№4

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ПО КУРСУ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА (СПЕЦГЛАВЫ)

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНИКОВ

НАПРАВЛЕНИЯ 210700, 220700, 230400

СПБ ГУТ 2012

Методические указания и контрольные задания по курсу

«Высшая математика (спецглавы)»,

темы: Дифференциальные уравнения и ряды.

Авторы: доцент Полевая Г.М., доцент Рудинская Г.И., доцент Стукалова В.С.

Ответственный редактор проф. Баскин Л.М.

Рецензент проф. Бодунов Н.А.

Методические указания содержат варианты контрольных работ по курсу «Высшая математика (спецглавы)», для студентов факультета ВИЗО, а также указания по их выполнению, вопросы и упражнения для самопроверки

ПРОГРАММА КУРСА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» СПЕЦГЛАВЫ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Основные определения: дифференциальное уравнение (ДУ), его порядок, общее и частное решения, задача Коши. Примеры составления дифференциального уравнения.
2. Уравнения с разделяющимися переменными (решить предлагаемый пример)
3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Примеры задач, приводящих к линейным уравнениям (решить предлагаемый пример).
4. Численное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Способы понижения порядка ДУ (на примерах).
2. Однородные линейные ДУ второго порядка. Фундаментальная система решений и общее решение (без доказательств).
3. Линейные однородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение , характеристические корни и построение фундаментальной системы решений. Случай совпадающих характеристических корней.
4. Структура общего решения неоднородного линейного ДУ. Принцип суперпозиции.
5. Неоднородные линейные ДУ с постоянными коэффициентами. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс (решить конкретный пример).
6. Системы двух линейных однородных уравнений первого порядка. Их решение с помощью уравнения второго порядка.

РЯДЫ ТЕЙЛОРА

1. Определение числового ряда, частичные суммы; определение сходящихся рядов и суммы ряда. Примеры.
2. Степенные ряды, радиус сходимости.
3. Разложение функции в ряд Тейлора. Ряды Маклорена основных элементарных функций. Оценка остатка ряда Тейлора (без доказательства).

РЯДЫ ФУРЬЕ

1. Основные свойства тригонометрической системы функций (ортогональность). Тригонометрические многочлены и ряды.
2. Ряд Фурье 2π – периодической функции. Формулы Фурье для коэффициентов ряда. Теорема Дирихле (без доказательства).
3. Ряды Фурье непериодических функций и функций с произвольным периодом 2L.
4. Разложение функции в ряд Фурье только по синусам или по косинусам.
5. Амплитудно – фазовая форма записи ряда Фурье.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В отличие от алгебраических уравнений, изучаемых в школе, в ДУ неизвестным является не число, а функция $y = y(t)$. ДУ – это уравнение, связывающее независимую переменную t, неизвестную функцию y и ее производные различных порядков y', y'' и т.д. Наибольший из порядков производных, входящих в уравнение, называется **порядком ДУ**. Например, ДУ первого порядка можно записать в виде $F(t, y, y') = 0$, а ДУ второго порядка в виде $F(t, y, y', y'') = 0$.

Частным решением ДУ называется функция $y = y(t)$, удовлетворяющая этому уравнению. Как правило, ДУ имеет **бесконечно много частных решений**.

Например, функция $y(t) = A\cos(t - \varphi)$ при любых значениях амплитуды A и фазы φ является частным решением ДУ 2-го порядка $y'' + y = 0$. Действительно,

$$y'(t) = -A\sin(t - \varphi), \qquad y''(t) = -A\cos(t - \varphi) \text{ и } y'' + y = 0 .$$

Если все частные решения ДУ удается задать одной общей формулой

$$y = y(t; C_1, C_2, \ldots), \tag{1}$$

содержащей произвольные **параметры** $C_1, C_2, \ldots$, то говорят об **общем решении** ДУ. Число независимых параметров в общем решении равно порядку ДУ. При подстановке числовых значений параметров получаются различные частные решения ДУ.

Например, общим решением простейшего ДУ первого порядка $y' = f(t)$ служит неопределенный интеграл $y = \int f(t)\,dt$. Как известно, такой интеграл задан с точностью до произвольной постоянной C:

$$y(t) = \int_0^t f(t)\,dt + C .$$

Так, уравнение $y' = t^3$ имеет общее решение $y(t) = \int t^3 dt = \int_0^t t^3 dt + C = \dfrac{t^4}{4} + C$.

Чтобы выделить какое-либо частное решение, обычно задают **начальные условия** – значения неизвестной функции и ее производных в некоторый «начальный» момент времени t_0. Число начальных условий должно совпадать с порядком ДУ. Для ДУ первого порядка $F(t, y, y') = 0$ начальное условие только одно: $y(t_0) = y_0$. ДУ второго порядка $F(t, y, y', y'') = 0$ нуждается в двух начальных условиях: $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$, где t_0, y_0, y_1 - заданные числа.

Система, состоящая из дифференциального уравнения и начальных условий, называется **задачей Коши**. Пользуясь начальными условиями, можно найти значения параметров в общем решении ДУ. Решение задачи Коши обычно существует и единственно.

ПРИМЕР

1. Общее решение ДУ $y'' + y = 0$ *имеет вид* $y(t) = A\cos(t - \varphi)$ *и зависит от двух параметров* A *и* φ*. Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям* $y(\pi/4) = 0$ *и* $y'(\pi/4) = 1$*. Подставляя* $t = \pi/4$ *в формулу для общего решения* $y(t)$ *и его производной* $y'(t)$*, получим* $A\cos(\pi/4 - \varphi) = 0, -A\sin(\pi/4 - \varphi) = 1$*. Отсюда следует, что* $\operatorname{ctg}(\pi/4 - \varphi) = 0, \quad \varphi = 3\pi/4$ *и* $A = 1$*. Искомое частное решение равно* $y(t) = \cos(t - 3\pi/4)$.

Большинство законов физики записываются в виде дифференциальных уравнений. Известно, например, что скорость распада $-m'(t)$ радиоактивного вещества пропорционально его массе $m(t)$. Получаем, что зависимость массы от времени удовлетворяет ДУ первого порядка

$-m'(t) = k \cdot m(t)$, где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от типа радиоактивного материала.

ПРИМЕР

2. Зависимость заряда на конденсаторе от времени $q(t)$ в простейшем колебательном контуре с индуктивностью L, сопротивлением R, емкостью C и источником напряжения $U(t)$ (рис.1) описывается ДУ второго порядка

$$Lq''+Rq'+\frac{1}{C}q = U(t)$$

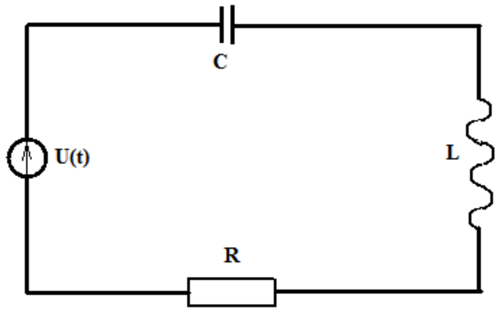

Рис. 1

Чтобы найти функцию $q(t)$, необходимо учесть начальные условия $q(t_0) = q_0$ и $q'(t_0) = i_0$, где q_0 – заряд, а i_0 – ток в начальный момент времени t_0. Расчет более сложных электрических цепей сводится к решению системы дифференциальных уравнений.

Как интегрировать (т.е. решать) дифференциальные уравнения? Не существует общего ответа на этот вопрос. Во многих случаях, хотя решения и существуют, их нельзя выразить не только через элементарные функции, но и через интегралы от них.

Существуют два подхода к интегрированию ДУ.

Первый – аналитический – связан с выделением особых классов ДУ, решения которых могут быть выражены в виде известных функций или интегралов от них. Ниже мы рассмотрим некоторые такие классы. Более подробную информацию можно найти в справочниках по решению ДУ (см., например, Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971).

Второй подход – это различные методы численного интегрирования, т.е. получение частного решения не в виде формулы, а в виде достаточно подробной и точной таблицы значений неизвестной функции. Мы рассмотрим простейший численный метод решения ДУ.

ДУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1). Разделение переменных. Один из важнейших классов дифференциальных уравнений, допускающих аналитическое решение – это уравнения с разделяющимися переменными, т.е. ДУ, которые можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = \frac{u(t)}{v(y)} \tag{2}$$

Название уравнений этого класса становится понятным, если переписать (2) как уравнение в дифференциалах:

$$v(y)\,dy = u(t)\,dt \tag{3}$$

Переходя к интегралам, получим (быть может и неявную) зависимость переменной y от t

$$\int v(y)\,dy = \int u(t)\,dt$$

ПРИМЕРЫ

3. Решить уравнение $3y^2 \cdot y' - 2t = 0$.

Разделим переменные. Для этого запишем производную y' *в виде* $\frac{dy}{dt}$. *Тогда* $3y^2 \frac{dy}{dt} = 2t$ *и* $3y^2 dy = 2t\,dt$. *Беря интегралы от обеих частей уравнения, получаем, что* $\int 3y^2 dy = \int 2t\,dt$, *откуда* $y^3 = t^2 + C$ *и* $y(t) = \sqrt{t^2 + C}$ *– общее решение.*

4. Найти частное решение ДУ $2t + \frac{y'}{y} = 0$, *удовлетворяющее начальному условию* $y(0) = 2$.

Разделим переменные в ДУ: $-2tdt = \frac{dy}{y}$. *Интегрируя обе части уравнения, можем записать* $-t^2 + \ln|C| = \ln|y|$. *(обратите внимание на то, что, когда* y *входит в интеграл под знаком логарифма, произвольную постоянную удобнее записать в виде* $\ln|C|$ *). Получим общее решение ДУ:*

$$y(t) = Ce^{-t^2}$$

Чтобы найти C, *используем начальное условие: при* $t = 0, y = 2$ *и получаем* $Ce^0 = 2$, *откуда* $C = 2$. *Искомое частное решение равно* $y(t) = 2e^{-t^2}$.

5. Решить задачу Коши для уравнения $y^3 \cdot \sqrt{t^2+1}\,dy - t \cdot \sqrt[5]{y^4+1}\,dt = 0, \quad y(0) = 0$.

Разделяя переменные, получим $\frac{y^3}{\sqrt[5]{y^4+1}} = \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}$. *Интегрируя, находим*

$$\frac{1}{4}\int \frac{d(y^4+1)}{\sqrt[5]{y^4+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}}; \quad \frac{5}{16}\sqrt[5]{(y^4+1)^4} = \sqrt{t^2+1} + C.$$

Найдем C, *не выражая* $y(t)$ *явно:* $\frac{5}{16}\sqrt[5]{1} = \sqrt{1} + C, \quad C = -\frac{11}{16}$. *Окончательно*

$$\frac{5}{16}\sqrt[5]{(y^4+1)^4} = \sqrt{t^2+1} - \frac{11}{16}$$

ЛИНЕЙНОЕ ДУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Очень часто встречается ДУ вида

$$y' + k(t)y = f(t) \qquad (4)$$

Такое ДУ называется линейным, поскольку неизвестная функция y и ее производная y' входят в уравнение линейно – в виде слагаемых с коэффициентами, зависящими только от t (функции $k(t)$ и $f(t)$ - произвольны).

