

КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПОСТОЯННОЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОДНОМОДОВОГО ОПТИЧЕСКОГО ВОЛОКНА

А. Ю. Матюхин¹, М. А. Мельтенисов^{1*}

¹ СПбГУТ, Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация

* Адрес для переписки: meltenisov@gmail.com

Аннотация

Предмет исследования. Статья посвящена методу аппроксимации постоянной распространения одномодового оптического волокна. **Метод.** В качестве методов исследования применяются графический анализ и математическое моделирование. **Основные результаты.** В статье предложен метод аппроксимации постоянной распространения набором квадратичных функций, выведена универсальная формула для расчёта коэффициентов аппроксимирующих функций и приведён алгоритм, использующий данную формулу. **Практическая значимость.** Предложенный метод может быть использован в разложении передаточной функции волокна в ряд Фурье, которое необходимо при применении метода эхо-сигналов для компенсации хроматической дисперсии.

Ключевые слова

алгоритм, аппроксимация, метод эхо-сигналов, оптическое волокно, постоянная распространения, ряд Фурье.

Информация о статье

УДК 535.3

Язык статьи – русский.

Поступила в редакцию 21.06.16, принята к печати 26.08.16.

Ссылка для цитирования: Матюхин А. Ю., Мельтенисов М. А. Квадратичная аппроксимация постоянной распространения одномодового оптического волокна // Информационные технологии и телекоммуникации. 2016. Том 4. № 3. С. 65–75.

QUADRATIC APPROXIMATION OF PROPAGATION CONSTANT OF SINGLEMODE OPTICAL FIBER

A. Matukhin¹, M. Meltenisov^{1*}

¹ SPbSUT, St. Petersburg, 193232, Russian Federation

* Corresponding author: meltenisov@gmail.com

Abstract—Research subject. The article is devoted to the method of approximation of the propagation constant of a singlemode optical fiber. **Method.** The research methods are graphical analysis and mathematical modeling. **Core results.** The method of approximation of the propagation constant by means of the set of quadratic functions is proposed, the universal equation for calculation of coefficients of the approximating functions is obtained and the algorithm using the equation is provided in the article. **Practical relevance.** The proposed method can be used in the Fourier series expansion of transfer function of the fiber which is necessary at applying the echo-signals method for compensation of the chromatic dispersion.

Keywords—Algorithm, approximation, echo-signals method, optical fiber, propagation constant, Fourier series.

Article info

Article in Russian.

Received 21.06.16, accepted 26.08.16.

For citation: Matukhin A., Meltenisov M.: Quadratic approximation of propagation constant of singlemode optical fiber // Telecom IT. 2016. Vol. 4. Iss. 3. pp. 65–75 (in Russian).

Введение

Одним из важнейших факторов, влияющих на распространение сигнала в оптическом волокне, является хроматическая дисперсия. Под её воздействием импульсы становятся шире и, как следствие, накладываются друг на друга. Такой эффект, называемый межсимвольной интерференцией, приводит к ошибкам на приёме, а значит, к ухудшению качества передачи. Поэтому важной задачей является компенсация хроматической дисперсии. Одним из способов её решения является применение метода эхо-сигналов [1].

Особенностью данного метода является необходимость разложения в ряд Фурье передаточной характеристики волокна, которая описывает воздействие хроматической дисперсии (без учёта нелинейных эффектов и затухания) [2]. Такая передаточная характеристика выглядит следующим образом:

$$H(\omega) = e^{-j\beta(\omega)z}, \quad (1)$$

где ω – частота, z – расстояние передачи, $\beta(\omega)$ – постоянная распространения волокна.

Именно нелинейная зависимость постоянной распространения от частоты и приводит к возникновению хроматической дисперсии. Чтобы разложить (1) в ряд Фурье, необходимо иметь математическое описание такой зависимости. Поскольку постоянная распространения является произведением волнового числа на показатель преломления волокна, наиболее точным описанием является описание с использованием уравнения Селмейера [3]:

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \frac{B_1\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{B_2\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{B_3\omega_3^2}{\omega_3^2 - \omega^2}}, \quad (2)$$

где B_i – величина i -го резонанса, ω_i – i -я резонансная частота вещества, c – скорость света в вакууме.

