Фарфоровская Ю.Б.

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Введение. Материал этого раздела рассчитан на 5-7 лекций (разброс связан с тем насколько подробно будут прочитываться доказательства).

Заметим, что объективно алгебра логики не всегда легко усваивается Тем не менее этот раздел является очень важным так как формализация логических рассуждений (а именно это является содержанием алгебры логики) позволяет конструировать логические схемы и процессоры для современных компьютеров.

1. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ.

В математической логике обычно рассматривается чисто формальное построение теории. С точки зрения логики теория считается построенной, если в ней определены:

1. Формулы (стержень теории , обычно количество формул в данной теории составляет счетное множество т.е. их можно расположить в бесконечную последовательность.)
2. Правила вывода в рамках данной теории (упрощенно говоря,правила вывода - это действия с формулами ,обычно количество правил вывода - конечное множество)
3. Аксиомы данной теории (конечное число формул объявляются аксиомами).

Рассмотрим все это более подробно.

Построение формул в теории. Для того, чтобы построить формулы, нужно иметь:

а) алфавит (счетное число символов, часто - это латинские буквы (заглавные и строчные , возможно с индексами);

б) связки между формулами и правила их записи. Число связок всегда конечно.

Связки бывают 1-го порядка (связывающие одну формулу), 2-го порядка (связывающие 2 формулы). Теоретически связки могут быть и κ -го порядка, связывающие между собой κ формул, но на практике обычно встречаются связки только 1-го и 2-го порядка;

в) скобки двух видов - правая и левая . Скобки нужны обычно для того, чтобы определить порядок действий в формулах.

Само построение формул производится следующим образом:

1) Объявляются первичные (атомарные) формулы. Часто первичные формулы обозначаются буквами алфавита (иногда с перечислением переменных).

2) Если A - некоторая (уже построенная) формула и S - связка 1-го порядка, то (SA) - тоже формула, если A и B - две построенные формулы и S_2 - связка 2-го порядка, то $(A\ S_2B)$ - тоже формула, и, в общем случае, если A_1, A_2, ..., A_k - k построенных формул и S_k - связка порядка κ, то $(S_k(A_1, A_2, \dots, A_k))$ - тоже формула.

В формальной аксиоматической теории считают что:

Любая формула данной теории либо сама является первичной, либо построена из первичных формул с помощью конечного числа применения правила 2.

Замечание 1. Обычно по соглашению самые внешние скобки в формулах не пишутся. Часто вводятся и иные способы уменьшения числа скобок. Например, если в теории имеется связка “умножение” или “ конъюнкция”, то считается даже без скобок, что она выполняется первой. *Например,* $xy + x$ означает (по всеобщему соглашению): $z = (xy)+x$.

Замечание 2. Заметим, что любая математическая теория имеет некоторые черты формального аксиоматического построения теории. Несмотря на то, что чаще всего математические теории (например, математический анализ) трудно изложить аксиоматически (эта попытка была предпринята группой французских ученых, писавших под псевдонимом Н. Бурбаки и была признана не очень удачной), тем не менее построение формул в математическом анализе полностью соответствует изложенному нами формальному построению. Действительно, в математическом анализе первичные формулы - это буквы латинского алфавита, обозначающие переменные, а также конкретные рациональные или вещественные числа. Связки 1-го порядка - это символы элементарных функций (т.е. символы ln, sin, cos, обратных тригонометрических функций, и т. д., а также производной и интеграла), связки 2-го порядка - это “+” , “-“ , символы умножения, деления). И все формулы математического анализа получаются из первичных с помощью конечного числа применения правила 2.

Замечание 3. На практике мы обычно понимаем *смысл* первичных формул, а также и получаемых сложных формул. Однако с формальной точки зрения это не обязательно.

После того, как построены формулы данной теории, вводится конечное множество отношений между формулами, называемых *правилами вывода,* $R_1, R_2, \dots R_m$. *(Например,* для математического анализа правил вывода очень много(хотя их конечное число) - это правила упрощения формул, действия с логарифмами, тригонометрические формулы, правила дифференцирования и интегрирования и т.д. Далее, вводятся *аксиомы* данной теории, а именно конечное число формул объявляется аксиомами. Тем самым формальная аксиоматическая теория построена.

2. ВЫВОДЫ (СЕКВЕНЦИИ) В ФОРМАЛЬНОЙ ТЕОРИИ.

Определения: 1. Формула A называется непосредственным следствием формул $A_1, A_2, \dots, A_n$, если A может быть получена из этих формул с помощью однократного применения какого-то правила вывода R_1.

2. Выводом (секвенцией) в данной теории из формул Γ формулы A называется последовательность формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ такая, что выполнены следующие условия: A_n совпадает с A, каждая формула A_i является либо аксиомой, либо одной из формул Γ, либо является непосредственным следствием предыдущих формул $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$.

Заметим, что число формул в Γ обязательно конечно.

Вывод формулы A из формул Γ обозначается $\Gamma \vdash A$ (Кратко эта запись читается так: A есть следствие формул Γ) . Если Γ - пустое множество формул, то A есть следствие аксиом. Этот факт записывается так: $\vdash A$. Если из некоторых формул Γ следует любая формула данной теории, то этот факт будем записывать так: $\Gamma \vdash$. В этом случае будем говорить, что формулы Γ противоречивы. Если Γ состоит из формул $B_1, B_2, \dots, B_к$, то вывод A из Γ

можно записать так: $B_1, B_2, \ldots, B_к \vdash A$. Формулы из множества Γ называются *посылками* или *предположениями* а сам вывод (если он верен) иногда называют *теоремой.* Заметим, что слово секвенция означает "последовательность".

Приведем несколько простых свойств понятия вывода. Эти свойства справедливы для любой теории.

1) $A \vdash A$ (Действительно, этот вывод состоит из одной формулы A).

2) "Лишняя формула не мешает", т.е. если $\Gamma \vdash A$ и B - любая формула, то из $\Gamma, B \vdash A$.

Действительно, из определения вывода не следует, что в нем должны быть использованы все формулы из Γ.

3) "Порядок формул в Γ не играет роли". То есть, если из $\Gamma, A, B \vdash C$, то из $\Gamma, B, A \vdash C$ (очевидно).

4). "Удаление выводимой формулы". То есть, если из $\Gamma, A \vdash B$ и из $\Gamma \vdash A$, то из $\Gamma \vdash B$. Действительно, пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ - вывод формулы B из Γ, A. Если в этом выводе встречается формула A, то каждое ее вхождение заменяем последовательностью формул,составляющих вывод A из Γ. Таким образом, получаем вывод B из Γ.

5) Если из формул Γ выводится формула A, а из набора формул Γ_1, A выводится формула B то из набора формул Γ, Γ_1 выводится формула B. В самом деле, запишем вывод формулы B из Γ_1, A. Каждое вхождение A в этот вывод заменим выводом A из Γ. Получим вывод B из Γ, Γ_1. Заметим, что в этом свойстве набор формул Γ или Γ_1 (или оба набора) может быть пустым.

3. ПОСТРОЕНИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (ИВ).

Самой "простой" теорией является исчисление высказываний. Разумеется, любая наука допускает введение разных аксиом. Так сложилось, что исторически здесь наиболее употребительными являются 2 системы аксиом . Одна из этих двух систем называется (исторически) исчислением высказываний, а другая - исчислением секвенций. Но по существу обе эти системы составляют одну теорию.

Мы приведем здесь (как нам кажется) наиболее простую или во всяком случае наиболее короткую аксиоматику. Итак:

1) Введение формул в ИВ.

Первичные формулы - заглавные буквы латинского алфавита (возможно, с индексами).

Две связки : Отрицание $\neg$ - связка 1-го порядка (т.е. связывает одну форму-лу), а именно: если A - формула, то $(\neg A)$ - тоже формула, и $\Rightarrow$ (импликация) - связка 2-го порядка, а именно: если A и B - 2 формулы, то $(A \Rightarrow B)$ - тоже формула.

Все остальные формулы (в сооответствии с общей теорией) получаются из первичных (т.е. из заглавных латинских букв) с помощью применения конечного числа связок отрицания и импликации. В дальнейшем считаем, что отрицание относится непосредственно к наикратчайшей формуле, следующей за этим знаком (т.е. соответствующие скобки мы будем опускать). *Например,* формула $(\neg A \Rightarrow B)$ означает $((\neg A) \Rightarrow B)$. Кроме того, в формулах исчисления высказываний мы будем опускать внешние скобки.

Пример. Выражение $\rceil A \Rightarrow B \Rightarrow C$ не является формулой ИВ, так как непонятен порядок действий, однако выражение $(\rceil A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ является формулой.

*Замечание*1. Мы уже упоминали о том , что для *понимания* теории полезно (но не обязательно знать смысл формул). В теории ИВ смысл первичных формул (т.е. латинских заглавных букв) - состоит в том, что каждая буква заменяет высказывание, которое может быть либо истинным, либо ложным. Смысл же связок тоже должен быть понятен из их названия (отрицание или импликация). *Например,* формула $(\rceil A)$ читается "не A" , а формула $(A \Rightarrow B)$ читается "из A следует B " или, что тоже самое, "B следует из A".

Замечание 2. Хотя для введения формул мы ввели только две связки , но с помощью следующих равенств можно ввести и остальные логические операции: конъюнкцию, дизъюнкцию и эквивалентность, а именно: $AB = A\&B = \rceil(A \Rightarrow \rceil B)$, $A \vee B = (\rceil A \Rightarrow B)$ и $A \sim B = \rceil((B \Rightarrow A) \Rightarrow \rceil(A \Rightarrow B))$. (Разумеется, наличие этих равенств связано с тем, что отрицание и импликация являются базисом во множестве булевых функций и написанные равенства являются выражением конъюнкции, дизъюнкции и эквивалентности через отрицание и импликацию.) Вообще введение в теорию ИВ дополнительных логических функций (а именно, конъюнкции, дизъюнкции и эквивалентности) приводит к некоторым специальным свойствам, которые мы более подробно рассмотрим в п.4. Отметим здесь только что в теории ИС (исчисление секвенций) все 5 логических операций вводятся одновременно.

Правило вывода формул в ИВ имеется только одно: это правило по латыни называется *modus ponens* (сокращенно *m.p.*). Состоит оно в следующем $A, A \Rightarrow B \vdash B$. (Смысл этого правила (хотя при формальной теории не обязательно понимание этого смысла) в том, что если A верно и из A следует B, то B тоже должно быть истинным).

И, наконец, перечислим аксиомы ИВ. Можно обойтись всего тремя аксиомами.

А1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

А2. $((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

А3. $(\rceil B \Rightarrow \rceil A) \Rightarrow ((\rceil B \Rightarrow A) \Rightarrow B$.

Здесь вместо A, B и C можно подставлять любые формулы ИВ.