Обратите внимание на форму записи линейного уравнения: слагаемые, содержащие неизвестную функцию y и ее производную, принято записывать в левой части уравнения, а слагаемые, зависящие лишь от t – в правой части. Если при таком способе записи правая часть равна нулю, то уравнение называется линейным однородным.

Общее решение ДУ (4) будем искать в виде $y(t) = g(t) \cdot u(t)$. Чтобы найти $g(t)$ и $u(t)$, подставим y и $y' = g' \cdot u + g \cdot u'$ в исходное уравнение: $g' \cdot u + g \cdot u' + k(t) \cdot g \cdot u = f(t)$ или

$$g' \cdot u + g \cdot [u' + k(t) \cdot u] = f(t) \qquad (5)$$

Так как вместо одной неизвестной функции $y(t)$ у нас появилось две новых – $g(t)$ и $u(t)$, одну из новых функций мы можем выбрать удобным для нас образом, например, так, чтобы выражение в квадратных скобках в (5) обратилось в нуль. Тогда (5) сведется к двум уравнениям

$$u'(t) + k(t)\cdot u(t) = 0, \quad g'(t)\cdot u(t) = f(t) \tag{6}$$

ПРИМЕР

6. Найти общее решение уравнения $y' - \dfrac{2ty}{t^2+3} = (t^2+3)\cos t$.

Это линейное уравнение. Поэтому полагаем $y(t) = g(t)\cdot u(t)$. *Тогда* $y' = g'u + g\cdot u'$. *Подставляя* y *и* y' *в исходное уравнение, получим*

$$g'u + gu' - \frac{2tgu}{t^2+3} = (t^2+3)\cos t \Rightarrow g'u + g\left(u' - \frac{2tu}{t^2+3}\right) = (t^2+3)\cos t$$

Уравнение свелось к двум уравнениям с разделяющимися переменными

$$\begin{cases} u' - \dfrac{2tu}{t^2+3} = 0 \\ g'u = (t^2+3)\cos t \end{cases}$$

Решаем первое : $\dfrac{du}{u} = \dfrac{2tdt}{t^2+3}$, *интегрируем* $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \int \frac{2tdt}{t^2+3} \Rightarrow \ln|u| = \ln(t^2+3) + C$. *Выбираем простейшее частное решение, полагая* $C = 0$: $u = t^2 + 3$. *Подставляя* u *во второе уравнение, находим* $g(t)$: $g'(t)\cdot(t^2+3) = (t^2+3)\cos t \Rightarrow g'(t) = \cos t \Rightarrow g(t) = \sin t + C$. *Окончательно имеем:*

$$y(t) = (t^2+3)(\sin t + C)$$

Решение неоднородного линейного ДУ (4) можно также найти по общей формуле

$$y(t) = u(t)\cdot\int \frac{f(t)}{u(t)}\,dt\,. \tag{7}$$

В этой формуле функция $u(t)$ представляет собой решение соответствующего однородного ДУ $u'(t) + k(t)u = 0$ и находится по формуле

$$u(t) = e^{-\int k(t)\,dt} \tag{8}$$

ПРИМЕР

7. Найти общее решение уравнения $\dfrac{1}{t}y' + y - 1 = 0$.

Это линейное уравнение. Преобразуем его к виду (4): $y' + t\,y = t$. *По формуле (8) получаем* $u(t) = e^{-\int tdt} = e^{-\frac{t^2}{2}}$, *а из (7) находим, что*

$$y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\int \frac{t}{e^{-\frac{t^2}{2}}}\,dt = e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\int te^{\frac{t^2}{2}}dt = e^{-\frac{t^2}{2}}\int e^{\frac{t^2}{2}}d\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(e^{\frac{t^2}{2}} + C\right) = 1 + Ce^{-\frac{t^2}{2}}.$$

ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯ.

Дифференциальное уравнение второго порядка $F(t, y, y', y'') = 0$ иногда удается свести к двум ДУ первого порядка. Рассмотрим два характерных случая, когда это можно сделать.

1). Неизвестная функция $y(t)$ входит в уравнение только под знаком производной: $F(t, y', y'') = 0$. При помощи подстановки $y' = z$ такое уравнение сводится к уравнению первого порядка $F(t, z, z') = 0$.

ПРИМЕРЫ:

8. Найти общее решение уравнения $y''-\dfrac{y'}{t}=te^t$.

Это ДУ не содержит y. *Положим* $y'=z$, *тогда* $y''=z'$ *и получаем ДУ первого порядка:*

$$z'-\frac{z}{t}=te^t.$$

Так как это линейное ДУ первого порядка относительно функции z, *то ищем его решение в виде* $z=g(t)\cdot u(t)$. *Тогда* $z'=g'u+gu'$; $\quad g'u+gu'-\dfrac{gu}{t}=te^t$, $\quad g'u+g\left(u'-\dfrac{u}{t}\right)=te^t$, *и*

$$\begin{cases} u'-\dfrac{u}{t}=0 \\ g'u=te^t \end{cases}$$

Решим первое уравнение: $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{u}{t}$; $\quad \dfrac{du}{u}=\dfrac{dt}{t}$; $\quad \displaystyle\int\frac{du}{u}=\int\frac{dt}{t}$; $\quad \ln|u|=\ln|t|$; $\quad u=t$.

Решим второе уравнение: $g'(t)\cdot t=te^t$; $\quad g'(t)=e^t$; $\quad g(t)=e^t+C_1$. *Таким образом, общее решение ДУ первого порядка* $y'=\left(e^t+C_1\right)t$ *или* $dy=\left(e^t+C_1\right)t\,dt$. *Интегрируя, получим:* $y=\displaystyle\int\left(te^t+C_1t\right)dt=C_1\frac{t^2}{2}+\int te^t\,dt$. *Интеграл* $\displaystyle\int te^t\,dt$ *берем по частям и окончательно получим*

$$y=C_1\frac{t^2}{2}+te^t-e^t+C_2.$$

9. Найти решение задачи Коши: $\left(1+t^2\right)y''-2ty'=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=3$.

В уравнении отсутствует y. *Обозначая* $y'=z$, *приводим исходное уравнение к виду* $\left(1+t^2\right)z'-2tz=0$. *Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:*

$$\frac{dz}{z}=\frac{2t\,dt}{1+t^2}\Rightarrow \ln|z|=\ln\left(1+t^2\right)+\ln|C_1|\Rightarrow z=C_1\cdot\left(1+t^2\right)\Rightarrow y'=C_1\cdot\left(1+t^2\right).$$

Найдем C_1. *При* $t=0$ *имеем* $3=C_1(1+0)$ *и* $C_1=3$. *Следовательно* $y'=3(1+t^2)$. *Отсюда* $y=\displaystyle\int(3+3t^2)dt$; $\quad y=3t+t^3+C_2$. *Используя еще одно начальное условие* $y(0)=0$, *находим* $C_2=0$. *Окончательно,* $y=3t+t^3$.

2). Независимая переменная не содержится в уравнении явно: $F(y,y',y'')=0$. В этом случае примем y за независимую переменную, а $y'=z$ будем считать функцией от y. По правилу дифференцирования сложной функции получаем выражение для выражение для второй производной: $y''=\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dz}{dy}\cdot z$. Таким образом, исходное уравнение становится уравнением первого порядка.

ПРИМЕР.

10. Решить уравнение $yy''+\left(y'\right)^2=0$. *Независимая переменная* t *не содержится явно в уравнении. Обозначив* $y'=z(y)$, *получим* $y''=\dfrac{dz}{dy}\cdot z$. *В итоге получаем ДУ первого порядка* $yz\dfrac{dz}{dy}+z^2=0$.

Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dz}{z}=-\frac{dy}{y};\Rightarrow\int\frac{dz}{z}=-\int\frac{dy}{y};\Rightarrow z=\frac{C_1}{y}$. *Таким образом,* $y'=\frac{C_1}{y}$. *Решим последнее уравнение.*

$$\frac{dy}{dt}=\frac{C_1}{y};\Rightarrow ydy=C_1dt;\Rightarrow\frac{y^2}{2}=C_1t+C_2$$

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0$$

называется однородным линейным дифференциальным уравнением (ОЛДУ) второго порядка. Если $y=y_1(t)$ и $y=y_2(t)$ – два решения ОЛДУ, то их сумма с произвольными коэффициентами C_1 и C_2

$$y=C_1y_1(t)+C_2y_2(t) \tag{9}$$

также является решением.

Если функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ линейно независимы (т.е. $y_1(t)/y_2(t)\neq\text{const}$), то (9) задает общее решение ОЛДУ второго порядка.

В важном частном случае, когда коэффициенты ОЛДУ постоянны $p(t)=p,\ q(t)=q$, частное решение уравнения

$$y''+py'+qy=0 \tag{10}$$

следует искать в виде $y=e^{\omega t}$. Постоянная ω является корнем характеристического уравнения

$$\omega^2+p\omega+q=0$$

Корни этого квадратного уравнения $\omega_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$ называются характеристическими корнями.

Если характеристические корни вещественны и $\omega_1\neq\omega_2$, то функции $y_1(t)=e^{\omega_1 t}$ и $y_2(t)=e^{\omega_2 t}$ линейно независимы, и общее решение уравнения (10) имеет вид

$$y=C_1e^{\omega_1 t}+C_2e^{\omega_2 t}, \tag{11}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Если характеристические корни совпадают, т.е. $\omega_1=\omega_2=\omega$, то решение получается по формуле

$$y=C_1e^{\omega t}+C_2te^{\omega t}. \tag{11'}$$

В случае комплексных корней $\omega_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ общее решение ОЛДУ (10) удобно записать (используя формулу Эйлера) в виде

$$y=C_1e^{\alpha t}\cos\beta t+C_2e^{\alpha t}\sin\beta t \tag{12}$$

ПРИМЕРЫ.

11. Найти общее решение ОЛДУ с постоянными коэффициентами $y''-9y'+14y=0$.

Составим характеристическое уравнение : $\omega^2-9\omega+14=0$. *Его корни* $\omega_1=7$ *и* $\omega_2=2$. *Общее решение имеет вид* $y=C_1e^{7t}+C_2e^{2t}$.

12. Найти общее решение ОЛДУ $y''+17y'=0$.

Составим характеристическое уравнение $\omega^2 + 17\omega = 0$. *Его корни* $\omega_1 = 0$ *и* $\omega_2 = -17$, *и общее решение имеет вид* $y = C_1 e^{0t} + C_2 e^{-17t} = C_1 + C_2 e^{-17t}$.

13. Найти частное решение ОЛДУ $y'' + 2y' + y = 0$, *удовлетворяющее начальным условиям* $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

Составим характеристическое уравнение $\omega^2 + 2\omega + 1 = 0$; *его корни* $\omega_1 = \omega_2 = -1$ *совпадают.*

Общее решение $y = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$. *Найдем* C_1 *и* C_2. *Для этого найдем* $y' = -C_1 e^{-t} + C_2\left(e^{-t} - te^{-t}\right)$.

Подставляя $t = 0$ *в* $y(t)$ *и* $y'(t)$, *получаем систему*

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$$

Имеем $C_1 = 0, C_2 = 2$. *Искомое решение задачи Коши есть* $y = 2te^{-t}$.

14. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Это ОЛДУ. Составим характеристическое уравнение $\omega^2 + 4\omega + 13 = 0$ *и найдем его корни:* $\omega_{1,2} = -2 \pm 3i$. *Общее решение имеет вид:* $y = C_1 e^{-2t}\cos 3t + C_2 e^{-2t}\sin 3t$.

15. Найти заряд конденсатора для LC *конура с сопротивлением* $R = 0$ *в момент времени* $t = 10$, *если в начальный момент он равен* q_0, *а ток в цепи отсутствовал.*

Колебания заряда конденсатора описываются уравнением $q'' + \frac{1}{LC}q = 0$, *которое получается из уравнения примера 2 при* $R = 0$ *и* $U(t) = 0$.

Найдем общее решение этого ОЛДУ с постоянными коэффициентами. Корни характеристического уравнения $\omega^2 + \frac{1}{LC} = 0$ – *чисто мнимые:* $\omega_{1,2} = 0 \pm i\omega_0$, *где* $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. *Общее решение по формуле (12) запишется в виде*

$q = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$.

Мы видим, что частота собственных колебаний контура равна $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ *(формула Томсона).*

Используем начальные условия – при $t = 0$ $q(0) = q_0$, *а* $i_0 = q'(0) = 0$. *Так как* $q' = -C_1\omega_0 \sin\omega_0 t + C_2\omega_0 \cos\omega_0 t$, *то* $q_0 = C_1$, $C_2\omega_0 = 0$. *Следовательно* $q(t) = q_0 \cos\omega_0 t$. *При* $t = 10$ *получим* $q(10) = q_0 \cos 10\omega_0$.

16. Найти частное решение $y \equiv h(t)$ *уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям* $h(0) = 0, h'(0) = 1$. *Функция* $h(t)$ *называется* ***импульсной характеристикой***.

Если характеристические корни различны, то общее решение уравнения (10) имеет вид $h(t) = C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t}$, *а его производная* $h'(t) = C_1\omega_1 e^{\omega_1 t} + C_2\omega_2 e^{\omega_2 t}$. *При* $t = 0$ *имеем*

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 1 = C_1\omega_1 + C_2\omega_2 \end{cases}$$

Решая систему, получаем $C_1 = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} = -C_2$. *Следовательно,* $h(t) = \frac{e^{\omega_1 t} - e^{\omega_2 t}}{\omega_1 - \omega_2}$.

Если характеристические корни совпадают ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$*), то*

$h(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 t e^{\omega t}$, $h'(t) = C_1\omega e^{\omega t} + C_2 e^{\omega t} + C_2 t\omega e^{\omega t}$. *Подставляя* $t = 0$, *получим* $C_1 = 0, C_2 = 1$ *и* $h(t) = te^{\omega t}$.

Получим выражение для импульсной характеристики в случае комплексных корней $\omega_{1,2} = \alpha \pm i\beta$:

$$h(t) = \frac{e^{\omega_1 t} - e^{\omega_2 t}}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{\alpha + i\beta - \alpha + i\beta} = \frac{e^{\alpha t}e^{i\beta t} - e^{\alpha t}e^{-i\beta t}}{2i\beta} = \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \cdot \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} = \frac{e^{\alpha t}}{\beta}\sin\beta t .$$

При вычислениях использовалась формула Эйлера $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. *Итак в случае комплексных характеристических корней*

$$h(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\beta}\sin\beta t \tag{13}$$

Общее решение неоднородного линейного ДУ

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \tag{14}$$

можно записать в виде суммы $y = y_{общ}(t) + y_{част}(t)$, где $y_{част}(t)$ – какое-либо частное решение уравнения (14), $y_{общ}(t)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 .$$

В теории колебаний $y_{общ}(t)$ – это собственные колебания, а $y_{част}(t)$ – вынужденные колебания под действием внешней силы $f(t)$.

Если коэффициенты $p(t) = p, q(t) = q$ постоянны, то $y_{общ}(t)$ можно найти, решая характеристическое уравнение. Для нахождения $y_{част}(t)$ существует несколько способов. Ниже приведены два из них.

Частное решение можно записать в виде интеграла наложения

$$y_{част}(t) = \int_0^t h(t-s)\cdot f(s)ds ,$$

где $h(t)$ – импульсная характеристика (см. пример 16).

ПРИМЕРЫ.

17. Найти общее решение линейного ДУ $y'' + 4y = \cos t$.

Решим сначала соответствующее однородное уравнение $y'' + 4y = 0$. *Его характеристическое уравнение* $\omega^2 + 4 = 0$ *имеет чисто мнимые корни* $\omega_{1,2} = \pm 2i$. *Общее решение ОЛДУ имеет вид* $y_{общ} = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$. *По формуле (13) переходная функция* $h(t) = \dfrac{1}{2}\sin 2t$.

Частное решение линейного ДУ найдем с помощью интеграла наложения:

$$y_{част}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-s)\cdot\cos s\, ds = \frac{1}{4}\int_0^t \left[\sin(2t-s) + \sin(2t-3s)\right]ds .$$

Интегрируем по s *(при интегрировании* t *– постоянно):*

$$y_{част}(t) = \frac{1}{4}\cos(2t-s)\Big|_0^t + \frac{1}{12}\cos(2t-3s)\Big|_0^t = \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{12}\cos(-t) - \frac{1}{12}\cos 2t = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$y(t) = y_{общ}(t) + y_{част}(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t = \left(C_1 - \frac{1}{3}\right)\cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{1}{3}\cos t$$

$$= A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{1}{3}\cos t$$

Видно, что вынужденные колебания $y = \frac{1}{3}\cos t$ *имеют частоту вынуждающей силы* $f(t) = \cos t$ *и ограничены по амплитуде(* $A = 1/3$ *).*

18. Найти общее решение линейного ДУ $y'' + 4y = \cos 2t$ *.*

Первая часть решения такая же, как в пр. 17. Частное решение ищем в виде интеграла наложения

$$y_{част} = \frac{1}{2}\int_0^t \sin[2(t-s)] \cdot \cos 2s\, ds = \frac{1}{4}\int_0^t [\sin 2t + \sin(2t - 4s)]ds =$$

$$\frac{1}{4}\left[\sin 2t \int_0^t ds - \frac{1}{4}\int_0^t \sin(2t-4s)d(2t-4s)\right] = \frac{1}{4}\sin 2t \cdot s\Big|_0^t + \frac{1}{16}\cos(2t-4s)\Big|_0^t = \frac{1}{4}t \cdot \sin 2t$$

Общее решение неоднородного уравнения получаем в виде суммы:

$$y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{1}{4}t \cdot \sin 2t.$$

В этом примере имеется резонанс – частота вынуждающей силы совпадает с частотой собственных колебаний. В результате амплитуда вынужденного колебания $y = \frac{1}{4}t \cdot \sin 2t$ *неограниченно возрастает.*

В некоторых случаях, когда вычисление интеграла наложения достаточно громоздко, можно найти частное решение другим способом. Рассмотрим метод подбора. Этот метод решения ДУ применяется, когда в правой части стоит функция вида

$$f(t) = e^{\alpha t}\left(P_n(t)\cos \beta t + Q_m(t)\sin \beta t\right),$$

где $P_n(t)$ и $Q_m(t)$ – многочлены степени n и m, соответственно. В этом случае частное решение имеет ту же структуру, что и правая часть исходного уравнения:

$$y_{част}(t) = e^{\alpha t}\left(R_l(t)\cos \beta t + S_l(t)\sin \beta t\right) \cdot t^r.$$

Здесь $R_l(t)$ и $S_l(t)$ – многочлены степени $l = \max(n, m)$, записанные с неопределенными коэффициентами, причем, они содержат все степени t; число $r = 0$, если $\alpha + \beta i$ не является характеристическим корнем. Если же число $\alpha + \beta i$ совпадает с характеристическим корнем, то r равно кратности этого корня (резонансный случай).

ПРИМЕРЫ.

19. Найти общее решение ЛДУ $y'' + 4y = 1$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения получено в примере 17. В правой части уравнения стоит многочлен нулевой степени $n = 0$ *(* $\alpha = \beta = 0$ *). Резонанс отсутствует, так как число* $0 + i0$ *не является корнем характеристического уравнения* $\omega^2 + 4 = 0$ *. Следовательно, частное решение будет многочленом нулевой степени:* $y_{част} = A$.

Чтобы найти неопределенный коэффициент A, *необходимо* $y_{част}$ *подставить в исходное уравнение:* $y_{част} = A, y'_{част} = y''_{част} = 0$. *Следовательно,* $4A = 1$ *и* $A = 1/4$. *Таким образом, общее решение уравнения* $y(t) = y_{общ}(t) + y_{част}(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{1}{4}$.

20. Найти общее решение ЛДУ $y'' - 2y' = -6t^2$.

Найдем общее решение ОЛДУ $y'' - 2y' = 0$. *Его характеристическое уравнение* $\omega^2 - 2\omega = 0$ *имеет корни* $\omega_1 = 0, \omega_2 = 2$. *Общее решение однородного уравнения* $y_{общ} = C_1 + C_2 e^{2t}$.

В правой части исходного уравнения стоит многочлен второй степени. Следовательно $n = 2$, *а величина* $\alpha + \beta i = 0$ *совпадает с корнем характеристического уравнения* $\omega_1 = 0$, *кратность которого равна 1. Поэтому* $y_{част} = (At^2 + Bt + C)t = At^3 + Bt^2 + Ct$, $y'_{част} = 3At^2 + 2Bt + C$, $y''_{част} = 6At + 2B$. *Подставляя в исходное уравнение , получим:*

$$6At + 2B - 6At^2 - 4Bt - 2C = -6t^2$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t *слева и справа, имеем*

при t^2 *:* $\quad -6A = -6$; $\quad A = 1$;

при t *:* $\quad 6A - 4B = 0$; $\quad B = 3/2$;

при t^0 *:* $\quad 2B - 2C = 0$; $\quad C = 3/2$.

Итак $y_{част}(t) = t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t$, $y(t) = y_{общ}(t) + y_{част}(t) = C_1 + C_2 e^{2t} + t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t$.

21. Решить линейное ДУ $y'' + 4y = 2e^{-t}$.

Общее решение соответствующего ОЛДУ найдено в примере 17: $y_{общ}(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$.

Частное решение линейного ДУ ищем методом подбора – в правой части стоит многочлен нулевой степени, умноженный на e^{-t} *и на* $\cos(0t)$. *То есть, имеем* $n = 0, \alpha + \beta i = -1$. *Резонанс отсутствует, так как число –1 не является корнем характеристического уравнения* $\omega^2 + 4 = 0$.

Частное решение ищем в виде $y_{част}(t) = Ae^{-t}$. *Тогда* $y'_{част}(t) = -Ae^{-t}; y''_{част}(t) = Ae^{-t}$. *Подставляя в уравнение, получаем* $Ae^{-t} - 4Ae^{-t} = 2e^{-t}; \Rightarrow -3A = 2; \Rightarrow A = -2/3$ *Т.е.* $y_{част}(t) = -\frac{2}{3}e^{-t}$, *а общее решение* $y(t) = y_{общ}(t) + y_{част}(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{2}{3}e^{-t}$.

