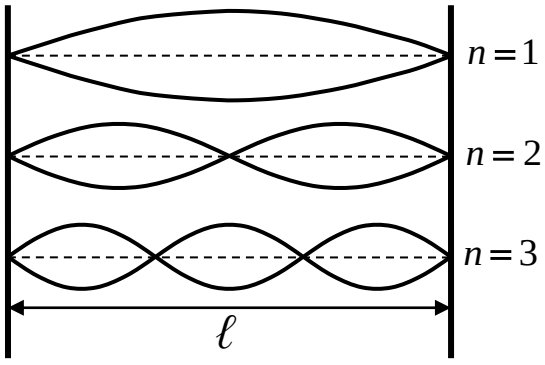

Рис. 15

затем подставим в (1.82) выражение для длины волны, которое следует из (1.81). Приходим к следующему выражению для частоты:

$$\nu = \frac{\upsilon}{2\ell} n. \qquad (1.83)$$

При этом $n = 1$ соответствует **основной частоте**, значениям $n = 2, 3\ldots$ соответствуют частоты, называемые **обертонами.**

2. ЭЛЕМЕНТЫ АКУСТИКИ

2.1. Характеристики звука

Акустика изучает характеристики и особенности звуковых волн. Ухо человека воспринимает звуковые волны в диапазоне от 16 Гц до 20 кГц. Звуковые волны, частоты которых меньше 16 Гц, называются инфразвуком. Звуковые волны, частоты которых больше 20 кГц, называются ультразвуком.

Различают субъективные и физические характеристики звука. К субъективным характеристикам звука относятся **высота** звука, **тембр** звука и **громкость** звука. Им соответствуют определенные физические характеристики звуковых волн.

Высота звука определяется частотой звуковых волн. Чем больше частота, тем выше звук. Тембр определяется спектральным составом звуковой волны, т. е. тем, какие частоты колебаний присутствуют в звуковой волне и каковы амплитуды этих колебаний. В звуке, испускаемом камертоном, присутствует только одна частота (ν) колебаний (рис. 16, где *I* – интенсивность звуковой волны). Если в звуковой волне присутствует набор колебаний дискретных частот, то спектр такого звука называется линейчатым (рис. 17). Если же в спектре присутствуют колебания всех частот в некотором диапазоне, то спектр называется сплошным (рис. 18). На рис. 18 *dI* – интенсивность звука, приходящаяся на интервал частот от ν до ν + *d*ν. Возможны также смешанные спектры, когда на фоне сплошного спектра выделяются колебания с большей интенсивностью (рис. 19). Такой спектр называется смешанным.

Рис. 16

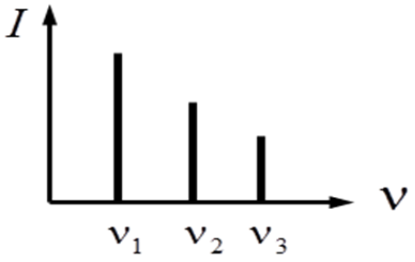

Рис. 17

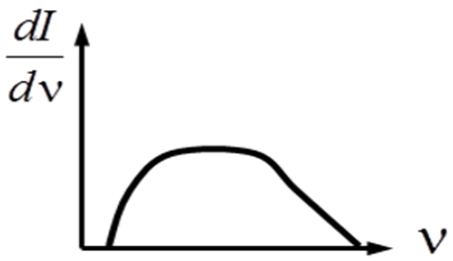

Рис. 18

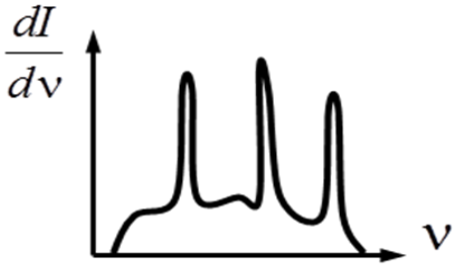

Рис. 19

Акустические волны являются частным случаем упругой волны. Поэтому для их описания применяются те же характеристики и методы, что и для описания других типов упругих волн. В частности, такая характеристика, как интенсивность, связана с громкостью звука. Оказалось, что субъективному небольшому изменению громкости соответствует значительное изменение интенсивности. Поэтому была введена специальная характеристика – **уровень громкости**, – примерно пропорциональная субъективной громкости. **Уровнем громкости** называется величина

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \qquad (2.1)$$

где I – интенсивность звуковой волны; I_0 – некоторая пороговая интенсивность. Человек воспринимает звук, начиная с некоторой минимальной интенсивности. Для частоты ν = 1000 Гц у человека со средним слухом эта интенсивность $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2, такая интенсивность называется **порогом слышимости**. Для порога слышимости уровень громкости $L = 0$. Человек воспринимает звук в очень широком диапазоне интенсивностей. При больших интенсивностях человек начинает ощущать боль в ушах. Интенсивность звука $I = 1$, Вт/м^2, при которой это начинается, называется **порогом болевого ощущения**. Для порога болевого ощущения уровень громкости L = 120 дБ (уровень интенсивности измеряется в децибелах). Как следует из формулы (2.1), изменение интенсивности в 10 раз соответствует изменению уровня громкости на 10 дБ.

