Госкомсвязи РФ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
ИМ. ПРОФ. М.А.БОНЧ-БРУЕВИЧА

ФАКУЛЬТЕТ ВЕЧЕРНЕГО И ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ 3-го КУРСА

5 семестр

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
1998

УДК 512.517

Полевая Г.М., Раковщик Е.Я., Рудинская Г.И., Стукалова В.С., Яновская Н.К. Методические указания и контрольные задания по высшей математике для студентов 3-го курса (5 семестр) / СПбГУТ.-СПб,1998.

Содержат варианты контрольных работ по теории вероятностей и указания по их выполнению, вопросы и упражнения для самопроверки.

Рецензент *К.В. Лопухов*

Редактор *Л.А. Медведева*

Подписано к печати 27.11.98. ЛР № 020475 от 29.04.97.
Объем 2,75 печ. л. Тираж 600 экз.

Петербургкомстат ООП, 193376, ул. проф. Попова, 39

Введение

В методических указаниях подробно перечислены вопросы теоретического материала, которые следует изучить по каждой теме, указана литература, разобраны примеры и приведены условия нескольких типовых задач для самостоятельного решения. Студент не должен ограничиваться решением только этих задач, а может продолжать упражнения, например, по сборнику задач Е.И.Гурского (соответствующие указания даны по каждой теме). По теории вероятностей студент выполняет контрольную работу 9.

В таблице указаны номера задач для каждого варианта.

Вариант	Контрольная работа 9				
1	531	541	551	561	571
2	532	542	552	562	572
3	533	543	553	563	573
4	534	544	554	564	574
5	535	545	555	565	575
6	536	546	556	566	576
7	537	547	557	567	577
8	538	548	558	568	578
9	539	549	559	569	579
10	540	550	560	570	580

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Тема 1

Предмет теории вероятностей. Историческая справка. Основные понятия теории вероятностей (опыт, события: случайное, невозможное и достоверное; противоположные, несовместные и равновозможные; полная группа событий). Сумма и произведение событий.

[1 , введение; гл. 1, § 1.1 – 1.2]

Тема 2

Определение вероятности и частоты события. Статистическое определение вероятности. Случаи и классическое определение вероятности.

[1 , гл. 1, § 1.3 – 1.6]

ПРИМЕР

В урне содержится 8 синих и 5 красных шаров. Из урны наугад вынимают одновременно четыре шара.

Требуется найти вероятность того, что

все они синие;
хотя бы один красный;
три красных и один синий.

Решение. Опыт состоит в вынимании четырех шаров. Исходами опыта являются выборки (наборы) из четырех шаров. Все эти исходы считаются равновозможными. Число всех возможных исходов равно $n = C_{13}^{4}$. Благоприятными являются выборки, состоящие только из синих шаров. Таких выборок имеется $m = C_{8}^{4}$.

По определению вероятности $P_1 = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_8^4}{C_{13}^4}$.

Напомним, как вычисляются числа C_k^i :

$$C_k^i = \frac{k(k-1)\cdot \ldots \cdot (k-i+1)}{i!} = \frac{k!}{i!(k-i)!} = C_k^{k-i},$$

$(n! = n\ (n-1)\ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad 0\ ! = 1$ по определению).

Отсюда

$$C_8^4 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 70, \qquad C_{13}^4 = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 715,$$

$$P_1 = \frac{14}{143}.$$

(Докажите, что $C_i^0 = C_i^i = 1$, а $C_i^1 = i$, например, $C_{100}^{99} = C_{100}^1 = 100.$)

Поскольку события «хотя бы один красный шар» и «все синие шары» противоположны, то

$$P_2 = 1 - \frac{C_8^4}{C_{13}^4}.$$

В третьем случае благоприятными являются выборки, содержащие 3 красных и один синий шар. Чтобы составить такую выборку, следует: выбрать три красных шара из пяти (это можно сделать C_5^3 способами), добрать недостающий синий шар (это можно сделать C_8^1 способами), и, так как любая тройка красных шаров может объединяться
с любым синим шаром, то всего благоприятных комбинаций будет $m = C_8^3 \cdot C_8^1$. Следовательно, искомая вероятность

$$P_3 = \frac{C_8^3 \cdot C_8^1}{C_{13}^4},$$

где $C_8^1 = 8$; $C_5^3 = C_5^2 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$; $P_3 = \frac{16}{143}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Бросают одновременно две игральные кости. Какова вероятность, что откроется сумма, равная 6?

Ответ: $\frac{5}{36}$

2) В лифт 8-этажного дома вошли 5 человек. Каждый с равной вероятностью может выйти на любом этаже. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах; все выйдут на одном этаже; все выйдут на шестом этаже.

Ответ: $P = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{7^5}$; $P = \frac{7}{7^5}$; $P = \frac{1}{7^5}$.

3) Имеется шесть карточек с буквами О,М,Л,К,О,О. Какова вероятность, раскладывая карточки в случайном порядке, получить слово «молоко».

Ответ: $\frac{3!}{6!}$.

[4 , гл. 1, § 1.2]

Тема 3

Условная и безусловная вероятности. Зависимые и независимые события. Теорема умножения для двух зависимых событий. Зависимость и независимость событий в совокупности. Теорема умножения для независимых в совокупности событий.

[1 , § 1.6; 1.8]]

ПРИМЕР

Студент знает двадцать вопросов из тридцати. В билете 3 вопроса. Найти вероятность того, что он ответит на первые два и не ответит на третий вопрос.

Решение. На экзамене студент выбирает 3 вопроса наудачу. Обозначим через A_1, A_2, A_3 события, состоящие в правильном ответе, соответственно, на первый, второй и третий вопросы, через B - интересующее нас событие. Тогда $B = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3$ и, следовательно,

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(\overline{A}_3 / A_1 \cdot A_2).$$

Далее, $P(A_1) = \frac{20}{30}$. После того, как студент ответил на первый вопрос (событие A_1), осталось 29 вопросов, из них 19 известных, т.е.

$$P(A_2 / A_1) = 19/29.$$

Аналогично

$$P(\overline{A}_3 / A_1 \cdot A_2) = 10/28.$$

Поэтому

$$P(B) = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{10}{28} = 95/609.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события:

A - выпадение герба на первой монете;

B - выпадение хотя бы одного герба;

C - выпадение хотя бы одной цифры;

D - выпадение герба на второй монете.

Определить, зависимы или независимы пары событий.

Ответ: $P(C) = \frac{3}{4}$; $P(C/A) = \frac{1}{2}$ - события A и C зависимы;

$P(A)=\frac{1}{2};\quad P\left(A/_D\right)=\frac{1}{2}$ - события A и D независимы;

$P(B)=\frac{3}{4};\quad P\left(B/_C\right)=\frac{2}{3}$ - события C и B зависимы;

$P(B)=\frac{3}{4};\quad P\left(B/_D\right)=1$ - события B и D зависимы.

2. В двух ящиках находятся детали:
в первом - десять (из них три стандартные), во втором - пятнадцать (из них шесть стандартных). Из каждого ящика вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что они стандартные.

Ответ: $P=\frac{3}{25}$.

[4, § 1.3]

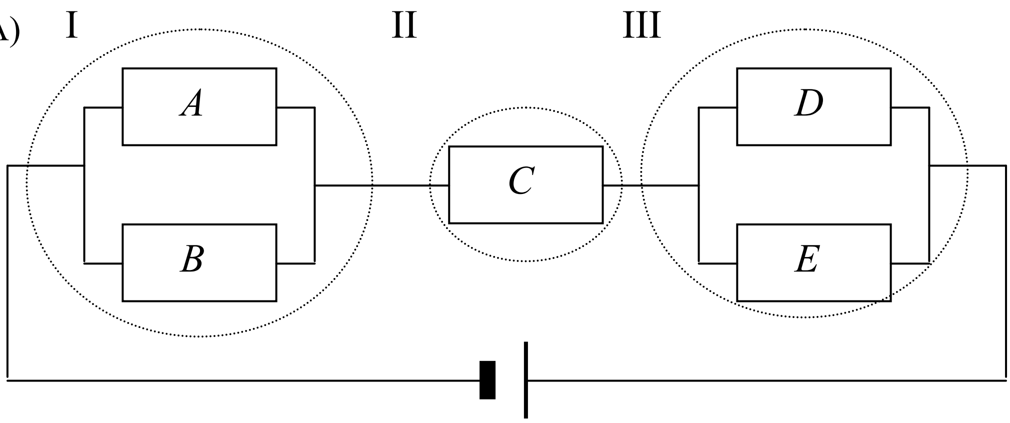
Тема 4

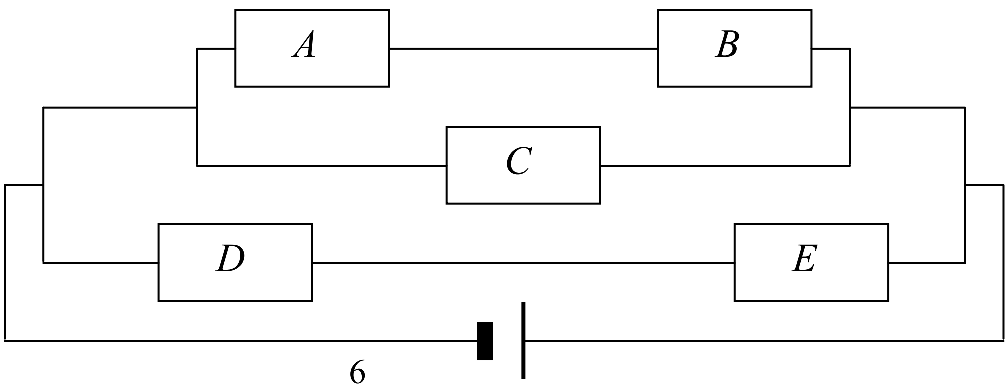
Теорема сложения вероятностей для несовместных и совместных событий.