Замечание. Разумеется, (и мы об этом упоминали ранее) что можно ввести другие системы аксиом, равносильные этим трем. Однако, освоение любой теории (и все студенты должны это знать из собственного опыта) состоит не в том, чтобы выучить аксиомы теории, а в том,чтобы посредством применения простых, сравнительно легко формулируемых *следствий* из этих аксиом освоить решение типовых задач данной теории. При этом сами аксиомы становятся "как бы" ненужными, а все знания теории укладываются в список (чаще всего достаточно небольшой) теорем и свойств формул данной теории. Более того, мы чаще всего забываем как данная теорема или тот или иной факт данной теории выводится из аксиом и более или менее помним только те теоремы или факты теории, которые сравнительно часто используются при решении тех или иных задач. *Например,* все студенты знают теорему Пифагора о том, что в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Но, во-первых, мало кто из студентов может сформулировать 5 постулатов (аксиом) Евклида , из которых следует эта теорема и, во-вторых, почти никто из студентов не может воспроизвести доказательство этой важнейшей теоремы евклидовой геометрии из пяти постулатов Евклида. Поэтому является естественным, что целью следующего раздела является вывод из перечисленных трех аксиом достаточно простых и сравнительно легко запоминающихся правил, позволяющих всем студентам решать достаточно простые задачи теории ИВ, которые в основном состоят в выводе конкретных секвенций $\Gamma \vdash A$.

4. СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ И ТЕОРЕМА ДЕДУКЦИИ

1. $\vdash A \Rightarrow A$. (Это означает, что из приведенных выше трех аксиом следует, что из любой формулы A следует сама A). Построим вывод этой секвенции.

а). Подставим в аксиому A2 вместо формулы B формулу $A \Rightarrow A$, а вместо C - формулу A. Тогда получим формулу $(A\Rightarrow((A\Rightarrow A)\Rightarrow A))\Rightarrow((A\Rightarrow(A\Rightarrow A))\Rightarrow(A\Rightarrow A))$.

б). Подставим в аксиому A1 вместо формулы B формулу $A \Rightarrow A$. Тогда

$$A\Rightarrow((A\Rightarrow A)\Rightarrow A)$$

в). По правилу *т.р.* из *а)* и *б)* непосредственно следует формула

$$(A\Rightarrow(A\Rightarrow A))\Rightarrow(A\Rightarrow A)$$

г). Подставим в аксиому A1 вместо формулы B формулу A, получим

$$A\Rightarrow(A\Rightarrow A)$$

д). Тогда из формул г) и д) по правилу *т.р.* выводится нужная формула

$$A\Rightarrow A.$$

Таким образом, наше утверждение доказано.

2. Если из формул Γ следует формула A и B - любая формула, то имеет место секвенция $\Gamma \vdash B \Rightarrow A$.

Действительно, пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - вывод A из формул Γ, причем A_n совпадает с A. Тогда последовательность формул $A_1, A_2, \ldots, A_n, A\Rightarrow(B\Rightarrow A), B\Rightarrow A$ является выводом формулы $B\Rightarrow A$ из формул Γ.

3. Если верна секвенция: $\Gamma \vdash A\Rightarrow B$, то: $\Gamma, A \vdash B$. Действительно, из правила *т.р.* следует что верно утверждение $A , A \Rightarrow B \vdash B$. Так как лишние формулы не мешают , то $\Gamma , A , A\Rightarrow B \vdash B$. Удаляя из посылок последней секвенции выводимую формулу $A \Rightarrow B$ получим нужное утверждение.

Обратным к предыдущему утверждению является следующая теорема (она выводится несколько сложнее - поэтому и называется теоремой)

4. Теорема дедукции. Если из формул Γ и A выводится формула B, то из формул Γ выводится формула $A\Rightarrow B$ (т. е. если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$).

Доказательство. (мы приводим его из [1]). Пусть $B_1 ,B_2 ,\ldots,B_n$ есть вывод B из Γ и A. Доказательство теоремы проведем методом полной математической индукции по числу n. Пусть $n = 1$. Тогда B совпадает с B_1 . Согласно определению вывода возможны 3 случая: а) B_1 - аксиома; б) B_1 - формула из Γ; в) B_1 совпадает с A. В первых двух случаях $\Gamma\Rightarrow B_1$ (причем B_1 совпадает с B). Тогда, по утверждению 2, для любой формулы (а, значит, и для A) мы получаем, что $\Gamma \vdash A\Rightarrow B$. В третьем случае B совпадает с A. Так как по утверждению 1 мы имеем, что из аксиом следует $A\Rightarrow A$, значит, верна секвенция $\Gamma \vdash A\Rightarrow A$.

Допустим теперь, что если длина вывода формулы B меньше n, то утверждение теоремы верно, и докажем, что тогда теорема верна для длины вывода, равного n. При этом возможны 4 случая: а) B_n - аксиома; б) B_n - формула из Γ; в) B_n совпадает с A; г) B_n получена по правилу *т.р.* из B_i , B_j , где $i<n$, $j<n$. В первых трех случаях доказательство теоремы такое же, как при $n = 1$. В четвертом случае, очевидно, можно считать, что B_j имеет вид $B_i \Rightarrow B_n$. Тогда мы имеем

секвенции $\Gamma, A \vdash B_i$, $\Gamma, A \vdash B_i \Rightarrow B_n$, причем длина этих выводов строго меньше n . Тогда по индукционному предположению получим:

(1) $\Gamma \vdash A \Rightarrow B_i$,

(2) $\Gamma \vdash A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B_n)$.

Кроме того по аксиоме А3 мы имеем:

(3) $\Gamma \vdash (A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B_n)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B_n))$.

Применяя правило *т.р.* к секвенциям (2) и (3), получаем:

(4) $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B_n)$.

После этого, применяя все то же правило *т.р.* к секвенциям (1) и (4) получаем: $\Gamma \vdash A \Rightarrow B_n$. Таким образом, индукция проведена и теорема дедукции доказана.

Замечание. Фактически свойства 3 и 4 означают, что в формулировках логических рассуждений можно менять местами слова “тогда” и “если”. Более точно, пусть некоторое утверждение A (например, в математическом анализе теорема Ролля) следует из трех предположений: (1), (2), (3), т.е имеет место секвенция (1), (2), (3) $\vdash A$. Но ту же теорему можно сформулировать так: пусть выполнены первые 2 предположения. Тогда из третьего предположения следует утверждение теоремы, т.е.: (1), (2)$\vdash$ (3) $\Rightarrow A$. Таким образом, обе формулировки равносильны.

5). Если из формул Γ можно вывести формулу A и формулу $\rceil A$, то из формул Γ можно вывести любую формулу B (т.е.формулы Γ противоречивы). Иными словами, из секвенций $\Gamma \vdash A$, $\Gamma \vdash \rceil A$ следует, что $\Gamma \vdash$.

Доказательство. Пусть B - любая формула. Тогда из двух данных секвенций по свойству 2 следует, что $\Gamma \vdash \rceil B \Rightarrow A$ и $\Gamma \vdash \rceil B \Rightarrow \rceil A$. По аксиоме А3 имеем (заметим, что аксиома следует из любых формул):

$$\Gamma \vdash (\rceil B \Rightarrow \rceil A) \Rightarrow ((\rceil B \Rightarrow A) \Rightarrow B.$$

Тогда , применяя 2 раза свойство 3, получим:

$$\Gamma, \rceil B \Rightarrow \rceil A, \rceil B \Rightarrow A \vdash B.$$

Удаляя выводимые формулы, получим $\Gamma \vdash B$, и утверждение доказано.

Следствие. Пусть A - любая формула. Тогда $A, \rceil A \vdash$ (т. е. из этих двух формул может быть выведена любая формула).

6. (Обоснование доказательства от противного).

а) Если формулы $\Gamma, \rceil A$ противоречивы, (то есть из них следует любая формула), то справедлива секвенция $\Gamma \vdash A$.

Доказательство. Так как из Γ и $\rceil A$ выводима любая формула, то, в частности, выводима и формула A: $\Gamma, \rceil A \vdash A$. Значит, $\Gamma \vdash \rceil A \Rightarrow A$. По свойству 1 из любых формул, в частности из формул Γ выводится $\rceil A \Rightarrow \rceil A$. С другой стороны, по аксиоме 3

$$\Gamma \vdash (\rceil A \Rightarrow \rceil A) \Rightarrow (\rceil A \Rightarrow A) \Rightarrow A).$$

Применяя 2 раза свойство 2, получим: $\Gamma, \rceil A \Rightarrow A, \rceil A \Rightarrow \rceil A \vdash A$.

Удаляя выводимые формулы, получим: $\Gamma \vdash A$.

Свойство 6а) означает, что из набора противоречих формул можно выбрать любую которая имеет вид $\rceil A$ и перенести ее за знак секвенции $\vdash$, “убрав” при этом отрицание. Докажем теперь что из набора противоречивых формул можно перенести любую формулу “добавив” при этом в ее начало знак $\rceil$. То есть

б) Если формулы Γ и A противоречивы , то есть $\Gamma, A \vdash$, то из формул Γ следует формула $\rceil A$ (то есть $\Gamma \vdash \rceil A$) . Заметим, что с точки зрения здравого смысла, мы знаем что утверждения 6а) и 6б) совпадают, однако аксиоматический подход означает, что даже такие “мелочи” должны быть доказаны.

Доказательство 6б) . По следствию к п.5 имеем : $\rceil\rceil A, \rceil A \vdash$. Значит, из п.6а) следует, что из $\rceil\rceil A$ следует A. Формулы Γ и A по условию противоречивы. Тогда (так как лишние формулы не мешают) будут противоречивы 3 формулы:

Γ, A и $\neg\neg A$. Удаляя выводимую формулу A получим, что $\Gamma, \neg\neg A \vdash$. Тогда из п.6а имеем: $\Gamma \vdash \neg A$ (что и требовалось).

Таким образом, свойство 6 означает, что любую из противоречивых формул можно переносить за знак секвенции "добавив" к ней в начало или "отняв" из ее начала знак отрицания.

Перечисленные выше 6 свойств являются главными в теории ИВ и, как нам кажется, достаточно легко запоминаются. При этом знание этих свойств позволяет обойтись уже без аксиом. Мы приведём дополнительные свойства, которые нам понадобятся при доказательстве теоремы о выводимости из аксиом формул ИВ. Выводы этих дополнительных свойств являются также примерами решения секвенций в ИВ.

5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ (ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ СЕКВЕНЦИЙ).

Сначала дадим следующее определение: 2 формулы A и B называются равносильными ($A = B$), если верны секвенции: $\vdash A \Rightarrow B$ и $\vdash B \Rightarrow A$ (или, что то же самое) $A \vdash B$ и $B \vdash A$). В дальнейших свойствах (или при решении индивидуальных заданий) мы предлагаем следующий метод: записываем секвенцию, которую хотим доказать, со знаком вопроса, преобразуем её, используя свойства 1 - 6, тоже со знаком вопроса, пока не придём к очевидной секвенции. Затем "обратным ходом" выводим нашу секвенцию. Покажем, как используется этот метод на примере вывода следующих утверждений.

7. A равносильна $\neg\neg A$ ($A = \neg\neg A$).

а) $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$?

По свойству 3 $\neg\neg A \Rightarrow A$? $\quad \neg\neg A, \neg A \Rightarrow$?