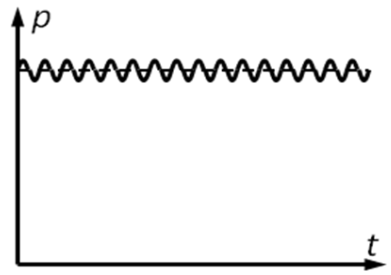

Рис. 20

Еще одна специфическая величина, принятая для характеристики звуковых волн, – **акустическое давление.** Акустическое давление – это давление, создаваемое звуковой волной. В случае волны, распространяющейся в воздухе, это давление накладывается на атмосферное давление (рис. 20). На рис. 20 пунктиром показано атмосферное давление, а сплошной линией – суммарное давление (амплитуда акустического давления на этом рисунке многократно увеличена). Получим формулу для акустического давления. Если F – сила давления на площадку площадью S, создаваемая прохождением звуковой волны, то акустическое давление

$$p_{\text{АК}} = \frac{F}{S}. \qquad (2.2)$$

Как следует из (2.2), акустическое давление – это не что иное, как напряжение, создаваемое прохождением звуковой волны. Поэтому для акустического давления справедливы те же формулы, что и для напряжения σ. Как следует из (1.25), (1.34) и (1.19),

$$\sigma = E^* \cdot \varepsilon = \rho\upsilon^2 \frac{\omega a}{\upsilon} \sin(\omega t - kr) = \rho\upsilon\omega a \sin(\omega t - kr).$$

Для гармонической звуковой волны

$$p_{\text{АК}} = p_{\text{АК}\,m} \sin(\omega t - kr) = p_{\text{АК}\,m} \sin\omega(t - r/\upsilon), \qquad (2.3)$$

где
$$p_{\text{АК}\,m} = \rho a\omega\upsilon = a\omega Z \qquad (2.4)$$

– амплитуда акустического давления; ρ – плотность среды; a – амплитуда волны; ω – циклическая частота; υ – скорость волны; $Z = \rho\upsilon$ – **акустическое сопротивление среды**. Акустическое сопротивление среды играет важную роль в акустике. Соотношение акустических сопротивлений сред, находящихся у границы раздела, определяет коэффициенты отражения и преломления волны на границе и соотношение фаз падающей и отраженной волн. Например, если акустические сопротивления сред у границы раздела одинаковы, то отражения волны от такой границы не происходит.

Учитывая, что для интенсивности волны справедлива формула (1.62), запишем:

$$I = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2\upsilon = \frac{1}{2}a^2\omega^2 Z. \qquad (2.5)$$

Получаем следующую связь между интенсивностью звуковой волны и амплитудой акустического давления:

$$I = \frac{p_{\text{АК}\,m}^2}{2Z}, \qquad p_{\text{АК}\,m} = \sqrt{2ZI}\,. \qquad (2.6)$$

При разговоре средней громкости уровень громкости L = 60 дБ, что соответствует интенсивности $I_0 = 10^{-6}$ Вт/м^2. Для звуковой волны такой интенсивности, частотой ν = 1000 Гц, распространяющейся в воздухе ($\rho = 1{,}3$ кг/м^3, $\upsilon = 330$ м/с), из формул (2.6) и (2.4) находим амплитуду акустического давления и амплитуду колебаний частиц воздуха: $p_{\text{АК}\,m} = 0{,}03$ Па, $a = 0{,}01$ мкм.

Для скорости звуковой волны в газе можно получить следующее выражение [1]:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \qquad (2.7)$$

где p – термодинамическое давление газа; γ – отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме. Преобразуем (2.7) с помощью уравнения Менделеева–Клапейрона

$$p = \frac{\rho RT}{M}, \tag{2.8}$$

где R = 8,3 Дж/(моль К) – универсальная газовая постоянная; T – температура газа; M – масса моля газа. Тогда от формулы (2.7) можно перейти к следующему выражению:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}. \tag{2.9}$$

При нормальных условиях ($p = 10^5$ Па; $\rho = 1{,}3$ кг/м^3; $\gamma = 1{,}4$) из (2.7) находим, что скорость звука в воздухе равна 330 м/с.

2.2. Эффект Доплера для звуковых волн

Если источник и приемник звука неподвижны относительно среды, в которой распространяется звук, то частота звуковой волны, излучаемой источником, равна частоте волны, воспринимаемой приемником. Изменение частоты звука, воспринимаемого приемником, при перемещении источника и приемника относительно среды, в которой распространяется звуковая волна, называется **эффектом Доплера**. Рассмотрим причины, приводящие к эффекту Доплера.