[1, § 1.74 1.9]

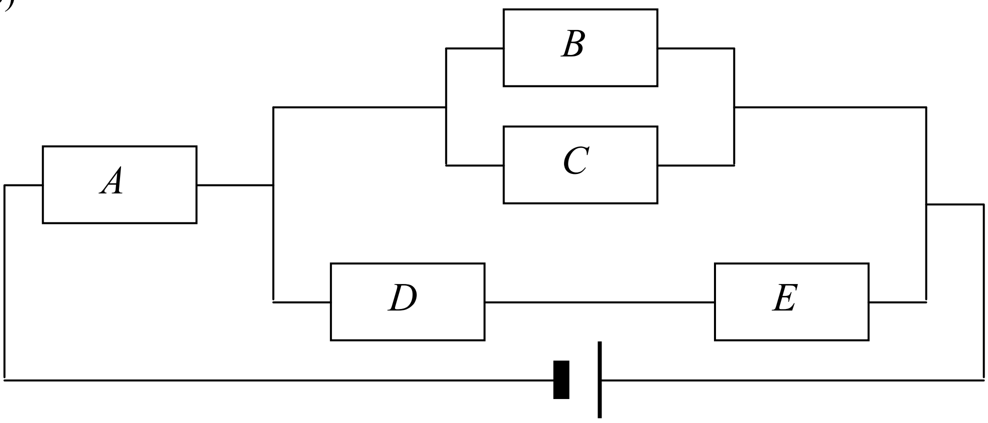
ПРИМЕР

На рисунках изображены электрические схемы, содержащие контакты A, B, C, D, E. Вероятность того, что контакты замкнуты, соответственно равны P_A, P_B, P_C, P_D, P_E. Определить вероятность того, что цепь замкнута (при решении считать, что контакты действуют независимо друг от друга).

А)


Б)


В)



Решение. Обозначим через *A, B, C, D, E* события, эквивалентные замкнутости соответствующих контактов. Замкнутость первой цепи эквивалентна тому, что ток проходит через части цепи I и II, и III, обведенные пунктирной линией. Пусть Q_{I} , Q_{II} , Q_{III} - события, эквивалентные прохождению тока через указанные участки.

Тогда интересующее нас событие

$$S = Q_{\mathrm{I}} \cdot Q_{\mathrm{II}} \cdot Q_{\mathrm{III}} \cdot .$$

Контакты действуют независимо друг от друга, поэтому

$$P(S) = P(Q_{\mathrm{I}}) \cdot P(Q_{\mathrm{II}}) \cdot P(Q_{\mathrm{III}}).$$

Через параллельную цепь I ток проходит, если замкнут или контакт *A*, или контакт *B*, следовательно, $Q_{\mathrm{I}} = A + B$. Контакты могут быть замкнуты одновременно, т.е. события *A* и *B* могут быть r совместными, поэтому

$$P(Q_{\mathrm{I}}) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Поскольку события независимы, $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, следовательно,

$$P(Q_{\mathrm{I}}) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

Аналогично

$$P(Q_{\mathrm{III}}) = P(D) + P(E) - P(D) \cdot P(E).$$

Наконец,

$$P(Q_{\mathrm{II}}) = P(C).$$

Следовательно, вероятность замкнутости цепи

$$P(S) = \left(P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)\right) \cdot P(C) \cdot \left(P(D) + P(E) - P(D) \cdot P(E)\right).$$

Вероятности $P(Q_{\mathrm{III}})$ и $P(Q_{\mathrm{I}})$ можно вычислить и следующим способом: тока в параллельной цепи не будет, если нет контакта и в элементах *A*, и *B*, т.е. для события $\overline{Q_{\mathrm{I}}}$, противоположного событию Q_{I}, имеем $\overline{Q_{\mathrm{I}}} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

Следовательно,

$$P(\overline{Q_{\mathrm{I}}}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)),$$
$$P(Q_{\mathrm{I}}) = 1 - P(\overline{Q_{\mathrm{I}}}) = 1 - (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)).$$

Этот способ более рационален для параллельных цепей с большим числом ветвей.

Замечание. В общем случае формула вероятности суммы более двух совместных событий громоздка и задачи решают переходом к противоположному событию.

Тогда $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1 + \ldots + A_n}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить пример для случая второй и третьей схем

Ответ:

$$1 - (1 - P(A) \cdot P(B)) \cdot (1 - P(C)) \cdot (1 - P(D)P(E));$$
$$P(A) \cdot (1 - (1 - P(B)) \cdot (1 - P(C)) \cdot (1 - P(D) \cdot P(E))).$$

2. Определить вероятность того, что партия в 100 изделий, среди которых пять бракованных, будет принята при испытании, если условиями приемки допускается не более одного бракованного изделия из 50.

Ответ:

$$P = \frac{C_{25}^{50}}{C_{100}^{50}} + \frac{C_5^4 \cdot C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}.$$

[4, § 1.3]

Тема 5

Формула полной вероятности. Формула Бейеса.

[1, § 1.10 – 1.11]

Формула полной вероятности $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\left(A/H_i\right)$ получается как следствие теорем сложения и умножения вероятностей. Она позволяет определить вероятность события *A*, которое может произойти вместе с одним из событий (гипотез) H_1, H_2. …..,H_n, образующих полную группу несовместных событий. Напомним, что если события образуют полную группу, то их сумма равна достоверному событию (одно из них обязательно реализуется) и, следовательно,

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1,$$

а так как они несовместны, то

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

ПРИМЕР 1

Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что искажается в среднем 25 % сообщений «точка» и 20 % сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в соотношении 3 : 2. Определить вероятность того, что принят сигнал «точка».

Решение. Событие A состоит в том, что принят сигнал «точка».

Рассмотрим гипотезы:

H_1 - передавался сигнал «точка»;

H_2 - передавался сигнал «тире».

Тогда

$$P(H_1)=\frac{3}{5};\quad P(H_2)=\frac{2}{5}\qquad (\text{так как } P_1 : P_2 = 3:2;\quad P_1+P_2=1).$$

Сигнал «точка» будет принят, если переданный сигнал «точка» не исказится, т.е.

$$P\left(A/H_1\right)=0.75,$$

или, если переданный сигнал «тире» исказится и воспримется как «точка», т.е

$$.\ P\left(A/H_2\right)=0.2.$$

Окончательно по формуле полной вероятности имеем

$$P(A)=\frac{3}{5}\cdot 0.75+\frac{2}{5}\cdot 0.2=0.53.$$

Формула Бейеса

$$P\left(H_i/A\right)=\frac{P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P\left(A/H_i\right)}$$

позволяет найти условные вероятности гипотез, если событие A уже имело место.

ПРИМЕР 2

Имеется три партии изделий. В одной партии все изделия первого сорта, в другой - все изделия второго сорта. В третьей партии поровну изделий первого и второго сорта. Из выбранной наудачу партии взято изделие, оказавшееся первосортным. Найти вероятность того, что это изделие из партии, где все изделия первого сорта.

Решение. Событие A состоит в том, что из некоторой партии взято первосортное изделие. Рассмотрим гипотезы:

H_1 - изделие взято из партии, где все изделия первого сорта;

H_2 - изделие из партии, где все изделия второго сорта;

H_3 - изделие из партии, где есть изделия двух сортов.

Обратите внимание, что гипотезы описывают только, откуда взято изделие, но не говорят о его качестве (качество входит в событие A). Так как партия выбиралась наудачу, то до того, как событие произошло, вероятности всех гипотез одинаковы:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3),$$

а так как

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1,$$

то

$$P(H_i) = \frac{1}{3} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Посмотрим, как изменяются эти вероятности после того, как стало известно, что взятое изделие оказалось изделием первого сорта. Не применяя формулу Бейеса, легко догадаться, что в этом случае $P\left({H_2}/{A}\right) = 0$, так как во второй партии нет изделий первого сорта. Найдем $P\left({H_1}/{A}\right)$ по формуле Бейеса:

$$P\left({H_1}/{A}\right) = \frac{P(H_1) \cdot P\left({A}/{H_1}\right)}{P(A)}.$$

$P\left({A}/{H_1}\right) = 1$ - вероятность того, что взято первосортное изделие, если оно берется из первой партии.

Аналогичные рассуждения дают $P\left({A}/{H_2}\right) = 0; \quad P\left({A}/{H_3}\right) = 0.5.$

Окончательно получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P\left({A}/{H_i}\right) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ ,$$

$$P\left({H_1}/{A}\right) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Найдите самостоятельно $P\left({H_3}/{A}\right)$.

ПРИМЕР 3

В условиях примера 1 этой темы определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если принят сигнал «точка».

Решение. Событие A, состоящее в том, что принят сигнал «точка», произошло. Нам надо найти вероятность того, что при этом был передан этот же сигнал, т.е. сигнал «точка», и, значит, имела место первая гипотеза:

$$P\left(H_1/A\right) = \frac{3/5 \cdot 0.75}{0.53} = \frac{45}{53} \approx 0.85.$$

(см. решение примера 1).

УПРАЖНЕНИЯ

1) Ответьте на вопрос примера 3, если был принят сигнал «тире».

Ответ: 0.68.

2) Имеются две урны. В первой урне два белых и три черных шара, во второй – три белых и пять черных шаров. Из первой и второй урн наугад берут по одному шару и кладут их в третью урну. Шары в третьей урне перемешивают и берут из нее наудачу один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Ответ: $P = \frac{31}{80}$.

3) Цель находится или в пункте A с вероятностью 0.7, или в пункте B с вероятностью 0.3. Сделано 3 выстрела по пункту A и 2 выстрела по пункту B. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0.1. Какова вероятность, что цель поражена?

Ответ: $P = \left(1 - 0.9^3\right) \cdot 0.7 + \left(1 - 0.9^2\right) \cdot 0.3 = 0.328.$

[4 , § 1.4]

Тема 6

Повторение испытаний. Схема Бернулли и формула Бернулли (для вероятности m успехов в n опытах: $P_{n,m} = C_n^m \cdot P^m \cdot q^{n-m}$. Интегральная теорема Лапласа.

[1 , § 1.12], [2 , гл. 5, § 1, 3]

ПРИМЕР

Событие B наступает только в том случае, если событие A появится не менее двух раз. Определить вероятность появления события B, если вероятность появления события A при одном опыте равна 0.4 и произведено шесть независимых испытаний.

Решение. Вероятность появления события A не менее m раз в n опытах вычисляется по формуле

$$Q_{n,m} = \sum_{k=m}^{n} P_{n,k} \quad \text{или} \quad Q_{n,m} = i \cdot \sum_{k=0}^{m-1} P_{n,k}$$, где $P_{n,k}$ определяется формулой Бернулли.