Безусловно, можно было бы найти $y_{част}(t)$ и при помощи интеграла наложения. Так, для уравнения $y'' + 4y = 0$ имеем $y_{част}(t) = \int_0^t \sin[2(t-s)]ds$; для уравнения $y'' - 2y' = -6t^2$ имеем $y_{част}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(1 - e^{2(t-s)}\right)6s^2 ds = 3\int_0^t \left(1 - e^{2(t-s)}\right)s^2 ds$; для уравнения $y'' + 4y = 2e^{-t}$ – $y_{част}(t) = \int_0^t \sin[2(t-s)]e^{-s} ds$.

Вычислив интегралы, убедитесь, что общее решение имеет тот же вид, что и полученные ранее методом подбора.

В примерах 17 и 18 правая часть уравнения имеет вид, допускающий применение метода подбора. Применяя этот метод, проверьте, что для уравнения $y'' + 4y = \cos t$

$y_{част}(t) = A\cos t + B\sin t$, а для уравнения $y''+4y = \cos 2t$ $\quad y_{част} = (A\cos t + B\sin t)t$. Найдите неопределенные коэффициенты, подставив $y_{част}(t)$ в уравнения и приравняв коэффициенты при подобных членах слева и справа.

ПРИМЕР

22. Для цепи, рассмотренной в примере 2, найти изменение заряда на конденсаторе, если $L = 3\cdot 10^{-3}$ *Гн,* $C = 10^{-7}$ *Ф,* $R = 400$ *Ом, входное напряжение* $U(t) = \sin 10^5 t$. *В начальный момент заряд и ток в цепи отсутствуют.*

В уравнение $Lq''+Rq'+\dfrac{1}{C}q = U(t)$ *подставим исходные данные:*

$$3\cdot 10^{-3}q''+400q'+\frac{1}{10^{-7}}q = \sin 10^5 t$$

Начальные условия $q(0) = 0,\ q'(0) = i(0) = 0$. *Решим задачу Коши, используя метод подбора. Запишем характеристическое уравнение для соответствующего ОЛДУ:*

$3\cdot 10^{-3}\omega^2 + 4\cdot 10^2\omega + 10^7 = 0$. *Его корни* $\omega_{1,2} = \dfrac{-2\cdot 10^2 \pm \sqrt{4\cdot 10^4 - 3\cdot 10^{-3}\cdot 10^7}}{3\cdot 10^{-3}} = 10^5\cdot\dfrac{-2\pm 1}{3}$;

$\omega_1 = -10^5$, $\omega_2 = -\dfrac{1}{3}\cdot 10^5$. *Таким образом, общее решение однородного уравнения имеет вид*

$$q_{общ}(t) = C_1 e^{-10^5 t} + C_2 e^{-\frac{1}{3}10^5 t}$$

В правой части неоднородного уравнения стоит выражение $\sin 10^5 t$, *следовательно, его частное решение имеет вид* $q_{част}(t) = A\sin 10^5 t + B\cos 10^5 t$.. *Резонанс отсутствует, так как* $10^5 i \neq \omega_{1,2}$.

Найдем $q'(t) = 10^5 A\cos 10^5 t - 10^5 B\sin 10^5 t$ *и* $q''(t) = -10^{10}A\sin 10^5 t - 10^{10}B\cos 10^5 t$ *и подставим в уравнение:*

$$-3\cdot 10^7 A\sin 10^5 t - 3\cdot 10^7 B\cos 10^5 t + 4\cdot 10^7 A\cos 10^5 t - 4\cdot 10^7 B\sin 10^5 t + 10^7 A\sin 10^5 t + 10^7 B\cos 10^5 t$$
$$= \sin 10^5 t$$

Приведем подобные слагаемые:

$$10^7\cdot(-3A - 4B + A)\sin 10^5 t + 10^7\cdot(-3B + 4A + B)\cos 10^5 t = 1\cdot\sin 10^5 t + 0\cdot\cos 10^5 t$$

Приравняем коэффициенты при синусах и косинусах:

$$\begin{cases} 10^7\cdot(-2A - 4B) = 1 \\ 10^7\cdot(4A - 2B) = 0 \end{cases}$$

и найдем A *и* B *из полученной системы:* $a = -10^{-8}$, $B = -2\cdot 10^{-8}$.

Таким образом, общее решение неоднородного ЛДУ имеет вид

$$q(t) = C_1 e^{-10^5 t} + C_2 e^{-\frac{1}{3}10^5 t} - 10^{-8}\sin 10^5 t - 2\cdot 10^{-8}\cos 10^5 t$$

Найдем C_1 *и* C_2 *из начальных условий* $q(0) = q'(0) = 0$,

$$q'(t) = -10^5 C_1 e^{-10^5 t} - \frac{10^5}{3}C_2 e^{-\frac{1}{3}10^5 t} - 10^{-3}\cos 10^5 t + 2\cdot 10^{-3}\sin 10^5 t$$

При $t = 0$ *получим систему*

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2\cdot 10^{-8} \\ -10^5 C_1 - \dfrac{10^5}{3}C_2 - 10^{-3} = 0 \end{cases}$$

Решая ее, найдем $C_1 = -\frac{5}{2}\cdot 10^{-8}$, $C_2 = \frac{9}{2}\cdot 10^{-8}$

Окончательно получаем

$$q(t) = -\frac{5}{2}10^{-8}e^{-10^5 t} + \frac{9}{2}10^{-8}e^{-\frac{10^5}{3}t} - 10^{-8}\sin 10^5 t - 2\cdot 10^8 \cos 10^5 t$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Линейная однородная система двух дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = py + qz \\ \frac{dz}{dt} = ry + lz \end{cases},$$

где p, q, r, l – заданные числа, а $y(t)$ и $z(t)$ – искомые функции.

Один из способов решения такой системы состоит в сведении системы двух уравнений к одному дифференциальному уравнению второго порядка.

ПРИМЕР.

23. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -y + 8z \\ \frac{dz}{dt} = y + z \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y' = -y + 8z \\ z' = y + z \end{cases}.$$

Исключим из первого уравнения переменную z. *Для этого продифференцируем обе части этого уравнения по* t. *Получим* $y'' = -y' + 8z'$. *Подставим в это равенство выражение для* z' *из второго уравнения* $y'' = -y' + 8(y+z)$, $\quad y'' = -y' + 8y + 8z$. *Выражая из первого уравнения системы* z *через* y *и* y': $z = \frac{1}{8}(y' + y)$, *окончательно получим*

$y'' = -y + 8y + y' + y; \quad y'' - 9y = 0$;

Таким образом, наша система свелась к обыкновенному линейному ДУ второго порядка.

Общее решение для y *запишется в виде* $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$

Чтобы найти z, *воспользуемся равенством* $z = \frac{1}{8}(y' + y)$:

$$z = \frac{1}{8}\left(C_1 3e^{3t} - C_2 3e^{-3t} + C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}\right), \Rightarrow z = \frac{1}{2}C_1 e^{3t} - \frac{1}{4}C_2 e^{-3t}.$$

Окончательный ответ: $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$; $z = \frac{1}{2}C_1 e^{3t} - \frac{1}{4}C_2 e^{-3t}$.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим метод Эйлера приближенного решения ДУ $y' = f(t, y)$ с начальным условием $y(t_0) = y_0$.

Численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ решения уравнения $y(t)$ в точках $t_1, t_2, \ldots t_n$. Выбрав достаточно малый шаг h, положим

$t_{k+1} = t_k + h, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

В методе Эйлера величины y_k вычисляются по формуле $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$, где

$\Delta y_k = h \cdot f(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

Это простейший численный метод, удобный при ручном вычислении. Результаты вычислений будем заносить в таблицу.

Таблица 1.

k	t_k	y_k	$f(t_k, y_k)$	$\Delta y_k = h \cdot f(t_k, y_k)$
0	t_0	y_0	$f(t_0, y_0)$	$\Delta y_0 = h \cdot f(t_0, y_0)$
1	$t_1 = t_0 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$f(t_1, y_1)$	$\Delta y_1 = h \cdot f(t_1, y_1)$
2	$t_2 = t_1 + h$	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	$f(t_2, y_2)$	$\Delta y_2 = h \cdot f(t_2, y_2)$
$\vdots$	……	……	……	……

ПРИМЕР

24. Построить методом Эйлера решение задачи Коши

$$y' = t \cdot y, \quad y(0) = 1$$

на промежутке $[0;0.5]$ *с шагом* $h = 0.1$.

В нашем случае $t_0 = 0; \quad y_0 = 1; \quad f(t, y) = t \cdot y; \quad h = 0.1$. *Таблица вычислений выглядит так:*

Таблица 2.

k	t_k	y_k	$f(t_k, y_k) = t_k \cdot y_k$	$\Delta y_k = 0.1 \cdot f(t_k, y_k)$
0	*0.0*	*1*	*0*	*0.000*
1	*0.1*	*1.000*	*0.100*	*0.010*
2	*0.2*	*1.010*	*0.202*	*0.020*
3	*0.3*	*1.030*	*0.309*	*0.031*
4	*0.4*	*1.061*	*0.424*	*0.042*
5	*0.5*	*1.103*		

Точное решение $y = e^{t^2}$ *при* $t = 0.5$ *имеет значение* $y = 1.133$. *Абсолютная погрешность составляет 0.030, а относительная погрешность равна 3%. на рис.2 по найденной таблице приближенных значений функции* $y = y(t)$ *построена ломаная Эйлера.*

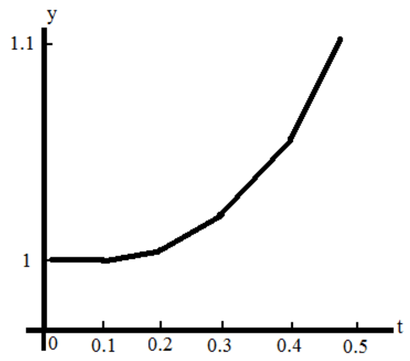

Рис. 2

РЯДЫ

В школьной программе подробно изучаются линейная функция $y = a + bx$ и квадратный трехчлен $y = a + bx + cx^2$. Эти простейшие примеры многочленов. С другой стороны, такие элементарные функции как $y = 1/(1-x)$ или $y = \cos x$ не являются многочленами и определяются совсем иначе.

Отметим, что все элементарные функции и многие неэлементарные все же можно задать однотипными алгебраическими формулами – в виде «многочленов бесконечной степени»

$$a + bx + cx^2 + \ldots + dx^n + \ldots$$

Такие «многочлены» называют степенными рядами.

Напомним в качестве примера школьную формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \tag{15}$$

Многоточие означает, что сумма содержит бесконечное число слагаемых, и поэтому процесс суммирования, казалось бы, невозможно закончить.

Как же определяется сумма в левой части выражения (15)? По известной формуле суммы геометрической прогрессии находим сумму первых n членов ряда $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x}$. Если $-1 < x < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$.

Суммы любых достаточно длинных конечных отрезков ряда близки к предельному значению $\dfrac{1}{1-x}$, которое и считается, по определению, суммой бесконечного ряда (15).