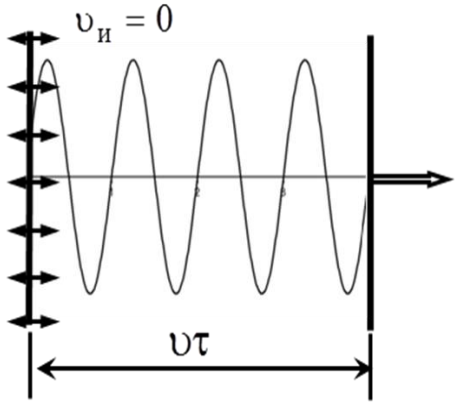

Рис. 21

На рис. 21 показан неподвижный источник, излучающий плоскую звуковую волну. Черные стрелки показывают колебания источника при излучении. Пусть за время τ источник совершил N полных колебаний. За это время фронт волны окажется на расстоянии $N\lambda$ от источника, где λ – длина излучаемой волны. Если скорость распространения волны в среде равна υ, то справедливо следующее равенство:

$$\upsilon\tau = N\lambda. \tag{2.10}$$

Пусть теперь источник движется по направлению к приемнику со скоростью $\upsilon_и$. За время τ он пройдет расстояние $\upsilon_и \cdot \tau$ (рис. 22). Фронт волны движется в среде со скоростью υ и к моменту τ фронт окажется на расстоянии $(\upsilon - \upsilon_и)\tau$ от источника. Поскольку за это время источник

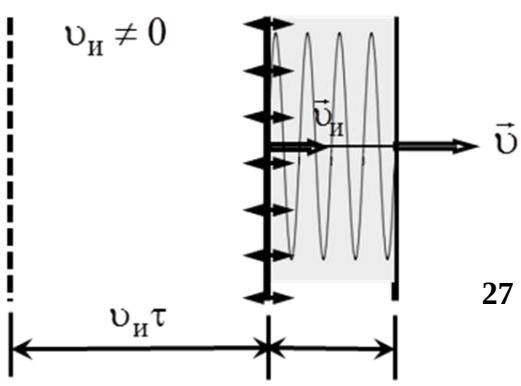

Рис.22

совершит N колебаний и излучит N длин волн, то имеет место равенство

$$(\upsilon - \upsilon_и)\tau = N\lambda', \qquad (2.11)$$

где λ' – длина волны, излучаемая движущим Рис. 22 ком. Разделим равенство (2.11) на равенство (2.10) и выразим из полученного соотношения λ':

$$\lambda' = \lambda \frac{\upsilon - \upsilon_и}{\upsilon}. \qquad (2.12)$$

Из формулы (2.12) и из рис. 22 видно, что при движении источника в направлении излучаемой звуковой волны ее длина уменьшается. Таким образом, мимо приемника проходит волна со скоростью υ и длиной λ'. Учитывая связь длины волны и частоты ($\lambda = \upsilon/\nu$, $\lambda' = \upsilon/\nu'$, где ν – частота волны, излучаемой неподвижным источником, ν' – частота волны, излучаемой движущимся источником), из (2.12) получим формулу для частот

$$\nu' = \nu \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_и}. \qquad (2.13)$$

Из (2.13) видно, что при движении источника по направлению к приемнику частота волны, принимаемой приемником, увеличивается.

В случае прямолинейного движения источника в сторону от приемника со скоростью $\upsilon_и$ аналогичные предыдущим рассуждения приводят к выводу, что длина волны, излучаемой источником, возрастает:

$$\lambda' = \lambda \frac{\upsilon + \upsilon_и}{\upsilon}. \qquad (2.14)$$

Частота, принимаемая приемником, при движении источника от приемника уменьшается:

$$\nu' = \nu \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_и}. \qquad (2.15)$$

Рассмотрим, как влияет движение приемника на воспринимаемую им частоту.

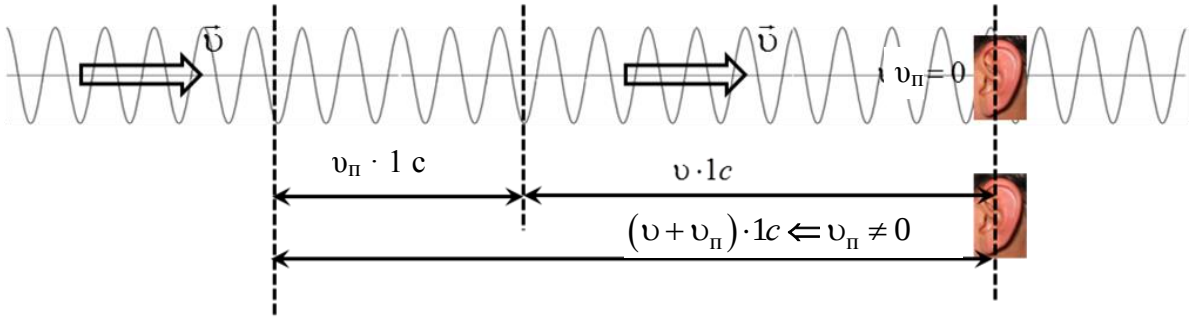

Рис. 23

На рис. 23 показана волна, проходящая мимо неподвижного приемника (уха человека). За 1 с волна проходит расстояние $\upsilon \cdot 1\,\text{с}$, и все колебания, которые укладываются на этом отрезке, будут восприняты приемником. Число колебаний равно частоте колебаний

$$\nu = \frac{\upsilon \cdot 1}{\lambda}. \tag{2.16}$$

Пусть теперь приемник движется со скоростью $\upsilon_{\text{п}}$ по направлению к источнику. Это равнозначно движению волны относительно приемника со скоростью $\upsilon + \upsilon_{\text{п}}$. За 1 с мимо приемника пройдут колебания, которые укладываются на отрезке $(\upsilon + \upsilon_{\text{п}}) \cdot 1\,\text{с}$. Число колебаний равно частоте, принимаемой приемником,

$$\nu' = \frac{(\upsilon + \upsilon_{\text{п}}) \cdot 1\,\text{с}}{\lambda}. \tag{2.17}$$