В данном примере $n = 6$; $p = 0.4$; $q = 1-p = 0.6$.

Тогда

$$P(B)=1-\left(P_{6.0}+P_{6.1}\right)=1-\left(C_6^0\cdot(0.4)^0\cdot(0.6)^6+C_6^1\cdot(0.4)^1\cdot(0.6)^5\right)=0.767.$$

Интегральная теорема Лапласа позволяет приближенно вычислить вероятность $P_n(K_1,K_2)$ того, что событие A появится в n независимых испытаниях не менее K_1 и не более K_2 раз, если вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна $P(0<p<1)$

$$P_n=\left(K_1,K_2\right)=\frac{1}{2}\left(\Phi(x'')-\Phi(x')\right),$$

где $x'=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x''=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функция Лапласа.

Таблица некоторых значений функции Лапласа приведена на с. 42 в приложении. Более полная таблица функции Лапласа имеется, например, в [4]. В ней указаны значения Φ для положительных значений x ($0\le x\le 5$); для $x=5$ полагают $\Phi(x)=1$. Для $x<0$ пользуются той же таблицей, имея ввиду, что $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ (функция $\Phi(x)$ - нечетная).

УПРАЖНЕНИЯ

1. По цели производится пять независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.6. Для получения зачета по стрельбе требуется не менее трех попаданий. Найти вероятность получения зачета.

Ответ: P = 0.683.

2) Монета бросается четыре раза. Найти вероятность того, что герб появится ровно два раза; не более двух раз; менее двух раз; хотя бы один раз.

Ответ: $\frac{3}{8}$; $\frac{11}{16}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{15}{16}$.

[4 , § 1.5]

Заключение

Подводя итоги раздела «Случайные события», приведем два примера и упражнения для самопроверки. Советуем, прочитав условия примеров, решить их самостоятельно. Решать можно в любом порядке, выбирая наиболее легкие вопросы. После этого проконтролируйте себя, ознакомившись с предложенными решениями.

ПРИМЕР 1

На десяти карточках написаны буквы а, а, а, м, м, т, т, е, и, к.

Найти вероятность того, что при случайном раскладывании карточек получим слово «математика».

Решить задачу по формуле $P(A)=\dfrac{m}{n}$;

Решение. По теореме умножения вероятностей. Событие A - получение слова «математика». Опыт состоит в раскладывании карточек. Исходы опыта - всевозможные варианты расположения этих десяти букв. Число всех исходов равно числу перестановок из 10, т.е. $n = 10\,!$ Благоприятных исходов будет всего один - когда получится слово «математика». В этом слове три буквы «а», которые можно переставлять между собой $3\,!$ способами, и при этом исход останется благоприятным.

Аналогично $2\,!$ способами можно менять положение буквы «м», $2\,!$ - буквы «т». Поскольку каждый благоприятный вариант для одной буквы комбинируется с каждым вариантом для двух других, имеем: $m = 3\,!\cdot 2\,!\cdot 2\,!$.

Окончательно получим

$$P(A)=\frac{3!\cdot 2!\cdot 2!}{10!}=\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}.$$

Решим задачу, используя теорему умножения вероятностей.

Введем событие A_1, состоящее в том, что на первое место положена карточка с буквой «м»; событие A_2, состоящее в том, что на второе место положена карточка с буквой «а»; A_3 – на третье «т», и т.д.

Тогда $A = A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{10}$,

$$P(A)=P(A_1)\cdot P\left(A_2/A_1\right)\cdot P\left(A_3/A_1\cdot A_2\right)\cdot\ldots\cdot P\left(A_{10}/A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_9\right).$$

Так как всего букв 10, а букв «м» две, то $m_1 = 2$, $n_1 = 10$ и $P(A_1)=\dfrac{2}{10}$.

После того, как одна карточка с буквой «м» положена, осталось 9 карточек, из них 3 с буквой «а» : $m_2 = 3$, $n_2 = 9$ и $P\left(A_2/A_1\right)=\dfrac{3}{9}$.

Аналогично

$$P\left(A_3/A_1\cdot A_2\right)=\frac{2}{8};\quad P\left(A_4/A_1\cdot A_2\cdot A_3\right)=\frac{1}{7};\quad P\left(A_5/A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4\right)=\frac{1}{6}$$

(так как уже положены буквы «мате» и осталось 6 букв, из них одна «м»);

$$P\left({}^{A_6}\!\!\diagup_{A_1\ldots A_5}\right)=\frac{2}{5};\quad P\left({}^{A_7}\!\!\diagup_{A_1\ldots A_6}\right)=\frac{1}{4};$$

$$P\left({}^{A_8}\!\!\diagup_{A_1\ldots A_7}\right)=\frac{1}{3};\quad P\left({}^{A_9}\!\!\diagup_{A_1\ldots A_8}\right)=\frac{1}{2},$$

и осталась одна буква «а» :

$$P\left({}^{A_{10}}\!\!\diagup_{A_1\ldots A_9}\right)=1.$$

Окончательно получаем

$$P(A)=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}.$$

Многие задачи на определение вероятностей могут быть решены не единственным способом.

С помощью теоремы умножения самостоятельно решите упражнения 2, 3 из темы 2

ПРИМЕР 2

Три стрелка выстрелили по одному разу по мишени. Вероятность попадания для каждого стрелка равна, соответственно: P_1 = 0.3; P_2 = 0.9; P_3 = 0.6.

2.1. Найти вероятность того. что попал только второй стрелок.

2.2. Найти вероятность того, что было ровно одно попадание.

2.3. Найти вероятность поражения мишени.

(В задачах 2.2 и 2.3 найти эти же вероятности для случая, когда каждый стрелок попадает в мишень с вероятностью P = 0.6).

2.4. В мишень попала одна пуля. Найти вероятность того, что попал второй стрелок.

Решение. 2.1. Пусть B_2 – событие, состоящее в том, что из трех стрелков попал только второй. Обозначим через A_1, A_2, A_3 события, состоящие в том, что попали, соответственно первый, второй и третий стрелки. Так как событие B_2 произойдет, если произойдет событие A_2 и не произойдут события A_1 и A_3, то $B_2=\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3$.

События A_1, A_2, A_3 (а следовательно, и $\overline{A}_1, A_2, \overline{A}_3$) независимы, поэтому

$$P(B_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3)=(1-P_1)\cdot P_2\cdot(1-P_3)=0.7\cdot 0.9\cdot 0.4=0.252.$$

2.2. Только оно попадание (событие C) будет иметь место, если попадет или только первый стрелок (B_1), или только второй (B_2), или только третий (B_3).

Следовательно, $C = B_1 + B_2 + B_3$.

События B_1, B_2, B_3 несовместны, поэтому

$$\begin{aligned}
&P(C) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \\
&P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) = \\
&P_1 \cdot (1-P_2) \cdot (1-P_3) + (1-P_1) \cdot P_2 \cdot (1-P_3) + (1-P_1) \cdot (1-P_2) \cdot P_3 = \\
&0.3 \cdot 0.1 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.9 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.1 \cdot 0.6 = 0.306.
\end{aligned} \tag{*}$$

Это решение можно оформить, используя формулу полной вероятности.

В качестве гипотез $H_i (i=1,2,3)$ рассмотрим событие B_i. При выполнении любой из этих гипотез событие C произойдет обязательно, т.е.

$$P\left(C / H_i\right) = 1 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Гипотезы H_1, H_2, H_3 не составляют полную группу событий.

Полная группа событий получится, если учесть возможности двух, трех и ни одного попаданий, но условные вероятности события C при этих гипотезах равны нулю. Окончательно получаем (*).

2.3. Мишень поражена, если есть хотя бы одно попадание.Обозначим это событие буквой D. Мишень может поразить или первый, или второй, или третий стрелок, т.е. $D = A_1 + A_2 + A_3$.

События A_i $(i=1, 2, 3)$, совместны, так как каждый стрелок может попасть не один, а вместе с любым другим стрелком, или может быть три попадания.

В этом случае удобно перейти к противоположному событию (см. тема 4, замечание).

Событие $\overline{D}$ состоит в том, что попаданий не было, т.е., что все стрелки промахнулись

$$\begin{aligned}
&P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = \\
&= 1 - 0.7 \cdot 0.1 \cdot 0.4 = 1 - 0.028 = 0.972.
\end{aligned} \tag{**}$$

В случае, когда вероятность попаданий для всех стрелков одинакова, например, $P = 0.6$, формулы (*) и (**) упрощаются:

$$P(C) = 3 \cdot 0.6 \cdot 0.4^2; \quad P(D) = 1 - 0.4^3.$$

Можно воспользоваться формулой Бернулли:

$$\begin{aligned}
&P(C) = P_{3,1} = C_3^1 \cdot p \cdot q^3 = 3 \cdot 0.6 \cdot 0.4^3, \\
&P(D) = P_{3,m\geq 1} = 1 - P_{3,m\leq 1} = 1 - P_{3,0} = 1 - q^3 = 1 - 0.4^3.
\end{aligned}$$

2.4. Сравните условия задач 2.1 и 2.4.

В задаче 2.1 вычисляется вероятность того, что из трех стрелков попал только второй, когда еще неизвестно, какой из множества возможных результатов будет реализован (до стрельбы).

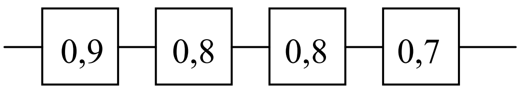
В задаче 2.4 уже известно, что событие С произошло, и надо найти вероятность того, что при этом реализовывалась вторая гипотеза.

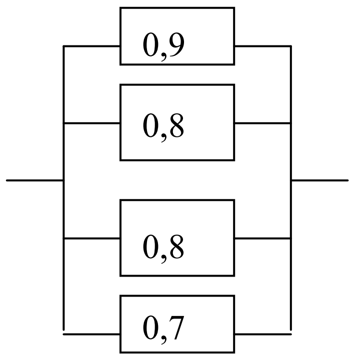
По формуле Бейеса имеем

$$P\left(H_2/C\right) = \frac{P(H_2)\cdot P\left(C/H_2\right)}{P(C)} = \frac{0.7\cdot 0.9\cdot 0.4}{0.306} = \frac{14}{17}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Найти вероятность прохождения тока через цепь, если вероятности исправной работы элементов указаны на схемах.