Однако такое громоздкое описание затруднительно использовать для разложения (1) в ряд Фурье. Поэтому необходимо использовать более простой способ представить $\beta(\omega)$. Широко распространённым способом является разложение $\beta(\omega)$ в ряд Тейлора [4] около несущей частоты сигнала ω_0 :

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_0)^3 + \dots, \quad (3)$$

где $\beta_m = \left[\frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right]_{\omega=\omega_0}$ – производные $\beta(\omega)$ m -го порядка.

Однако такой способ имеет ряд недостатков:

- необходимо вычислять производные $\beta(\omega)$ для каждой из несущих частот, что делает представление (3) недостаточно универсальным;
- содержит степени частоты выше второй, что приводит к сложностям при разложении (1) в ряд Фурье аналитически.

Поэтому необходим другой способ описания $\beta(\omega)$.

1 Описание метода квадратичной аппроксимации постоянной распространения

Новый метод описания постоянной распространения впервые был поверхностно упомянут в [5]. В данной статье этот способ будет рассмотрен подробно.

Метод основывается на графическом исследовании поведения $\beta(\omega)$. Из рис. 1 следует, что $\beta(\omega)$ содержит существенную линейную часть. Её влияние ограничивается постоянной групповой задержкой сигнала, поэтому в дальнейшем она нас интересовать не будет. Если эту линейную часть вычесть из функции (2):

$$\beta_{нл}(\omega) = \beta(\omega) - \beta_{лин}(\omega), \quad (4)$$

то получится функция, внешне схожая с квадратичной, как показано на рис. 2. Тем не менее, квадратичной она не является и содержит небольшой кубический член. Поэтому, если выполнить квадратичную аппроксимацию:

$$\beta'_{нл}(\omega) = a_1\omega^2 + b_1\omega + c_1,$$

то возникнет погрешность, влияние которой растёт с ростом расстояния передачи и рассматриваемого диапазона частот. Кубическая аппроксимация же не подходит по причине сложностей, возникающих при разложении (1) в ряд Фурье.

Если анализировать график погрешности квадратичной аппроксимации (рис. 3), то можно заметить, что её внешний вид похож на пару квадратичных функций, каждая из которых расположена в своей половине исходного диапазона частот.

