ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГООБРАЗОВАНИЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА
(СПбГУТ)

А.Д. Андреев, С.Н. Колгатин,Л.М. Черных

«Классическая механика»

СПбГУТ

Санкт-Петербург
2018

УДК 530.1

Андреев А.Д., Колгатин С.Н., Черных Л.М.Учебное пособие. «Классическая механика»/ СПбГУТ-СПб, 2018.

Рецензент

Ответственный редактор

Рекомендовано к печати
редакционно-издательским советом СПбГУТ

Конспект лекций по физике. Раздел «Механика»/ А.Д.Андреев, С.Н.Колгатин, Л.М. Черных;СПбГУТ, 2018. - 32 с.

Учебное пособие одержит теоретический материал по разделу «Механика» общего курса физики и предназначено для оказания помощи студентам всех специальностей и форм обучения в самостоятельной работе, а также при подготовке к упражнениям, коллоквиумам и экзаменам.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Механическое движение – простейшая форма движения, при котором происходит изменение положения тел относительно друг друга. В данном пособии изучается **классическая механика Ньютона.**Классическая механика Ньютона рассматривает движениемакрообъектов со скоростями много меньшими скорости света.Движение тел с любыми скоростями, является предметом изучения специальной теории относительности (релятивистской механики).

Для описания механического движения вводят *систему отсчета* – систему координат, связанных с телом, по отношению к которому рассматривается движение других тел, и часы.

Основная задача механики: если известно механическое состояние системы (совокупность координат и скоростей) в некоторый момент времени, определить механическое состояние системы в последующие моменты времени.

Сложное движение твердого тела может быть представлено как совокупность поступательного и вращательных движений.

Поступательное движение – движение тела, при котором прямая, соединяющая две любые точки тела, остается параллельной самой себе при движении этого тела.

Вращательное движение твердого тела вокруг оси – движение тела, при котором все точки тела описывают окружности в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения, и с центрами, лежащими на этой оси.

В классической механике вводят понятие **материальной точки** (тело, формой и размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи).Любое тело может быть представлено в виде совокупности материальных точек. Поэтому, зная законы движения одной материальной точки и законы их взаимодействия, можно описать движение тела в целом. Например, при поступательном движении тела все его точки движутся одинаково, поэтому достаточно рассмотреть движение одной точки тела. При вращательном движении знание положения точек твердого тела относительно оси вращения изакона движения одной материальной точки также позволяет легко описать движение тела как одного целого.

КИНЕМАТИКА

Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причины, влияющие на движение.

1.1. Кинематика материальной точки

Ниже рассматриваются величины, вводимые в кинематике материальной точки.

Для описания движения материальной точки будем использовать декартову прямоугольную систему координат (x,y,z) (рис. 1.1).

Орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -единичные безразмерные векторы, задающие направление вдоль осей ox, oy, oz соответственно;

радиус-вектор $\vec{r}$ - вектор, проведенный из начала системы координат в рассматриваемую точку,характеризует положение материальной точки в момент времени t:

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$;

модуль радиус-вектора равен $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (рис. 1.1);

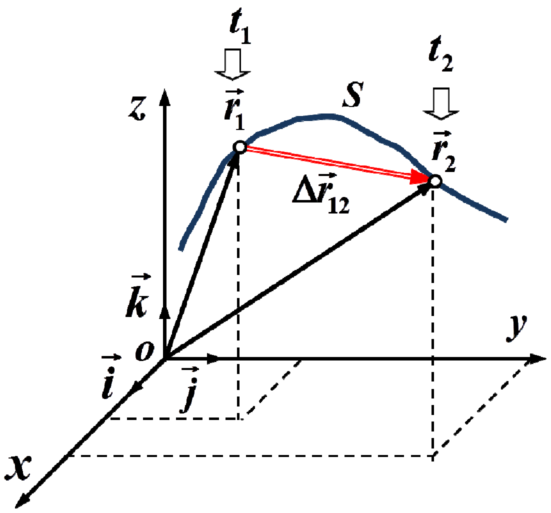

Рис. 1.1

траектория – линия, описываемая материальной точкой при ее движении в пространстве;радиус-вектора $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, характеризующие положение точки впространстве в моменты времени t_1 и t_2 соответственно (рис. 1.1);

вектор перемещения материальной точки $\Delta\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ за время $\Delta t = t_2 - t_1$;

элементарное перемещение $d\vec{r}$ - перемещение за бесконечно малое время dt; **путь** S–расстояние, отсчитанное вдоль траектории.

В общем случае $|\Delta\vec{r}_{12}| \neq S$; $|d\vec{r}| = dS$ - бесконечно малые величины;

Для характеристики быстроты изменения положения материальной точки в пространстве с течением времени служит **вектор скорости** $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (1.1)направленныйвсегда по касательной к траектории движения (рис.1.2).Модуль скорости $|\vec{\upsilon}| = \upsilon = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt}$;**вектор средней скорости** $\vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t}$совпадает по направлению с вектором перемещения за время Δt;

ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ (1.2) - величина, характеризующаябыстроту изменения вектора скорости материальной точки в пространстве с течением времени, в (1.2) $d\vec{\upsilon}$ - изменение вектора скорости за время dt.

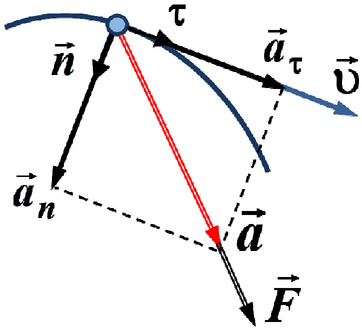

Рис. 1.2

Из II закона Ньютона, $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$, следует, что направление вектора ускорения определяется направлением результирующей всех сил $\vec{F}$, действующих на материальную точку (рис.1.2).

Разложим вектор $\vec{a}$ по двум направлениям(по касательной к траектории движения и по направлению, перпендикулярному к касательной):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n},$$

где $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ - единичные вектора,направленные, $\vec{\tau}$-по касательной к траектории,$\vec{n}$ - перпендикулярно ему;$\vec{a}_\tau$- **тангенциальное ускорение**,$\vec{a}_n$- **нормальное ускорение**.

Выясним физический смысл составляющих $\vec{a}_\tau$и $\vec{a}_n$.Пусть за время dt материальная точка прошла путь dS, при этом скорость $\vec{\upsilon}$ изменилась на $d\vec{\upsilon}$(рис.1.3).Разложим вектор $d\vec{\upsilon}$ по двум направлениям –касательному $d\vec{\upsilon}_\tau = d\upsilon\cdot\vec{\tau}$ и перпендикулярному к нему $d\vec{\upsilon}_n = d\upsilon\cdot\vec{n}$ (рис.1.3):

$d\vec{\upsilon} = d\vec{\upsilon}_\tau + d\vec{\upsilon}_n = d\upsilon\cdot\vec{\tau} + d\upsilon_n\cdot\vec{n}$ (1.3),где $d\upsilon$- характеризует изменение скорости по величине,$d\upsilon_n$ характеризует изменение скорости понаправлению.Бесконечно малый участок траектории dS можно рассматривать, как дугу окружности радиуса R (радиус кривизны траектории).Из рис.1.3 видно, что $d\alpha = \dfrac{dS}{R} \approx \dfrac{d\upsilon_n}{\upsilon}$, откуда $d\upsilon_n = \dfrac{\upsilon\cdot dS}{R}$.Подставив это

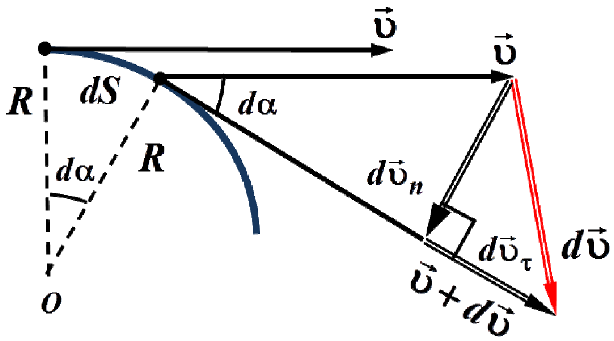

Рис. 1.3

выражение в равенство (1.3) для $d\vec{\upsilon}$ и разделив на dt с учётом, что $\dfrac{ds}{dt} = \upsilon$,

получим $\vec{a} = \dfrac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \dfrac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$ (1.4).

Таким образом, тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}$ (1.5) характеризует быстроту измененияскорости по величине, а нормальное ускорение $\vec{a}_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$ (1.6) характеризует быстроту изменения вектора скоростипо направлению.

При равномерном движении $\upsilon = const$, $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n$.

При прямолинейном движении $R = \infty \Rightarrow a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R} = 0$, $\vec{a} = \vec{a}_\tau$.