2) События A_1, A_2, A_3 составляют полную группу несовместных событий. Найти $P(A_3)$, если $P(A_1) = 0{,}1$; $P(A_2) = 0{,}6$.

3) Радиолампа может принадлежать к одной из двух партий с вероятностями $P_1 = 0.6$ и $P_2 = 0.4$. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны соответственно 0.7 и 0.8. Определить вероятность того, что взятая наудачу лампа проработает заданное число часов.

4) Считая равновероятным рождение мальчика и девочки, найти вероятность того, что в семье, где пятеро детей, ровно два мальчика.

5) Имеется *n* радиолокационных станций, следящих за одним объектом. Каждая станция обнаруживает объект независимо от других станций с вероятностью *P*. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен.

Ответы: **1**. $0.9\cdot 0.8^2\cdot 0.7$; $1 - 0.1\cdot 0.2^2\cdot 0.3$;

2. 0.3 ; **3**. 0.74 ; **4**. $C_5^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$; **5**. $1-(1-P)^4$.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Тема 7

Определение случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения вероятностей дискретной, случайной величины. Функция распределения случайной величины. Функция распределения дискретной случайной величины. Свойства функции распределения.

[I, § 2.1 - 2.3]

ПРИМЕР

Из урны, содержащей три белых и пять черных шаров, наугад извлекают три шара. Пусть χ - число вынутых черных шаров. Построить ряд и функцию распределения случайной величины χ.

Решение. Случайная величина χ может принимать следующие значения: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$.

Вычислим вероятности $P_i = P(\chi = x_i)$.

$P_1 = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$ - вероятность того, что извлечены три белых шара и ни одного черного;

$P_2 = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}$ - вероятность того, что извлечен один черный и два белых шара;

$P_3 = \frac{C_5^2 \cdot C_3^1}{C_8^3} = \frac{15}{28}$ - вероятность того, что извлечены два черных и один белый шар;

$P_4 = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}$ - вероятность того, что все три извлеченных шара - черные.

В результате вычислений получаем следующий ряд распределения:

x_i	0	1	2	3
P_i	$1/56$	$15/56$	$15/28$	$5/28$

Построим функцию распределения случайной величины χ

При $x \le 0$ $\quad F(x) = P(\chi \le x) = 0,$

(так как в нашей задаче χ не принимает отрицательных значений)

при $0 < x \le 1,$ $\quad F(x) = P(\chi \le x) = P(\chi = 0) = \frac{1}{56};$

при $1 < x \le 2$ $\quad F(x) = P(\chi \le x) = P(\chi = 0, \vee\ \chi = 1) =$

$$= P(\chi = 0) + P(\chi = 1) = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} = \frac{16}{56};$$

при $2 < x \le 3$

$$F(x) = P(\chi < x) = P(\chi = 0\ \vee \chi = 1 \vee \chi = 2) =$$

$$= P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = \frac{16}{56} + \frac{15}{28} + \frac{46}{56};$$

при $3 < x$

$$F(x) = P(\chi < x) = P(\chi = 0 \vee \chi = 1 \vee \chi = 2 \vee \chi = 3) =$$

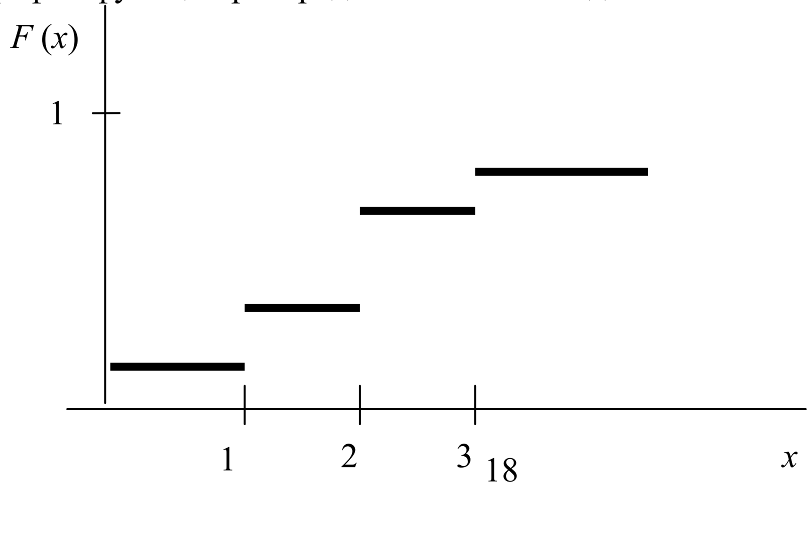
$$= P(\chi = 0) + P(\chi = 1) + P(\chi = 2) + P(\chi = 3) =$$

$$= \frac{46}{56} + \frac{5}{28} = 1.$$

Окончательно получаем функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0; \\ \frac{1}{56} & 0 < x \le 1; \\ \frac{16}{56} & 1 < x \le 2; \\ \frac{46}{56} & 2 < x \le 3; \\ 1 & 3 < x. \end{cases}$$

График функции распределения имеет вид:



УПРАЖНЕНИЯ

1) Охотник, имеющий пять патронов, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Построить ряд распределения случайного числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.4.

Ответ:

x_i	1	2	3	4	5
P_i	0.4	0.24	0.144	0.0864	0.1296

2) Монету подбрасывают шесть раз. Составить ряд распределения и построить функцию распределения отношения числа появлений герба к числу появлений цифры.

Ответ:

x_i	0	1/5	1/2	1	2	5	∞
P_i	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

[4 , § 2.1]

Тема 8

Непрерывные случайные величины. Плотность распределения и ее свойства. Числовые характеристики случайных величин (начальные и центральные моменты, математическое ожидание и дисперсия).

[1 , § 2.4 - 2.6]

ПРИМЕР

Случайная величины χ имеет плотность вероятности (закон Коши)

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}.$$

Требуется: Найти коэффициент *a* и функцию распределения *F(x);*

найти вероятность неравенства $\chi \geq \sqrt{3}$;

определить математическое ожидание случайной величины χ.

Решение. Коэффициент *a* определяем с помощью равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\,dx = 1, \quad \text{отсюда} \quad a = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}} = \frac{1}{\pi}.$$

Функция распределения *F(x)* случайной величины χ определяется по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dx}{\pi\left(1+x^2\right)} = \lim_{N \to -\infty} \int_{N}^{x} \frac{dx}{\pi\left(1+x^2\right)} =$$

$$\lim_{N \to -\infty} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x \Big|_{N}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} + \frac{1}{2}.$$

Вероятность

$$P\left(\chi > \sqrt{3}\right) = P\left(\sqrt{3} < \chi < +\infty\right) = F(+\infty) - F\left(\sqrt{3}\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

Математическое ожидание случайной величины χ:

$$M[\chi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)} dx = 0.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Найти математическое ожидание и дисперсию числа израсходованных патронов (упражнение 1 предыдущей темы).

Ответ: $M[\chi] \approx 2.3$; $D[\chi] \approx 1.99$.

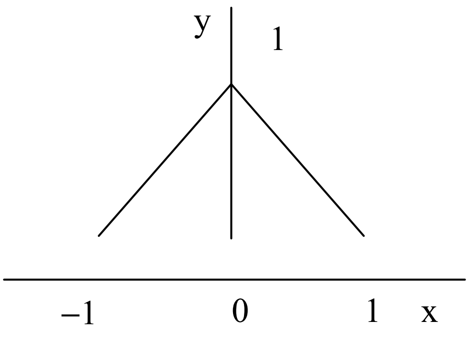
2) Функция распределения случайной величины $F(x)$ имеет вид;

$$F(x)' = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \le 4; \\ 1, & 4 < x. \end{cases}$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Ответ: $M[\chi] = 2$; $D[\chi] = 4/3$.

3) График плотности вероятности случайной величины χ изображен на



рисунке (закон Симпсона). Написать выражение плотности и функцию распределения этой случайной величины; найти ее ма тематическое ожидание и дисперсию.

Ответ :

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x \le 0; \\ -x+1, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x \le -1; \quad x > 1. \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ \dfrac{(x+1)^2}{2}, & -1<x\le 0; \\ 1-\dfrac{1}{2}(1-x)^2, & 0<x\le 1; \\ 1, & 1<x. \end{cases}$$

$M[\chi] = 0$; $D[\chi] = 1/6$.

[4 , § 2.2]

Тема 9

Случайные величины, распределенные по биномиальному закону, закону Пуассона, равномерному закону, показательному закону, нормальному закону. Их математические ожидания и дисперсии.

[1 , §2.7 – 2.12]

ПРИМЕР 1.

Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0.005. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят пять абонентов?

Решение. Поскольку вероятность позвонить в течение часа для всех абонентов одна и та же - P = 0.005, то для нахождения вероятности того, что позвонят пять абонентов (m = 5, n = 600) из 600, можно было бы воспользоваться формулой Бернулли

$$P_{600,5}=C_{600}^{5}\cdot 0.005^{5}\cdot 0.995^{595}.$$

При больших n применять эту формулу затруднительно, поэтому пользуются приближенными формулами. При малых p и больших n задача решается по формуле Пуассона:

$$P_m=\frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a},$$

где a - среднее число вызовов в течение часа (математическое ожидание $M[\chi] = m_x$).

В нашей задаче $m_x = a = n\cdot p = 600\cdot 0.005 = 3$ и тогда

$$P_5=\frac{a^m}{m!}e^{-a}=3^5\cdot\frac{1}{5!}e^{-3}=0.10082\approx 0.101.$$

Замечание. Имеются специальные таблицы, пользуясь которыми можно найти P_m, зная m и a (см. 4, прил. 3 «Закон распределения Пуассона»).

ПРИМЕР 2

Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Пусть математическое ожидание ее равно 175 см, а среднее квадратическое отклонение - 6 см.

Определить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных пяти мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см.

Решение. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины χ в интервал *(α; β)* вычисляется по формуле

$$P(\alpha < \chi < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right)\right] \qquad (*)$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функция Лапласа.

Случайная величина χ - рост взрослого мужчины.