Но по следствию к свойству 5 $\neg\neg A, \neg A \Rightarrow$. Значит, $\neg\neg A \vdash A$ (по свойству 6 или, по теореме дедукции, $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$.

б) $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$?

Очевидно, $A, \neg A \vdash$. Значит, $A \vdash \neg\neg A$, или $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$, т. е. равносильность A и $\neg\neg A$ доказана.

8. $A \Rightarrow B = \neg B \Rightarrow \neg A$.

Доказательство. а) $A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$?

$\neg B,\ A \Rightarrow B \vdash \neg A$?

$\neg B, A \Rightarrow B, A \vdash$?

Так как из формул $A, A \Rightarrow B$ по правилу *m. p.* следует B, то мы уже можем написать верную секвенцию $B, \neg B \vdash$.

Добавим лишние формулы $B, \neg B, A, A \Rightarrow B \vdash$. Удаляем выводимую формулу B, получаем: $\neg B, A, A \Rightarrow B \vdash$, или $\neg B, A \Rightarrow B \vdash \neg A$, или

$$A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A.$$

б) $\neg B \Rightarrow \neg A \vdash A \Rightarrow B$? $\quad A, \neg B \Rightarrow \neg A \vdash B$? $\quad A, \neg B \Rightarrow \neg A, \neg B \vdash$?

Мы видим, что по правилу *m. p.* из $\neg B \Rightarrow \neg A$ и $\neg B$ выводится $\neg A$. Поэтому уже без вопросов $A, \neg A \vdash$. Добавляем лишние формулы $A, \neg A, \neg B \Rightarrow \neg A, \neg B \vdash$, удаляем выводимую ($\neg A$): $A, \neg B \Rightarrow \neg A, \neg B \vdash$. Значит, по свойству 6: $A, \neg B \Rightarrow \neg A \vdash B$. По теореме дедукции

$$\neg B \Rightarrow \neg A \vdash A \Rightarrow B,$$

и равносильность этих формул доказана.

Замечание. Смысл формулы (8) можно рассмотреть на примере необходимого признака сходимости ряда, а именно: если ряд сходится (A), то общий член ряда стремится к нулю (B), т. е. $\vdash A \Rightarrow B$. Значит, и $\neg B \Rightarrow \neg A$, т. е. если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

9. Если A, B - любые формулы, то $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

$$\neg A \vdash A \Rightarrow B \ ?$$

$\neg A,\ A \vdash B$. Последняя секвенция следует из следствия к свойству 5. Далее, по теореме дедукции $\neg A \vdash A \Rightarrow B$, и $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

10. $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$?

По свойству 3 $A,\ \neg A \vdash \neg(A \Rightarrow B)$? или $A,\ \neg B,\ A \Rightarrow B \vdash$? По правилу *т. р.* из A и $A \Rightarrow B$ выводится B. Поэтому $B, \neg B \vdash$ - верная секвенция. Добавим лишние формулы: $A,\ A \Rightarrow B,\ \neg B,\ B \vdash$; удаляем выводимую формулу B: $A, \neg B, A \Rightarrow B \vdash$ или $A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)$ или, применяя в нужном порядке 2 раза теорему дедукции, получим:

$$\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)).$$

И, наконец, последнее нужное нам для дальнейшего утверждение

11. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$?

Это утверждение доказывается несколько сложнее, чем предыдущие, а именно: по свойству 8

$$A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A, \qquad (1)$$

$$\neg A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg\neg A.$$

Так как $\neg\neg A$ равносильно A, то

$$\neg A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow A, \qquad (2)$$

Далее записываем аксиому 3: $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$. Значит, по свойству 3, $\neg B \Rightarrow \neg A,\ \neg B \Rightarrow A \vdash B$. Добавляем лишние формулы:

$$\neg B \Rightarrow \neg A, \neg B \Rightarrow A,\ A \Rightarrow B,\ \neg A \Rightarrow B,$$

удаляем выводимые (именно, по (2) $\neg B \Rightarrow A$ и по (1) $\neg B \Rightarrow \neg A$. Получаем: $A \Rightarrow B,\ \neg A \Rightarrow B \vdash B$. Отсюда получаем утверждение теоремы.

Из утверждения 11 мы получаем очень важное для дальнейшего следствие.

Следствие. Если $\Gamma,\ A \vdash B$ и $\Gamma, \neg A \vdash B$, то B следует из формул Γ, т. е. $\Gamma \vdash B$. Действительно, по теореме дедукции следует, что $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ и $\Gamma \vdash \neg A \Rightarrow B$, а из самого утверждения 11 мы получаем:

$$A \Rightarrow B,\ \neg A \Rightarrow B \vdash B.$$

Добавляя лишние формулы Γ, а затем удаляя выводимые формулы, получим:

$$\Gamma \vdash B.$$

6. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ, НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ И ПОЛНОТА ИВ. НЕЗАВИСИМОСТЬ АКСИОМ.

Мы уже говорили о том, что формальное аксиоматическое построение теории в принципе не требует понимания смысла. В частности, идея о том, что вычислительная машина должна сама (естественно, с использованием программы) делать логические выводы, и привела к развитию дискретной математики. Однако, любая человеческая деятельность начинается с какого-то смысла и должна им заканчиваться. Поэтому важное значение имеет и *понимание* формул. Ясно, что наука ИВ - это чисто логический вывод из одних суждений других. Ранее такая наука называлась схоластикой. То есть, из неких общепризнанных фактов выводятся другие суждения без всяких опытов. Например, если человек идет в кино, то у него должны быть деньги. Если мы принимаем это суждение как верное (а ясно, что какие-то исключения из такого рода утверждений могут быть), то чисто логически отсюда следует что если у него нет денег, то он не может идти в кино. Разумеется, приведенное рассуждение является простым и его легко провести в жизни без всякой дискретной математики. Логически оно записывается секвенцией $A \Rightarrow B \vdash \rceil B \Rightarrow \rceil A$. Однако в других случаях формальный логический вывод без применения правил ИВ бывает очень сложным и применение теории ИВ становится обязательным не только для вычислительной машины, но и для человека. Поэтому (и мы об этом тоже уже говорили), для получения логических выводов суждения , которые могут быть либо истинными, либо ложными (то есть высказывания) мы заменяем латинскими буквами и получаем первичные формулы ИВ (и тем самым отказываемся от смысла этих суждений) и тогда мы можем считать, что эти самые буквы (то есть переменные или первичные формулы) являются числами, которые могут принимать только два значения “0” или “1”.

Так как в формулы ИВ кроме переменных (то есть первичных формул, обозначаемых латинскими буквами) входят связки (отрицание и импликация), то по правилам этих булевых функций любая формула на определенном наборе переменных также принимает значения “0” или “1”.Таким образом, если A - формула в ИВ , $X_1, X_2, ..., X_n$ - набор переменных, входящих в эту формулу и $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ - набор возможных значений этих переменных (то есть набор из нулей и единиц) то будем обозначать через $A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ значений формулы A на данном наборе. Тем самым мы получаем одну из возможных *интерпретаций* теории ИВ , которая переводит схоластические рассуждения на язык чисел (в данном случае нулей и единиц).

Напомним одно из двух возможных обозначание функции “эквивалентность”, а именно X^{ε} означает X при $\varepsilon = 1$, и X^{ε} означает $\rceil X$ при $\varepsilon = 0$. Таким образом, при любом конкретном ε выражение X^{ε} является формулой в ИВ.

Будем называть формулу A *выводимой* , если она выводится из аксиом (то есть $\vdash A$). *Длиной* формулы A будем называть количество в ней связок (то есть символов $\rceil$ и $\Rightarrow$). Например, длина формулы $(\rceil A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ равна трем.

Тогда верна следующая основополагающая теорема в ИВ:

Теорема (о выводимости формул в ИВ). Для того чтобы формула A была выводимой в ИВ необходимо и достаточно, чтобы она была тождественно истинной (то есть на любом наборе переменных принимала значение, равное единице).

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть A - формула в ИВ, $X_1, X_2, ..., X_n$ - полный список ее переменных. Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ - любой набор из нулей и единиц и ε - значание формулы A на этом наборе. Тогда верна следующая секвенция

$$X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, ..., X_n^{\varepsilon_n} \vdash A^{\varepsilon} \tag{1}$$

Доказательство этой леммы проведем индукцией по длине формулы A , которую обозначим κ. При $\kappa = 0$ формула A не содержит символов отрицания и импликации и состоит из одной переменной X. Поэтому в этом случае доказательство леммы сводится к очевидной секвенции $X^{\varepsilon} \vdash X^{\varepsilon}$.

Пусть $\kappa > 0$ и пусть формула (1) верна для всех формул, длина которых строго меньше κ. Докажем тогда, что лемма верна для формулы A.

Случай 1. Предположим, что формула A совпадает с формулой $\rceil B$. Тогда длина B меньше κ, и для B лемма верна. Кроме того, в формулы A и B входят одни и те же переменные. Пусть для набора $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ значение формулы A на этом наборе равно ε, а формулы B равно ε'.

а). Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\varepsilon' = 0$. По индукционному предположению верна секвенция $X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_n^{\varepsilon_n} \vdash B^0$. Так как в нашем случае B^0 совпадает с $\rceil B$ и, значит, с A, то в этом случае лемма верна.

б). Пусть $\varepsilon = 0$, тогда $\varepsilon' = 1$, и по индукционному предположению верна секвенция $X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_n^{\varepsilon_n} \vdash B$. Так как из B выводится $\rceil\rceil B$ (на самом деле обе формулы равносильны) и так как $\rceil\rceil B$ совпадает с A то лемма верна и в этом случае (см. свойство 5 п.2)

Случай 2. Формула A имеет вид $B \Rightarrow C$. Длина формул B и C меньше κ, поэтому для обеих формул лемма верна по индукционному предположению (заметим, что в формулы B или C могут входить меньшее число переменных, но так как лишние формулы не мешают, то лемма будет верна). Пусть для данного набора $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ значения ε, ε', ε'' являются значениями формул A, B и C соответственно. Разберем все возможности, возникающие в этом случае.

а). Пусть $\varepsilon' = 0$, тогда $\varepsilon = 1$. По индуктивному предположению

$$X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_n^{\varepsilon_n} \vdash B^0, \quad \text{т.е.} \quad X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_n^{\varepsilon_n} \vdash \rceil B.$$

Согласно утверждению 9 п.5 имеем: $\vdash \rceil B \Rightarrow (B \Rightarrow C)$. Применяя правило *т. р.*, получаем $X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_n^{\varepsilon_n} \vdash B \Rightarrow C$. Следовательно, $X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_n^{\varepsilon_n} \vdash A^{\varepsilon}$.

б) Пусть теперь $\varepsilon' = 1$, $\varepsilon'' = 0$. Тогда $\varepsilon = 0$, и A^{ε} - это $\rceil(B \Rightarrow C)$. По индуктивному предположению $X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_n^{\varepsilon_n} \vdash B$, $X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_n^{\varepsilon_n} \vdash \rceil C$.