По известной зависимостирадиус-вектора материальной точки от времени $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, находим скорость:

$\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}$;где $\dfrac{dx}{dt} = \upsilon_x$, $\dfrac{dy}{dt} = \upsilon_y$, $\dfrac{dz}{dt} = \upsilon_z$,

По известной зависимости скорости от времени находим ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k};$$

$$\text{где } a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}, a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt}, a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt}.$$

Модули векторов скорости и ускорения равны $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$, $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

По известной зависимости ускорения от времени, можно найти скорость. Изменение скорости за бесконечно малый промежуток времени dt равно $d\vec{\upsilon} = \vec{a} \cdot dt$.Изменение скорости от начального момента времени t_0 до моментавремени $t : \vec{\upsilon}(t) - \vec{\upsilon}(t_0) = \int_{t_0}^{t} d\vec{\upsilon} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt$.Отсюда скорость равна:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt. \qquad (1.7)$$

По известной зависимости скорости от времени, можно найти перемещение и радиус-вектор. Перемещение материальной точки за время dt равно $d\vec{r} = \vec{\upsilon} \cdot dt$.Перемещение за промежуток времени от t_0 до t $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}(t)dt$.Отсюда для радиус-вектораполучим:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}(t)dt. \qquad (1.8)$$

Как видим, для нахождения $\vec{\upsilon}(t)$ и $\vec{r}(t)$требуется задание начальных условий, т.е. величин $\vec{\upsilon}(t_0)$ и $\vec{r}(t_0)$.

Если спроектировать вектора, входящие в равенства для скорости $\vec{\upsilon}$ и радиус-вектора $\vec{r}$, на одну из координатных осей, например X, то получим решение рассматриваемой задачидля соответствующей координаты и проекции скорости на эту координату:

$$\upsilon_x(t)=\upsilon_x(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t} a_x(t)dt, \quad (1.9) \quad x(t)=x(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\upsilon_x(t)dt. \quad (1.10)$$

1.2. Кинематика вращательного движенияабсолютно твердого тела

Абсолютно твердое тело – тело, деформациями которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

В случае вращательного движения точки тела находятся на разном расстоянии R от оси вращения и, следовательно, имеют разную скорость. Рассмотрим вращательное движение абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси**.**

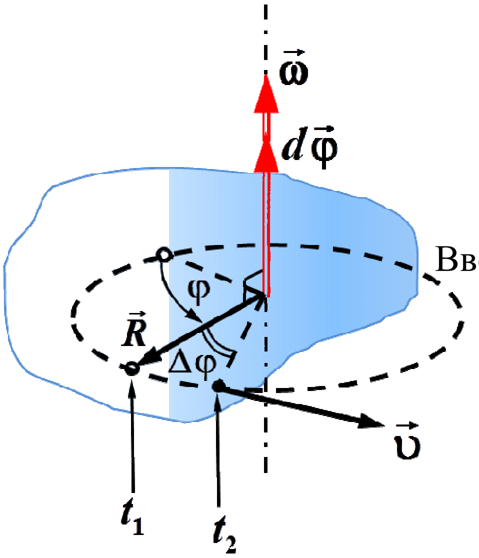

Рис. 1.4

Положение рассматриваемой точки тела при вращении вокруг неподвижной оси можно охарактеризовать угловой координатой φ (рис.1.4). За время $\Delta t=t_2-t_1$ угол поворота тела $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$.

Введем **элементарное угловое перемещение** $d\vec{\varphi}$ за время dt как аксиальный вектор, направление которого вдоль оси вращения определяется по **правилу правого винта** («буравчика»).

Для характеристики быстроты вращения тела вокруг неподвижной оси вводится **угловая скорость** $\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ (1.11).Направление $\vec{\omega}$ совпадает с направлением $d\vec{\varphi}$ и определяется по правилу правого винта.

Для характеристики быстроты изменения угловой скорости тела вводится **угловое ускорение** $\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ (1.12), где $d\vec{\omega}$ -изменение угловой скорости за время dt. В случае неподвижной оси вращения вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ совпадают по направлению при ускоренном вращательном движении точек тела (рис.1.5а) и противоположны по направлению при замедленномвращательном движении точек тела (рис.1.5б).

По известной зависимости $\varphi(t)$, можно найти угловую скорость $\vec{\omega}$ (1.11) и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ (1.12).

По известной зависимости углового ускорения от времени $\varepsilon(t)$ можно найти изменение угловой скорости $\Delta\omega(t)$ за конечный промежуток времени:

$$\Delta\omega=\omega(t)-\omega(t_0)=\int_{t_0}^{t} d\omega=\int_{t_0}^{t} \varepsilon(t)dt$$

.Отсюда угловая скорость:

$$\omega(t)=\omega(t_0)+\int_{t_0}^{t} \varepsilon(t)\,dt\,.$$

(1.13)

Угол поворота тела за малый промежуток времени dt равен $d\varphi=\omega\cdot dt$.

Угол поворота за промежуток времени от t_0 до t:

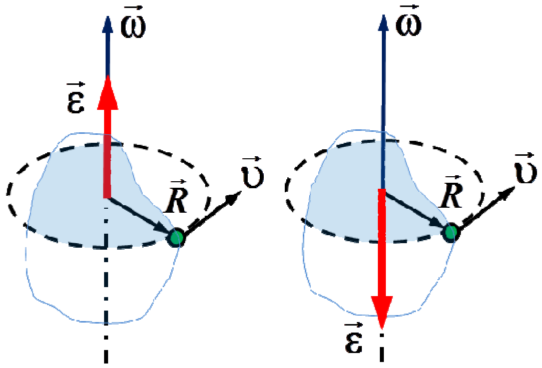

Рис. 1.5а Рис. 1.5б

$\Delta\varphi=\varphi(t)-\varphi(t_0)=\int d\varphi=\int_{t_0}^{t} \omega\cdot dt$.Отсюда для угловой координатыполучим:

$$\varphi(t)=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t} \omega(t)dt\,. \qquad (1.14)$$

Как видим, для нахождения $\omega(t)$ и $\varphi(t)$требуется задание начальных условий, т.е. величин $\omega(t_0)$ и$\varphi(t_0)$.

1.3. Связь линейных и угловых величин

Путь, пройденный точкой телапри движении по окружности, определяется формулой:

$$dS=Rd\varphi\,. \qquad (1.15)$$

Путь за один полный оборот $S=2\pi R$.

Связь между линейной скоростью точки тела и угловой скоростью:

$$\upsilon=\frac{dS}{dt}=\frac{d(R\varphi)}{dt}=R\frac{d\varphi}{dt}=R\omega. \ (1.16)$$

Так как $\upsilon=R\omega\sin\frac{\pi}{2}$,связь между линейной скоростью точки тела и угловой скоростью можно записатьв виде векторного произведения [1]$\vec{\upsilon}=\left[\vec{\omega}\times\vec{R}\right]$ (1.17).

Существуют разные способы записи векторного произведения: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$,$\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$, $\vec{c}=[\vec{a}\times\vec{b}]$. Далее будет использоваться последняя форма записи.

Связь между тангенциальным ускорением и угловым ускорением:

$$a_\tau=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d(\omega R)}{dt}=R\frac{d\omega}{dt}=R\varepsilon\,. \ (1.18)$$

Связь между нормальным ускорением и угловой скоростью:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R. \qquad (1.19)$$

2.ДИНАМИКА. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

Динамика изучает причины, влияющие на характер движения тел.В основе динамикилежат законы Ньютона.

2.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета

На основании многочисленных опытных фактов Галилей, а вслед за ним и Ньютон сформулировали принцип инерции, который гласит:**если на тело не действуют другие тела, то рассматриваемое тело (называемое в таком случае свободным) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.**

Принцип Галилея - Ньютона сыграл значительную роль в развитии физики; до его открытия считалось, что свободное тело обязательно сохраняет состояние покоя. **Инерциальнойсистемой отсчета**(ИСО) называется система отсчета, где выполняется принцип инерции**.**Любая другая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно по отношению к исходной ИСО также является инерциальной.Следует отметить, что система отсчета является инерциальной можно говорить с определённой степенью точности. Так, систему отсчета, связанную с Землей, можно считать инерциальной, если можно пренебречь ее вращательным движением относительно собственной оси и движением относительно Солнца.Примером практическиинерциальной системы отсчета является гелиоцентрическая система, начало которой помещено в центр Солнца, а оси направлены на звезды.

Далее везде полагаем, что рассмотрение ведется в инерциальной системе отсчета.

Итак, **первый закон Ньютона** формулируется следующим образом: **существуют системы отсчета, называемые инерциальными, в которых тело движется равномерно и прямолинейно или сохраняет состояние покоя, если на него не действуют другие тела**(так как движение тела в отсутствии внешних воздействий называются движением по инерции, то первый закон Ньютона называют также **законом инерции**).

2.2. Силы. Второй закон Ньютона.

В механике характеристикой взаимодействия тел является **сила** Ее вводят, как меру механического действия на данное материальное тело со стороны других тел. Это действие вызывает изменение скоростей точек тела,его деформацию и может иметь место, как при непосредственном контакте, так и через посредство полей, создаваемых телами.

Все силы природы, известныев настоящее время, можно разделить на четыре основных типа.