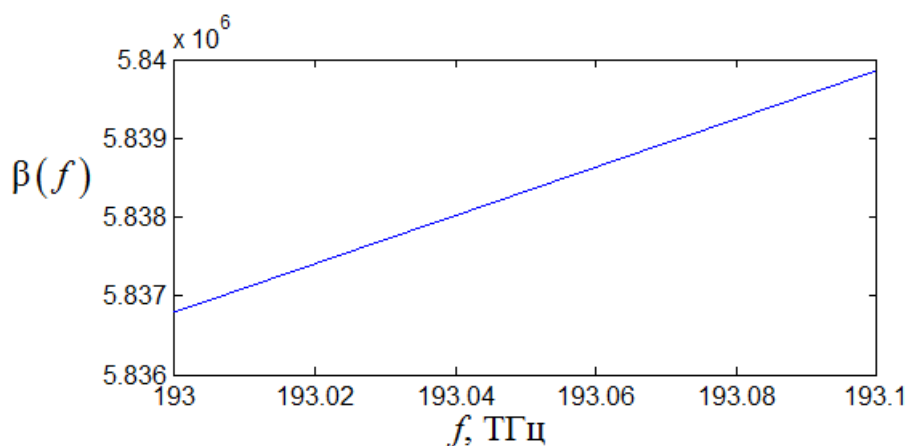


Рис. 1. Постоянная распространения одномодового оптического волокна

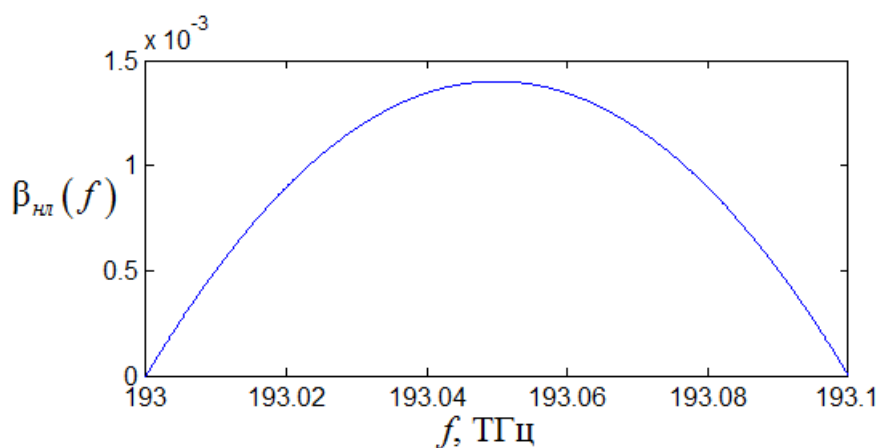
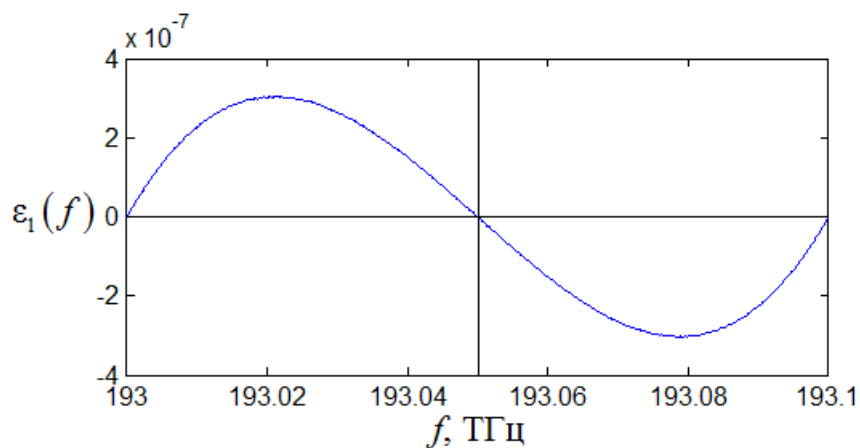


Рис. 2. Нелинейная часть постоянной распространения

Рис. 3. Погрешность аппроксимации $\beta_{нл}(f)$ квадратичной функцией

Если каждую из этих половин погрешности также аппроксимировать квадратичной функцией и сложить с первой аппроксимацией:

$$\beta_{нл}''(\omega) = \begin{cases} (a_1 + a_{11})\omega^2 + (b_1 + b_{11})\omega + (c_1 + c_{11}), & \omega \in [\omega_{ниж}; \omega_{сред}] \\ (a_1 + a_{21})\omega^2 + (b_1 + b_{21})\omega + (c_1 + c_{21}), & \omega \in [\omega_{сред}; \omega_{верх}] \end{cases}'$$

то можно заметить, что общая погрешность уменьшилась, а квадратичных функций на исходном диапазоне уже четыре. Следуя этой логике, можно продолжить квадратичную аппроксимацию тем же способом до тех пор, пока погрешность не станет пренебрежимо малой. Чем больше диапазон частот и расстояние передачи, тем больше приближений потребуется.

2 Определение коэффициентов квадратичной функции для N -го количества приближений

Рассмотрим систему уравнений, которую необходимо решить, чтобы получить коэффициенты квадратичной функции:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1 = f(x_1) \\ a_1 x_2^2 + b_1 x_2 + c_1 = f(x_2) \\ a_1 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + b_1 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + c_1 = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \end{array} \right. , \quad (5)$$

где a_1 , b_1 и c_1 – коэффициенты квадратичной функции первого приближения (парабола 1 на рис. 4); x_1 и x_2 – нижняя и верхняя точки рассматриваемого интервала $[x_1; x_2]$; $f(x)$ – значение аппроксимируемой функции (4) в точке x . Эти значения находятся из (2) с учётом (4). Для составления уравнения использовались три точки: две граничные и средняя.

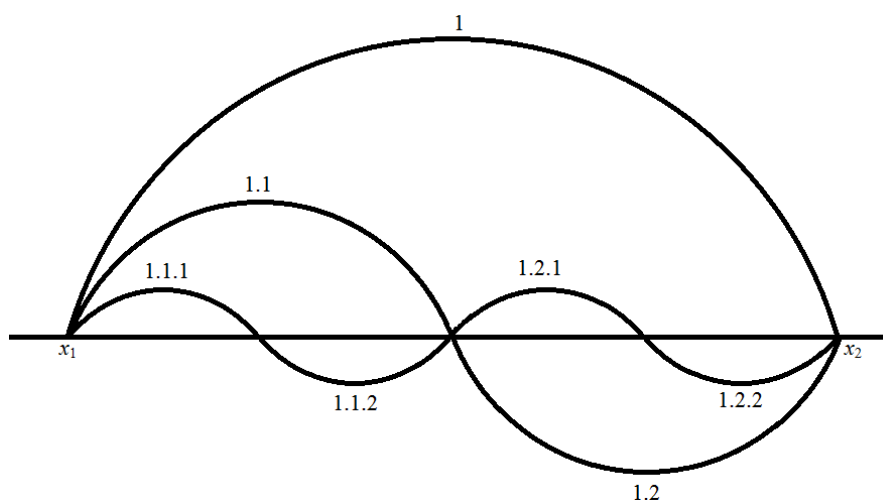


Рис. 4. Подынтервалы для 3-х приближений

Поскольку функция (4) получена путём вычитания линейной функции, рассчитанной по крайним точкам рассматриваемого интервала, то $f(x_1)$ и $f(x_2)$ равны 0.