Согласно утверждению 10 п 5 имеем: $\vdash B \Rightarrow (\rceil C \Rightarrow \rceil(B \Rightarrow C))$. В результате двукратного применения правила *т. р.* получаем $X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_n^{\varepsilon_n} \vdash \rceil(B \Rightarrow C)$ т.е. требуемое.

в) Если $\varepsilon' = 1$, $\varepsilon'' = 1$, то $\varepsilon = 1$, то A^{ε} - это $B \Rightarrow C$. По индуктивному предположению $X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_n^{\varepsilon_n} \vdash C$. По схеме аксиом А1 имеем $\vdash C \Rightarrow (B \Rightarrow C)$. Применяя правило *т. р.*, получаем $X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_n^{\varepsilon_n} \vdash B \Rightarrow C$. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

1) Пусть формула A выводима (из аксиом). Докажем что при любых значениях переменных, входящих в нее формула A принимает значение 1 (A - тождественно-истинна). Непосредственно проверяем, что все аксиомы являются тождественно истинными формулами. Так как импликация из истины выводит только истину то по правилу вывода *т.р.* (A, $A \Rightarrow B \vdash B$) получаем что B тоже тождественно-истинна. Так как других правил вывода в ИВ нет, то все выводимые (из аксиом) формулы тождественно истинны.

2). Докажем теперь обратное утверждение, где и будем использовать лемму и следствие к утверждению 11 п.5.

Именно, пусть A тождественно истинная формула и $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - список ее переменных. Тогда при любом наборе $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ значение формулы A на этом наборе $\varepsilon = 1$. Таким образом по лемме имеем:

$$X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_n^{\varepsilon_n} \vdash A . \qquad (2)$$

Возьмем сначала ε_n =1, а затем ε_n=0. Так как в любом случае ε будет равно 1, то из (2) будем иметь две секвенции:

$$X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}, X_n \vdash A ; \quad X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}, \rceil X_n \vdash A$$

Отсюда по следствию к утверждению 11 п.5 получим $X_1^{\varepsilon_1}, X_2^{\varepsilon_2}, \ldots, X_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} \vdash A$. Далее, точно также из секвенции (2) можно "убрать" $X_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$. Продолжая этот процесс, получим : $\vdash A$ (то есть A выводится из аксиом. Теорема доказана.

Далим теперь определение противоречивой и непротиворечивой теории.

Некоторая теория называется противоречивой, если существует формула А в этой теории такая что из аксиом в ней можно вывести как А, так и не А.В противном случае теория называется непротиворечивой.

Теорема (о непротиворечивости ИВ). В теории ИВ невозможно вывести из аксиом одновременно формулы А и $\rceil A$.

После всего сказанного эта теорма стала очевидной, так как если A выводима (из аксиом) , то она тождественно истинна, значит $\rceil A$ не является тождественно истинной ($\rceil A$ на любом наборе переменных равна 0) и, значит, не выводима (из аксиом).

Замечание. Мы доказали, что теория ИВ непротиворечива. Однако это доказательство связано с тем что формулы в ИВ (в возможной интерпретации) принимают лишь два значения 0 и 1. Можно доказать, что и более сложная теория "исчисление предикатов" также непротиворечива (несмотря на то, что в ней переменные могут принимать любые значения-сами формулы могут принимать опять-таки лишь два значения). Сравнительно нетрудно аксиоматически ввести арифметику. Однако в ней формулы уже могут принимать счетное (последовательность) множество значений (то есть по крайне мере все целые числа). Гедель показал, что невозможно доказать противоречивость или непротиворечивость арифметики. После этого про любую науку доказывают или опровергают утверждение: *данная наука непротиворечива, если непротиворечива арифметика.* (В частности, такое утверждение было доказано о несколько спорной науке "теория множеств" , в которой есть некоторые противоречия. Одно из этих противоречий образуется непосредственно после слов "возьмем множество всех множеств").

Следующая теорема также является следствием теоремы о выводимости формул.

Теорема (о равносильности формул в ИВ). Две формулы A и B равносильны в ИВ если и только если они принимают одинаковые значения (на объединенном списке переменных).

а). Пусть сначала $A = B$ (то есть формулы равносильны). Это по определению означает,что (из аксиом) выводимы две формулы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, которые тогда являются тождественно истинными. Но это значит что обе формулы A и B принимают одинаковые значения (так как в противном случае одна из формул $A \Rightarrow B$ или $B \Rightarrow A$ имела бы вид: $1 \Rightarrow 0$, которая принимает значение 0).

б).Пусть формулы A и B принимают одинаковые значения (на объединенном списке переменных). Тогда формулы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ очевидно, являются тождественно истинными и, значит, выводимы из аксиом. Таким образом, они равносильны.

Перейдём теперь к исследованию полноты теории ИВ. Полнота теории рассматривается в широком и узком смысле. Аксиоматическая теория считается полной в широком смысле, если любой факт, истинный из общих соображений, выводим из аксиом в этой теории. Аксиоматическая теория называется полной в узком смысле слова, или просто полной, если при добавлении к её аксиомам любой не выводимой (в этой теории) формулы она становится противоречивой.

Теорема. ИВ - полная теория в узком смысле слова.

Доказательство (от противного). Пусть F - какая-нибудь невыводимая формула. Докажем, что присоединение F к аксиоиам приводит к противоречивой теории.

В ИВ - 3 аксиомы: A_1, A_2, A_3. В новой теории высказываний - 4 аксиомы: A_1, A_2, A_3, F. Выводимость в этой теории будем обозначать $\vdash_{(F)}$ Требуется доказать, что A_1, A_2, A_3, F $\vdash_{(F)}$, то есть (F) - противоречивы.

Пусть x_1, x_2, ..., x_n - список переменных формулы F. Так как F невыводима в ИВ из аксиом, то она принимает значение 0 на каком-то наборе значений переменных (ε_1, ε_2, ..., ε_n), т. е. $F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) = 0$.

Возьмём какую-нибудь новую переменную A. Введём следующие формулы:

$$B_i = \begin{cases} A \Rightarrow A, & \varepsilon_i = \boldsymbol{1} \\ \rceil(A \Rightarrow A), & \varepsilon_i = \boldsymbol{0} \end{cases} \quad . \quad \text{Тогда} \quad F(B_1, B_2, \ldots, B_n) \equiv 0.$$

Пусть теперь C - произвольная формула в ИВ, а $\rceil C$ - её отрицание. Тогда по определению импликации тождественно истинны формулы $F(B_1, B_2,..., B_n) \Rightarrow C$ и $F(B_1, B_2,..., B_n) \Rightarrow \rceil C$. Итак, $\vdash_{(F)} C$ и $\vdash_{(F)} \rceil C$. Это и значит, что теория противоречива, и теорема доказана.

В каждой теории возникает вопрос о независимости аксиом. Более точно, аксиомы данной теории называются независимыми, если ни одна из этих аксиом не может быть выведена из остальных аксиом. Важность этого вопроса видна на примере истории с пятым постулатом (аксиомой) Евклида. Известно, что этот постулат состоит в том, что через данную точку всегда можно провести прямую параллельную данной прямой и притом только одну. Долгое время ученые пытались вывести этот постулат из других аксиом Евклида. В конце концов оказалось что отказ от этого постулата приводит к другим содержательным теориям (а именно геометриям Гаусса и Лобачевского). Попытки же вывести пятый постулат через другие аксиомы были связаны с недостаточным пониманием термина “прямая” .

Для теории ИВ можно доказать, что все т ри аксиомы введенные нами являются независимыми.

7. ВВЕДЕНИЕ В ИВ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ.

.

После того как мы ввели интерпретацию в ИВ, мы можем ввести в эту теорию любые логические (булевы) функции. Это связано с тем (и мы об этом упоминали), что функции отрицания и импликации являются базисом и, значит, через них можно выразить любую булеву функцию и, в частности, конъюнкцию и дизъюнкцию. Именно, мы имеем следующие формулы (которые можно рассматривать как введение дизъюнкции и конъюнкции в ИВ):

$$AB = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} = \rceil(A \Rightarrow \rceil B) \qquad \text{и}$$

$$A \vee B = \rceil A \Rightarrow B.$$

Однако, не всегда удобно пользоваться написпнными выше формулами. Часто, при выводе секвенций можно пользоваться правилами верность которых интуитивно не вызывает сомнений. Разумеется, нижеперечисленные свойства легко доказать и формально, но мы предоставляем это читателю.

1. Секвенция $\Gamma, A, B \vdash C$ равносильна выводу секвенции $\Gamma, AB \vdash C$.

Отсюда следует , что если Γ состоит из формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ то секвенция $\Gamma \vdash C$ равносильна секвенции $A_1 A_2 \dots A_n \vdash C$.

2. Секвенция $\Gamma, A \vee B \vdash C$ равносильна секвенции $\Gamma, \rceil A \Rightarrow B \vdash C$ и каждая из этих двух секвенций равносильна выполнению хотя бы одной из двух секвенций либо $\Gamma, A \vdash$ С , либо $\Gamma, B \vdash C$.

3. Если верна секвенция $\Gamma \vdash A$ то верна и секвенция $\Gamma \vdash A \vee B$.

Непосредственно, из свойства 3 следует следующее свойство

4. Секвенция $\Gamma \vdash A \vee B$ равносильна секвенции $\Gamma, \rceil A \vdash B$ (или, что тоже самое $\Gamma, \rceil B \vdash A$). Действительно, так как формулы $A \vee B$ и $\rceil A \Rightarrow B$ равносильны, то секвенции $\Gamma \vdash A \vee B$ и $\Gamma \vdash \rceil A \Rightarrow B$ тоже равносильны. Тогда , так как последняя секвенция равносильна секвенции $\Gamma, \rceil A \vdash B$, то наше утверждение доказано.

Заметим, что из всего сказанного следует, что при выводе конкретных секвенций можно поступать двумя способами:

1). Пусть требуется установить верна или неверна секвенция $\Gamma \vdash A$. (Заметим, что формула A в принципе может содержать любые булевы функции).Тогда по свойству 1 можно все формулы, входящие в Γ объединить в одну формулу (используя конъюнкцию) . Далее, рассматриваем все наборы переменных , для которых новая формула равна 1, если на всех этих наборах формула A также равна 1, то секвенция верна, в противном случае - нет.

Например, пусть требуется установить верна ли секвенция $A, \rceil B \Rightarrow \rceil A \vdash B$. Тогда эта секвенция равносильна секвенции $A\,(\rceil B \Rightarrow \rceil A) \vdash B$. Далее, мы замечаем что $A\,(\rceil B \Rightarrow \rceil A)$ равно единице только если $A = 1$ и $B = 1$. Значит, наша секвенция верна.

Однако, этот способ во-первых не очень интересен, так как фактически все сводится к булевым функциям, а во-вторых, во многих случаях он приводит к более сложным рассуждениям, чем применение естественных свойств теории ИВ. В частности, в нашем примере гораздо проще было заменить выражение $\rceil B \Rightarrow \rceil A$ на равносильное $B \vee \rceil A$ и тогда секвенция $A, B \vee \rceil A \vdash B$ становится совершенно очевидной.

Примечание:

Перейдем теперь к несколько более сложной теории а именно исчислению предикатов (ИП).