1. Гравитационные силы, действующиена расстоянии между любыми телами, имеющими массы.

2. Электромагнитные силы, действующие на заряды и токи, со стороны других зарядов и токов.

3. Ядерные силы, скрепляющие ядро, несмотря на сильное электростатическое отталкивание между протонами.

4. Слабые силы, имеющие малый радиус действия (физика элементарных частиц).

Сила – величина векторная, и в каждый момент времени она характеризуется численным значением, направлением в пространстве и точкой приложения. Если на тело действуют одновременно несколько сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, то их векторная сумма $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ называется **результирующей силой**.

Опыт показывает, что при одном и том же воздействии одни тела быстрее меняют свою скорость, другиемедленнее. Свойство тела «сопротивляться» изменению скорости назвали инертностью тела. **Мерой инертности тела** является его **масса** m - физическая величина, определяющая как инерционные, так и гравитационные свойства тела.

Ньютоном было введено понятие**импульса тела** (количества движения) $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ и сформулирован основный закон динамики - **второй закон Ньютона:**

Скорость изменения импульса материальной точки во времени равна результирующей силе, действующей на материальную точку,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.1)$$

Из второго закона Ньютона следует, что скорость изменения проекции импульса на какую-либо ось, например, на ось X ($p_x = m\upsilon_x$) определяется проекцией результирующей силы на эту ось:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x. \quad (2.2)$$

Для тела с постоянной массой $\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{a}$. Отсюда

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (2.3)$$

т.е. получили второй закон Ньютона в другой формулировке:у**скорение, с которым движется материальная точка, равно отношению**

результирующей всех сил, действующих на нее, к массе материальной точки.

Если на материальную точку действует некоторая сила $\vec{F}$, то по второму закону Ньютона изменение импульса за время dt равно $d\vec{p} = \vec{F}dt$. Изменение импульса $\Delta\vec{p}$ за промежуток времени от t_1 до t_2 равно:

$$\int\limits_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \Rightarrow \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt, \qquad (2.4)$$

где $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ - импульсы материальных точек в моменты времени t_1 и t_2, соответственно.Величина $\int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$ называется *импульсом силы*.**Изменение импульса материальной точки $\Delta\vec{p}$ за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равно импульсу силы, действующему на материальную точку за это время.**

2.3. Третий закон Ньютона.

По третьему закону Ньютона **силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, имеют одинаковую природу, всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки:** $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ где $\vec{F}_1$ - сила, действующая на первое тело со стороны второго, $\vec{F}_2$ -сила, действующая на второе тело со стороны первого.

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

3.1. Закон изменения и сохранения импульса системы материальных точек

Рассмотрим систему N взаимодействующих материальных точек с массами $m_1, m_2, ..., m_N$ и импульсами $\vec{p}_1, \vec{p}_2, ..., \vec{p}_N$.

Внутренняя сила $\vec{f}_{ik}$ - это сила, которая действует со стороны тела массой m_k на тело с массой m_i и является характеристикой взаимодействия между материальными точками системы (рис.3.1).

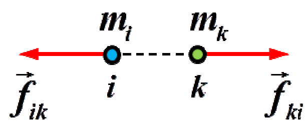

Рис. 3.1

Силы, действующие на материальные точки системы со стороны тел, не относящихся к этой системе, называются **внешними силами**. Пусть $\vec{F}_i$ - результирующая всех внешних сил, действующих на i-ю материальную точку.

Из второго закона Ньютона для i-й материальной точки имеем

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\vec{F}_i+\sum_{k=1,k\neq i}^{N}\vec{f}_{ik} \text{ .(3.1)}$$

Напишем такие же уравнения для всех материальных точек и просуммируем по i от 1 до N:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1,k\neq i}^{N}\vec{f}_{ik} \text{ .} \qquad (3.2)$$

По III закону Ньютона для внутренних сил:

$$\vec{f}_{ik}=-\vec{f}_{ki}\Rightarrow\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1,k\neq i}^{N}\vec{f}_{ik}=0 \text{ .(3.3)}$$

Тогда уравнение (3.2) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\Rightarrow\frac{d\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{p}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=\vec{F}\text{ ,} \qquad (3.4)$$

где $\vec{F}$ - результирующая всех внешних сил, действующих на эту систему.

Векторная сумма импульсов тел системы $\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{p}_i=\vec{P}$ (3.5)

называется**импульсом системы материальных точек**.В результате из (3.4) следует закон изменения импульса системы материальных точек:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}\text{ .(3.6)}$$

Если в моменты времени t_1 и t_2 импульс системы равен $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ соответственно, то

$$\vec{P}_2-\vec{P}_1=\Delta\vec{P}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt\text{ .} \qquad (3.7)$$

Равенства (3.6) и (3.7) представляют математическую запись **закона изменения импульса.**Согласно (3.7): **изменение импульса системы материальных точек за некоторый промежуток времени равно импульсу результирующей всех внешних сил, действующих на систему за этот промежуток времени.**

Закон сохранения импульса формулируют для **замкнутой системы тел** - системы, на которую не действуют внешние силы:**импульс замкнутой системы тел есть величина постоянная**.

Как следует из (3.7), **импульс системы материальных точек, также остается постоянным, если векторная сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю.**

3.2.Закон движения центра масс тела (системы тел)

Представим тело (систему тел), как систему N материальных точек с массамиΔm_i , $i=1,...,N$.

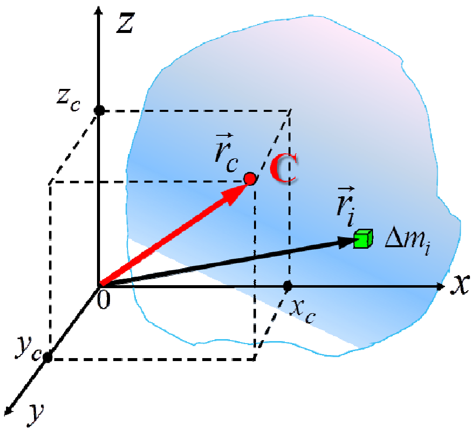

Рис. 3.2

Центром инерции или **центром масс тела** (системы тел) называется точкаCрадиус-вектор которойвычисляется по формуле(рис.3.2):

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i \vec{r}_i\,, \qquad (3.8)$$

где $\vec{r}_i$ – радиус-векторi-й материальной точки с массой Δm_i; $m = \sum_{i=1}^{N}\Delta m_i$ – масса тела (системы тел).Положение этой точки $\vec{r}_c$ зависит от распределения масс в теле (системе тел).

Из (3.8) следует, что скорость движения центра масс:

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i \vec{\upsilon}_i = \frac{\vec{P}_c}{m}, \qquad (3.9)$$

где $\vec{P}_c = m\cdot\vec{\upsilon}_c$ (3.10) - импульс системы материальных точек (системы тел). Таким образом, импульс системы материальныхточекравен произведению массы системы на скоростьцентра масс.

Ускорение центра масс равно

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{P}_c}{m}\right) = \frac{1}{m}\frac{d\vec{P}_c}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}, \vec{a}_c = \frac{\vec{F}}{m}, (3.11)$$

где $\vec{F}$ – результирующая всех внешних сил, действующих на систему материальных точек.

Иными словами, **центр инерции тела (системы тел) движется так, как двигалась бы материальная точка с массой m, равной массе тела (системы тел)под действием результирующей всех внешних сил, приложенных к телу (системе тел).**

Можно показать, что в однородном поле силы тяжести центр инерциии центр тяжести совпадают.

3.3. Момент импульсаматериальной точки,момент силы,уравнение моментов

Введем понятия момента импульса и момента силы для материальной точки.

Рассмотрим материальную точку массой m, имеющую импульс$\vec{p}$, положение которой относительно произвольной точки О определяется радиус-вектором $\vec{r}$ (рис. 3.3).Вектора $\vec{r}$ и $\vec{p}$лежат в одной плоскости.

Моментом импульса $\vec{L}$ **материальной точки относительно точки** О называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ на вектор импульса $\vec{p}$ материальной точки (рис. 3.3):

$$\vec{L}=[\vec{r}\times\vec{p}]. \quad (3.12)$$

Модуль момента импульса $L = rp\sin\alpha$.

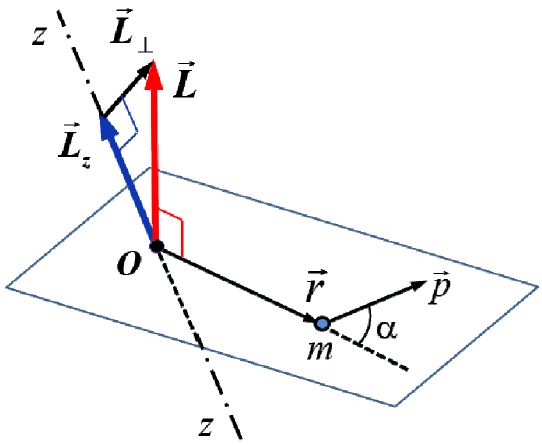

Рис. 3.3

Проведем через точку О произвольную ось z. Разложим вектор $\vec{L}$ на две составляющие - вдоль оси z, и перпендикулярную оси z: $\vec{L}=\vec{L}_z+\vec{L}_\perp$ (рис. 3.3). Вектор $\vec{L}_z$ называется **моментом импульса материальной точки относительно оси** z.