Применяя формулу (∗), найдем вероятность того, что рост взрослого мужчины будет принадлежать интервалу (170; 180),

$$P(170 < \chi < 180) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{180-175}{6}\right) - \Phi\left(\frac{170-175}{6}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{5}{6}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{6}\right)\right] = \Phi\left(\frac{5}{6}\right) = \Phi(0.83) = 0.5935.$$

Для вычисления вероятности того, что хотя бы один из наудачу выбранных пяти мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см (событие *A*), перейдем к противоположному событию $\overline{A}$, т.е. к такому событию, когда рост пяти наудачу выбранных мужчин не попадет в интервал от 170 до 180 см.

Вероятность того. что рост одного мужчины выходит из интервала (170; 180), равна

$$P = 1 - (170 < \chi < 180) = 1 - 0.5935 = 0.4065.$$

Применяя теорему умножения для независимых событий, находим

$$P(\overline{A}) = 0.4065^5 \approx 0.01 \quad \text{и тогда} \quad P(A) \approx 1 - 0.01 \approx 0.99.$$

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Корректура в 500 страниц содержит 500 опечаток. Найти вероятность того. что на странице не менее трех опечаток.

Ответ : $$P = \frac{1}{e}\sum_{m=3}^{500}\frac{1}{m!} \approx 1 - \frac{1}{e}\sum_{m=0}^{2}\frac{1}{m!} \approx 0.08.$$

2. Детали, выпускаемые цехом, считаются высшего качества, если отклонения их размеров от номинала не превосходят по абсолютной величине 2.6 мм. Случайные отклонения размера детали от номинала подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 2 мм, а систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число деталей высшего качества среди наудачу выбранных пяти деталей.

Ответ: 4 детали.

[4 , § 2.3 – 2.4]

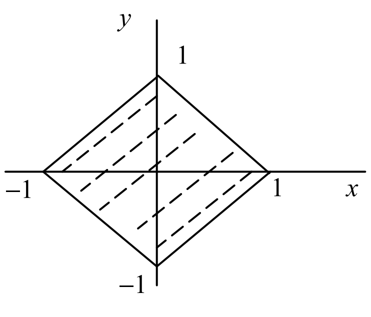
Тема 10

Понятие о системе случайных величин. Функция распределения и плотность распределения системы двух случайных величин, их свойства. Связь между функцией распределения и плотностью распределения системы двух случайных величин и функций распределения (соответственно, плотностью распределения) отдельных величин, входящих в систему. Зависимые и независимые случайные величины.

[1 , §3.1 – 3.6]

ПРИМЕР [6, 6.12]

Случайная точка (*X,Y*) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата *R,* заштрихованного на рисунке.



Написать выражение плотности распределения $f(x,y)$. Найти выражения плотностей распределения $f_1(x)$, $f_2(y)$ отдельных величин X, Y, входящих в систему. Написать выражения условных плотностей $f_1(x/y)$ и $f_2(y/x)$. Зависимы или независимы случайные величины x, y ? Коррелированы они или нет ?

Решение. Площадь квадрата равна 2, поэтому

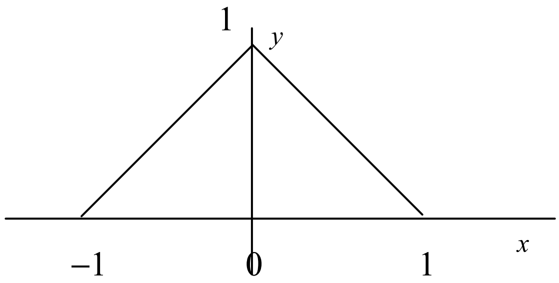
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in R,\\ 0, & (x,y)\notin R.\end{cases}$$

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-(1-x)}^{1-x}dy=1-x, & 0<x\le 1,\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-(1+x)}^{1+x}dy=1+x, & -1\le x\le 0,\\ 0, & x<-1,\vee x>1\end{cases}$$

или короче

$$f_1(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\le 1,\\ 0, & x<-1\vee x>1.\end{cases}$$

График закона $f_1(x)$ выглядит так (закон Симпсона):



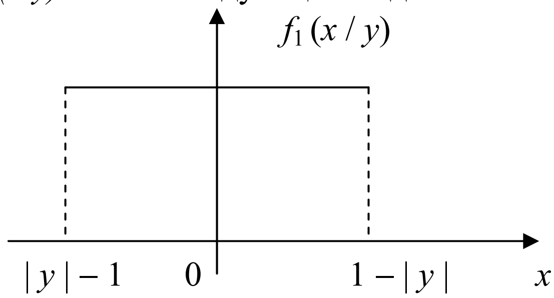
Аналогично,

$$f_2(y)=\begin{cases}1-|y|, & |y|\le 1,\\ 0, & |y|>1.\end{cases}$$

Далее, при $|\,y\,|<1$,

$$f_1\left(x/y\right)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-|y|)}, & |x|\le 1-|y|,\\ 0, & |x|>1-|y|.\end{cases}$$

График плотности $f_1(x/y)$ имеет следующий вид:



Аналогично при $|\,x\,|<1$,

$$f_2\left(y/x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\left(1-|x|\right)}, & |y|\le 1-|x|,\\ 0, & |y|>1-|x|.\end{cases}$$

Следовательно, случайные величины X и Y зависимы, так как

$$f_1(x)\neq f_1\left(x/y\right),\qquad f_2(y)\neq f_2\left(y/x\right).$$

УПРАЖНЕНИЕ

Система случайных величин $(X,\ Y)$ имеет плотность вероятности

$$f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2}.$$

Требуется найти коэффициент a; найти вероятность попадания в прямоугольник $0<x<1$, $-1<y<1$; определить функцию распределения системы (X,Y); определить законы распределения одномерных величин $X,\ Y$. Выяснить, являются ли эти величины зависимыми.

Ответ:

$$a=\frac{1}{\pi^2};\qquad P(0<X<1,-1<Y<1)=\frac{1}{8};$$

$$F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}y+\frac{1}{2}\right);$$

$$f_1(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)};\quad f_2(y)=\frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)};$$

$$F_1(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2};\quad F_2(Y)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}y+\frac{1}{2};$$

X и Y являются независимыми случайными величинами:

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

[4 , § 3.1]

Тема 11

Числовые характеристики системы двух случайных величин (начальные и центральные моменты, математическое ожидание, корреляционный момент, коэффициент корреляции). Свойства коэффициента корреляции. Пример зависимых, но некоррелированных случайных величин.

[1 , § 3.7]

ПРИМЕР 1

Докажем, что зависимые случайные величины *X* и *Y*, рассмотренные в примере темы 10, не коррелированы.

Решение.

Вычислим K_{xy}: $K_{xy}=M[X\cdot Y] - M[X]\cdot[Y]$.

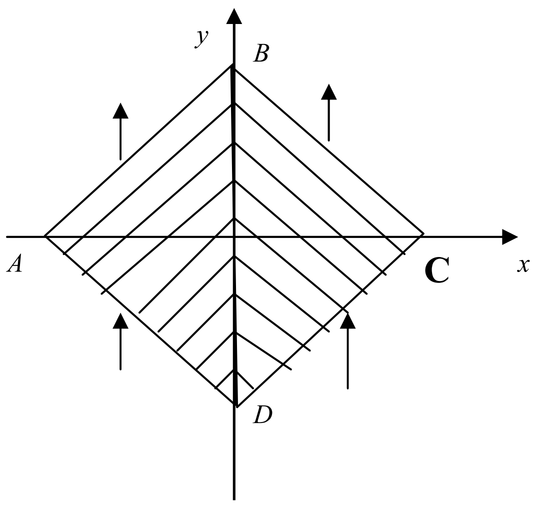
В силу симметрии относительно начала координат плотностей $f_1(x)$ и $f_2(y)$: $M[X]=M[Y]=0$.

$$M[X\cdot Y]=\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot y\cdot f(x,y)dx\,dy =$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_R xy\,dx\,dy =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x\,dx\left(\int\limits_{-1-x}^{1+x} y\,dy + \int\limits_{-1+x}^{1-x} y\,dy\right) =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x\,dx\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-(1+x)}^{1+x} + \frac{y^2}{2}\Bigg|_{-(1-x)}^{1-x}\right) = 0.$$



AD: y = -1 - x; *AB; y = 1 + x;*

DC: y = -1 + x; *BC: y = 1 – x;*

X, Y - не коррелированы, так как $K_{xy} = 0$.

Замечание. Независимые случайные величины не коррелированы. Рассмотренный пример показывает, что из некоррелированности не следует независимость случайных величин. По величине K_{xy} можно судить о тесноте только линейной зависимости. Так, если рассмотреть коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y},$$

где $\sigma_x = \sqrt{D[X]}$, $\sigma_y = \sqrt{D[Y]}$, то $|r_{xy}| \le 1$, причем для случайных величин, связанных линейной зависимостью $Y = k\chi + b$, $r_{xy} = 1$ при $k > 0$, и $r_{xy} = -1$ при $k < 0$.

ПРИМЕР 2

Определить плотность вероятности и математические ожидания, дисперсии и корреляционный момент случайных величин *X* и *Y*, заданных в интервалах $\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right)$, если функция распределения системы $F(x, y) = \sin x \cdot \sin y$.

Решение. Для системы случайных величин (*X, Y*) находим плотность вероятности по формуле

$$f(x, y) = \frac{d^2 F(x, y)}{dxdy}.$$

Получаем $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$, $\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$M[X] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \cdot \cos y \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy \left(x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \right) = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$D[X] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \cdot \cos y \, dx \, dy - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 = \pi - 3.$$

Из симметрии плотности вероятности относительно *x* и *y* следует, что

$$M[Y] = M[X], \quad D[Y] = D[X].$$

Корреляционный момент

$$K_{xy} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy \cos x \cdot \cos y \, dx \, dy - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 = 0.$$

Докажите, что *x* и *y* независимы.

УПРАЖНЕНИЕ

Определить математические ожидания, дисперсии и корреляционный момент системы случайных величин (X, Y), если плотность вероятности

$$f(x, y) = \frac{2}{\pi\left(x^2 + y^2 + 1\right)^3}.$$

Ответ: $M[X] = M[Y] = 0; \quad D[X] = D[Y] = \dfrac{1}{2}; \quad K_{xy} = 0.$

[4 , § 3.1]

Тема 12

Неравенство Чебышева. Сходимость по вероятности. Теорема Чебышева. Закон больших чисел в форме Бернулли и в форме Пуассона. Центральная предельная теорема в форме Ляпунова (без доказательства) и выведение из нее теоремы Муавра-Лапласа.