Выпишем разложения в степенные ряды для важнейших элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{16}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \tag{17}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{18}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \tag{19}$$

Часто ряды записывают сокращенно при помощи знака Σ (сигма). Например, формулы (16 – (19) можно переписать так:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n; \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n};$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}; \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} x^n$$

Выражение, стоящее под знаком суммы, называется общим членом ряда.

Ниже мы поясним, как можно получать подобные разложения и как они используются для решения различных задач математического анализа.

Напомним важнейшие понятия, связанные с рядами (точные определения см. [1], гл. XVI).

Числовым рядом называется выражение вида

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n + \ldots, \tag{20}$$

где $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ - вещественные или комплексные числа.

Частичная сумма ряда (20) – это сумма $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ первых n членов (слагаемых) этого ряда. Например, $S_1 = x_1$, $S_2 = x_1 + x_2$, $S_3 = x_1 + x_2 + x_3$ и т.д. Говорят, что ряд (20) сходится, если последовательность его частичных сумм $S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$ имеет конечный предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Число S называют **суммой сходящегося ряда**. Если же предел частичных сумм бесконечен или вообще не существует, то ряд называется **расходящимся**.

ПРИМЕРЫ:

25. *Геометрический ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots x^n + \ldots$ *(слагаемые этого ряда образуют геометрическую прогрессию) сходится, если* $-1 < x < 1$ *и расходится при* $|x| \geq 1$.

Если ряд геометрической прогрессии сходится, то его сумма равна $S = \dfrac{1}{1-x}$. *Например, при* $x = 1/2$ *ряд сходится и сумма его равна 2:* $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots = \dfrac{1}{1-1/2} = 2$.

Суммирование в этом примере можно изобразить наглядно как постепенное удлинение отрезка (рис.3)

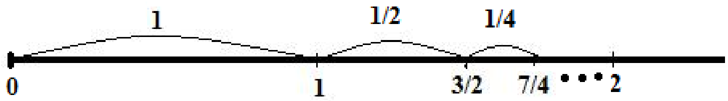

Рис.3

26. *Обобщенный гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots$$

сходится при $\alpha > 1$ *и расходится, если* $\alpha \leq 1$.

У всех сходящихся рядов общий член стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. (необходимый признак сходимости ряда).

Ряд (20) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из абсолютных величин:

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| + \ldots$$

Известно, что абсолютно сходящийся ряд является сходящимся (обратное не всегда верно). Свойства абсолютно сходящихся рядов наиболее близки к свойствам конечных сумм.

СТЕПЕННОЙ РЯД

Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n + \ldots \tag{21}$$

задается своими коэффициентами $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$. Он может сходиться при одних значениях x и расходиться при других. Множество тех значений x, при которых ряд сходится, называется областью сходимости степенного ряда. Известно ([1], гл. XVI), что область сходимости ряда (21) представляет собой круг с центром в нуле на комплексной плоскости. Радиус этого круга R называется радиусом сходимости степенного ряда. Радиус сходимости ряда (21) можно выразить через его коэффициенты по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (22)$$

Известно, что внутри круга сходимости степенной ряд является даже абсолютно сходящимся. Если $R=0$, то ряд не сходится нигде, кроме точки $x=0$.

ПРИМЕРЫ:

27. *Для ряда (19):*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

получаем, что $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ *и* $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$. *Значит, область сходимости этого ряда – единичный круг с центром в нуле, т.е. все значения* x*, для которых* $|x|<1$.

28. *Найти область сходимости ряда (16)*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

Напомним определение числа $n!$ *(*n *- факториал), где* n *- натуральное число:* $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots n$*, т.е. это произведение всех целых чисел от 1 до* n *(0! = 1 по определению). Так 5! = 1·2·3·4·5=120, а* $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$.

Для нашего ряда $a_n=\frac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$

$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$ *- ряд сходится при любых* x.

29. *Найти радиус сходимости ряда (17)*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

В этом случае формулу (22) непосредственно применить нельзя, так как все нечетные коэффициенты равны нулю. Сделаем подстановку $y=x^2$*, и к получившемуся степенному ряду*

$1-\frac{y}{2!}+\frac{y^2}{4!}-\frac{y^3}{6!}+\ldots$ *применяем формулу (22):* $a_n=\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ *и*

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}(2n+1)(2n+2)=\infty.$$

Таким образом, ряд сходится при любых y*, так что исходный ряд сходится при любых* x*, а его радиус сходимости бесконечен.*

Можно доказать, что и ряд (18) сходится при всех x

30. Ряд по степеням разности $x-2$*:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n=1-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+\ldots$$

имеет центр сходимости не в нуле, а в точке $x_0=2$.

Вообще, центр круга сходимости для ряда по степеням $(x-x_0)$:

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots \qquad (23)$$

находится в точке x_0, и круг сходимости задается неравенством

$$|x-x_0|<R.$$

Коэффициенты нашего ряда по абсолютной величине равны единице, поэтому его радиус сходимости равен единице:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1,$$

и, следовательно, если $|x-2|<1$, то ряд будет сходиться.

Если сумма $S(x)$ степенного ряда (23) известна, то радиус сходимости ряда можно определить как расстояние от точки $x=x_0$ до ближайшей точки, где функция $y=S(x)$ не определена.

ПРИМЕР

31. *По формуле для суммы геометрической прогрессии находим сумму ряда (см. пр. 35)*

$1-x^2+x^4-x^6+\ldots=\dfrac{1}{1+x^2}$

Функция $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ *не определена при* $1+x^2=0$*, т.е. в точках* $x=i$ *и* $x=-i$*. Их расстояния до начала координат равны* $|\pm i|=1$*, так что радиус сходимости ряда равен* $R=1$*, и область сходимости задается неравенством* $|x|<1$.

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В РЯД ТЕЙЛОРА

Чтобы разложить функцию $y=f(x)$ в степенной ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots \tag{24}$$

нужно найти значения чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ – коэффициентов ряда. Они находятся по формуле Тейлора

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0), \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{25}$$

В частности, нулевой коэффициент $a_0=f(0)$ – значение функции $f(x)$ в нуле, $a_1=f'(0)$ – значение первой производной от функции при $x=0$, и т.д.

ПРИМЕР

32. *Чтобы получить ряд (19) для функции* $\ln(1+x)$*, заполним таблицу 3*

Таблица 3.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	a_n
0	$\ln(1+x)$	*0*	*0*
1	$(1+x)^{-1}$	*1*	*1*
2	$-(1+x)^{-2}$	*-1*	$-\dfrac{1}{2}$
3	$2(1+x)^{-3}$	*2*	$\dfrac{2}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{3}$
4	$-2\cdot 3(1+x)^{-4}$	*-2·3*	$-\dfrac{2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=-\dfrac{1}{4}$

Самое важное здесь – правильно заполнить второй столбец, содержащий функцию $y = f(x)$ и ее последовательные производные. Производных надо взять столько, чтобы выявилась закономерность в последовательности коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Формулы (24) и (25) имеют смысл только для значений переменной x, лежащих в круге сходимости ряда, т.е. достаточно близких к нулю.
Чтобы разложить функцию $y = f(x)$ в степенной ряд, сходящийся при x, близких к какой-либо точке x_0, используются ряды по степеням разности $x - x_0$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots \tag{26}$$

Коэффициенты ряда – числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$ в этом случае также определяются по формуле Тейлора

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{27}$$

Получающийся ряд

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

называется рядом Тейлора.
Если $x_0 = 0$, то получается рассмотренный выше ряд Маклорена

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots \tag{28}$$

ПРИМЕР
33. *Разложить функцию $y = \ln x$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 1$.*

Составим таблицу 4 для вычисления коэффициентов ряда Тейлора:

Таблица 4.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	a_n
0	$\ln x$	*0*	*0*
1	x^{-1}	*1*	*1*
2	$-x^{-2}$	*-1*	$-\frac{1}{2}$
3	$1 \cdot 2x^{-3}$	*2!*	$\frac{1}{3}$
4	$-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}$	*-3!*	$-\frac{1}{4}$

Получаем разложение в ряд Тейлора:

$$\ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 + \ldots$$

Чтобы найти радиус сходимости этого ряда, найдем расстояние от центра сходимости ряда $x_0 = 1$ до точки разрыва функции $y = \ln x$ при $x = 0$: $R = |1 - 0| = 1$. Значит, этот ряд сходится при $|x - 1| < 1$. Радиус сходимости можно найти и по формуле (22).

ДЕЙСТВИЯ С РЯДАМИ

С абсолютно сходящимися степенными рядами можно работать так же, как и с многочленами. Их можно складывать, умножать, делить, находить от них производные и первообразные. Приведем несколько характерных примеров.

ПРИМЕРЫ:

34. Ряд (19) сходится при $|x|<1$*. Приравнивая производные от левых и правых частей формулы (19), получим*

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$$

Это разложение также справедливо при $|x|<1$*. Для проверки можно подставить вместо* x *переменную* $y=-x$*. В результате получится знакомое разложение (15).*

35. Чтобы получить разложение в степенной ряд функции $y=\operatorname{arctg}x$ *не обязательно вычислять коэффициенты ряда (25). Вместо этого учтем, что* $(\operatorname{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$*. Разложение*

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots \qquad (29)$$

получается из (15) подстановкой нового аргумента $-x^2$ *вместо переменной* x*. Интегрируя обе части формулы (29), получим*

$$\operatorname{arctg}x=C+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots,$$

где постоянную интегрирования еще нужно определить. Подставляя $x=0$*, получим* $C=0$*. В результате получим разложение*

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$$

справедливое при $|x|<1$*, поскольку ряд (15) сходится только при этом условии (см. Пример 31).*

ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

Разложение функции $y=f(x)$ в степенной ряд дает удобные приближенные формулы для вычисления значений этой функции:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \quad \text{и т.д.}$$

Если для вычисления используется сумма первых n членов ряда, то ошибка приближения при $x_0=0$ не превосходит по абсолютной величине числа $\dfrac{M_n}{n!}|x|^n$, где $M_n=\max\limits_{|y|\le|x|}\left|f^{(n)}(y)\right|$ - максимальное значение n-й производной на отрезке от $-x$ до x. Здесь n обозначается показатель степени первого отброшенного члена ряда

ПРИМЕР:

36. Получить значение числа e *с точностью до одной тысячной.*

Воспользуемся разложением (16) для функции $y=e^x$*. В этом случае* $y^{(n)}=e^x$*. Наибольшее значение на отрезке* $[-1,1]$*, равное* e*, эта функция принимает при* $x=1$*. Поскольку* $e<3$*, можем считать для простоты вычислений, что* $M_n=3$*. Взяв* $n=6$*, то есть, учитывая 6 членов ряда, для ошибки приближения получим*

$$\frac{M_7}{7!}1^7=\frac{3}{5040}<0.001,$$

Так что можно отбросить все слагаемые ряда (16), содержащие седьмую и более высокую степени переменной x*. Тогда при* $x=1$*, получаем*

$$e = e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2.718\,,$$

причем все три знака после запятой верные.

В том случае, когда ряд знакочередующийся, ошибка вычислений находится проще – она не превосходит абсолютной величины первого отброшенного члена ряда.