Рассмотрим тело, к которому приложена сила $\vec{F}$ в точке А. Положение точки А относительно произвольной точки О определяется радиус-вектором $\vec{r}$ (рис. 3.4). Вектора $\vec{r}$ и $\vec{F}$ лежат в одной плоскости.

Моментом силы $\vec{M}$ **относительно точки** О называется векторное произведение радиус- вектора $\vec{r}$ на вектор силы $\vec{F}$ **:**

$$\vec{M}=[\vec{r}\times\vec{F}]. \quad (3.13)$$

Модуль момента силы $M = rF\sin\beta$.

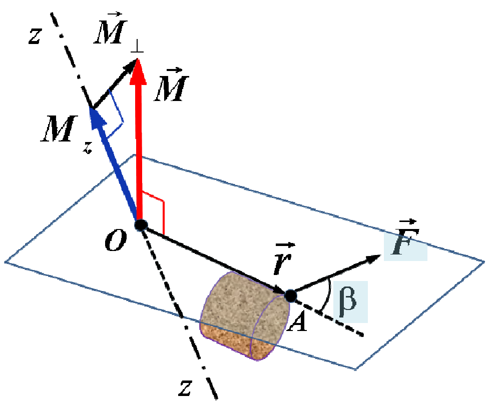

Рис. 3.4

Проведем через точку О произвольную ось z. Разложим вектор $\vec{M}$ на две составляющие - вдоль оси z, и перпендикулярную оси z: $\vec{M}=\vec{M}_z+\vec{M}_\perp$ (рис. 3.4). Вектор $\vec{M}_z$ называется **моментом импульса материальной точки относительно оси** z.

Можно показать, что момент импульса $\vec{L}_z$ относительно оси и момент силы $\vec{M}_z$ относительно оси не зависят от положения точки О на оси.

Найдем связь между величинами $\vec{M}$ и $\vec{L}$ для материальной точки. Возьмем производную от момента импульса по времени

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d[\vec{r}\times\vec{p}]}{dt}=\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}\right]+\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}\right]=[\vec{\upsilon}\times m\vec{\upsilon}]+[\vec{r}\times\vec{F}]=\vec{M}, \quad (3.14)$$

где $[\vec{\upsilon}\times m\vec{\upsilon}]=0$, так как векторы имеют одинаково направление.

Таким образом, скорость изменения момента импульса материальной точки равна моменту силы, действующей на материальную точку:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}\,, \qquad (3.15)$$

где $\vec{L}$ и $\vec{M}$ - моменты относительно точки. Проецируя вектора в равенстве (3.15) на ось z, получаем

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt}=\vec{M}_z, \qquad (3.16)$$

где $\vec{L}_z$ и $\vec{M}_z$ - моменты относительно оси z.Выражения (3.15) и (3.16) называются **уравнениями моментов.**

3.4. Законы изменения и сохранения момента импульса системы материальных точек

Рассмотрим систему из Nматериальныхточек. **Моментом импульса системы материальных точек относительно точки *O* (*оси z*)**называется векторная сумма моментов импульсов всех точек системы относительно той же точки (оси):

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i\,,\vec{L}_z=\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_{zi}\,.(3.17)$$

Рассмотрим взаимодействие двух материальных точек с массами m_i и m_k (рис. 3.5).Моменты внутренних сил $\vec{f}_{ik}$ и $\vec{f}_{ki}$, действующих на m_i и m_k относительно произвольнойточки О:

$$\vec{M}_{ik}=[\vec{r}_i\times\vec{f}_{ik}], \qquad \vec{M}_{ki}=[\vec{r}_k\times\vec{f}_{ki}]. \qquad (3.18)$$

Отсюда следует, что

$$M_{ik}=r_i f_{ik}\sin\varphi=f_{ik}l\,, \qquad M_{ki}=r_k f_{ki}\sin\beta=f_{ki}l\,, \qquad (3.19)$$

то есть моменты $\vec{M}_{ik}$ и $\vec{M}_{ki}$ равны по величине и противоположны по направлению (рис.3.5) и в сумме компенсируют друг друга.

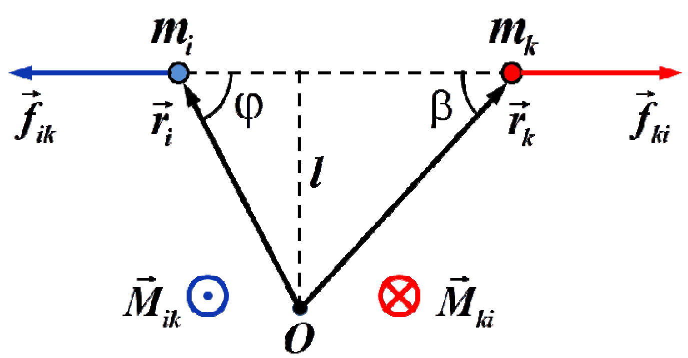

Рис. 3.5

Возьмем производную по времени от момента импульса системы (3.17) и с учетом уравнения моментов (3.15):

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{L}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i=\vec{M}\,, \qquad (3.20)$$

где $\vec{M}$ -сумма **моментов внешних сил** относительно точки О.

В проекции (3.20) на ось z получим: $\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{zi} = \vec{M}_z$, (3.21),

где $\vec{M}_z$ - сумма моментов всех внешних сил относительно оси z.

Из равенств (3.20) и (3.21) следует**закон сохранения момента импульса: если для системы материальных точексумма моментов всех внешних сил относительно точки (оси) равна нулю,томомент импульса системы материальных точек относительно точки (оси) есть величина постоянная:** $\vec{L} = const$ ($\vec{L}_z = const$)(3.22).

Сформулированный выше закон сохранения момента импульса справедлив и для замкнутой системы: **моментимпульса замкнутой системы тел есть величина постоянная**.

Классической демонстрацией закона сохранения момента импульса является опыт со скамьей Жуковского. Скамья Жуковского представляет собой круглую платформу, которая может без трения вращаться вокруг вертикальной оси. Человек стоитна скамье и держитвращающееся колесо. Ось вращения колеса горизонтальна. Проекция момента импульса колеса на вертикальную ось равна нулю и суммарный момент импульса системы относительно вертикальной осиравен нулю (рис. 3.6а).

Человек поднимает вращающееся колесо над головой, так что ось вращения колеса становится вертикальной имомент импульса колеса относительно вертикали перестает быть равным нулю. Позакону сохранения момента импульса суммарный момент импульса системы относительно вертикальной оси должен оставаться равным нулю. Значит, должен появиться противоположный по направлениюмомент импульса скамьи. В результате скамья с человекомначинаетвращаться в противоположную сторону, так что суммарный момент импульса относительно вертикальной оси остается равным нулю(рис.3.6б).

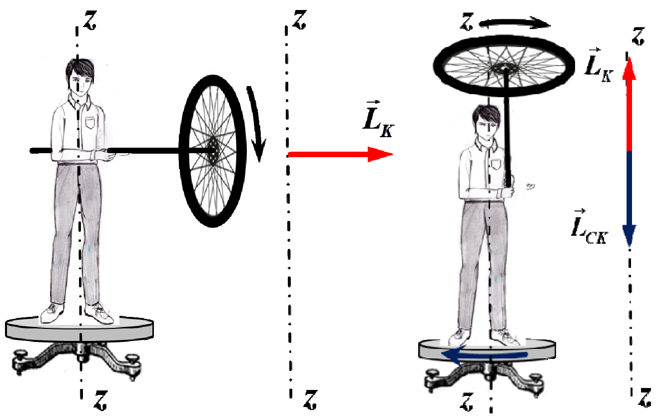

Рис. 3.6 а Рис. 3.6 б

3.5. Работа силы. Мощность

Понятие работы силыявляется фундаментальным понятием классической механики, с которым связано введение потенциальной, кинетической и полной механической энергии.

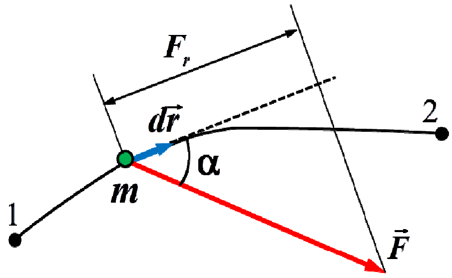

Рис. 3.7

Элементарной работой δA силы $\vec{F}$ называется скалярное произведение [1] этой силы наэлементарное перемещение $d\vec{r}$ (рис.3.7):

$$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\cdot dr\cdot\cos\alpha = F_r\cdot dr = F\cdot(dr)_F$$
, (3.23)

где α - угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$, F_r- проекция силы на направление элементарного перемещения $d\vec{r}$, $(dr)_F$ - проекция перемещения $d\vec{r}$ на направление силы $\vec{F}$. Из (3.23) следует,

В декартовых координатах $\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ (3.24)

Работой силы $\vec{F}$ при перемещении материальной точки из точки 1 в точку 2 (рис. 3.7) называется величина:

$$A = \int\limits_{(1)}^{(2)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{(1)}^{(2)} F_r dr\,. \qquad (3.25)$$

Работа A зависит от величинысилы,ее направления и от перемещения точки приложения силы.Работа является алгебраической величиной, т.е. может быть положительной, отрицательной или равной нулюв зависимости от направления силы относительно элементарного перемещения (см. (3.23)).