В матричном виде система (5) выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 & \frac{x_1+x_2}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \end{bmatrix},$$

или

$$\mathbf{H}_1 \times \mathbf{K}_1 = \mathbf{F}_1, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 & \frac{x_1+x_2}{2} & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \end{bmatrix}, \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}.$$

Решением системы (6) является выражение:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{H}_1^{-1} \times \mathbf{F}_1,$$

или

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{(x_2-x_1)^2} \\ \frac{4(x_2+x_1)}{(x_2-x_1)^2} \\ -\frac{4x_1x_2}{(x_2-x_1)^2} \end{pmatrix} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right). \quad (7)$$

Теперь найдём коэффициенты для квадратичных функций второго приближения (параболы 1.1 и 1.2 на рис. 4). Для этого сначала необходимо найти ошибку первого приближения:

$$\varepsilon_1(x) = f(x) - (a_1x^2 + b_1x + c_1). \quad (8)$$

Поскольку система (6) была решена в трёх точках: x_1 , x_2 и $\frac{x_1+x_2}{2}$, то в этих точках ошибка аппроксимации (8) будет равна 0. Разделим интервал

$\left[x_1, \dots, \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right), \dots, x_2 \right]$ на 2 части: $\left[x_1, \dots, \left(\frac{3x_1 + x_2}{4} \right), \dots, \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right]$
и $\left[\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right), \dots, \left(\frac{x_1 + 3x_2}{4} \right), \dots, x_2 \right]$. Затем составим две системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{21}x_1^2 + b_{21}x_1 + c_{21} = 0 \\ a_{21}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + b_{21}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + c_{21} = 0 \\ a_{21}\left(\frac{3x_1 + x_2}{4}\right)^2 + b_{21}\left(\frac{3x_1 + x_2}{4}\right) + c_{21} = \varepsilon_1\left(\frac{3x_1 + x_2}{4}\right) \end{cases} \quad (9)$$

и

$$\begin{cases} a_{22}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + b_{22}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + c_{22} = 0 \\ a_{22}x_2^2 + b_{22}x_2 + c_{22} = 0 \\ a_{22}\left(\frac{x_1 + 3x_2}{4}\right)^2 + b_{22}\left(\frac{x_1 + 3x_2}{4}\right) + c_{22} = \varepsilon_1\left(\frac{x_1 + 3x_2}{4}\right) \end{cases} \quad (10)$$

Каждая из этих систем решается аналогично (5). Следовательно, их решение можно найти, сделав замену в (7) с учётом новых граничных и средних точек:

$$x_1 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \rightarrow \varepsilon_1\left(\frac{3x_1 + x_2}{4}\right)$$

и

$$x_1 \rightarrow \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), x_2 \rightarrow x_2, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \rightarrow \varepsilon_1\left(\frac{x_1 + 3x_2}{4}\right).$$

Таким образом, решение систем (9) и (10) будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{K}_{21} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{(x_2 - x_1)^2} \\ \frac{16\left(\frac{3x_1 + x_2}{2}\right)}{(x_2 - x_1)^2} \\ \frac{16x_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix} \varepsilon_1\left(\frac{3x_1 + x_2}{4}\right) \quad (11)$$

и

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{(x_2 - x_1)^2} \\ \frac{16\left(\frac{x_1 + 3x_2}{2}\right)}{(x_2 - x_1)^2} \\ -\frac{16x_2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix} \varepsilon_1 \left(\frac{x_1 + 3x_2}{4} \right). \quad (12)$$

Теперь необходимо найти погрешности второго приближения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21}(x) &= \varepsilon_1(x) - (a_{21}x^2 + b_{21}x + c_{21}), \\ \varepsilon_{22}(x) &= \varepsilon_1(x) - (a_{22}x^2 + b_{22}x + c_{22}). \end{aligned}$$

Коэффициенты третьего приближения (параболы 1.1.1, 1.1.2, 1.2.1 и 1.2.2 на рис. 5) находятся точно так же, как и для второго.