Разделив (2.17) на (2.16), выразим из полученного соотношения частоту, воспринимаемую приемником:

$$\nu' = \nu \frac{\upsilon + \upsilon_{\text{п}}}{\upsilon}. \tag{2.18}$$

Таким образом, при движении приемника навстречу источнику частота, воспринимаемая приемником, возрастает.

Если же приемник двигается от источника со скоростью $\upsilon_{\text{п}}$, то скорость волны относительно приемника станет равной $\upsilon - \upsilon_{\text{п}}$. Повторяя предыдущие рассуждения, для частоты, принимаемой приемником, получим формулу

$$\nu' = \nu \frac{\upsilon - \upsilon_{\text{п}}}{\upsilon}. \tag{2.19}$$

Если происходит одновременно движение и источника и приемника, то имеют место оба эффекта: изменяется длина волны в среде, излучаемая источником, и изменяется скорость волны относительно приемника. В этом случае формулы (2.13), (2.15), (2.18), (2.19) могут быть обобщены следующим образом:

$$\nu' = \nu \frac{\upsilon \pm \upsilon_{\text{п}}}{\upsilon \mp \upsilon_{\text{и}}}. \tag{2.20}$$

В (2.20) в числителе (знаменателе) берется верхний знак, если скорость приемника (источника) звука направлена к источнику (приемнику).

В противном случае берется нижний знак.

Из (2.20) следует, что при взаимном сближении источника и приемника принимаемая частота возрастает, а при удалении – уменьшается. Если источник и приемник звука движутся так, что

расстояние между ними не меняется, то изменения частоты не наблюдается.

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

3.1. Волновое уравнение для электромагнитных волн как следствие уравнений Максвелла

В разделе физики «Электромагнетизм» определена относительность деления электромагнитного поля на электрическое и магнитное [4]. Было показано, что уравнения Максвелла связали воедино электрические и магнитные явления, и поэтому можно говорить о едином электромагнитном поле. Только в частных случаях, когда речь идет о статических полях, возможно рассмотрение отдельно электрического и магнитного полей.

Если в некоторой точке пространства возбудить переменное электромагнитное поле, например при помощи колеблющихся зарядов, то в окружающем пространстве следует ожидать образование последовательности взаимных превращений магнитного и электрического полей, распространяющихся с конечной скоростью во все стороны от источника колебаний.

Покажем, что существование электромагнитных волн является следствием уравнений Максвелла. Иными словами, волновое уравнение для электромагнитных волн может быть получено из уравнений Максвелла.

Запишем уравнения Максвелла [4] для однородной (диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \text{const}$, магнитная проницаемость $\mu = \text{const}$) непроводящей (удельная проводимость $\sigma = 0$) среды при отсутствии зарядов ($\rho = 0$) и токов ($j = 0$). В этом случае в уравнениях Максвелла вместо четырех векторов поля останутся только напряженность электрического поля $\vec{E}$ и напряженность магнитного поля $\vec{H}$:

$$\text{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \tag{3.1}$$

$$\text{rot}\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{3.2}$$

$$div\vec{E} = 0, \tag{3.3}$$

$$div\vec{H} = 0. \tag{3.4}$$

В уравнениях (3.1)–(3.4) ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные соответственно.

Используем известное в векторном анализе соотношение, справедливое для любого векторного поля

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}, \tag{3.5}$$

где Δ – оператор Лапласа:

$$\Delta\vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}. \quad (3.6)$$

Применим соотношение (3.5) к уравнению (3.1):

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{E} = \text{grad}\,div\vec{E} - \Delta\vec{E} = \text{rot}\left(-\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = -\mu\mu_0 \text{rot}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right). \quad (3.7)$$

Принимая во внимание (3.3), получим

$$+\Delta\vec{E} = +\mu\mu_0 \text{rot}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right). \quad (3.8)$$

Изменение последовательности дифференцирования по координатам и времени в (3.8) и учет (3.2) приводят к волновому уравнению для напряженности электрического поля:

$$\Delta\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (3.9)$$

Применение соотношения (3.5) к уравнению (3.2) и выполнение соответствующих преобразований приводят к аналогичному волновому уравнению для напряженности магнитного поля:

$$\Delta\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (3.10)$$

Полученные равенства (3.9) и (3.10) представляют собой волновые уравнения типа (1.15).

Таким образом, электромагнитное поле может существовать в виде волны. Фазовую скорость распространения электромагнитной волны получим, сравнивая (3.9) и (3.10) с (1.15):

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (3.11)$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot4\pi\cdot10^{-7}}} = 3{,}0\cdot10^8\ \text{м}/\text{с}$ – скорость электромагнитной волны в вакууме.