Мощность P - физическая величина, измеряемая отношением элементарной работы δA к тому промежутку времени dt, в течение которого она произведена:

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon} = F\cdot\upsilon\cdot\cos\alpha\,. \qquad (3.26)$$

Мощность является характеристикой двигателя и показывает быстроту совершения работы.

3.6. Работа силы тяготения. Работа силы Кулона.

Закон тяготения

Две материальные точки массами m_1 и m_2, находящиеся на расстоянии r друг от друга, притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению масс, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними инаправленной по прямой, соединяющейэти материальные точки:

Закон Кулона

Два точечных заряда q_1 и q_2, расположенных на расстоянии r в вакууме, взаимодействуют друг с другом с силой, прямо пропорциональной произведению этих зарядов, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними и направленной по прямой, соединяющей эти заряды:

$$\vec{F}_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \quad (3.27)$$

где $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)$ – гравитационная постоянная.

Знак минус указывает на то, что сила тяготения является силой притяжения. Перепишем закон всемирного тяготения в виде:

$$\vec{F}_g = \alpha\frac{\vec{r}}{r^3}, \text{ где } \alpha = -Gm_1 m_2. \quad (3.28)$$

Будем перемещать материальную точку с массой m_2 относительно материальной точки с массой m_1 из точки 1 в точку 2 (рис.3.8).

$$\vec{F}_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \quad (3.29)$$

где $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\ \text{Н·м}^2/\text{Кл}^2$; q_1 и q_2 - алгебраические величины, от их знаков зависит направление силы (притяжение или отталкивание).

Перепишем закон Кулона в виде:

$$\vec{F}_к = \alpha\frac{\vec{r}}{r^3}, \text{ где } \alpha = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}. \quad (3.30)$$

Будем перемещать заряд q_2 относительно заряда q_1 из точки 1 в точку 2 (рис.3.9). На рис. 20 показан случай зарядов одного знака.

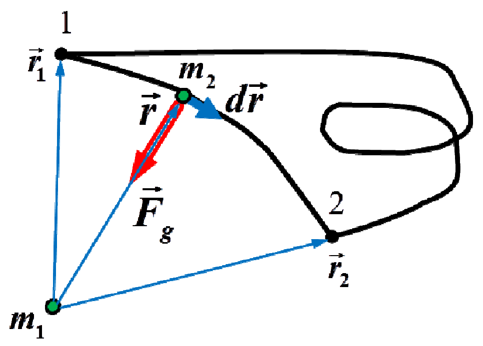

Рис. 3.8

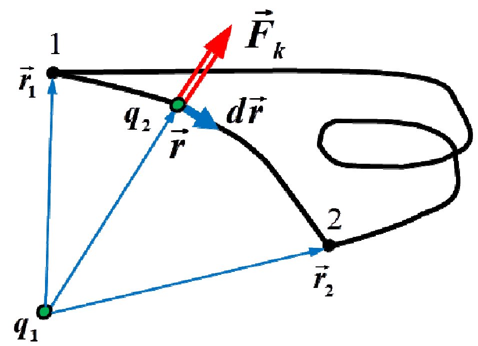

Рис. 3.9

Найдем работу этих сил по перемещению материальной точки (заряда) из точки 1 в точку 2 по произвольной траектории относительно другой материальной точки (заряда):

$$A = \int_{(1)}^{(2)}\alpha\frac{\vec{r}}{r^3}d\vec{r} = \alpha\int_{(1)}^{(2)}\frac{1}{r^3}\vec{r}d\vec{r} = \alpha\int_{(1)}^{(2)}\frac{1}{r^3}r(d\vec{r})_r, \quad (3.31)$$

где $(d\vec{r})_r$ - проекция элементарного перемещения на направление радиус-вектора, характеризующего положение материальной точки (заряда) относительно другой материальной точки (заряда); $(d\vec{r})_r = dr$ и характеризует изменение r по величине.

Тогда запишем работу в виде:

$$A = \alpha\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr = \alpha\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \quad (3.32)$$

Подстановка α приводит к формулам для работы силы гравитационного взаимодействия и кулоновского взаимодействия:

$$A_g = -G\frac{m_1m_2}{r_1} - \left(-G\frac{m_1m_2}{r_2}\right). \quad (3.33)$$

$$A_k = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{kq_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}. (3.34)$$

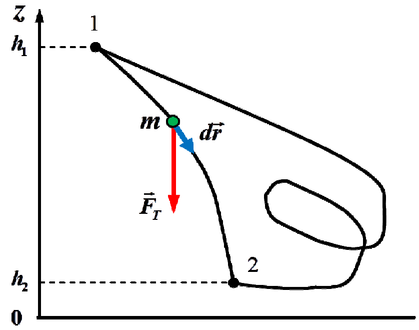

Рис. 3.10

Таким образом, работа силы гравитации и работа силы Кулона не зависят от вида траектории перемещения материальной точки (заряда) (рис. 3.8 и 3.9), а зависят от начального и конечного положения материальной точки (заряда). **Сила, работа которой зависит от начального и конечного положения материальной точки (точечного заряда) и не зависит от формы траектории, называетсяконсервативной силой**. Следовательно, сила гравитации и сила кулоновского взаимодействия являются**консервативными силами**.

3.7. Работа силы тяжести

Сила тяжести – сила, действующая на тело массой m, находящееся вблизи поверхности Земли, когда поле силы гравитацииможно считать однородным.

Сила тяжестиравна произведению массы тела на ускорение свободного падения: $\vec{F}_T = m\vec{g}$. (3.35)

Пусть материальная точка перемещается из точки 1 в точку 2 по произвольной траектории. Рассмотрим элементарную работу силы тяжести на элементарном перемещении $d\vec{r}$ (рис.3.10).

$$\delta A_T = \vec{F}_T d\vec{r} = F_T (dr)_F, \quad (3.36)$$

где $(dr)_F$ – проекция элементарного тяжести $\vec{F}_T$. Учитывая, что проекция элементарного перемещения $d\vec{r}$ на ось z равна $-dz$, получаем

$$\delta A_T = F_T(-dz) = -mgdz. \ (3.37)$$

Работа силы тяжести по перемещению материальной точки из точки 1 в точку 2

$$A_T = \int_{h_1}^{h_2} -mgdz = -mg\int_{h_1}^{h_2} dz = mgh_1 - mgh_2,$$

$$A_T = mgh_1 - mgh_2. \quad (3.38)$$

Из формулы (3.38) следует, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положениями материальной точки в пространстве.

Таким образом, сила тяжести является консервативной силой.

3.8. Работа силы упругости

Рассмотрим систему, состоящую из тела массы m, прикрепленного к пружине, второй конец которой закреплен и неподвижен (рис.3.11).

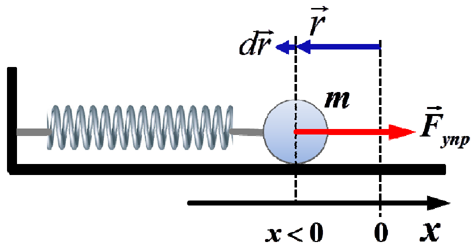

Рис. 3.11

Тело может перемещаться в горизонтальном направлении. При смещении из положения равновесия на тело со стороны пружины действует сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$, всегда направленная к положению равновесия. Величина $\vec{r}$ характеризует смещение тела из положения равновесия.Модуль $\vec{r}$ равен абсолютной деформации пружины.На рис.3.11 показано состояние системы, когда пружина сжимается и тело движется налево.

В случае небольших деформаций соблюдается закон Гука, согласно которому деформация пропорциональна силе упругости: $\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{r}$, где k - коэффициент упругости (жесткость пружины).

Найдем элементарную работу силы упругости на перемещении тела $d\vec{r}$: $\delta A_{\text{упр}} = \vec{F}_{\text{упр}} \cdot d\vec{r} = -k \cdot \vec{r} \cdot d\vec{r} = -k \cdot r(d\vec{r})_r = -k \cdot rdr$, (3.36)

где $(d\vec{r})_r$ – проекция $d\vec{r}$ на направление $\vec{r}$.Работа силы упругости при перемещении материальной точки из положения $\vec{r}_1$, в положение $\vec{r}_2$:

$$A_{\text{упр}} = -\int_{r_1}^{r_2} k \cdot rdr = \frac{k \cdot r_1^2}{2} - \frac{k \cdot r_2^2}{2}, A_{\text{упр}} = \frac{k \cdot r_1^2}{2} - \frac{k \cdot r_2^2}{2}. \quad (3.39)$$

.