8.ПОСТРОЕНИЕ ФОРМУЛ В ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ.

Дадим сначала точное определение предиката в математической логике.

Определение. Предикатом называется функция нескольких переменных, которая в области задания этих переменных, может принимать лишь два значения 1 или 0 (которые мы как всегда можем рассматривать как истину или ложь).

Если предикат зависит от n переменных, то он называется n-местным.

Заметим, что предикатом также является сама переменная в случае, если она принимает только два значения 1 и 0. В этом случае предикат считается нуль-местным. Фактически нуль-местный предикат - это высказывание.

Область определения предиката называется *интерпретацией.* Естественно, что при задании предиката должна быть указана его интерпретация (которая чаще всего определяется неоднозначно.

Разберем некоторые примеры предикатов. Например предложение “студент Иванов (имеется в виду конкретный студент) имеет дома компьютер “ является высказыванием или нуль-местным предикатом . Это высказывание иожет принять значение 1 или 0 (то есть быть истинным или ложным). Однако предложение - “студент имеет дома компьютер” уже не является высказыванием, а является предикатом (в данном случае одноместным). Область определения (интерпретация) такого предиката являются студенты (либо все, либо данного города, ВУЗа или группы). Фактисеки из любого высказывания легко сделать одноместный предикат . Например, пусть есть высказывание “4 - четное число”. Тогда ему соответствует предикат “число -четное”. Естественно для такого предиката требуется область определения. Такой областью могут быть только числа причем обязательно целые . (Разумеется, мы сами можем ограничивать область определения предиката) например, рассматривать предикат “число четное” на множестве чисел, делящихся на пять или больших (меньших) какого-то числа. Совершенно ясно, что для четных чисел рассматриваемый предикат принимает значение 1 а для нечетных - 0.

Мы будем обозначать предикаты заглавными латинскими буквами, при этом иногда будем перечислять переменные (строчные латинские буквы) в него входящие - иногда нет. Заметим, что если $P(x,y)$ - (двуместный) предикат, то $P(x,x)$ - также предикат (одноместный).

Замечание. Как мы увидим далее в примерах запись некоторых (даже достаточно простых) математических формул в виде формул ИП требует применения достаточно большого числа предикатов и значит введения большого числа обозначений, что затрудняет *понимание* формул ИП. Поэтому, в примерах (см. раздел “Дополнительные задачи”) мы будем (вместо обозначения предиката заглавными латинскими буквами) иногда использовать смысл этого предиката.

Особенность предиката состоит в возможности рассмотрения для них введения *кванторов* существования и всеобщности. Например, если $P(x)$ - некоторый предикат с некоторой интерпретацией M, имеют смысл 2 предложения: $(\forall x)P(x)$ и $(\exists x)P(x)$. Смысл первого предложения: “для любого x (из M) $P(x)$ (”верно”) , смысл второго : “ существует x (из M) такое что $P(x)$ “верно”.

В соответствии с указанным смыслом мы считаем, что высказывание $(\forall x)P(x)$ принимает значение 1, если $P(x)=1$ для всех x из M , высказывание $(\exists x)P(x)$ считается истинным, если хотя бы для одного x из M $P(x)$ истинно.

В данном случае оба предложения являются высказываниями. Переменная x в этих предложениях становится связанной.

Аналогично , выражение $\forall (x_1) P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является $(n - 1)$-местным предикатом и принимает значение 1 для тех значений $x_2, \ldots, x_n$, при которых при всех x_1 значение $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равно единице, а предложение $(\exists x_1)P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ считается истинным для тех и только для тех значений $x_2, \ldots, x_n$ для которых существует хотя бы одно x_1, для которого $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ принимет значение 1. Переменная x_1 становится связанной.

Заметим, что (при отсутствии дополнительных скобок) область действия квантора распространяется только на ближайший к нему предикат, содержащий нужную переменную.

Наличие кванторов во многом определяет специфику теории ИП.

Перейдем к построению формул.

Алфавит : латинские буквы (возможно с индексами)-заглавные для обозначения предикатов, строчные - для обозначения переменных в предикатах.

Само построение формул проведем в соответствии с общей теорией.

1). Первичные (атомарные) формулы - это предикаты. Все переменные объявляются свободными.

Связки 1-го порядка: $\rceil$, а также $\forall$ и $\exists$, связки 2-го порядка это - логические действия : конъюнкция , дизъюнкция , импликация и эквивалентность.

2). Тогда если A - уже построенная формула, то $\rceil A$ - тоже формула (причем все свободные (не связанные кванторами) переменные остаются свободными, все связанные переменные - связанными. Кроме того, если A - формула и x-свободная переменная, входящая в A, то выражения $((\forall x)\ A)$ и $((\exists x)\ A)$ - тоже формулы , причем переменная x становится связанной.

3). Если A и B - две уже построенные формулы, то $(AB) =(A\&B)$ (конъюнкция) , $(A\vee B)$ (дизъюнкция) , $(A \Rightarrow B)$(импликация) и $(A \sim B)$ - тоже формулы, причем все связанные переменные остаются связанными, а свободные-свободными.

Любая формула в ИП получается из первичных с помощью применения конечного числа правил 2 и 3.

Заметим, что в ИП все логические операции обычно вводятся с самого начала.

10. РАВНОСИЛЬНЫЕ , ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ, ВЫПОЛНИМЫЕ ФОРМУЛЫ. СВОЙСТВА КВАНТОРОВ. ПРИВОДЯШИЕ К РАВНОСИЛЬНЫМ ФОРМУЛАМ.

Естественным образом, исходя из определения формул в ИП мы получаем, что любая формула при конкретных значениях переменных в нее входящих (из области интерпретации предикатов) принимает значение либо 1, либо 0.

Определения. Формула в ИП называется выполнимой в данной интерпретации, если существуют такие значения свободных переменных, что эта формула принимает значение 1.

Формула в ИП называется истинной в данной интерпретации, если при всех значениях свободных переменных, взятых из данной интерпретации она принимает значение 1.

Формкла в ИП называется общезначимой, если в любой возможной интерпре-

ции она является истинной.

Приведем два важных примера общезначимых формул.

Предложение1 . Пусть $A(x)$ формала в ИП, в которой x свободная переменная, а y не входит в формулу $A(x)$ (но мы считаем, что x и y берутся из одной и той же интерпретации). Тогда формула

$$(\forall x)\, A(x) \Rightarrow A(y) \qquad (1)$$

общезначима.

Действительно, если формула $(\forall x)\, A(x)$ при каких-то конкретных значениях свободных переменных (в любой возможной интерпретации) принимает значение 0, то формула (1) принимает значение 1 . Если же $(\forall x)\, A(x)$ принимает значение 1, то очевидно и $A(y)$ также принимает значение 1 . Таким образом, формула (1) в любой фозможной интерпретации всегда принимает значение 1, т.е. она общезначима.

Предложение 2. В условиях предыдущего предложения формула

$$A(y) \Rightarrow (\exists\, x)\, A(x) \qquad (2)$$

является общезначимой.

Действительно, если $A(y) = 0$, то формула (2) принимает значение 1. Если же для какого-то значения y (при конкретном наборе других свободных переменных) $A(y) = 1$, то и формула $(\exists\, x)A(x)$ также примет значение 1 и, значит, и формула (2) будет истинной.

Две формулы в ИП называются равносильными в данной интерпретации, если при любых возможных значениях свободных переменных (из данной интерпретации) обе формулы принимают одинаковые значения.

Если *M - интерпреция всех предикатов, входящих в формулы A и B , то равносильность этих формул в M обозначается $A = B \quad (M)$.*

Формулы A и B называются равносильными, если они равносильны в любой возможной интерпретации.

Очевидно, что для формул в ИП сохраняются все равносильности и правила равносильных преобразований, справедливых в ИВ. Некоторые отличия связяны с наличием в ИП кванторов. Перечислим 4 важных свойства кванторов, приводящие к равносильным формулам:

1. *Перенос квантора через отрицание.*

$$\rceil(\forall x)\, A(x) = (\exists\, x)\rceil A(x) \qquad (3)$$

$$\rceil(\exists\, x)\, A(x) = (\forall x)\rceil A(x) \qquad (4)$$

Мы не будем приводить строгого доказательства этих формул, а ограничимся лишь интуитивным пониманием. А именно, ясно что слова: “ не для любого x $A(x)$ верно “ означают , что “существует x , такое что $A(x)$ неверно или “ не существует такого x , что $A(x)$ верно” означают, что для всех x $A(x)$ неверно.

2.*Вынос квантора за скобки.*

Пусть формула A содержит свободную переменную x , а формула B не содержит

x. Тогда имеют место следуюшие 4 формулы:

$$(\exists x)\ (A(x)\ \&B) = (\exists x)\ A(x)\ \&\ B$$

$$(\forall x)\ (A(x)\ \&B) = (\forall x)\ A(x)\ \&\ B$$

$$(\exists x)\ (A(x) \vee B) = (\exists x)\ A(x) \vee B$$

$$(\forall x)\ (A(x) \vee B) = (\forall x)\ A(x) \vee B$$

Читатель без труда должен понять интуитивно верный смысл этих формул.

Заметим, что если формула B также зависит от x , то будут выполняться только две равносильности:

$$(\forall x)\ (A(x)\ \&\ B(x)) = (\forall x)\ A(x)\ \&\ (\forall x)\ B(x)$$

$$(\exists x)\ (A(x) \vee B(x)) = (\exists x)\ A(x) \vee (\forall x)\ B(x)$$

Мы предлагаем студентам самим понять, почему эти равносильности верны, а две другие нет.

3. *Перестановка одноименных кванторов.*

$$(\forall x)\ (\forall y)\ A(x,y) = (\forall y)\ (\forall x)\ A(x,y)$$

$$(\exists x)\ (\exists y)\ A(x,y) = (\exists y)\ (\exists x)\ A(x,y)$$

Замечание. Легко понять из общих соображений, что перестановка *разноименных* кванторов не приводит к равносильным формулам.

В частности легко проверить "на словах" (и мы предлагаем это сделать) что формула

$$(\exists x)\ (\forall y)\ A(x,y) \Rightarrow (\forall y)\ (\exists x)\ A(x,y)$$

является общезначимой, однако обратная имликация неверна.

4. *Переименование связанной переменной*. Заменяя связанную переменную формулы A другой переменной, не входящей в эту формулу, всюду в области действия квантора,мы, очевидно, получим равносильную формулу.

11. ПРИВЕДЕННЫЕ И НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ.

Определения. 1). Длиной формулы в ИП называется общее число входящих в нее символов предикатов, логических символов и символов кванторов. Так формула $(\forall x)\ A(x,y)\ \&\ (\exists z)\ B(y, z)$ имеет длину 5.

2). *Формулы, в которых из логических символов имеются только символы конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, причем симкол $\rceil$ встречается лишь перед символом предиката, называется приведенной.*

Отметим, что приведенная формула в ИП является в какой-то мере аналогом ДНФ и отличается от ДНФ возможным наличием кванторов.