[1 , § 5.1 - 5.5]

ПРИМЕР

Среднее суточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 20000 кВт.ч., а среднее квадратическое отклонение равно 200 кВт.ч. Какого потребления электроэнергии в этом населенном пункте можно ожидать в ближайшие сутки с вероятностью, не меньшей 0.96?

Решение. Суточное потребление энергии в населенном пункте является случайной величиной χ. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение ее равны: $m_x = 20000$, $\sigma_x = 200$. Согласно неравенству Чебышева

$$P\left(\left|\chi - 20000\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{200^2}{\varepsilon^2} = 0.96.$$

Отсюда

$$\frac{40000}{\varepsilon^2} = 0.04, \quad \varepsilon^2 = 10^6; \quad \varepsilon = 1000.$$

Следовательно,

$$\left|\chi - 20000\right| < 1000, \text{ или } 19000 < \chi < 21000.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Суточный расход воды в населенном пункте является случайной величиной, среднее квадратическое отклонение которой равно 10000 л. Оценить вероятность того, что расход воды в этом пункте в течение дня отклоняется от математического ожидания по абсолютной величине более, чем на 25000 л.

Ответ: 0.16.

2) Вероятность изготовления нестандартной радиолампы равна 0.04. Какое наименьшее число радиоламп следует отобрать, чтобы с вероятностью 0.88 можно было утверждать, что доля среди них нестандартных радиоламп будет отличаться от вероятности изготовления нестандартной лампы по абсолютной величине не более, чем на 0.02 ?

Ответ: $n = 800$.

[4 , § 5.1]

-**Заключение**

Величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестное заранее, какое именно, называется случайной.

Случайная величина может быть задана функцией распределения *F(x)* (интегральным законом распределения), которая равна вероятности того, что случайная величина χ будет меньше выбранного значения *x*:

$$F(x) = P(\chi < x).$$

Из определения выводятся основные свойства *F(x)*

1) $0 \le F(x) \le 1; \quad F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1;$

2) *F(x)* – неубывающая функция;

3) $P(a \le \chi < b) = F(b) - F(a).$

Для дискретных случайных величин *F(x)* - ступенчатая функция (непрерывная слева), скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений.

Для непрерывных случайных величин *F(x)* - непрерывная функция.

Дискретную случайную величину можно задать и рядом распределения, где перечислены ее возможные значения с соответствующими им вероятностями:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
P_i	P_1	P_2	...	P_n,

где $P_i = P(\chi = x_i) > 0.$

Непрерывную случайную величину можно задать плотностью вероятности *f(x)* (дифференциальным законом распределения):

$$f(x) = F'(x) \ge 0, \quad \text{(см. свойство 2 функции } F(x)).$$

Следовательно, для непрерывной случайной величины

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \quad \text{а для дискретной} \quad F(x) = \sum_{x_i < x} P_i,$$

где суммирование ведется по всем значениям i, для которых $x_i < x$.

Отсюда (из свойства 1 функции *F(x)*) получаем условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$ - для непрерывной случайной величины,

$$\sum_{k=1}^{n} P_i = 1$$ - для дискретной случайной величины.

Из свойства 3 функции распределения *F(x)* получаем

$P(a \le \chi < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ - для непрерывной случайной величины,

$P(a \le \chi < b) = \sum\limits_{a \le x_i < b} P_i$ - для дискретной случайной величины.

Заметим, что для непрерывной случайной величины вероятности принять отдельное значение, равна нулю: $P(\chi = x) = 0$.

Следовательно, для нее:

$$P(a \le \chi < b) = P(a \le \chi \le b) = P(a < \chi \le b) = P(a < \chi < b).$$

Любой из перечисленных способов задания случайной величины полностью описывает ее с вероятностной точки зрения. Однако во многих вопросах практики достаточно бывает указать отдельные числовые характеристики случайной величины, позволяющие судить о существенных особенностях ее распределения.

К таким характеристикам относятся среднее значение или математическое ожидание случайной величины $M\ [X]$ (или m_x) и ее дисперсия $D\ [X]$, характеризующая степень разбросанности значений случайной величины относительно среднего .

Для дискретной случайной величины

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i .$$

Для непрерывной случайной величины

$$M[X] = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

Для дисперсии

$$D[X] = M\left[(X - m_x)^2\right] = M\left[X^2\right] - m_x^2 .$$

Из определения можно вывести основные свойства $M[X]$ и $D[X]$.

Если C - неслучайная величина, то

1) $M[C] = C; \quad D[C] = 0;$

2) $M[CX] = CM[X]; \quad D[CX] = C^2 D[X];$

3) $M[X+Y] = M[X] + M[Y]; \quad D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}.$

Приведем несколько примеров, которые советуем решить самостоятельно, контролируя себя приведенным ниже решением.

ПРИМЕР 1

Дан ряд распределения дискретной случайной величины

x_i	-1	0	3	4
P_i	0.2	0.3	0.1	P_4

Найти: P_4; $D[X]$; $F(x)$; $P(2 \le X < 3.5)$; $P(X < 3)$; $P(-2 \le X)$.
Решение. Из условия нормировки: $0.2 + 0.3 + 0.1 + P_4 = 1$.
Отсюда $P_4 = 1 - 0.6 = 0.4$; $D[X] = M[X^2] - M^2[X]$.
Найдем $M[X]$:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{4} x_i P_i = (-1)\cdot 0.2 + 0\cdot 0.3 + 3\cdot 0.1 + 4\cdot 0.4 = 1.7;$$

$$M[X^2] = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P_i = 1\cdot 0.2 + 0\cdot 0.3 + 9\cdot 0.1 + 16\cdot 0.4 = 7.5;$$

$$D[X] = 7.5 - 1.7^2 = 7.5 - 2.89 = 4.61.$$

Найдем функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1; \\ 0.2 & -1 < x \le 0; \\ 0.2 + 0.3 = 0.5 & 0 < x \le 3; \\ 0.5 + 0.1 = 0.6 & 3 < x \le 4; \\ 0.6 + 0.4 = 1 & 4 < x. \end{cases}$$

Вычислим вероятности попадания в интервалы :

$$P(2 \le X < 3.5) = F(3.5) - F(2) = 0.6 - 0.5 = 0.1;$$
$$P(X < 3) = F(3) = 0.5;$$
$$P(-2 \le X < +\infty) = F(+\infty) - F(-2) = 1 - 0 = 1.$$

ПРИМЕР 2

Дан ряд распределения дискретной, случайной величины Y

y_i	-100	0	300	400
P_i	0.2	0.3	0.1	0.4

Найти $M[Y]$, $D[Y]$.

Решение. Рассмотрим случайную величину X, определяемую рядом распределения

x_i	–1	0	3	4
P_i	0.2	0.3	0.1	0.4

тогда

Y = 100 X, следовательно, $M[Y] = 100\,M[X]$; $D[Y] = 10000\,D[X]$; $M[X]$ = 1.7; $D[X]$ = 4.61 (см. пример 1).

Окончательно, $M[Y] = 170$; $D[Y] = 46100$.

ПРИМЕР 3

Дана плотность вероятности случайной величины

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ a\cos x, & -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

Найти число a; $P\left(-\pi < x < \dfrac{\pi}{6}\right)$; $F(x)$.

Решение. Из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,dx = a\sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a = 1. \qquad \text{Отсюда } a = \frac{1}{2}.$$

$$P\left(-\pi < x < \frac{\pi}{6}\right) = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/6} \frac{1}{2}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}.$$

Найдем функцию распределения. В нашем случае

$$F(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dt, & x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{-\pi/2} 0\cdot dt + \int_{-\pi/2}^{x} \frac{1}{2}\cos t dt, & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{-\pi/2} 0\cdot dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos t dt + \int_{\pi/2}^{x} 0\cdot dt, & \dfrac{\pi}{2} \le x. \end{cases}$$

Интегрируя, получаем

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \dfrac{\pi}{2}\le x. \end{cases}$$

ПРИМЕР 4

Дана функция распределения непрерывной, случайной величины

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -\dfrac{\pi}{4}, \\ a\sin 2x+b, & -\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & \dfrac{\pi}{4}\le x. \end{cases}$$

Найти *a* и *b*.

Решение. В силу непрерывности функции *F(x)* для непрерывной случайной величины имеем

$$F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}F(x)=a\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+b,$$

т.е. $0=-a+b$ и

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-0}F(x)=a\sin\frac{\pi}{2}+b,$$

т.е. $1=a+b$.

Отсюда $b=\dfrac{1}{2}; \quad a=\dfrac{1}{2}.$

ПРИМЕР 5

Найти интервал практически возможных значений случайной величины, плотность вероятности которой имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 5}\cdot e^{-\frac{(x+1)^2}{50}}.$$

Решение. Данная плотность вероятности определяет нормально распределенную случайную величину χ со средним значением $m_x=-1$ и среднеквадратическим отклонением

$\sigma_x=5$. Нормально распределенная случайная величина с вероятностью 0.997 попадает в интервал $[m_x-3\sigma_x;\ m_x+3\sigma_x]$ (правило трех сигм). Следовательно, практически возможные значения этой величины заполняют интервал [–16 ; 14].

УПРАЖНЕНИЯ

1) Дан ряд распределения дискретной величины

x_i	-1	0	x_3
P_i	P_1	0.3	0.4

Известно, что $M[X] = 0.5$. Случайная величина Y связана с X равенством $Y = 1 - 3X$.
Найти: P_1; x_3; $D[X]$; $F(0)$; $F(7)$; $F(-2)$; $M[Y]$; $D[Y]$.

2) Для случайных величин X и Y известны:
$D[X] = 4$; $D[Y] = 25$; $D[X + Y] = 33$.
Найти r_{xy}..

3) Дана функция распределения непрерывной случайной величины x:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ x - 2, & 2 < x \le a, \\ 1, & a < x. \end{cases}$$

Найти: a; $M[x]$; $P(2.9 < x < 3)$; $P(2.3 < x)$; $P(-1 < x < 3)$.