Из формулы (3.39) следует, что работа силы упругости определяется лишь начальным и конечным положениями материальной точки в пространстве.Таким образом, сила упругости тоже является консервативной силой.

3.9. Работа силы трения

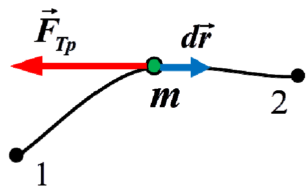

Рис. 3.12

Сила трения $F_{\text{тр}}$– сила, возникающая при перемещении соприкасающихся тел относительно друг друга и направленная в сторону, противоположную перемещению.

Элементарная работа силы трения

$$\delta A_{\text{тр}} = \vec{F}_{\text{тр}} \cdot d\vec{r} = -F_{\text{тр}} ds\,. \qquad (3.40)$$

Работа силы трения при перемещении материальной точки из точки 1 в точку 2 (рис.3.12):

$$A = -\int_1^2 F_{\text{тр}} ds \,(3.41)$$

При $F_{\text{тр}} = \text{const}$ $A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} S$, где S – путь, пройденный телом.

Из формулы (3.41) следует, что работа силы трения зависит от формы траектории. Следовательно, сила трения является неконсервативной силой.

3.10. Работа консервативной силы. Потенциальная энергия

Поле сил – область пространства, в каждой точке которой на помещенное туда тело действует сила, закономерно изменяющаяся от точки к точке пространства.Поле консервативных сил называется также **потенциальным полем**.

Выше, рассматривая работу консервативных сил, мы пришли к выводу о том, что она не зависит от формы траектории и равна разности двух значений функции, характеризующей относительное положение взаимодействующих тел (см. формулы (3.33), (3.34), (3.38), (3.39)). Обозначим эти значения функции буквами $W_{\text{п}1}$ и $W_{\text{п}2}$ и назовем их **потенциальными энергиями взаимодействия**. Тогда в общем случае для работы консервативной силы получаем

$$A_{\text{к.с.}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{к.с.}} d\vec{l} = W_{\text{п}1} - W_{\text{п}2} = -\Delta W_{\text{п}}\,. \qquad (3.42)$$

Для элементарной работы $\delta A_{\text{к.с.}} = -dW_{\text{п}}$. (3.43)

Работа консервативной силы равна взятому со знаком минус изменению потенциальной энергии тела. Знак «-» означает, что положительная работа консервативной силы приводит к уменьшению потенциальной энергии.При отрицательной работе консервативной силы потенциальная энергия возрастает.

Из (3.42) следует, что потенциальная энергия есть величина относительная иможет быть определена с точностью до некоторой постоянной.

Для силы тяготения $W_g = -G\dfrac{m_1 m_2}{r} + \text{const}$. (3.44)

Пусть $W_g = 0$ при $r = \infty$,тогда $\text{const} = 0$ и $W_g = -G\dfrac{m_1 m_2}{r}$. (3.45)

Для силы Кулона $W_k = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{const}$. (3.46)

Пусть $W_k = 0$ при $r = \infty$, тогда $\mathrm{const} = 0$ и $W_k = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$. (3.47)

Для силы тяжести $W_{\mathrm{T}} = mgh + \mathrm{const}$. (3.48)

Пусть $W_{\mathrm{T}} = 0$ при $h = 0$, тогда $\mathrm{const} = 0$ и $W_{\mathrm{T}} = mgh$.(3.49)

Для силы упругости $W_{\text{упр}} = \dfrac{k \cdot r^2}{2} + \mathrm{const}$. (3.50)

Пусть $W_{\text{упр}} = 0$ при $r = 0$, тогда $\mathrm{const} = 0$ и $W_{\text{упр}} = \dfrac{k \cdot r^2}{2}$. (3.51)

Как следует из (3.42), потенциальная энергия системы в данном ее положении $W_{\text{п}1}$ численно равна работе, которую совершают действующие на систему консервативные силы при перемещении системы из этого положения в то, где потенциальная энергия $W_{\text{п}2}$ условно принимается равной нулю. Понятие потенциальной энергии имеет место только для консервативных сил.

3.11. Связь между консервативной силой и потенциальнойэнергией

Пусть материальная точка перемещается по траектории и на нее действует консервативная сила $\vec{F}_{\text{к.с.}}$ (рис.3.13). Элементарная работа консервативной силы $\vec{F}_{\text{к.с.}}$ на элементарном перемещении $d\vec{l}$ (рис. 3.13)

$$\delta A = \vec{F}_{\text{к.с.}} \cdot d\vec{l} = F_\ell \cdot dl, \qquad (3.52)$$

где F_ℓ - проекция консервативной силы $\vec{F}_{\text{к.с.}}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$. С другой стороны элементарная работа консервативной силы

$$\delta A = -dW_{\text{п}}. \qquad (3.53)$$

Следовательно,

$$F_\ell dl = -dW_{\text{п}} \Rightarrow F_\ell = -\frac{dW_{\text{п}}}{dl}, \qquad (3.54)$$

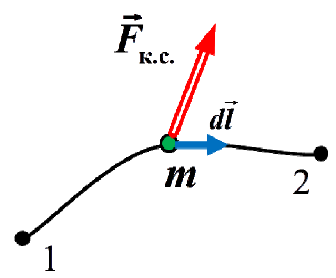

Рис. 3.13

где $dW_{\text{п}}$ - изменение потенциальной энергии на перемещении dl. Получена формула для проекции консервативной силы на произвольное направление.

Применим ее для определения проекций консервативной силы на оси координат:

$$F_x = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z}. \qquad (3.55)$$

Таким образом, вектор консервативной силы можно представить в виде:

$$\vec{F}_{\text{к.с.}} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial W_\text{п}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_\text{п}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_\text{п}}{\partial z}\vec{k}\right) = -\text{grad}W_\text{п} \qquad (3\ 56)$$

Оператор, стоящий в скобках, обозначается $grad$, называется «**градиент**» и является векторной величиной. Можно показать, что $gradW_\text{п}$ - вектор, направленный в сторону наиболее быстрого возрастания потенциальной энергии.

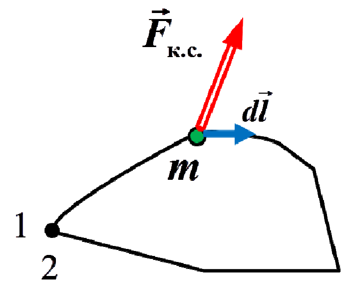

Рис. 3.14

Консервативная сила, действующая на материальную точку, равна минус градиенту потенциальной энергии и направлена в сторону наиболее быстрого уменьшения потенциальной энергии.

Если перемещение материальной точки происходит по замкнутой траектории, точки 1 и 2 совпадают (рис.3.14), и

работа консервативной силы по замкнутому контуру равна нулю:

$$A_{\text{к.с.}} = \oint_l \vec{F}_{\text{к.с.}} d\vec{l} = W_{\text{п}1} - W_{\text{п}2} = 0. \ (3.57)$$

Величина $\oint_l \vec{F}_{\text{к.с.}} d\vec{l}$ называется **циркуляциейвектора** $\vec{F}_{\text{к.с.}}$

3.12. Кинетическая энергия

Пусть $\vec{F}$ - результирующая сила, действующая на материальную точкумассой $\boldsymbol{m}$.Элементарная работа δA_F на перемещении $d\vec{r}$ равна:

$$\delta A_F = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt}\vec{\upsilon}dt = md\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon} = m\upsilon(d\vec{\upsilon})_\upsilon = m\upsilon d\upsilon \, (3.58)$$

где $(d\vec{\upsilon})_\upsilon$ - проекция вектора $d\vec{\upsilon}$ на направление вектора скорости. Работа результирующей силыпри перемещении материальной точки из точки 1 в точку 2 равна

$$A_F = \int_{(1)}^{(2)} m\upsilon d\upsilon = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon d\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}, \qquad (3.59)$$

где υ_1 и υ_2- скорости материальной точки в начале и конце траектории соответственно. Таким образом, работа результирующей силы, при перемещении материальной точки равна разности двух значений функции, зависящей от скорости материальной точки, которые назовем кинетическими энергиямии обозначим $W_{\text{к}1}$, $W_{\text{к}2}$.

Равенство (3.59) выражает**теорему об изменении кинетической энергии:изменение кинетической энергии равно работе результирующей всех сил, действующих на материальную точку:**
$A_F = W_{к2} - W_{к1}$. (3.60)
В дифференциальной форме эту теорему можно записать в виде

$$\delta A_F = dW_к. \qquad (3.61)$$

Как следует из (3.60),кинетическая энергиявеличина относительная, зависит от выбора системы отсчетаиможет быть определена с точностью до некоторой постоянной

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2} + \text{const}. \quad (3.62)$$

Пусть $W_к = 0$, когда $\upsilon = 0$ в данной системе отсчета. Тогда константа равна нулю и $W_к = \frac{m\upsilon^2}{2}$. (3.63)

Суммарная кинетическая энергия системы N материальных точекравна

$$W_к = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}. \qquad (3,64)$$

При поступательном движении все точки тела движутся по одинаковым траекториям с одинаковыми скоростями $\upsilon_i = \upsilon$, и кинетическая энергиятела равна:

$$W_к = \frac{\upsilon^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i = \frac{m\upsilon^2}{2}, \qquad (3.65)$$

где m - полная масса тела.