ПРИМЕР.

37. Вычислить приближенно $\int_0^{0.3} \frac{\sin x}{x} dx$*, используя два члена разложения в ряд подынтегральной функции, и оценить погрешность вычислений.*

Поскольку пределы интегрирования содержат точку $x = 0$*, воспользуемся разложением* $\sin x$ *в ряд с центром в точке 0 (ряд Маклорена):*

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$$

$$\int_0^{0.3} \frac{\sin x}{x} dx \approx \int_0^{0.3} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \right) dx = \left(x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} \right)_0^{0.3} = 0.3 - \frac{0.027}{18} + \frac{0.3^5}{600}$$

Учитывая при вычислениях только два члена ряда, получим для значения интеграла величину 0.2985. Так как ряд знакочередующийся, погрешность не превосходит модуля первого отброшенного члена: $|\Delta| < \frac{0.3^5}{600} \approx 4 \cdot 10^{-6}$.

38. Многочлен $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 4$ *представить рядом по степеням* $(x+1)$ *и вычислить его значение при* $x = -0.9$*, используя полученное представление.*

Разложим нашу функцию $f(x)$ *в ряд Тейлора в окрестности точки -1. Этот ряд содержит конечное число слагаемых, так как все производные* $f(x)$*, начиная с пятой равны нулю.*

Таблица 5.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(-1)$	$a_n = \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}$
0	$x^4 - 3x^3 + x - 4$	*1+3–1–4= –1*	*–1*
1	$4x^3 - 9x^2 + 1$	*–4–9+1= –12*	*–12*
2	$12x^2 - 18x$	*12+18=30*	$\frac{30}{2!} = 15$
3	$24x - 18$	*–24–18= –42*	$-\frac{42}{3!} = -7$
4	24	*24*	$\frac{24}{4!} = 1$

$$f(x) = -1 - 12(x+1) + 15(x+1)^2 - 7(x+1)^3 + (x+1)^4$$

$$f(-0.9) = -1 - 12(-0.9+1) + 15(-0.9+1)^2 - 7(-0.9+1)^3 + (-0.9+1)^4 = -2.0569$$

Рядами можно пользоваться и для нахождения пределов.

ПРИМЕРЫ

39. *Найти* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

По формуле (17) имеем $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left[1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)\right]=\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\dots$. *Предел этого выражения при* $x\to 0$*, очевидно, равен* $1/2$.

40. *Найти предел* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)+\ln(1-x^2)}{x^4}$.

Воспользуемся разложением в ряд функций $\sin x$ *и* $\ln(1+x)$*. Тогда*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-\frac{(x^2)^3}{3!}+\dots\right)+\left(-x^2-\frac{(-x^2)^2}{2}+\frac{(-x^2)^3}{3}-\dots\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{2}--\frac{x^6}{2}}{x^4}=-\frac{1}{2}$$

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ.

Если интегрирование дифференциального уравнения в элементарных функциях затруднительно, можно искать решение задачи Коши в виде ряда Тейлора

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x-x_0\right)^n,$$

где $y^{(n)}(x_0)$ последовательно находятся из начальных условий и дифференцирования исходного уравнения.

ПРИМЕРЫ

41. Найти с помощью степенного ряда решение задачи Коши (вычислить первые пять членов ряда) для уравнения

$$y'=x^2-y^2,\qquad y(0)=1.$$

Так как начальные условия заданы в точке $x=0$*, ищем решение в виде ряда Маклорена*

$$y(x)=y(0)+y'(0)\cdot x+\frac{y''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\dots$$

Таблица 6.

n	$y^{(n)}(x)$	$y^{(n)}(0)$	$a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$
0	y	*1 – из нач. условий*	*–1*
1	$y'=x^2-y^2$	*0–1= –1*	*–1*
2	$y''=2x-2y\cdot y'$	*0–2·1·(–1)=2*	$\frac{2}{2!}=1$
3	$y'''=2-2(y')^2-2y\cdot y''$	*2–2–2·1·2= –4*	$-\frac{4}{3!}=-\frac{2}{3}$
4	$y^{(IV)}=-4y'\cdot y''-2y'\cdot y''-2y\cdot y'''=$ $=-6y'\cdot y''-2y\cdot y'''$	*–6·(–1)·2–2·1·(–4) = 20*	$\frac{20}{4!}=\frac{5}{6}$

Получаем ряд $y=1-x+x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{6}x^4-\dots$*, где* y *– искомая функция.*

Замечание. При вычислении производных использовались известные формулы производной произведения $(u\cdot v)'=u'v+u\cdot v'$, производной сложной функции $(f(y(x)))'=f_y'\cdot y_x'$ и другие.

42. *Найти первые четыре разложения в степенной ряд решения задачи Коши*

$$y''-xy=0,\quad y(0)=-1,\quad y'(0)=2.$$

Разрешим уравнение относительно старшей производной: $y''=xy$. *Найдем коэффициенты ряда Маклорена*

Таблица 7.

n	$y^{(n)}(x)$	$y^{(n)}(0)$	$a_n=\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$
0	y	*–1 – из нач. условий*	*–1*
1	y'	*2 – из нач. условий*	*2*
2	$y''=xy$ *– из уравнения*	*0*	*0*
3	$y'''=y+xy'$	*–1+0·2= –1*	$-\dfrac{1}{3!}=-\dfrac{1}{6}$
4	$y^{(IV)}=y'+y'+x\cdot y''==2y'+x\cdot y''$	*2·2 = 4*	$\dfrac{4}{4!}=\dfrac{1}{6}$

Окончательно получаем $y=-1+2x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{6}x^4+\dots$

РЯДЫ ФУРЬЕ

РЯД ФУРЬЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Число T называется периодом функции $y=f(x)$, если сдвиг аргумента на T не меняет значения функции

$$f(x+T)=f(x)$$

при любых x. Функция называется периодической, если у нее существует отличный от нуля период T. В этом случае кратные числа $2T, 3T,\dots$ также являются периодами функции.

Например, $T=2\pi$ является периодом следующих функций

$y=1,\quad y=\cos x,\quad y=\sin x,\quad y=\cos 2x,\quad y=\sin 2x,\quad y=\cos 3x,\quad y=\sin 3x,\dots$

Умножим каждую из этих функций на произвольный числовой коэффициент и составим ряд

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,. \qquad (30)$$

Если ряд (30) сходится, обозначим через $S(x)$ его сумму. Так как при сдвиге аргумента на $T=2\pi$ ни одно слагаемое в (30) не меняется, сумма также не будет меняться: $S(x+2\pi)=S(x)$ и $S(x)$ – периодическая функция с периодом $T=2\pi$.

Замечательный математический факт состоит в том, что практически все периодические функции, встречающиеся в приложениях, могут быть представлены подобными рядами. Это означает, что каждый периодический сигнал можно получить, как сумму простых гармонических колебаний с подходящими амплитудами.

Пусть $y=f(x)$ – периодическая функция с периодом $T=2l$. Рядом Фурье этой функции называется тригонометрический ряд

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \qquad (31)$$

коэффициенты которого определяются по функции $y=f(x)$ при помощи формул Фурье:

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(x)\,dx\,,\qquad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx\,,\qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx$$

Если для функции $y = f(x)$ выполняются условия Дирихле (см. [1], гл. XVII), то ряд (31) сходится. Его сумма $S(x)$ совпадает с $f(x)$ во всех точках непрерывности функции $y = f(x)$. Если же в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет разрыв первого рода, то

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Таким образом, $S(x_0)$ является средним арифметическим левого и правого предела функции $y = f(x)$ в точке x_0.

ПРИМЕРЫ:

43. *Пусть* $f(x) = 0$ *на отрезке* $]-\pi, 0]$ *и* $f(x) = x$ *на отрезке* $]0, \pi]$ *и* $f(x)$ *имеет период* $T = 2\pi$ *(см. рис. 4)*

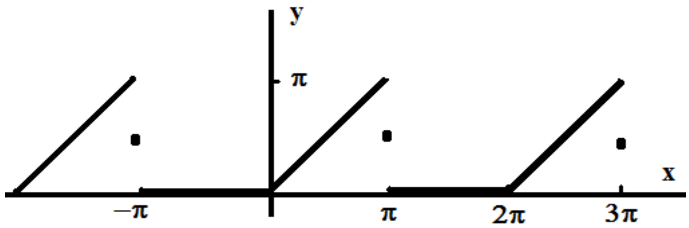

Рис. 4

Условия Дирихле для этой функции выполняются, и поэтому ряд Фурье сходится, и его сумма совпадает со значением функции $f(x)$ *в точках непрерывности. А в точках разрыва* $x = (2k+1)\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *получаем. В этих точках сумма ряда отличается от функции. Значения функции* $S(x)$ *в точках разрыва отмечены кружками на рис.4.*

Найдем коэффициенты ряда Фурье. В формулах Фурье $T = 2\pi, \quad l = \pi$ *.*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi\sin n\pi}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}\right) = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

При вычислениях учтено, что $\sin n\pi = 0, \cos n\pi = (-1)^n$.

Итак, ряд Фурье функции имеет вид

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$$

44. *Найдем ряд Фурье функции*

$$y = f(x) = \begin{cases} -1, \text{ если } & x \in]-1+2k, 2k] \\ 1, \text{ если } & x \in]2k, 1+2k], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

График функции показан на рис. 5. Сумма S в точках $x = k$ равна 0.

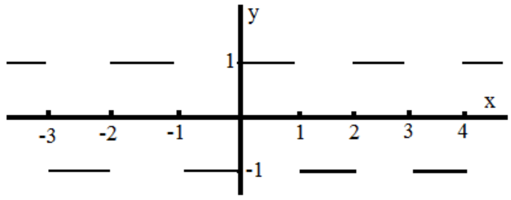

Рис. 5

Поскольку функция нечетная (график симметричен относительно начала координат), то ряд Фурье содержит только нечетные функции, то есть, только члены пропорциональные синусам, а все коэффициенты при косинусах равны нулю: $a_n = 0, n = 0,1,2,\ldots$.

При вычислении b_n *воспользуемся четностью подынтегральной функции и будем вычислять интеграл не по интервалу* $]l, l]$, *а по интервалу* $[0, l]$.

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

Для нашей функции $T = 2l = 2$, *т.е.*

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 \sin\pi n x\,dx = -2\frac{\cos\pi n x}{n\pi}\Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right).$$

Итак, ряд Фурье равен

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin\pi n x = \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \ldots$$

***45.** Найти ряд Фурье функции с периодом* 2π :

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, \text{если} \quad x \in]-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k], k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 0 \text{ в остальных точках} \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис 6.