Экспериментально существование электромагнитных волн и их тождественность со световыми волнами, предсказанные теорией Максвелла, были блестяще подтверждены немецким физиком Генрихом Герцем в 1888 г. [5].

3.2. Свойства плоской электромагнитной волны

Для выяснения свойств и закономерностей, связанных с электромагнитными волнами, рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в нейтральной ($\rho = 0$) непроводящей ($j = 0$)

однородной среде ($\varepsilon = \text{const},\ \mu = \text{const}$) со скоростью $\vec{\upsilon}$, направленной вдоль оси *OX*.

На рис. 24 изображена одна из волновых поверхностей (ВП) электромагнитной волны, имеющая вид плоскости, перпендикулярной оси *OX*. Во всех точках волновой поверхности электромагнитное поле одинаково, т. е. одинаковы мгновенные значения напряженностей электрического ($\vec{E}$) и магнитного ($\vec{H}$) полей для всех значений координаты *y* и координаты *z*. Поэтому систему уравнений Максвелла можно упростить, приравняв частные производные по *y* и по *z* нулю. Так уравнение (3.1) примет вид:

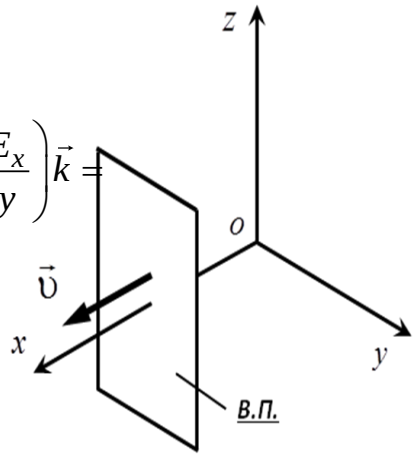

Рис. 24

$$\text{rot}\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= -\frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{k} = -\mu\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \qquad (3.12)$$

Для проекций векторов, стоящих в левой и правой частях уравнения, получим систему трех уравнений:

$$-\mu\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0, \qquad (3.13)$$

$$-\mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial x}, \qquad (3.14)$$

$$-\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}. \qquad (3.15)$$

Аналогично преобразуем уравнение (3.2):

$$\text{rot}\,\vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\vec{k} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\vec{k} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \qquad (3.16)$$

Рис. 24

Тогда для проекций векторов получим вторую систему трех уравнений:

$$\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0, \qquad (3.17)$$

$$\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}, \qquad (3.18)$$

$$\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}. \qquad (3.19)$$

Упростим также уравнения (3.3) и (3.4), приравняв нулю частные производные по *y* и по *z*:

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \qquad (3.20)$$

$$div\vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0. \qquad (3.21)$$

Из уравнений (3.13) и (3.17) следует, что при отсутствии стационарных полей проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на ось *OX* (т. е. на направление распространения волны) равны нулю: $E_x = 0$, $H_x = 0$. Таким образом, колебания векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Электромагнитные волны – поперечные волны.

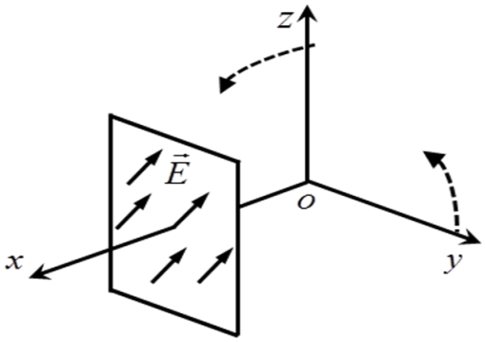

Рис. 25

Выясним относительную ориентацию векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Для этого предположим, что вектор $\vec{E}$, одинаковый во всех точках волновой поверхности, имеет направление, изображенное на рис. 25. Повернем оси *OZ* и *OY* вокруг оси *OX* так, чтобы вектор $\vec{E}$ был направлен вдоль оси *OY*, т. е. сделаем так, чтобы $E_z = 0$ (рис. 26). Тогда из (3.14) и (3.19) следует

$$\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \text{ и } \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0,$$

т. е. при отсутствии стационарных полей $H_y = 0$.

Таким образом, вектор $\vec{H}(0,0,H_z)$ ортогонален вектору $\vec{E}(0,E_y,0)$ и лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения плоской электромагнитной волны.

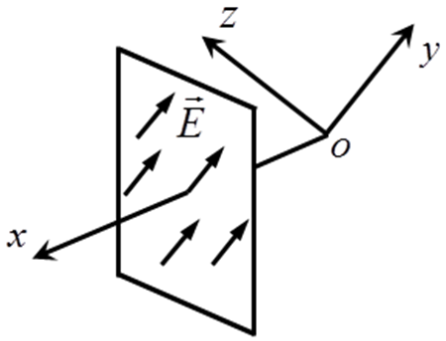

Рис. 26

Для выяснения связи фаз колебаний векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ представим их проекции в виде бегущей волны (1.7):

$$E(x,t) = E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \qquad (3.22)$$

$$H(x,t) = H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2), \qquad (3.23)$$