4) Случайная величина называется равномерно распределенной, если ее плотность вероятности есть постоянная величина на некотором конечном интервале:

$$f(x) = \begin{cases} c, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

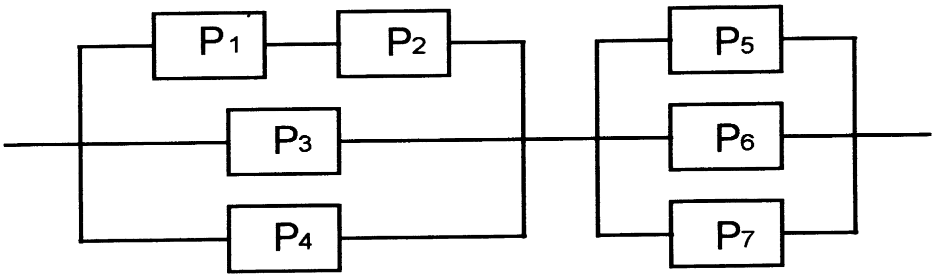
Докажите, что c есть величина, обратная длине промежутка, на котором задана случайная величина, а среднее значение x совпадает с серединой этого промежутка.

Ответ : 1) 0.3; 2; 1.65; 0.3; 1; 0; –0.5; 14.85.
2) 0.2.
3) 3; 2.5; 0.1; 0.7; 1.

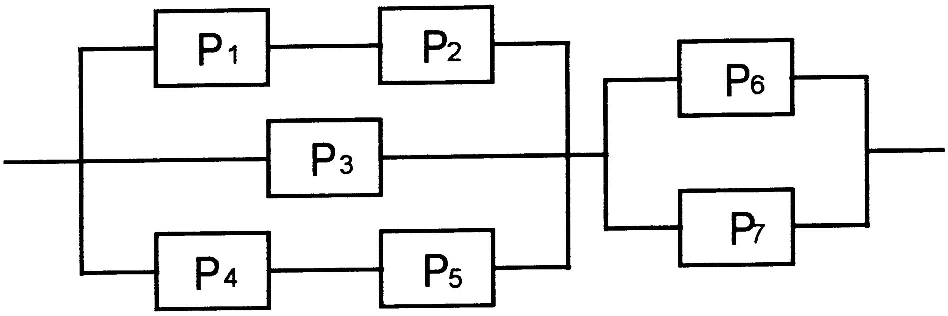
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 9

В задачах 531 - 540 найти вероятность прохождения тока через цепь, если вероятности исправной работы элементов указаны на схеме. Элементы работают независимо друг от друга.

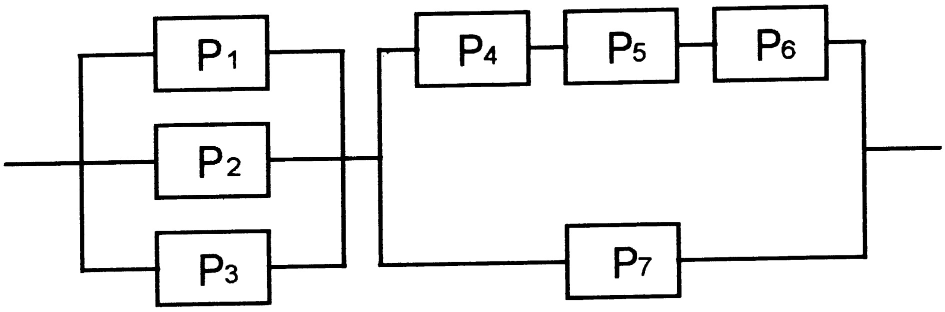
531.



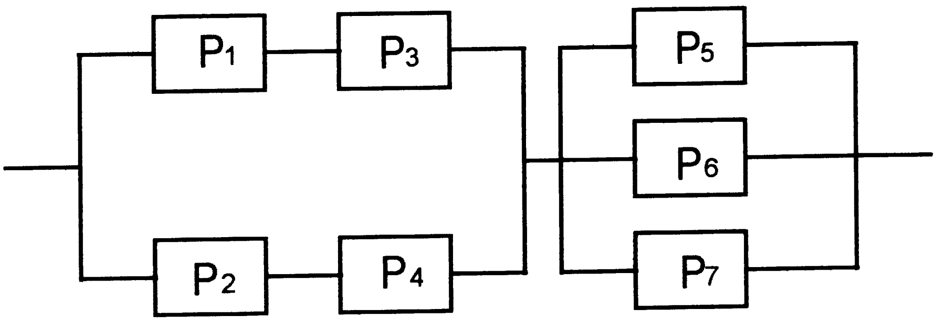
532.



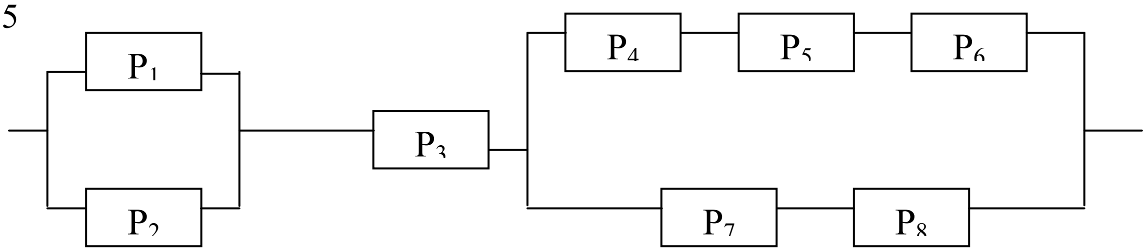
533.



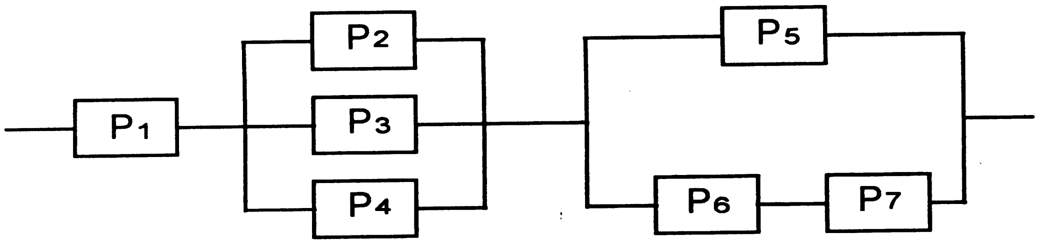
534.



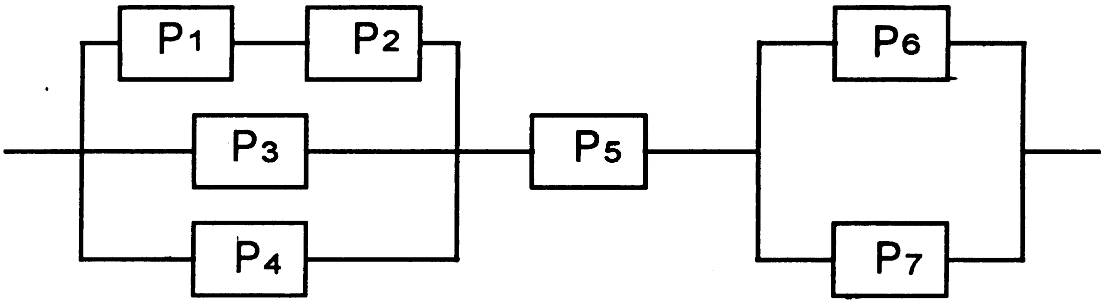
535



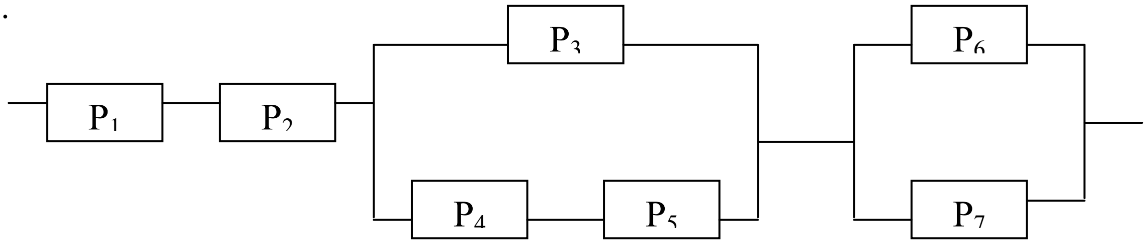
536.



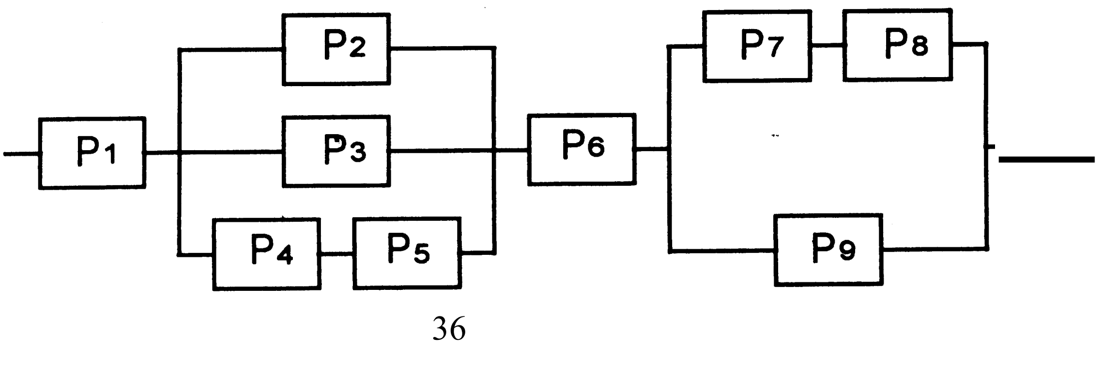
537.