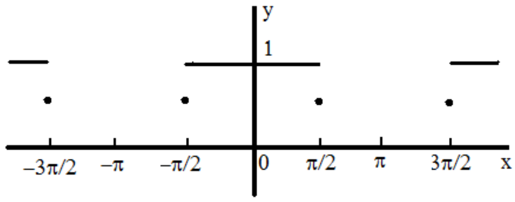

Рис. 6

Поскольку функция четная (график функции симметричен относительно оси y , *то ряд Фурье содержит только косинусы и постоянное слагаемое. Коэффициенты при синусах обращаются в ноль:*

$b_n = 0, n = 0,1,2,\ldots$. *Найдем коэффициенты* a_n :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,dx = \frac{1}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\cdot\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{-\pi n/2}^{\pi n/2} = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Легко видеть, что $a_1 = \dfrac{2}{\pi}$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\dfrac{2}{3\pi}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \dfrac{2}{5\pi}$ *и т.д. Ряд Фурье равен*

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\cos nx=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\frac{1}{7}\cos 7x+\ldots\right).$$

РЯД ФУРЬЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СИНУСАМ И ПО КОСИНУСАМ

Вычисляя коэффициенты Фурье для периодической функции $y = f(x)$ можно проводить интегрирование по любому промежутку $[x_0, x_0+T]$, длина которого совпадает с периодом функции:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \qquad (32)$$

Численные значения коэффициентов Фурье не зависят от выбора x_0.

Формулы (32) можно применять не только к периодической функции, но и к любой функции, заданной на отрезке $[x_0, x_0+T]$. Если условия Дирихле на отрезке выполняются, то ряд Фурье сходится. Важно помнить, что сумма $S(x)$ совпадает с исходной функцией $y = f(x)$ только на основном промежутке.

ПРИМЕР

46. Разложим функцию $y = x^2$ в ряд Фурье на промежутке $-1 < x \le 1$.

Здесь $x_0=-1$, $T=2, l=T/2=1$. Так как $y=x^2$ – четная функция, то $b_n=0$, а для a_n получим:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1}x^2\cos(\pi nx)dx=2\int_0^1 x^2\cos(\pi nx)dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x^2d(\sin n\pi x)=\frac{2}{n\pi}x^2\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x dx=$$

$$=\frac{4}{(n\pi)^2}\int_0^1 xd(\cos n\pi x)=\frac{4}{(n\pi)^2}x\cos n\pi x\Big|_0^1-\frac{4}{(n\pi)^2}\int_0^1\cos n\pi x dx=\frac{4}{(n\pi)^2}(-1)^n.$$

Получаем ряд Фурье: $S(x)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos n\pi x=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}(\cos\pi x-\frac{1}{4}\cos 2\pi x+\frac{1}{9}\cos 3\pi x-\ldots).$

Графики функций $y=x^2$ и $y = S(x)$ показаны на рис. 7

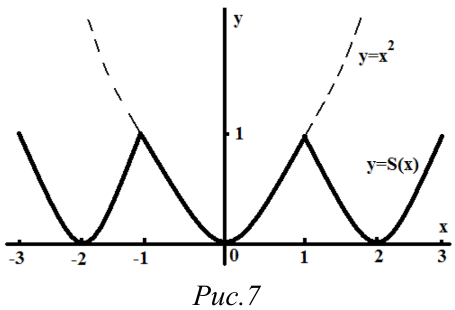

Рис.7

Найдем значение суммы ряда $S(x)$ при $x=-16.1$ и $x=0.5$. Так как период $S(x)$ равен 2,то

$$S(-16.1)=S(-16.1+2\cdot 8)=S(-0.1)=f(0.1)=(-0.1)^2=0.01,\quad S(0.5)=f(0.5)=0.5^2=0.25.$$

Функцию $f(x)$, заданную на промежутке $[0,l]$, можно разложить в тригонометрический ряд, как только по косинусам, так и только по синусам. Чтобы получить ряд по косинусам, функцию $f(x)$ продолжают на симметричный промежуток $[-l,0]$ так, чтобы получилась четная функция:

$f(-x) = f(x)$. В этом случае коэффициенты при косинусах и постоянное слагаемое определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,\ n = 1,2,\dots .$$

Для получения ряда только по синусам, следует продолжить функцию $y = f(x)$ до нечетной на промежутке $[-l, l$: $f(-x) = -f(x)$. Коэффициенты при синусах можно найти по формулам

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1,2,\dots$$

ПРИМЕР

47. Разложить функцию $y = x^2$ *на промежутке* $[0,1]$ *в ряд по синусам.*

Продолжим функцию на интервал $]-1,0[$ *нечетным образом. Коэффициенты Фурье равны*

$$b_n = 2\int_0^1 x^2 \sin n\pi x\,dx = 2\left(-\frac{x^2\cos n\pi x}{n\pi}\Bigg|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx \right) = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}x\sin n\pi x\Bigg|_0^1 -$$

$$-\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{4}{(n\pi)^3}\cos n\pi x\Bigg|_0^1 = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{4}{(n\pi)^3}\left[(1)^n - 1\right] .$$

Ряд Фурье будет таким:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{(n\pi)^3} \right)\sin n\pi x .$$

Графики функций $y = x^2$ *и* $y = S(x)$ *показаны на рис.8.*

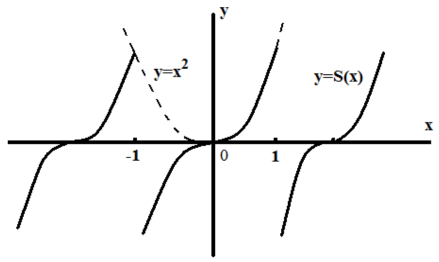

Рис. 8

Найдем значение суммы ряда при $x = -16.1,\ x = 0.5,\ x = 11$.

$S(-16.1) = S(-0.1) = -f(0.1) = -0.1^2 = -0.01$; $S(0.5) = f(0.5) = 0.5^2 = 0.25$; $S(11) = S(1) = 0$.

АМПЛИТУДНО-ФАЗОВАЯ ФОРМА ЗАПИСИ РЯДА ФУРЬЕ

Пусть $y = f(x)$ - периодическая функция с периодом $T = 2l$. Обозначим через $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}$ угловую частоту колебаний. Ряд Фурье функции $y = f(x)$ может содержать только гармонические колебания $a_n \cos n\omega x$ и $b_n \sin n\omega x$, с частотами $n\omega$, кратными ω. Частота ω называется основной частотой.

Сумму двух гармоник $a_n \cos n\omega x$ и $b_n \sin n\omega x$, имеющих общую частоту $n\omega$, можно записать в виде одного гармонического колебания, но сдвинутого по фазе:

$$a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x = A_n \cos(n\omega x - \varphi_n).$$

Коэффициенты a_n, b_n выражаются через амплитуду A_n и фазу φ_n по формулам

$$a_n = A_n \cos\varphi_n, \quad b_n + A_n \sin\varphi_n .$$

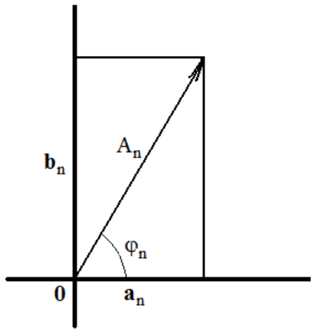

Рис. 9

Величина $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ равна длине вектора с координатами (a_n, b_n), а число φ_n – полярному углу этого вектора (рис.9).

Таким образом, ряд Фурье всегда можно записать в амплитудно-фазовой форме:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega x - \varphi_n),$$

$$A_0 = a_0, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \ \operatorname{tg}\varphi_n = \frac{B_n}{A_n}. \tag{33}$$

ПРИМЕР

48. Записать в амплитудно-фазовой форме ряд

$$\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{6}\cos 6x - \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{8}\cos 8x + \ldots$$

По формулам (33) находим:

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), -\cos 2x = \cos(2x - \pi), -\sin 3x = \cos\left(3x - \frac{3\pi}{2}\right), \cos 4x = \cos(4x - 2\pi) \text{ и т.д.}$$

Ряд теперь можно записать так

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left(nx - \frac{\pi n}{2}\right)$$

Для наглядности числа $A_0, A_1, \ldots$ (спектр амплитуд) изобразим с помощью амплитудной диаграммы:

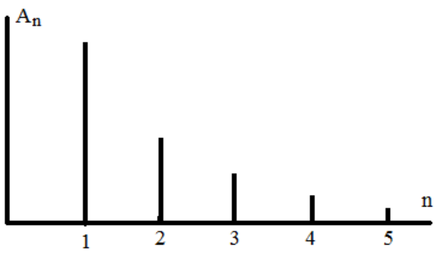

Рис. 10

Числа $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ изобразим на фазовой диаграмме:

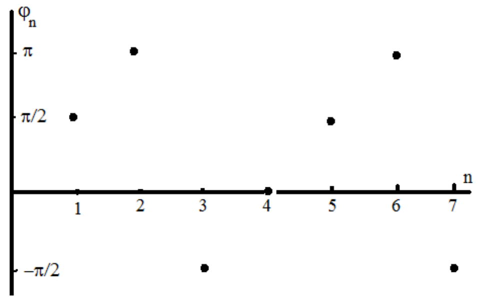

Рис. 11

Подчеркнем, что амплитуды A_n, при $n \geq 1$ *всегда неотрицательны. Положительность знака амплитуд обеспечивается за счет выбора фаз* φ_n.

Если ряд содержит только косинусы, то $A_n = |a_n|$*; если только синусы, то* $A_n = |b_n|$.

49. Для ряда из примера 46 изобразить спектр амплитуд при помощи диаграммы.

$$S(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi x + \frac{1}{\pi^2}\cos 2\pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x + \frac{1}{4\pi^2}\cos 4\pi x - \ldots;$$

$$A_n = |a_n| \Rightarrow A_0 = \frac{1}{3},\ A_1 = \frac{4}{\pi^2},\ A_2 = \frac{1}{\pi^2},\ A_3 = \frac{4}{9\pi^2}, \ldots$$

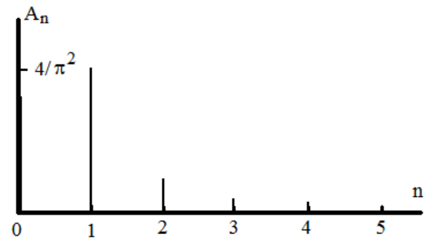

Рис. 12

50. Для ряда из примера 45 изобразить спектр амплитуд при помощи диаграммы.

$$S(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{3\pi}\cos 3x + \frac{2}{5\pi}\cos 5x - \frac{2}{7\pi}\cos 7x + \ldots$$

$$A_0 = \frac{1}{2},\ A_1 = \frac{2}{\pi},\ A_2 = 0,\ A_3 = \frac{2}{3\pi},\ A_4 = 0,\ A_5 = \frac{2}{5\pi},\ A_6 = 0, \ldots$$

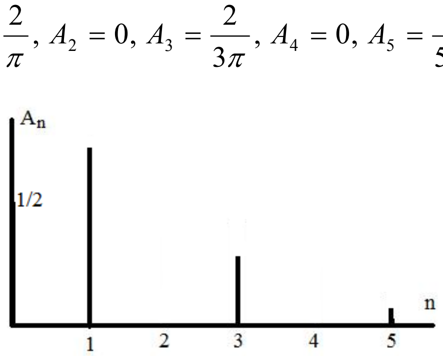

Рис. 13

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Общее решение ДУ имеет вид $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$.
2. Сколько начальных условий надо задать для уравнения $y''' + 3y'' - y = e^{5x}$, чтобы задача Коши имела единственное решение?
3. При каком α система функций $y_1 = e^{2x}, y_2 = 3e^{\alpha x}$ будет линейно зависимой?
4. Вынужденные колебания описываются уравнением $y'' + 16y = \sin \alpha t$. При каком α имеет место резонанс?
5. Укажите номер ДУ, для которого функция $y = t^3 - 3$ является решением:
   1. $y'' + ty - y = 3t$
   2. $y'' + ty' - 2y = 8$
   3. $y'' - 2ty + y = 0$.
6. Чему равна сумма ряда $\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \frac{1}{5!} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^7 \frac{1}{7!} + \ldots$?
7. Для функции f известно, что $f(1) = 2,\ f'(1) = -1,\ f''(1) = 4,\ f'''(1) = 3$. Напишите первые четыре члена разложения в ряд Тейлора в точке 1 для функции f.
8. Функция $f(x)$ разложена в ряд Маклорена $f(x) = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{6} + \ldots$. Чему равна $f'''(0)$? Чему равна $f'(0)$?
9. Частичная сумма ряда $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ равна $S_n = \frac{3n}{2n+1}$. Найти сумму ряда S и третий член ряда x_3. Сходится ли ряд?
10. Получить разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.
11. Показать, что функция $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ является решением дифференциального уравнения $xy' = y(x+1)$.
12. Функция $f(x) = |x|$ при $x \in [-1, 1[$ разложена в ряд Фурье. Чему равен коэффициент ряда b_7 ?
13. Функция $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 0 \\ -1, & 0 < x < 1 \end{cases}$. Чему равна сумма ряда в точке $x = 0, \quad S(0)$?
14. Ряд Фурье для функции, период которой равен 4, имеет вид $\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}\cos \pi x - \frac{1}{8}\sin \pi x + \ldots$. Чему равна амплитуда первой гармоники?