где E_m и H_m – амплитудные значения напряженностей; ω – их циклическая частота; k – волновое число; α_1, α_2 – начальные фазы колебаний. Подстановка (3.22) и (3.23) в уравнение (3.15) приводит к равенству

$$+\mu\mu_0 H_m \omega \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = +E_m k \sin(\omega t - kx + \alpha_1). \qquad (3.24)$$

Подстановка (3.22) и (3.23) в уравнение (3.18) приводит к равенству

$$+\varepsilon\varepsilon_0 E_m \omega \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = +H_m k \sin(\omega t - kx + \alpha_2). \qquad (3.25)$$

Для удовлетворения уравнениям (3.24) и (3.25), содержащим гармонические функции с амплитудными значениями, не равными нулю, необхо-димо равенство начальных фаз колебаний:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha. \qquad (3.26)$$

Следовательно, колебания напряженностей электрического и магнитного полей имеют одинаковую фазу:

$$E(x,t) = E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha); \qquad (3.27)$$

$$H(x,t) = H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha). \qquad (3.28)$$

Это означает, что $E = E_y$ и $H = H_z$ одновременно достигают максимальных положительных, равных нулю, и максимальных по абсолютной величине отрицательных значений.

Нетрудно видеть, что векторы $\vec{E} = E_y \vec{j}$ и $\vec{H} = H_z \vec{k}$ образуют правовинтовую систему с направлением распространения плоской бегущей электромагнитной волны:

$$\left[\vec{E} \times \vec{H}\right] = \left[E_y \vec{j} \times H_z \vec{k}\right] = EH\vec{i}. \qquad (3.29)$$

На рис. 27 приведено мгновенное представление (фото) плоской бегущей электромагнитной волны.

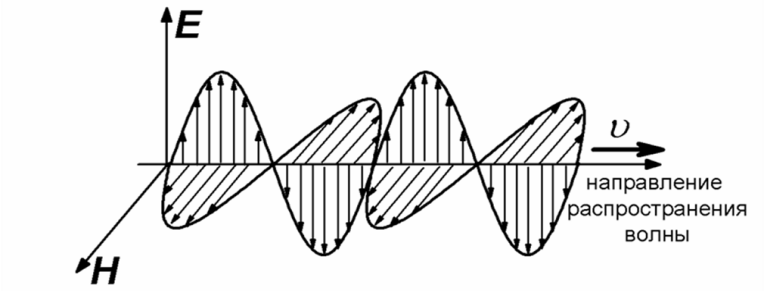

Рис. 27

Разделив левые и правые части равенств (3.24) и (3.25) друг на друга и учтя (3.26), получим соотношение между амплитудными значениями векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{H_m}{E_m} = \frac{E_m}{H_m} \quad \text{или} \quad \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_m = \sqrt{\mu\mu_0}H_m. \qquad (3.30)$$

Умножим обе части равенства (3.30) на $\cos(\omega t - kx + \alpha)$ и учтем выражения (3.27) и (3.28). Тогда получим соотношение между

мгновенными значениями напряженностей электрического и магнитного полей:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H\,. \qquad (3.31)$$

3.3. Энергия, плотность потока энергии электромагнитной волны

Распространение электромагнитной волны связано с переносом энергии в пространстве.

Объемная плотность энергии электромагнитного поля равна сумме плотности энергии электрического поля [6] и плотности энергии магнитного поля [4]:

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}\,. \qquad (3.32)$$

Возведя в квадрат левую и правую части равенства (3.31) и разделив на 2, получим

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}\,. \qquad (3.33)$$

Таким образом, выражение для плотности энергии (3.32) может быть записано в виде

$$w = w_E + w_H = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2\,, \qquad (3.34)$$

или в более «симметричной» форме

$$w = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}EH. \qquad (3.35)$$

Процесс переноса энергии электромагнитной волной, как и в случае бегущей упругой волны, можно представить введением вектора плотности потока энергии. Выше, в п. 1.7, формула (1.60), была доказана связь между плотностью потока энергии $\vec{j}$ и объемной плотностью w этой энергии в бегущей волне

$$\vec{j} = w\vec{\upsilon}\,, \qquad (3.36)$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость распространения волны. Для электромагнитной волны вектор плотности потока энергии имеет общепринятое обозначение $\vec{S}$ и называется вектором Пойнтинга. Формула скорости распространения (3.11) была получена в п. 3.1. После подстановки (3.11) и (3.35) в (3.36) получим для плотности потока электромагнитной волны выражение в скалярном виде:

$$j = S = w\upsilon = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\,\frac{EH}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = EH\,. \qquad (3.37)$$

Как следует из (3.29), векторы $\vec{E},\vec{H}$ образуют правовинтовую систему с направлением распространения плоской бегущей электромагнитной

волны, а следовательно, и с вектором Пойнтинга. Поэтому выражение (3.37) может быть записано в векторном виде:

$$\vec{S} = \left[\vec{E} \times \vec{H} \right]. \qquad (3.38)$$

При вращении ручки буравчика от вектора $\vec{E}$ к вектору $\vec{H}$ поступательное движение буравчика покажет направление вектора $\vec{S}$.