Например, формула $(\forall x)\ A(x,y)\ \&\ ((\exists z)\ \rceil B(y, z))$ является приведенной, а формула $\rceil((\forall x)\ A(x,y)\ \&\ (\exists z)\ B(y, z))$ - нет.

3). *Формула в ИП называется нормальной, если все ее кванторы стоят в начале формулы или она вообще не содержит символов кванторов.*

Приведем следуюшие две теоремы без доказательства.

Теорема 1. Для любой формулы в ИП существует равносильная ей приведенная формула, причем множества свободных и связанных переменных этих двух формул совпадают.

Заметим, что длины этих формул могут быть разные.

Теорема 2. Для любой приведенной формулы существует равносильная ей нормальная формула, причем длины обоих формул совпадают.

Доказательства этих теорем можно найти в [1].

Из этих двух теорем сразу же следует общая теорема

Теорема 3. Для любой формулы в ИП существует равносильная ей приведенная нормальная формула.

12. ТЕОРИЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ.

Мы уже ввели формулы в ИП . Перечислим аксиомы ИП. Мы приведем 5 аксиом ИП. (Разумеется, также как и для теории ИВ аксиоматику можно вводить по-разному, тем не менее она будет приводитьк одной теории).

Заметим, что первые 3 аксиомы аналогичны аксиомам ИВ. Именно, каковы бы ни были формулы A, B следующие 3 формулы являются аксиомами.

А1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

А2. $((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

А3. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B$.

А4. $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow A(y)$, где формула $A(x)$ не содержит переменной y.

А5. $A(y) \Rightarrow (\exists\ x\ )\ A(x)$, где формула $A(y)$ не содержит переменной x

Имеется 4 правила вывода ИП.

1. Правило *m.p.* $A,\ A \Rightarrow B \vdash B$.
2. Правило связывания квантором всеобщности:

$B \Rightarrow A(x) \vdash B \Rightarrow (\forall x)\ A(x)$, где формула B не содержит переменной x.

3. Правило связывания квантором существования:

$A(x) \Rightarrow B \vdash (\exists x)\ A(x) \Rightarrow B$, где формула B не содержит переменной x.

4. Правило переименования связанной переменной. Связанную переменную формулы A (в кванторе и во всех вхождениях в области действия квантора) другой переменной, не являющейся свободной формулы A.

Докажем теперь следующие 2 предложения:

Предложение 3. Аксиомы ИП - общезначимые формулы.

В самом деле, для аксиом А1, А2, А3 это следует из теории ИВ. Для аксиом А4 и А5 - это предложения 1 и 2 п.10.

Предложение 4. Формула, получающаяся из общезначимой формулы с помощью правил вывода 1-4, является общезначимой.

Доказательство. 1) Для правила вывода 1 наше утверждение следует из свойств импликации.

2). Рассмотрим правило вывода 2. Пусть $B \Rightarrow A(x_i)$ - общезначимая формула. Докажем, что формула $B \Rightarrow (\forall x_i)\, A(x_i)$ тоже общезначима. Возможны два случая.

а) B на произвольном наборе своих свободных переменных принимает значение 1 (истинна). Тогда из общезначимости формулы $B \Rightarrow A(x_i)$ следует, что для любого элемента x_i справедливо равенство $A(x_i) =1$. Тогда $(\forall x_i)A(x_i) =1$, откуда следует, что на любом наборе свободных переменных $(B\Rightarrow(\forall x_i)A(x_i)) =1$.

б) B на каком-то наборе своих свободных переменных принимает значение 0 (ложна). Тогда по определению импликации $(B\Rightarrow(\forall x_i)A(x_i)) = 1$, что и требовалось доказать.

3). Докажем предложение 4 для правила вывода 3. Пусть формула $A(x)\Rightarrow B$ общезначима. Докажем тогда, что и формула $(\exists\, x)A(x) \Rightarrow B$ также общезначима. Заметим, что если формула $(\exists\, x)A(x)$ (для каких-то значений свободных переменных) принимает значение "0" , то для этих значений свободных переменных по свойству импликации формула $(\exists\, x)A(x) \Rightarrow B$ принимает значение "1". Если же $(\exists\, x)A(x)$ (для каких-то значений свободных переменных) принимает значение "1" , то для этих значений свободных переменных существует некоторое значение x_1 , для которого $A(x_1)$ истинно. Тогда из общезначимости формулы $A(x)\Rightarrow B$ следует (напомним, что по условию B не зависит от x) что B принимает значение "1" и, значит, формула $(\exists\, x)A(x) \Rightarrow B$ принимает значение 1.

4) То что правило вывода 4 сохраняет общезначимость является очевидным. Непосредственно из предложения 4 очевидным образом следует то, что любая выводимая (из аксиом) формула в ИП является общезначимой. Знаменитый немецкий математик-логик курт Гедель доказал и обратное утверждение. Таким образом верно следующее утверждение:

Теорема 1. Формула в ИП выводима (из аксиом) если и только если она общезначима.

Из этой теоремы сразу же следует

Теорема 2. Исчисление предикатов непротивеоречивая теория. Действительно, не могут быть одновременно общезначимы (то есть тождественно истинны в любой возможной интерпретации) формулы A и $\rceil A$.

Замечание. Таким образом, в ИП формула выводима (из аксиом) тогда и только тогда, когда она общезначима. Однако, в отличие от исчисления высказываний в ИП не существует алгоритма, позволяющего определить общезначимость любой формулы. Это связано с тем обстоятельством что интерпретация предикатов может содержать бесконечные возможные значения переменных.

13. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. а) В задачах 1 - 20 в пункте а) требуется доказать секвенции, которые содержат из логических операций только $\rceil$ и $\Rightarrow$. Для решения в основном используются свойства пункта 5. Напомним кратко основные факты этого пункта:

1) правило *т. р.*: $A,\ A \Rightarrow B \vdash B$;

2) секвенции $\Gamma,\ A \vdash B$ и $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ равносильны;

3) из противоречивых фрмул $\Gamma \vdash$ следует любая формула $\Gamma \vdash A$, причём формулы A и $\rceil A$ противоречивы;

4) Равносильны секвенции $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma, \rceil A \vdash$, а также $\Gamma \vdash \rceil A$ и $\Gamma,\ A \vdash$.

Кроме того, мы используем здесь два правила из пункта 3, а именно: "лишняя формула не мешает" и удаление выводимой формулы.

Напомним также, что в пункте 7 мы уже имели примеры вывода секвенций.

Задачи пункта а) задач 1 - 20 подобраны так, чтобы доказательства секвенций были нетрудными. Перейдём к примерам типа 1 - 20, пункт а).

а) Требуется доказать секвенцию $\vdash \rceil (A \Rightarrow B) \Rightarrow A$?

Мы ставим знак вопроса, так как секвенция ещё не доказана. Далее, применяя перечисленные выше свойства, получаем:

$\rceil (A \Rightarrow B) \vdash A$?

$\rceil (A \Rightarrow B),\ \rceil A \vdash$?

$\rceil A \vdash A \Rightarrow B$?

$\rceil A,\ A \vdash B$?

Но формулы $\rceil A$ и A противоречивы, поэтому уже без знаков вопроса "обратным ходом" получаем:

$\rceil A,\ A \vdash B$;

$\rceil A \vdash A \Rightarrow B$;

$\rceil A,\ \rceil (A \Rightarrow B) \vdash$;

$\rceil (A \Rightarrow B) \vdash A$;

$\vdash \rceil (A \Rightarrow B) \Rightarrow A.$

б) В пункте б) задач 1 - 20 требуется вывести (или, что то же, доказать) секвенции, содержащие конъюнкции и дизъюнкции. Здесь используются свойства из пункта 11. Напомним главные из них:

1) вывод секвенции $\Gamma \vdash AB$ равносилен выводу двух секвенций: $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$;

2) секвенция $\Gamma \vdash A \vee B$ равносильна секвенции $\Gamma, \rceil A \vdash B$;

3) секвенция $\Gamma,\ A \vee B \vdash C$ равносильна секвенции $\Gamma, \rceil A \Rightarrow B \vdash C$;

4) если $\Gamma \vdash A$, то для любого B верна секвенция $\Gamma \vdash A$.

Во всех задачах используются также и методы вывода, приведённые в предыдущем пункте 13 - 1а).

Приведём в качестве примера вывод секвенции

$\vdash A \vee (B \Rightarrow \rceil (AB))$.

Сначала ставим знак вопроса, так как секвенция не доказана.

$\vdash A \vee (B \Rightarrow \rceil (AB))$?

Далее: $\rceil A \vdash B \Rightarrow \rceil (AB)$?

$\rceil A,\ B \vdash \rceil (AB)$?

$\rceil A,\ B,\ AB \vdash$?

$\rceil A,\ B,\ A,\ B \vdash$?

Уже видим, что $A,\ \rceil A \vdash$ (без знака вопроса). Поэтому "обратным ходом" получаем: $\rceil A,\ A,\ B \vdash$ или $AB,\ \rceil A \vdash$, откуда

$\rceil A,\ B,\ AB \vdash$;

$\rceil A,\ B \vdash \rceil (AB)$;

$\rceil A \vdash B \Rightarrow \rceil (AB)$;

$\vdash A \vee (B \Rightarrow \rceil (AB))$.

в) В пункте в) задач 1 - 20 требуется доказать равносильность формул или из равносильности некоторых формул вывести равносильную ей. При этом наряду с предыдущими правилами используется свойство равносильных формул, а именно: $A = B$, если одновременно $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

Пусть требуется доказать равносильность формул:

$(\rceil A \Rightarrow B) \equiv \rceil(\rceil A \cdot \rceil B)$.

Это значит, что нужно доказать

а) $\vdash (\rceil A \Rightarrow B) \equiv \rceil(\rceil A \cdot \rceil B)$? Последовательно записываем:

$\rceil A \Rightarrow B \vdash \rceil(\rceil A \cdot \rceil B)$?

$\rceil A \Rightarrow B,\ \rceil A \cdot \rceil B \vdash$?

$\rceil A \Rightarrow B,\ \rceil A,\ \rceil B \vdash$? Видим, что можно применить правило *т. р.*, поэтому вывод предложенной секвенции осуществляем так:

$B,\ \rceil B \vdash$; добавляем "лишние" формулы:

$\rceil A \Rightarrow B,\ \rceil A,\ B,\ \rceil B \vdash$, удаляем выводимую формулу B и далее "обратным" ходом получаем формулу а).

б) $\vdash \rceil(\rceil A \cdot \rceil B) \Rightarrow (\rceil A \Rightarrow B)$?

$\rceil(\rceil A \cdot \rceil B) \vdash (\rceil A \Rightarrow B)$?

$\rceil(\rceil A \cdot \rceil B),\ \rceil A \vdash B$?

$\rceil(\rceil A \cdot \rceil B),\ \rceil A,\ \rceil B \vdash$?

$\rceil A,\ \rceil B \vdash \rceil A \cdot \rceil B$?

$\rceil A \cdot \rceil B \vdash \rceil A \cdot \rceil B$. Эта формула уже верна (так как $A \vdash A$).

Поэтому обратным ходом получаем формулу б), а вместе с ней и нужную равносильность.