При вращательном движении абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси zвсе точки тела согласно формуле (1.16) имеют одинаковую угловую скорость$\upsilon_i = \omega R_i$. Из равенства (3.64)следует, что кинетическая энергия вращающегося тела равна:

$$W_к = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} (\omega R_i)^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}, \qquad (3.66)$$

где величина $I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$ (3.67) называется **моментом инерции тела**.

3.13. Закон изменения и сохранения полной механической энергии

Представим результирующую силу $\vec{F}$, действующую на материальную точку, как сумму результирующей всех консервативных сил $\vec{F}_{к.с.}$ и результирующей всех неконсервативных сил $\vec{F}_{н.к.}$:

$\vec{F} = \vec{F}_{\text{к.с.}} + \vec{F}_{\text{н.к.}}$ (3.68).Умножив левую и правую части (3.68) скалярно на вектор элементарного перемещения $d\vec{r}$, получим для элементарной работы результирующей силы δA_F:

$$\delta A_F = \delta\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_{\text{к.с.}} \cdot d\vec{r} + \vec{F}_{\text{н.к.}} \cdot d\vec{r} = \delta A_{\text{к.с.}} + \delta A_{\text{н.к.}}, (3.69)$$

где $\delta A_{\text{к.с.}}$- элементарная работа результирующей всех консервативных сил; $\delta A_{\text{н.к.}}$- элементарная работа результирующей всех неконсервативных сил. С учетом соотношений (3.61) $\delta A_F = dW_{\text{к}}$ и (3.53) $\delta A_{\text{к.с.}} = -dW_{\text{п}}$ равенство (3.69)можно записать в виде:

$$dW_{\text{к}} = -dW_{\text{п}} + \delta A_{\text{н.к.}} \text{ или } d(W_{\text{к}} + W_{\text{п}}) = \delta A_{\text{н.к.}}. \qquad (3.70)$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий $W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = W$ называется **полноймеханической энергиейматериальной точки**.

Приперемещении материальной точки из положения, в котором полная механическая энергия равна W_1, в положение, в котором полная механическая энергия становится равной W_2, из (3.70)следует:

$$W_2 - W_1 = A_{\text{н.к.}}, (3.71)$$

то есть, **изменение полной механической энергии материальной точки равно работе неконсервативных сил**. В этом состоит **закон изменения механической энергии для материальной точки.**

Если $A_{\text{н.к.}} = 0$**, то**$W_1 = W_2$, т.е.**полная механическая энергия материальной точки сохраняется**.

Полная механическая энергия системы N взаимодействующих материальных точек определяется суммой кинетических энергий тел, входящих в систему, и потенциальных энергий, обусловленных взаимодействием тел системы друг с другом и с внешними телами:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_{ki} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa\neq i}}^{N} W_{pi\kappa} + \sum_{i=1}^{N} W_{pi}. \qquad (3.72)$$

Первое слагаемое в (3.72) $\sum_{i=1}^{N} W_{ki}$ представляет полную кинетическую энергию системы, где W_{ki}- кинетическая энергия i-й материальной точки.Второе слагаемое в (3.72) $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\kappa=1,k\neq i}^{N} W_{pi\kappa}$ представляет полную потенциальную энергию взаимодействия материальных точек в системе,где $W_{pi\kappa}$ - потенциальная энергия взаимодействия i-й материальной точки с k-й,а $\sum_{k=1,k\neq i}^{N} W_{pi\kappa}$ -потенциальная энергия взаимодействия i-й материальной точки со всеми материальными точками в системе; множитель $\frac{1}{2}$ связан с тем, что $W_{pik} = W_{pki}$ и в двойную суммувходят обе эти величины. Третье слагаемое в (3.72) $\sum_{i=1}^{N} W_{pi}$ представляет потенциальную энергию взаимодействия системы с внешними телами, где W_{pi} - потенциальная энергия взаимодействия i-й материальной точки с этими телами.

В общем случае **изменение полной механической энергии системы тел равно работе неконсервативных сил:**

$$\Delta W = A_{\text{н.к.}} \qquad (3.73)$$

В этом состоит **закон изменения полной механической энергии системы тел**.

Если работа неконсервативных сил $A_{\text{н.к.}}$, действующих на систему, равна нулю, то $\Delta W = 0$ и полная механическая энергия системы сохраняется. В этом состоит закон сохранения полной механической энергии системы тел.

3.14. Закон сохранения энергии

Кроме механической энергии существуют и другие виды энергии: внутренняя, электрическая, магнитная и т. д.Наблюдения за разнообразными явлениями показали, что может происходить переход одних видов энергии в другие. Простой пример: тело, которому сообщили некоторый импульс, а значит и кинетическую энергию, через некоторое время останавливается под действием трения. При этом происходит нагревание, как этого тела, так и поверхности, по которой оно двигалось, т.е. произошло увеличение внутренней энергии тела и окружающих тел. Как показали тщательные эксперименты, насколько уменьшается кинетическая энергия, настолько же возрастает внутренняя.

Явления, в которых происходит переход энергии одного вида в другие виды энергии, обмен энергией между телами, происходят в природе и технике повсеместно. При этом, как показало развитие науки, выполняется фундаментальный закон, получивший название **закон сохранения энергии.** Этот закон следует рассматривать как обобщение множества экспериментальных фактов. Он заключается в том, что **энергия не исчезает бесследно и не возникает из ничего, она превращается из одного вида энергии в другой, либо передается от одних тел к другим в эквивалентном количестве.**Это означает: насколько уменьшилось (или увеличилось) количество энергии одного вида, настолько увеличилось (или уменьшилось) количество энергии другого вида, насколько уменьшилось (или увеличилось) количество энергии у данной системы тел, настолько оно увеличилось (или уменьшилось) у окружающих тел. При этом общее количество энергии остается неизменным.

4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

4.1. Момент инерции тела относительнонеподвижной оси

Сначаларассмотрим движение материальной точки массой m и импульсом $\vec{p}$ по окружностирадиуса $\vec{R}$ с угловой скоростью $\vec{\omega}$ в плоскости, перпендикулярной оси z, и проходящей через центр окружности (рис. 4.1).

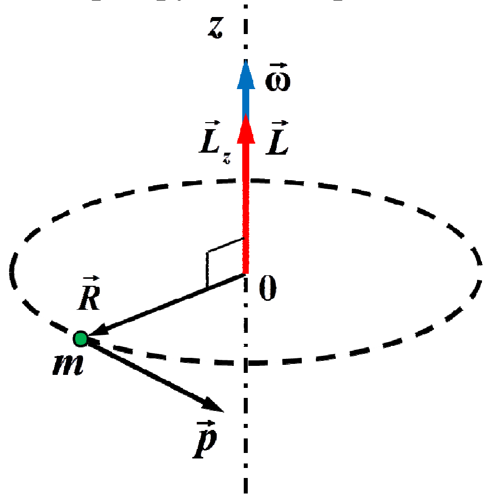

Рис. 4.1

Момент импульса материальной точки относительно точки Оравен моменту импульса относительно оси z:

$$\vec{L} = [\vec{R} \times \vec{p}] = \vec{L}_z. \quad (4.1)$$

Величина момента импульса относительно осиz равна:

$$L_z = Rp\sin\frac{\pi}{2} = Rm\upsilon = Rm\omega R = mR^2\omega. \ (4.2)$$

Момент инерции материальной точки относительно оси I_z –величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат ее расстояния до оси вращения:

$$I_z = mR^2. \quad (4.3)$$

Вектора $\vec{L}_z$ и $\vec{\omega}$ имеют одинаковое направление и выражение для момента импульса (4.2)можно записать в виде:

$$\vec{L}_z = I_z\vec{\omega}.(4.4)$$

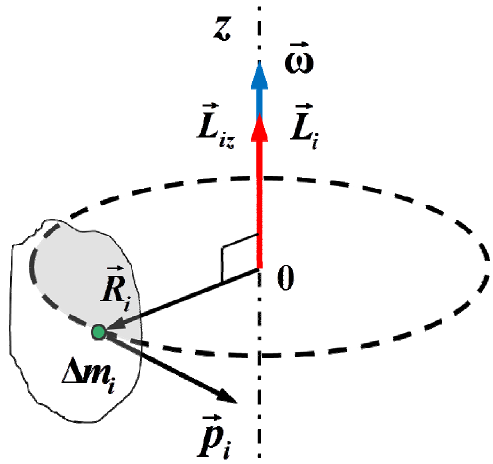

Рис. 4.2

Рассмотрим вращательное движениесистемы N материальных точекс одинаковой угловой скоростью $\vec{\omega}$ относительно неподвижной оси z.Если R_i - расстояниеi-ой материальной точкидооси z, а Δm_i - её масса, (рис.4.2)томоментимпульса относительно оси z для системы материальных точек:

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^{N}\vec{L}_{zi} = \sum_{i=1}^{N}\Delta m_i R_i^2\vec{\omega} = \vec{\omega}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i R_i^2 = I_z\vec{\omega}. \qquad (4.5)$$

Здесь I_z - **момент инерции абсолютно твердого тела относительно оси** z:

$$I_z = \sum_{i=1}^{N}\Delta m_i R_i^2 .(4.6)$$

Момент инерции системы материальных точек зависит от ихмассы, положения относительно оси,выбора оси вращения.