3.4. Излучение электрического диполя

В предыдущих подразделах было показано, что могут существовать переменные электромагнитные поля, распространяющиеся в пространстве в виде электромагнитных волн. Возникает вопрос: как возникают эти волны, что является их источником? Уравнения Максвелла дают ответ на этот вопрос. Из этих уравнений следует, что источником электромагнитных волн являются ускоренно движущиеся электрические заряды. Действительно, неподвижный заряд, как следовало из раздела «Электростатика», создает электростатическое, т. е. не зависящее от времени поле. Заряд, движущийся равномерно и прямолинейно, тоже не излучает. Чтобы это понять, достаточно перейти в систему отсчета, в которой этот заряд неподвижен, и в которой, как только что было отмечено, излучения нет. Но согласно постулатам теории относительности, если явление (в данном случае излучение зарядом энергии) отсутствует в одной системе отсчета, то оно отсутствует во всех инерциальных системах отсчета, которые эквивалентны друг другу. Следовательно, излучать могут только заряды, движущиеся ускоренно.

Одним из простейших излучателей электромагнитных волн является электрический диполь, электрический момент которого изменяется с течением времени. Напомним, что электрический диполь – это система из двух равных по модулю, но противоположных по знаку точечных электрических зарядов, расстояние ℓ между которыми много меньше расстояния от этих зарядов до точки наблюдения [6]. Электрический момент диполя

$$\vec{p} = q \cdot \vec{\ell}, \qquad (3.39)$$

где q – модуль зарядов диполя, а $\vec{\ell}$ – вектор, направленный от отрицательного к положительному заряду. Модуль вектора $\vec{\ell}$ равен расстоянию между зарядами.

Такая излучающая система может быть реализована, если один из проводящих шариков подключить к одной клемме на выходе генератора гармонических колебаний, а другой такой же шарик – к другой клемме этого выхода (рис. 28). Можно представлять диполь также в виде закрепленного (неподвижного) положительного заряда q_m, около которого

колеблется отрицательный заряд $-q_m$ (или наоборот), так что расстояние между зарядами меняется по гармоническому закону (рис. 29). Диполем является также малый по сравнению с расстоянием до точки наблюдения отрезок прямого провода, по которому протекает ток, изменяющийся по гармоническому закону (рис. 30). Любую систему с переменными токами можно рассматривать как совокупность излучающих диполей.

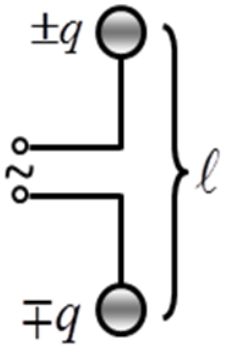

Рис. 28

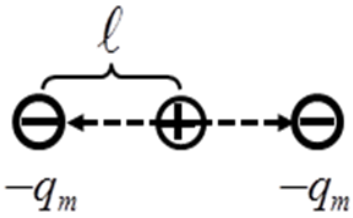

Рис. 29

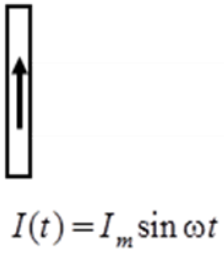

Рис. 30

Во всех этих случаях электрический момент диполя изменяется по закону

$$\vec{p} = \vec{p}_m \cdot \cos \omega t \,, \tag{3.40}$$

где p_m – амплитуда электрического дипольного момента; ω – частота изменения момента. Напряженности электрического и магнитного полей диполя с течением времени также изменяются по гармоническому закону.

Поле излучающего диполя имеет сложное строение в пространстве. Его структура существенно различается на разных расстояниях от диполя.

Область пространства на расстояниях от диполя, удовлетворяющих условию

$$r >> \lambda \,, \tag{3.41}$$

где λ – длина волны излучения, называется дальней зоной. В дальней зоне электромагнитное поле диполя становится полем излучения, т. е. формируется в виде электромагнитных волн, уносящих энергию, излучаемую диполем.

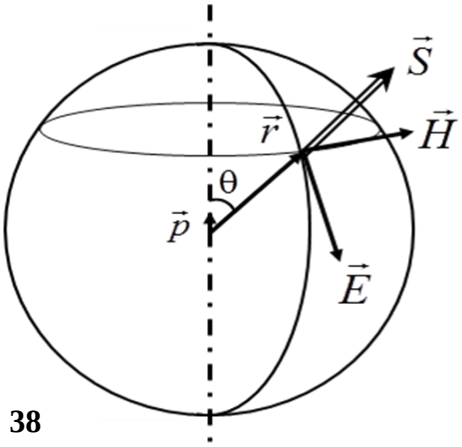

Рис. 31

Можно показать, используя уравнения Максвелла, что диполь излучает сферическую волну, т. е. волну, волновые поверхности которой являются сферами (рис. 31). Энергия излучается диполем в направлении радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного от диполя к точке наблюдения. Таким образом, вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга $\vec{S}$) направлен перпендикулярно к волновой поверхности в направлении вектора $\vec{r}$ (рис. 31). Как и в случае плоской волны, векторы напряженности электрического поля $\vec{E}$, напряженности магнитного поля $\vec{H}$ и плотности потока энергии $\vec{S}$ образуют правую тройку векторов. При этом вектор $\vec{E}$ находится в плоскости, содержащей ось диполя и радиус-вектор $\vec{r}$ (так называемая меридиональная плоскость, рис. 31). Вектор $\vec{H}$ перпендикулярен вектору $\vec{E}$ и находится в плоскости, ортогональной к оси диполя (рис. 31).