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. $y = e^{-2x} + 2e^x$. 2. Три начальных условия. 3. $\alpha = 2$. 4. $\alpha = 4$. 5. 2. 6. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

7. $f(x)=2-(x-1)+\frac{4}{2!}(x-1)^2+\frac{3}{3!}(x-1)^3+\ldots$.. 8. $\frac{f'''(0)}{3!}=-1,\ f'''(0)=-6;\ f'(0)=-1$.

9. Ряд сходится $S=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1}=\frac{3}{2};\ x_3=S_3-S_2=\frac{3}{35}$. 10. $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$

.

11. $y=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\ldots;\ y'=1+2x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{4}{3!}x^3+\ldots$. 12. Так как $f(x)$ - четная функция, то $b_n=0$. 13. 0. 14. $A_1=\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

В задачах 1 – 10 найти общее решение для ДУ с разделяющимися переменными:

1. $(1-t)\,dy - y\,dt = 0$.
2. $dt - \sqrt{1-t^2}\,dy = 0$.
3. $t\sqrt{1-y^2}\,dt + y\sqrt{1-t^2}\,dy = 0$.
4. $y' = y\cos t$.
5. $y' = t\sqrt{1+y^2}$.
6. $y' = e^y/(t+4)$.
7. $y' = (t^2-t)(y^2+1)$.
8. $y' = e^{t+y}$.
9. $t\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{9+t^2} = 0$.
10. $\left(e^t+3\right)dy + ye^t\,dt = 0$.

В задачах 11 – 20 решить задачу Коши для линейного уравнения:

11. $y' + y\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t, \quad y(0) = 0$.
12. $y' + y\,\mathrm{tg}\,t = \cos^2 t, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.
13. $y' - \frac{y}{t+2} = t^2 + 2t, \quad y(-1) = 3/2$.
14. $y' - \frac{2t-5}{t^2}y = 5, \quad y(2) = 4$.
15. $y' + \frac{y}{t} = \sin t, \quad y(\pi) = 1/\pi$.
16. $y' + \frac{y}{t} = \frac{t+1}{t}e^t, \quad y(1) = e$.
17. $y' + 2\frac{y}{t} = -2t^3, \quad y(1) = \frac{1}{e}$.
18. $y' - 4ty = -4t, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$.
19. $y' - \frac{2y}{t+1} = (t+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}$.
20. $y' - \frac{y}{t} = -\frac{2}{t^2}, \quad y(1) = 1$.

В задачах 21 – 30 найти частное решение линейного однородного ДУ второго порядка:

21. $y'' - 10y' + 25y = 0, \ y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$.
22. $y'' + 2y' + y = 0, \ y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$.
23. $y'' + 4y' + 4y = 0, \ y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$.
24. $y'' - 2y' + y = 0, \ y(0) = 1, \quad y'(0) = -3$.
25. $y'' - 4y' + 4y = 0, \ y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$.
26. $y'' + 6y' + 9y = 0, \ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$.
27. $y'' + 8y' + 16y = 0, \ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.
28. $y'' - 6y' + 9y = 0, \ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$.
29. $y'' - 8y' + 16y = 0, \ y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$
30. $y'' + 10y' + 25y = 0, \ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$.

В задачах 31 – 40 найти общее решение линейного ДУ второго порядка, используя метод подбора:

31. $y'' - 4y' + 13y = 4e^{3t}$.
32. $y'' + 3y' = 3t + 2$.
33. $y'' + 2y' + 2y = 3e^t$.
34. $y'' + 2y' = 2t - 1$.
35. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{2t}$.
36. $y'' - 3y' = t + 5$.
37. $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-t}$.
38. $y'' - 4y' = 2t - 3$.
39. $y'' - 4y' + 13y = -e^{2t}$.
40. $y'' + 2y' + 2y = 4e^{-2t}$.

В задачах 41-50 найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

41. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = y + z \end{cases}.$

42. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 3y - 4z \\ \dfrac{dz}{dt} = y + 3z \end{cases}.$

43. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y - 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = y + 3z \end{cases}.$

44. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 3y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = -4y + 3z \end{cases}.$

45. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 3y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2y + z \end{cases}.$

46. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 2y + 9z \\ \dfrac{dz}{dt} = -y + 2z \end{cases}$

47. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2y + 3z \end{cases}$

48. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 9y + z \end{cases}$

49. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 5y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 5y + 3z \end{cases}$

50. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 3y + 5z \\ \dfrac{dz}{dt} = -y + 5z \end{cases}$

В задачах 51 – 60 для данных рядов найти радиус сходимости и указать область сходимости ряда. Выписать первые три члена ряда:

51. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n x^n}{n!}$; $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n n}{2n}$.

52. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n n!}$; $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n \cdot 2^n}{5^n}$.

53. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$; $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n^2+1}$.

54. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n (n+1)}{n!}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n}{n+5}$.

55. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}\, n!}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n (x-1)^n}{3n+1}$

56. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2 x^n}{n!}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-5)^n 7^n}{n \cdot 3^n}$

57. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^n (n+1)!}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n^2+5}$

58. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n (n+5)}{n!}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-4)^n \sqrt{n}}{3^n}$

59. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)^2 n!}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{2n+1}}$

60. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)!}$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+5)^n \sqrt{n+1}}{6^n}$

В задачах 61 – 70 вычислить приближенно определенный интеграл, используя разложение подынтегральной функции в ряд Маклорена. Ограничившись двумя членами ряда, оценить погрешность вычислений:

61. $\int\limits_0^{0.1} x^{-1} (e^{-x} - 1)\, dx$,

66. $\int\limits_0^{1} \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}\, dx$.

62. $\int_0^{0.5} \cos(x^2)\,dx$,

63. $\int_0^{0.2} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$,

64. $\int_0^{0.3} \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x}\,dx$,

65. $\int_0^{0.1} \frac{1-e^{-2x}}{x}\,dx$,

67. $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4}$.

68. $\int_0^{0.6} e^{-x^2/2}\,dx$.

69. $\int_0^{1} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4}\,dx$.

70. $\int_0^{1} \frac{\mathrm{arctg}(x^5)}{x}\,dx$.

В задачах 71 – 80 найти первые пять ненулевых членов разложения в ряд решения ДУ с заданными начальными условиями:

71. $y'' - 2xy' + 2y^2 = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 2$.

72. $y'' - xy' + y - 1 = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$.

73. $y' = y^2 - x, \quad y(0) = 1$.

74. $y' = x + 2y^2, \quad y(0) = 1$.

75. $y' = 2x + y^2, \quad y(0) = 1$.

76. $y' = x^2 + y^3, \quad y(0) = 1$.

77. $y'' = xy' - y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$.

78. $y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 1$.

79. $y'' = (y')^2 + xy, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2$.

80. $y'' = yy' - x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

В задачах 81 – 90 разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье. Изобразить график суммы ряда $S(x)$ и спектр амплитуд при помощи диаграмм:

81. $f(x) = \begin{cases} -3, & -1 < x \le 0 \\ 6, & 0 < x \le 1 \end{cases}$.

82. $f(x) = \begin{cases} -4, & -\pi/2 < x \le 0 \\ 4, & 0 < x \le \pi/2 \end{cases}$.

83. $f(x) = \begin{cases} -3, & -3 < x \le 0 \\ 5, & 0 < x \le 3 \end{cases}$.

84. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x \le -1 \\ -3, & -1 < x \le 0 \\ 3, & 0 < x \le 1 \\ 0, & 1 < x \le 2 \end{cases}$.

85. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \le -\pi/2 \\ 4, & -\pi/2 < x \le 0 \\ -4, & 0 < x \le \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$.

86. $f(x) = \begin{cases} 5, & -2 < x \le 0 \\ -5, & 0 < x \le 2 \end{cases}$.

87. $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \le 0 \\ -2, & 0 < x \le 1 \end{cases}$.

88. $f(x) = \begin{cases} 7, & -\pi < x \le 0 \\ -3, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

89. $f(x) = \begin{cases} 0, & -4 < x \le -2 \\ 3, & -1 < x \le 0 \\ -3, & 0 < x \le 2 \\ 0, & 2 < x \le 4 \end{cases}$.

90. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \le -\pi/2 \\ 2, & -\pi/2 < x \le 0 \\ -2, & 0 < x \le \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$.

В задачах 91 – 100 разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам, продолжив ее в симметричный интервал. Нарисовать график суммы ряда $S(x)$. Найти значения суммы в указанных точках:

91. $f(x) = x - 1, \quad 0 < x \le 2; \quad S(0.5); \quad S(13)$.
92. $f(x) = 2x + 1, \quad 0 < x \le 1; \quad S(0.5); \quad S(11.2)$
93. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1, \quad 0 < x \le 4; \quad S(1); \quad S(18)$.
94. $f(x) = \frac{2}{3}x - 1, \quad 0 < x \le 3; \quad S(2); \quad S(11)$.
95. $f(x) = 3x - 1, \quad 0 < x \le 1; \quad S(0.5); \quad S(11.1)$.
96. $f(x) = x - 2, \quad 0 < x \le 2; \quad S(1); \quad S(11)$.
97. $f(x) = 2x - 3, \quad 0 < x \le 3; \quad S(1); \quad S(11)$
98. $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2, \quad 0 < x \le 3; \quad S(2); \quad S(11)$.
99. $f(x) = \frac{3}{2}x - 1, \quad 0 < x \le 2; \quad S(1); \quad S(11)$.
100. $f(x) = 1 - x, \quad 0 < x \le 1; \quad S(0.5); \quad S(11.8)$

.