2. Разберем теперь пример решения задач типа 21-40.

Напомним сначала, что область действия квантора (если нет дополнительных скобок) - это ближайший предикат, содержащий переменную , стоящую под знаком квантора. Поэтому связанную переменную необходимо переименовывать, если ее обозначение совпадает с обозначением другой свободной или связанной переменной , стоящей вне области действия первого квантора. Заметим, что в предлагаемых задачах только в задаче 37 не требуется переименования связанной переменной.

Вообще при решении этих задач используются действия с кванторами (раздел 10) - главные из которых

а) при переносе квантора через отрицание - квантор меняет свой смысл и

б) в конъюнкции (дизъюнкции) двух выражений квантор, стоящий перед одним из них можно выносить за скобки, если в другое выражение не входит эта связанная переменная.

Пример. Пусть имеется формула:

$$(\exists x)\, A(x,y) \Rightarrow \rceil(\forall x)\, B(x) \qquad (1)$$

Здесь буквой x обозначены две связанные переменные с разной областью действия кванторов. Поэтому одну из них надо переименовать и обозначить, например, буквой z. Получим формулу (равносильную (1)):

$$(\exists x)\, A(x,y) \Rightarrow \rceil(\forall z)\, B(z) \qquad (2)$$

Здесь x и z - связанные переменные, а y - свободная.

Длина формулы (2) (также как и формулы (1)) равна общему числу символов предикатов, кванторов и логических символов и значит равна 5.

Теперь найдем приведенную нормальную формулу, равносильную формуле (2). Для этого "убираем" символ $\Rightarrow$, исходя из равенства

$$(A \Rightarrow B) \equiv (\rceil A \vee B);$$

поэтому (2) равносильна формуле

$$\rceil(\exists x)\, A(x, y) \vee \rceil(\forall z) B(z). \qquad (3)$$

Теперь, чтобы формула (3) стала приведённой, нужно, чтобы отрицания встали непосредственно перед значениями предикатов. Так как перенос квантора через отрицание означает перемену квантора, получаем:

$$(\forall x)(\rceil A(x, y)) \vee (\exists z)(\rceil B(z)). \qquad (4)$$

Теперь формула (4) является приведённой. Для того, чтобы она стала нормальной, нужно, чтобы кванторы стояли в её начале. Так как от связанной переменной x переменная z не зависит, то получаем:

$$(\forall x)(\exists z)(\rceil A(x, y)) \vee \rceil B(z)). \qquad (5)$$

Формула (5) является приведённой нормальной; её длина равна 6.

б) Ясно, что формула (5), так же как и (1), является выполнимой (в данной интерпретации: $A(x, y)$ - "$y = 2x$", $B(x)$ - "x чётно"). Более того, формула (5), а значит, и формула (1), тождественно истинны в этой интерпретации, так как $\exists z$ такое, что $B(z)$ ложно (независимо от $A(x, y)$). Например, можно взять $z = 3$.

Заметим, что при решении задач, где есть символ эквивалентности $\sim$, обычно используется равенство:

$$(A \sim B) \equiv (A \cdot B) \vee (\rceil A \cdot \rceil B).$$

3. В задачах 41-60 в п а), б), в) требуется написать формулу в ИП, которая равна 1, если данное предложение истинно и равна 0, если предложение ложно. При этом можно использовать лишь два предиката $P(x,y,z)$ и $S(x,y,z)$. Предикат $P(x,y,z)$ - это предикат, равный 1, если $xy = z$ и равный 0, если $xy \neq z$ (кратко мы этот предикат записываем $xy = z$). $S(x,y,z)$ - это аналогичный предикат только для сложения ($x+y = z$). Интерпретация обоих предикатов - это целын неотрицательные числа. Мы приведем здесь в качестве примеров запись в виде формулы в ИП пяти предложений: (ясно, что эта запись может быть неоднозначной, но желательно, чтобы она была возможно короче).

а) $x = 0$. Мы знаем что 0 - это единственное число, для которого при любых y выполняется равенство $y+0 = y$. Отсюда мы получаем нужную формулу $F_1(x) = (\forall y)\, S(x,y,y)$. Заметим, что равносильную формулу можно записать в виде $F_1(x) = (\forall y) P(x,y,x)$.

б) $x = 2$. Для этой формулы достаточно заметить, что для любого y верно равенство $1y = y$ и $1+1 = 2$. Поэтому (в написанной ниже формуле $z = 1$)

$$F_2(x) = (\forall y)\, P(z,y,z) \& S(z,z,x)$$

в) y делится на x.

$$F_3(x) = (\exists z)\, P(x,z,y)$$

г) $z = xy + 3x + 2y$. Ясно, что для того чтобы написать такую формулу надо сначала ввести два числа 2 и 3 (а для этого нужно еще ввести число равное 1). Тогда

$$F_4(x) = (\forall y_1)\, P(k, y_1, y_1) \cdot S(k, k, z) \cdot S(k, z, u) \cdot P(x, u, x_1) \cdot P(z, y, y_2) \cdot$$
$$\cdot P(x, y, z_1) \cdot S(x_1, y_2, z_2) \cdot S(z_1, y_2, z)$$

(заметим, что здесь $k = 1$, $z = 2$, $u = 3$, $x_1 = 3x$, $y_2 = 2y$, $z_1 = xy$, $z_2 = 3x + 2y$ $z = z_1 + z_2 = xy + 3x + 2y$).

Из логических операций мы использовали только конъюнкцию.

д) $z =$ Н.О.Д. (x, y).

Заметим, что наибольший общий делитель (Н.О.Д.) - это, во-первых, делитель чисел x, y (т. е. x делится на z и y делится на z) и, во-вторых, если некоторое число r - также делитель x и y, то $r \leq z$. Поэтому

$$F_5(z) = (\exists x_1)\, P(z, x_1, x) \cdot (\exists y_1)\, P(z, y_1, y) \cdot (\forall r)((\exists x_2)\, P(r, x_2, x) \cdot$$
$$\cdot (\exists y_2)\, P(r, y_2, y) \Rightarrow (\exists y_3)\, S(r, y_3, z)).$$

4. Рассмотрим типовой пример задач 61 - 80. Пусть $f(x)$ - произвольная фиксированная функция, и пусть имеет смысл $\lim_{x \to a} f(x)$. Рассмотрим следующие предикаты: $P(x, \delta)$: $|x - a| < \delta$, $Q(x, \varepsilon)$: $|f(x) - A| < \varepsilon$, $R(\varepsilon)$: $\varepsilon > 0$. Тогда утверждение о том, что число A - предел функции $f(x)$ при $x \to a$, записывается формулой:

$$(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x)((R(\varepsilon) \cdot P(x, \delta)) \Rightarrow Q(x, \varepsilon)). \qquad (1)$$

б) Выражение $\lim_{x \to a} f(x) \neq A$ является отрицанием формулы (1), т. е. может быть записано в виде

$$\rceil((\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x)((R(\varepsilon) \cdot P(x, \delta)) \Rightarrow Q(x, \varepsilon))). \qquad (2)$$

Найдём приведённую нормальную формулу, равносильную (2). Проводя отрицание через кванторы, получим:

$$(\exists \varepsilon)(\forall \delta)(\exists x)\rceil((R(\varepsilon) \cdot P(x, \delta)) \Rightarrow Q(x, \varepsilon))).$$

Выражая импликацию через дизъюнкцию и отрицание, получим:

$$(\exists \varepsilon)(\forall \delta)(\exists x)\rceil(\rceil(R(\varepsilon) \cdot P(x, \delta)) \vee Q(x, \varepsilon))).$$

Применяя правило де Моргана, окончательно получим:

$$(\exists \varepsilon)(\forall \delta)(\exists x)(R(\varepsilon) \cdot P(x, \delta) \cdot \rceil Q(x, \varepsilon)). \qquad (3)$$

Это и есть приведённая нормальная формула для формулы (2).

Словесное выражение формулы (3) таково: $\lim_{x \to a} f(x) \neq A$ означает, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует x из области $|x - a| < \delta$, для которого $|f(x) - A| \geq \varepsilon$.

14. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

В задачах 1 - 20 в пунктах а) и б) методами теории ИВ доказать секвенции, в пункте в) доказать равносильность формул или вывести секвенцию для равносильных формул.

1. а) $A \Rightarrow B, \rceil B \vdash \rceil A$. б) $\vdash (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$.
   в) $AB \equiv \rceil(\rceil A \vee \rceil B)$.
2. а) $\vdash \rceil(A \vee \rceil A) \Rightarrow (A \Rightarrow \rceil A)$. б) $(AB) \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.
   в) $\rceil B \Rightarrow \rceil A \equiv A \Rightarrow B$
3. а) $\vdash \rceil A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$. б) $A \Rightarrow B \vdash (AC) \Rightarrow (BC)$.
   в) $\rceil(AB) \equiv \rceil A \vee \rceil B$.
4. а) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. б) $\vdash (A \vee B) \Rightarrow AB$.
   в) $\rceil(A \vee B) \equiv (\rceil A)(\rceil B)$.
5. а) $\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B$. б) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\rceil A \vee B)$.
   в) $A \Rightarrow B \equiv \rceil(A(\rceil B))$.
6. а) $A \Rightarrow B \vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. б) $\vdash \rceil(A(\rceil A))$.
   в) $A \Rightarrow B \equiv \rceil(A \rceil B))$.
7. а) $A \Rightarrow \rceil B \vdash B \Rightarrow \rceil A$. б) $(A \cdot (\rceil B)) \Rightarrow \rceil(A \Rightarrow B)$.
   в) $A(B \vee C) \equiv AB \vee AC$.
8. а) $A \Rightarrow B \vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. б) $\vdash (A \vee B) \Rightarrow AB$.
   в) $A \vee (BC) \equiv (AB) \vee (AC)$.
9. а) $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$. б) $\rceil(P \vee \rceil P) \vdash P \vee \rceil P$.
   в) $\rceil(AB) \equiv \rceil A \vee \rceil B$.