Решение уравнений Максвелла для поля диполя показывает, что напряженностей электрического и магнитного полей зависят от координат следующим образом:

Рис. 31

$$E_m \sim H_m \sim p_m \cdot \omega^2 \cdot \frac{\sin\theta}{r}, \qquad (3.42)$$

где θ – угол между осью диполя и радиус-вектором $\vec{r}$, направленным от диполя к точке наблюдения (рис. 31). Следовательно, среднее за период колебаний значение вектора Пойнтинга (интенсивность излучения) определяется так:

$$< S >\sim p_m^2 \cdot \omega^4 \cdot \frac{\sin^2\theta}{r^2}. \qquad (3.43)$$

На рис. 32 показана диаграмма направленности излучения диполя, т. е. зависимость интенсивности излучения от направления на точку наблюдения. Длина отрезка от центра диполя до точки на диаграмме пропорциональна интенсивности излучения диполя под углом θ. Как видно из диаграммы и из формулы (3.43), диполь не излучает в направлении своей оси. В плоскости, перпендикулярной оси диполя, излучение максимально.

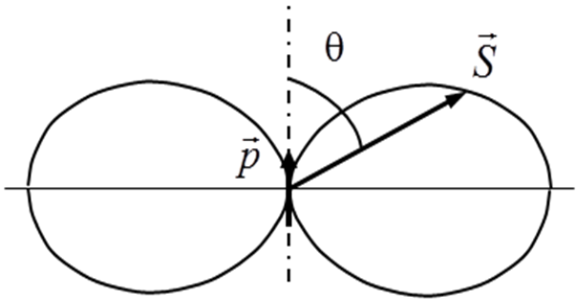

Рис. 32

Как следует из (3.43), плотность потока излучаемой диполем энергии пропорциональна частоте колебаний в четвертой степени. Это весьма важный для практики результат. Из (3.43) следует, что для создания эффективных излучающих систем следует использовать достаточно высокие частоты. Из (3.43) также следует, что провода городской сети, по которым идут токи низкой частоты, практически не излучают.

В начале этого подраздела отмечалось, что излучают только ускоренно движущиеся электрические заряды. Пусть, например, один из зарядов диполя неподвижен, а другой колеблется относительно него по гармоническому закону. Рассматривая в (3.39) величину ℓ как координату колеблющегося заряда, получим ускорение заряда, как следует из (3.39) и (3.40),
в виде

$$a = \frac{\partial^2 \ell}{\partial t^2} \sim \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \sim p_m \cdot \omega^2. \qquad (3.44)$$

Тогда из соотношения (3.43) следует, что плотность потока излучения диполя пропорциональна квадрату ускорения при колебаниях его зарядов. Оказывается, этот вывод справедлив не только для зарядов, колеблющихся в диполе, но и в общем случае. Плотность потока энергии, излучаемой ускоренно движущимся зарядом, пропорциональна квадрату его ускорения:

$$S \sim a^2. \qquad (3.45)$$

Например, заряд может вращаться по окружности в ускорителе заряженных частиц. И в этом случае выполняется соотношение (3.45).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Савельев, И. В*. Курс общей физики : учебное пособие для втузов : в 5 кн. / И. В. Савельев. – М. : Астрель: АСТ. – Кн. 4 : Волны. Оптика. – 2006. – 256 с.

2. *Андреев, А. Д*. Физика. Механика : конспект лекций / А. Д. Андреев, Л. М. Черных ; СПбГУТ. – СПб., 2004.

3. *Андреев, А. Д*. Физика. Колебания : конспект лекций / А. Д. Андреев, Л. М. Черных ; СПбГУТ. – СПб., 2013.

4. *Андреев, А. Д*. Физика. Электромагнетизм : конспект лекций / А. Д. Андреев, Л. М. Черных ; СПбГУТ. – СПб., 2012.

5. *Кудрявцев, П. С*. Курс истории физики / П. С. Кудрявцев. – М. : Просвещение, 1982.

6. *Андреев, А. Д*. Физика. Электростатика : конспект лекций / А. Д. Андреев, Л. М. Черных ; СПбГУТ. – СПб., 2004.

Андреев Александр Давидович
Колгатин Сергей Николаевич
Черных Леонид Михайлович

ФИЗИКА

ВОЛНЫ

Учебное пособие

Редактор *И. И. Щенсняк*
Компьютерная верстка *Е. А. Головинской*

План 2015 г., п. 105

Подписано к печати 02.06.2015
Объем 2,5 усл.-печ. л. Тираж 30 экз. Заказ 585

Редакционно-издательский отдел СПбГУТ
191186 СПб., наб. р. Мойки, 61

Отпечатано в СПбГУТ