Для абсолютно твердого тела удобно от суммы (4.6) перейти к интегралу по объему тела V.Для этого массу Δm_i материальной точки заменим бесконечно малой массой dm, находящийся на расстоянии r от оси. Тогда формула для момента инерции примет вид:

$$I_z = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV , \qquad (4.7)$$

где ρ - плотность тела.Для однородного тела плотность постоянна, и момент инерции можно рассчитывать по формуле:

$$I_z = \rho \int_V r^2 dV . \qquad (4.8)$$

4.2. Основное уравнение динамики вращательного движения

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся относительно неподвижной оси. Момент импульса тела относительно оси:

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}. \qquad (4.9)$$

Действие внешних сил приводит к изменению момента импульса, а, следовательно, к изменению угловой скорости вращения тела. Скорость изменения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (4.10)$$

Учитывая, что $\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z$, а $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$,получим**основное уравнение динамики вращательного движения,**

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}_z}{I_z}. \qquad (4.11)$$

согласно которому угловое ускорение тела прямо пропорционально сумме моментов внешних сил, действующих на тело, и обратно пропорционально моменту инерции тела:

. При вращательном движении момент инерции тела является мерой инертности,аналогично тому, как масса тела является мерой инертности при поступательном движении.

4.3. Примеры расчета момента инерцииабсолютнотвердоготела

Пример 1. Тонкое кольцо, полый тонкостенный цилиндр.

Если ось z совпадает с осью симметрии кольца (цилиндра), то расстояние от центра кольцадо каждой его материальной точки Δm_i постоянно и равно R (рис.4.3).Момент инерции кольца илиполого цилиндра равен:

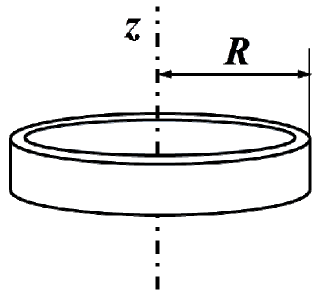

Рис. 4.3

$$I_z = R^2 \sum \Delta m_i = R^2 m,$$

$$I_z = mR^2. \quad (4.12)$$

Пример 2. Однородный диск, сплошной цилиндр.

Для вычисления момента инерции однородногодиска относительно оси симметрии используем формулу (4.8) для момента инерции.
В качестве элементарного объема интегрирования dV выберем тонкое цилиндрическое кольцо радиуса r, толщиной dr и высотой h (рис. 4.4).Тогда

$$I_z = \rho \int_0^R r^2 (2\pi r \cdot h) dr = \rho \cdot 2\pi \cdot h \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi h \rho R^4}{2} = \frac{(\pi R^2 \cdot h \cdot \rho) \cdot R^2}{2}$$

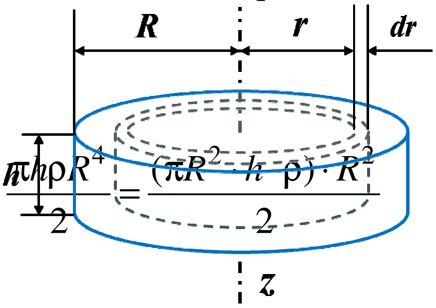

Рис. 4.4

Заметим, что $\pi R^2 \cdot h = V$, а $V \cdot \rho = m$.Таким образом для момента инерции получаем: $I_z = \dfrac{mR^2}{2}$. (4.13)

4.4.Теорема Штейнера.

Момент инерции тела относительно произвольной оси z равен сумме момента инерции этого тела относительно оси z_c, параллельной данной и проходящей через центр масс этого тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями(рис. 4.5)[1]:

$$I_z = I_c + md^2, \quad (4.14)$$

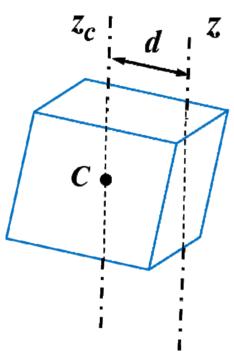

Рис. 4.5

где I_z - искомый момент инерции тела относительно оси z; I_c - момент инерции тела относительно оси z_c, параллельной оси z, и проходящей через центр масс тела – точку С;
d – расстояние между осями, m - масса тела.

4.5. Момент инерции однородного стержня

Для определения момента инерции стержня I_c длиной l и массой m относительно оси z_c, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр, разобьем его на элементарные участки длиной dr (рис.4.6.). Масса участка $dm = \frac{m}{l} dr$, а его момент инерции $dI_c = r^2 dm = \frac{m}{l} r^2 dr$. Момент инерции всего стержня

$$I_c = 2\int_0^{l/2} dI_c = 2\frac{m}{l}\int_0^{l/2} r^2 dr = 2\frac{m}{l}\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{l/2} = \frac{ml^2}{12}. \quad (4.15)$$

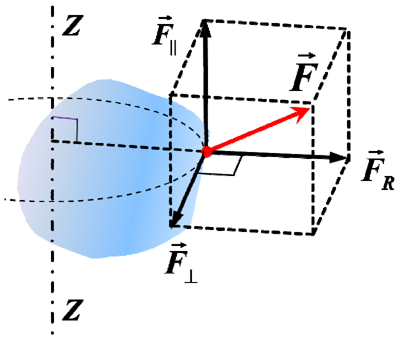

Рис. 4.7

Для момента инерции относительно оси z, параллельной оси z_c и проходящей через конец стержня (рис. 4.6) по теореме Штейнера

$$I_z = I_c + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}. \quad (4.16)$$

4.6. Работа при вращательном движении

Найдем работу, совершаемую внешней силой при вращении твердого тела вокруг неподвижной осиzz (рис. 4.7). В общем случае силу, приложенную к телу, можно разложить на три составляющие: $\vec{F}_{\parallel}$, параллельную оси вращения,момент которой относительно оси равен нулю; $\vec{F}_R$, направленную вдоль радиуса R, момент которой относительно оси тоже равен нулю; $\vec{F}_{\perp}$, направленную по касательной к окружности.Так как $\vec{F}_{\perp}$ совпадает по направлению с элементарным перемещением, работа $dA = F_{\perp} \cdot dr = F_{\perp} \cdot R \cdot d\varphi = M_z \cdot d\varphi$, где M_z - момент силы относительно оси z.

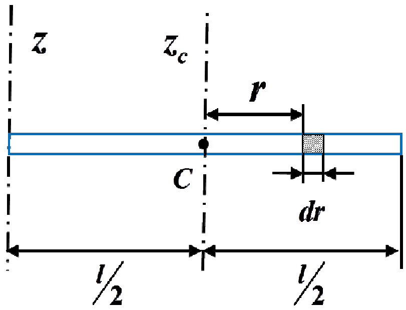

Рис. 4.6

Таким образом, в случае произвольного направления силы работа силы при вращательном движении тела

$$dA = M_z \cdot d\varphi. \quad (4.17)$$

При изменении угла поворота от значения φ_1 до φ_2, работа равна

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \cdot d\varphi. \quad (4.18)$$

Найдем работу результирующего момента сил M_z, равного сумме моментов всех сил, действующих на тело. Согласно (4.11), $M_z = I_z\varepsilon = I_z \frac{d\omega}{dt}$, а $d\varphi = \omega \cdot dt$. Тогда из (4.18) с учетом (3.66) получим

$$A = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I_z \cdot \omega \cdot d\omega = I_z \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega \cdot d\omega = I_z \frac{\omega_2^2}{2} - I_z \frac{\omega_1^2}{2} = W_{\text{к}2} - W_{\text{к}1}, \qquad (4.19)$$

Таким образом, **работа результирующего момента сил равна изменению кинетической энергии вращательного движения тела**.

При плоском движении твердого тела массой m, когда центр инерции движется в определенной плоскости со скоростью υ, и тело одновременно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной этой плоскости, удобно представлять его кинетическую энергию в виде суммы энергии поступательного движения и энергии вращательного движения:

$$W = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I_z\omega^2}{2}. \qquad (4.20)$$

.

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики: Кн.1. - М.: Наука, 1998.
2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. М.-С-П., Физматлит, 2000.
3. Трофимова Т.И. Курс физики. М, Академия, 2006.