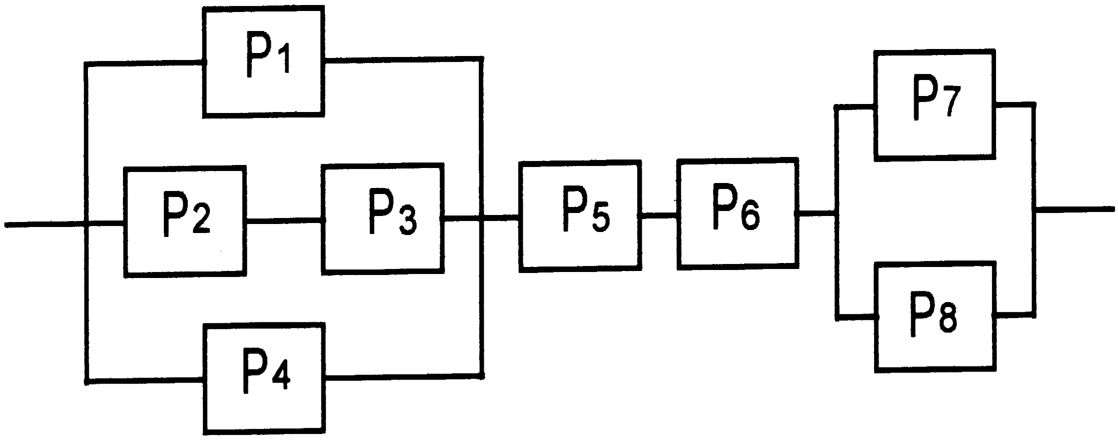
538.



539.



540.



541. В цехе работают 20 станков. Из них 10 станков марки *A*, 6 марки *B* и 4 марки *C*. Вероятность того, что качество детали окажется отличным, равна для этих станков соответственно 0.9, 0.8 и 0.7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом ?

542. Три стрелка производят по одному выстрелу по одной мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0.6, для второго - 0.5 и для третьего - 0.4. В результате произведенных выстрелов в мишени оказалась одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал второй стрелок.

543. Предположим, что 5 % всех мужчин и 0.25 % всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина ? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое число).

544. С первого автомата на сборку поступает 40 %, со второго - 35 %, с третьего - 25 % деталей. Среди деталей первого автомата 0.2 % бракованных, второго - 0.3 %, третьего - 0.5 %. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.

545. Имеется два одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 1 черный шар, во втором - 1 белый и 4 черных шара. Из одного ящика вынули белый шар. Какова вероятность того, что белый шар вынули из второго ящика ?

546. Двое рабочих производят детали, которые поступают в отдел контроля, причем производительность первого рабочего в 4 раза больше производительности второго. Вероятность получения бракованной детали для 1-го рабочего равна 0.15, для второго - 0.05. Найти вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной.

547. Для контроля продукции, выпущенной тремя автоматами, на испытание взято одно изделие. Найти вероятность того, что выбранное изделие окажется бракованным, если первый автомат дает 1 % брака, второй - 2 %, а третий - 3 % брака.

548. На вход радиолокационного устройства с вероятностью 0.8 поступает сигнал типа *A* и с вероятностью 0.2 сигнал типа *B*. Если поступил сигнал типа *A*, устройство регистрирует его с вероятностью 0.9; если поступил сигнал типа *B*, то устройство регистрирует его с вероятностью 0.95. Устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что это сигнал типа *A*.

549. Станок может работать в двух режимах: рентабельном и нерентабельном. Рентабельный режим наблюдается в 80 % всех случаев работы. Нерентабельный - в 20 % случаев. Вероятность выхода станка из строя за время работы в рентабельном режиме равна 0.1, в нерентабельном - 0.7. Станок вышел из строя. Найти вероятность того, что он работал в рентабельном режиме.

550. Среди 10 приборов равновероятно наличие неисправных приборов от 0 до 2. Наугад взят один прибор. Найти вероятность того, что он окажется неисправным.

551. В результате проведения опыта событие A появляется с вероятностью 0.001. Опыт повторяется 2000 раз. Какова вероятность того, что событие A появится от 2 до 4 раз ?

552. Вероятность перегорания каждой из четырех ламп прибора равна 0.1. Прибор выходит из строя при перегорании хотя бы двух ламп. Найти вероятность выхода из строя прибора.

553. Вероятность выхода из строя за время t любого из 100 конденсаторов равна 0.2. Определить вероятность того, что за время t выйдут из строя от 14 до 26 конденсаторов.

554. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0.8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 74 до 90 раз.

555. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней больше 3-х дней окажется дождливыми.

556. Прибор состоит из 3-х узлов. Вероятность отказа в течение времени t для каждого узла равна 0.2. Найти вероятность того, что за время t откажет хотя бы один узел.

557. В партии 4 детали. Вероятность отклонения размера каждой детали от номинала равна 0.5. Найти вероятность того, что в данной партии отклонение размера от номинала будет менее, чем у двух деталей.

558. При массовом изготовлении шестерен вероятность брака при штамповке одной шестерни равна 0.2. Найти вероятность того, что на 100 наугад взятых шестерен бракованных будет не более 25.

559. Вероятность выхода из строя за время t одного прибора равна 0.8. Найти вероятность того, что из 100 приборов за время t выйдет из строя не более 75 приборов.

560. Вероятность того, что любая деталь в партии бракованная, равна 0.001. Найти вероятность того, что среди 5000 отобранных деталей окажется хотя бы одна бракованная.

В задачах 561 - 570 дискретная случайная величина X задана рядом распределения.

561.

x_i	-1	0	2
P_i	0.5	0.1	P_3

Найти : P_3; $M[X]$; $D[X]$; $P(X<2)$; $F(x)$. Начертить график $F(x)$.

562.

x_i	-20	0	20
P_i	0.3	P_2	0.4

Найти : P_2; $M[X]$; $D[X]$; $P(X\geq 2)$; $F(x)$. Начертить график $F(x)$.

563.

x_i	-2	0	2
P_i	P_1	0.1	0.5

Найти : P_1; $M[X]$; $D[X]$; $P(0\leq X\leq 2)$; $F(x)$. Начертить график $F(x)$.

564.

x_i	0	1	5
P_i	0.3	0.5	P_3

Найти : P_3; $M[X]$; $D[X]$; $P(X\geq 3)$; $F(x)$. Начертить график $F(x)$.

565.

x_i	-1	0	x_3
P_i	0.2	0.3	P_3

Известно, что $M[X]=0.8$. Найти : P_3; x_3; $D[X]$; $P(X<1)$; $F(x)$.
Начертить график $F(x)$.

566.

x_i	-1	1	x_3
P_i	0.1	P_2	0.3

Известно,что $M[X]=1.1$. Найти : P_2; x_3; $D[X]$; $P(X\geq 1)$; $F(x)$.
Начертить график $F(x)$.

567.

x_i	-2	0	1
P_i	0.2	P_2	0.1

Найти : P_2; $M[X]$; $D[X]$; $P(X<1)$; $F(x)$. Начертить график $F(x)$.

568.

x_i	-1	x_2	2
P_i	0.2	0.1	P_3

Известно, что $M[X]=1.3$. Найти : P_3; x_2; $D[X]$; $P(X<1.5)$; $F(x)$.
Начертить график $F(x)$.

569.

x_i	-10	0	20
P_i	0.2	P_2	0.2

Найти : P_2; $M[X]$; $D[X]$; $P(X \geq -1)$; $F(x)$. Начертить график $F(x)$.

570.

x_i	0	1	x_3
P_i	0.5	P_2	0.1

Известно, что $M[X] = 0.7$. Найти : P_2; x_3; $D[X]$; $P(X > 0.5)$; F (x).
Начертить график $F(x)$.

В задачах 571 - 580 непрерывная случайная величина x задана функцией распределения $F(x)$.

571

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти: a; $f(x)$; $M[X]$; $D[X]$; $P(-1 < X < 0.5)$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

572.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ ax+b, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти: a; b; $M[X]$; $D[X]$; $P(-1 < X < 2)$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

573.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^4, & 0 < x \leq 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

Найти: a; $f(x)$; $M[X]$; $D[X]$; $P(X < 0.2)$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

574.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ ax+b, & -1 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Найти: a; b; $f(x)$; $M[X]$; $D[X]$; $P(-0.5 < X < 0)$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

575. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sin x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти: *a; f(x); M* [*X*]; $P\left(X\le\dfrac{\pi}{6}\right)$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

576. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ ax^2+b, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти: *a; b; f(x); M* [*X*]; *D* [*X*]; $P(0<X<2)$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

577. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x^2-1), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найти: *a; f(x); M* [*X*]; *D* [*X*]; $P(-1<X<1)$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

578. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1)^2, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти: *a; f(x); M* [*X*]; *D* [*X*]; $P(2<X<4)$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

579. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ ax^2+bx, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найти: *a; b;* $f(x)$; *M* [*X*]; *D* [*X*]; $P(0<X<1.5)$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

580. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Найти: *a;* $f(x)$; *M* [*X*]; *D* [*X*]; $P(-0.5<X<0.5)$. Начертить графики $f(x)$ и $F(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики.
- М.: Высш.шк., 1971.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.
- М.: Высш.шк., 1977.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969.
4. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. - Минск: Вышэйшая школа, 1975.
5. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А.А.Свешникова. - М.: Наука, 1965.
6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1973.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высш.шк., 1975.
8. Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1982.
9. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей.
- М.: Радио и связь, 1983.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

$$\Phi(-x) = -\Phi(x)$$

Дробная часть *x*	Целая часть *x*			
	0	1	2	3
0.00	0.0000	0.6827	0.9545	0.9973
0.05	0.0398	0.7062		
0.10	0.0797	0.7287	0.9643	0.9981
0.15	0.1192	0.7498		
0.20	0.1585	0.7699	0.9722	0.9986
0.25	0.1974	0.7888		
0.30	0.2358	0.8064	0.9786	0.9990
0.35	0.2736	0.8230		
0.40	0.3108	0.8385	0.9836	0.9993
0.45	0.3472	0.8530		
0.50	0.3829	0.8664	0.9876	0.9995
0.55	0.4176	0.8788		
0.60	0.4515	0.8904	0.9907	0.9997
0.65	0.4844	0.9010		
0.70	0.5161	0.9109	0.9931	0.9998
0.75	0.5468	0.9198		
0.80	0.5763	0.9281	0.9949	0.9999
0.85	0.6046	0.9366		
0.90	0.6319	0.9426	0.9963	0.9999
0.95	0.6578	0.9488		

С О Д Е Р Ж А Н И Е