10. а) $\vdash ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow Q.$ б) $\vdash \neg(P \Rightarrow \neg P).$
в) $A \equiv B \vdash \neg A \equiv \neg B.$

11. а) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B).$ б) $\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P.$
в) $A \equiv B \vdash (A \Rightarrow C) \equiv (B \Rightarrow C).$

12. а) $A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B).$ б) $\vdash ((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B).$
в) $\neg A \Rightarrow B \equiv A \vee B.$

13. а) $P \Rightarrow Q,\ P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vdash P \Rightarrow R.$ б) $A(\neg B) \vdash \neg(A \Rightarrow \neg B).$
в) $\neg B \Rightarrow \neg A \equiv A \Rightarrow B.$

14. а) $\neg B \Rightarrow \neg A,\ \neg B \Rightarrow A \vdash B.$ б) $\vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow AB.$
в) $A \Rightarrow B \equiv \neg(A(\neg B)).$

15. а) $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)).$ б) $A \Rightarrow B \vdash AC \Rightarrow BC.$
в) $A \equiv B \vdash (C \Rightarrow A) \equiv (C \Rightarrow B).$

16. а) $A \vdash \neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B).$ б) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash \neg B \vee (A \Rightarrow C).$
в) $\neg B \Rightarrow \neg A \equiv \neg A \vee B.$

17. а) $\vdash P \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q).$ б) $(AB) \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C).$
в) $\neg A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow A.$

18. а) $\vdash \neg B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow B)).$ б) $A \Rightarrow B \vdash (\neg C \vee A) \Rightarrow (C \Rightarrow B).$
в) $\neg(AB) \equiv A \Rightarrow \neg B.$

19. а) $\neg A \Rightarrow B,\ \neg B \vdash A.$ б) $AB \Rightarrow C \vdash \neg A \vee (B \Rightarrow C).$
в) $\neg A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow A.$

20. а) $\vdash B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow \neg B)).$ б) $A \Rightarrow \neg B \vdash (AC \Rightarrow \neg BC).$
в) $A \equiv B \vdash (A \Rightarrow B) \equiv (B \Rightarrow A).$

В задачах 21 - 40 в пункте а) переименовать связанные переменные (если это необходимо), затем в полученной формуле указать свободные и связанные переменные , определить длину формулы, привести данную формулу (равносильным образом) к приведенной, нормальной форме, указать длину полученной формулы., в пункте в б) определить , выполнимы или нет эти формулы, если считать что $A(x, y)$ - предикат $2x = y$, а $B(x)$ - предикат: x - чётное число (причем оба предиката имеют интерпретацию всех целых неотрицательных чисел).

21. $(\forall x)(\exists y)A(x, y) \Rightarrow (\exists x)B(x).$
22. $(\exists x)A(x, y) \sim B(y).$
23. $(\forall x)(A(x, y) \vee B(x)) \Rightarrow (\exists y)B(y).$
24. $\neg((\exists x)A(x, y) \Rightarrow A(x, y)).$
25. $\neg((\forall x)A(x, y) \vee (\exists x)B(x)).$
26. $\neg((\exists y)A(x, y) \cdot (\forall x)B(x)).$
27. $(\forall y)(A(x, y) \sim B(y)).$
28. $A(x, y) \Rightarrow (\forall y)B(y).$
29. $(\exists x)(\forall y)A(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)A(x, y).$
30. $(\exists x)B(x) \Rightarrow (\forall x)B(x).$
31. $(\forall x)(\exists y)A(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)A(x, y).$
32. $\neg(\exists x)B(x) \Rightarrow B(x).$
33. $\neg((\exists y)A(x, y) \Rightarrow B(y)).$
34. $\neg((\forall x)A(x, y) \sim B(y)).$
35. $\neg(\forall y)(A(x, y) \sim B(y)).$
36. $A(x, y) \vee \neg(\exists y)B(y).$

37. $(\rceil(\forall x)A(x, y)) \cdot B(y)$.
38. $(\forall x)A(x, y) \sim A(x, y) \cdot B(y)$.
39. $(\exists x)A(x, y) \Rightarrow B(y)$.
40. $\rceil((\forall y)(\exists x)(A(x,y) \Rightarrow B(y))$

В задачах 41-60 во всех трех пунктах а), б) и в) требуется с помощью заданных предикатов (а именно: предикатов $P(x,y,z)$, который кратко описывается равенством $xy = z$ и $S(x,y,z)$: $x + y = z$, причем интерпретация обоих предикатов - это целые неотрицательные числа), записать формулой из ИП данные предложения (т.е. написать формулу из ИП, которая прини-мает значение “1” , если предложение является верным и значение “0”, если оно неверно).

41. а) $x = 0$; б) x делится на y; в) z = Н.О.К.$(2x, y)$.
42. а) $x = 1$; б) $x + y$ делится на z; в) $xy \le z+2$.
43. а) $x = 2$; б) $x \le y$; в) $x + 2y$ делится на z.
44. а) x чётно; б) $x = y$; в) $x + 2y$ делится на z.
45. а) x нечётно; б) $x > y$; в) z делится и на x, и на y.
46. а) x - простое число; б) $z = max\{x, y\}$; в) $x = y + 2$.
47. а) x делится на 3; б) $z = min\{x, y\}$; в) $z = x + 1$.
48. а) $z = 2x + 3y$; б) x делится на 4; в) $z = min\{x, y\}$.
49. а) $x > 6$; б) $x \le y$; в) $z + 1$ делится либо на x, либо на y.
50. а) $2x + 3y$ делится на 5; б) $x = 2$; в) $z = min\{x, y\}$.
51. а) y чётно; б) $3x + y$ делится на 3; в) $z \ge 5$.
52. а) z - простое число; б) y и z делятся на $x + 1$; в) $z \le x+2y+1$.
53. а) z - не простое число; б) $z = 3x + 2y$; в) z = Н.О.Д. $(x + y, y)$.
54. а) $x + 2$ делится на y; б) $z \ge x+y$ в) $z = max\{3x, y\}$.
55. а) xy делится на 6; б) $z = 2x + 5y$; в) $x \le y+z$
56. а) $x = 1$; б) y делится на xz; в) $z = 3x + 2y + xy$.
57. а) x делится на 3; б) $z = x = y$; в) $z = max\{xy, 3x + 2y\}$.
58. а) $x \ge y$; б) $z = max\{x, y\}$; в) z делится на $x + y$ и на y.
59. а) $x \le 5$; б) x делится на y и на z; в) $x \ge y+2z$.
60. а) $x \le 3$; б) $x+3y$ делится на 6; в) z = Н.О. Д $(x, 3y)$

В задачах 61 - 80 в пунктах а) и б) требуется ввести нужные предикаты и записать формулами в ИП данные математические утверждения. Кроме того, в пункте б) требуется полученную формулу ИП привести к приведённой нормальной форме. Записать словесное выражение для обеих формул.

61. а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; б). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \ne \infty$;
62. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$; б). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \ne A$;
63. а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$; б). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ne -\infty$;
64. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; б). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \ne -\infty$;
65. а) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$; б). $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \ne A$;
66. а) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$; б). $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \ne A$;
67. а) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$; б). $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \ne +\infty$;
68. а) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$; б). $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \ne A$;
69. а) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = 0$; б). $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \ne 0$;

70. а) $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = +\infty$; б). $\lim\limits_{x \to +0} f(x) \neq +\infty$;

71. а) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$; б). $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \neq 0$;

72. а) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; б). $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq 0$;

73. а) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; б). $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \neq 0$;

74. а) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$; б). $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq \infty$;

75. а) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; б). $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \neq +\infty$;

76. а) $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$; б). $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq -\infty$;

77. а) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; б). $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq -\infty$;

78. а) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \infty$; б). $\lim\limits_{x \to 5} f(x) \neq \infty$;

79. а) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$; б). $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \neq A$;

80. а) $\lim\limits_{x \to -5+0} f(x) = A$; б). $\lim\limits_{x \to -5+0} f(x) \neq A$.

15. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Установить, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов совпадает с R. (Здесь для записи предикатов мы используем замечание, сделанное нами на стр.14, а именно обозначаем предикаты не латинскими буквами, а их смысловыми значениями).

а) $(\exists\, x)\ (x + 5 = x + 3)$;

б) $(\exists\, x)\ (x^2 + x + 0.5 = 0)$;

в) $(\forall\, x)\ (x^2 + x + 1 > 0)$;

г) $(\forall\, x)\ (x^2 - 5x + 6 \geq 0)$;

д) $(\exists\, x)\ ((x^2 - 5x + 6 \geq 0)\ \&\ (x^2 - 2x+1 > 0))$;

е) $(\exists\, x)\ ((x^2 - 5x + 6 \geq 0)\ \&\ (x^2 - 6x + 8 \leq 0))$;

ж) $(\forall\, x)\ ((x^2 - 6x + 8 \geq 0)\ \&\ (x^2 - 6x + 8 < 0))$;

з) $(\exists\, x)\ ((x \in \{2, 5\} \Rightarrow (x^2 - 6x + 8 = 0))$;

и) $(\forall\, x)\ ((x \in \{3, 5\}) \Rightarrow (x^2 - 6x + 8 < 0))$.

2. Приведите примеры таких a, для которых данное высказывание а) истинно, б) ложно (областью определения предикатов является R).

а) $(\exists\, x< 0)\ (x^2 + ax + a = 0)$;

б) $(\forall\, x \in [0, 1])(x^2 + x + a < 0)$;

в) $(\forall\, x > 7)\ (x^2 + ax + 1 > 0)$;

г) $(\exists\, x \in [\, a,\ a + 1]\,)\ (x^2 - x - 2 < 0)$.

3. Доказать или опровергнуть следующие равносильности (формула B не содержит вхождений переменной x).

а) $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B) \equiv (\forall x)A(x) \Rightarrow B$ (?)

б) $(\exists\, x)(A(x) \Rightarrow B) \equiv (\exists\, x)A(x) \Rightarrow B$ (?)

в) $(\forall x)(B \Rightarrow A(x)) \equiv B \Rightarrow (\forall x)A(x)$ (?)

г) $(\exists\, x)(B \Rightarrow A(x)) \equiv B \Rightarrow (\exists\, x)A(x)$ (?)

4. Выводимы ли в ИП (т. е. общезначимы ли) формулы

а) $((\exists\, x)A(x) \Rightarrow (\forall x)A(x))$;

б) $((\forall\, x)A(x) \Rightarrow (\exists x)A(x))$;

в) $\rceil((\exists x)A(x) \Rightarrow (\forall x)A(x))$;

г) $\rceil((\forall x)A(x) \Rightarrow (\exists x)A(x))$;

д) $(\exists x)(\forall y)A(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x) A(x, y)$;

е) $(\forall x)(\exists y)A(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)A(x, y)$;

ж) $((\forall x)A(x) \Rightarrow (\exists x)B(x)) \equiv (\exists x)(A(x) \Rightarrow B(x)))$.

5. Пусть М - множество точек прямых и плоскостей 3-хмерного евклидова пространства. рассмотрим в этой интерпретации следующие предикаты: $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$, где $P_1(x)$ - “x - точка”, $P_2(x)$ - “x - прямая”, $P_3(x)$ - “x - плоскость”, $Q(x, y)$ - “x лежит на y”, $R(x, y)$ - “x совпадает с y”. Записать в этой интерпретации формулы, выражающие следующие утверждения:

а) через каждые две точки можно провести прямую, и притом только одну, если эти две точки различны;

б) через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну;

в) две данные прямые y_1 и y_2 параллельны, но не совпадают;

г) две данные прямые y_1 и y_2 скрещиваются, но не пересекаются;

д) две данные прямые y_1 и y_2 пересекаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нефедов В.Н. , Осипова В.А. Курс дискретной математики, 264 стр. Изд-во МАИ, Москва, 1992
2. Лихтарникова Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика, 299 стр. СПб, Изд-во “Лань” ,1999
3. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов , 255 стр. Издательская фирма “физ.-мат. литература, Москва, 1995
4. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Под ред. Яблонского С.В. и Лупанова О.Б., 312 стр. Изд.-во “Наука”, Москва, 1974.