Рассматривая (7), (11) и (12), а также векторы коэффициентов для третьего и последующих приближений, можно выявить закономерность:

$$\mathbf{K}_n = \begin{pmatrix} -\frac{(4)^n}{(x_2 - x_1)^2} \\ \frac{2(4)^n x_{mid}}{(x_2 - x_1)^2} \\ -\frac{(4)^n x_{min} x_{max}}{(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix} \varepsilon_n, \quad (13)$$

где n – номер приближения; x_{min} , x_{mid} и x_{max} – нижняя, средняя и верхняя точки рассматриваемого подынтервала соответственно.

3 Алгоритм квадратичной аппроксимации постоянной распространения волокна

После того, как найдено выражение для вычисления коэффициентов любого приближения, можно найти суммарные коэффициенты всех L приближений и, таким образом, аппроксимировать постоянную распространения (4) с высокой точностью.

Рассмотрим алгоритм квадратичной аппроксимации постоянной распространения.

1. Исходный интервал делится на $K = 2^n$ подынтервалов на каждой из итераций приближения, где n – номер итерации приближения, причём, $n = \overline{1 \dots N-1}$. В каждом k -ом подынтервале ($k = \overline{1 \dots 2^n}$) на текущей итерации приближения n определяются средняя точка ($x_{n,mid}^k$) и две граничные точки ($x_{n,min}^k$ и $x_{n,max}^k$).

2. Находится погрешность квадратичной аппроксимации на n -ой итерации приближения в k -м подынтервале:

$$\varepsilon_n^k(x) = \varepsilon_{n-1}^r(x) - \bar{f}_{n-1}^r(x),$$

где $r = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$, а $\bar{f}_{n-1}^r(x)$ – квадратичная аппроксимация на предыдущей итерации приближения в подынтервале, которому принадлежит подынтервал, рассматриваемый на данном шаге. Причём $\varepsilon_0^1(x) = f(x)$ – начальное условие. Здесь и далее $n = \overline{0 \dots N-1}$, $k = \overline{1 \dots 2^n}$.

3. Рассчитываются коэффициенты k -й квадратичной функции на n -ой итерации приближения по формуле (13):

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_n^k = \begin{pmatrix} -\frac{(4)^n}{(x_g - x_n)^2} \\ \frac{2(4)^n x_{n,mid}^k}{(x_g - x_n)^2} \\ -\frac{(4)^n x_{n,min}^k x_{n,max}^k}{(x_g - x_n)^2} \end{pmatrix} \varepsilon_n^k(x_{n,mid}^k),$$

где x_n и x_g – нижняя и верхняя точки исходного интервала соответственно.

4. Вычисляется квадратичная аппроксимация на текущей итерации приближения в текущем подынтервале:

$$\bar{f}_n^k(x) = a_n^k x^2 + b_n^k x + c_n^k.$$

5. Чтобы получить результирующие коэффициенты для каждого из 2^{N-1} подынтервалов, необходимо последовательно сложить все коэффициенты, рассчитанные для всех тех квадратичных функций на каждой из итераций приближения, у которых область определения пересекается с областью определения k -й параболы из 2^{N-1} :

$$\begin{cases} A_n^k = A_{n-1}^r + a_n^k \\ B_n^k = B_{n-1}^r + b_n^k \\ C_n^k = C_{n-1}^r + c_n^k \end{cases}.$$

6. Шаги 2–5 необходимо повторять до тех пор, пока $n \neq N - 1$ и $k \neq 2^{N-1}$.

7. В результате, окончательные коэффициенты для каждого из подынтервалов, общее количество которых после всех N приближений равно 2^{N-1} :

$$\begin{cases} a(k) = A_{N-1}^k \\ b(k) = B_{N-1}^k \\ c(k) = C_{N-1}^k \end{cases}. \quad (14)$$

4 Использование найденных коэффициентов для разложения передаточной функции волокна в ряд Фурье

Теперь можно подставить коэффициенты (14) в формулу для нахождения коэффициентов ряда Фурье [4] для каждого подынтервала:

$$p_m^k = \frac{e^{-j\pi \left(\frac{(m+2b_k zL)^2}{-8a_k zL^2} + 2c_k z \right)}}{2L\sqrt{-2\pi a_k z}} \cdot \left[C \left(\sqrt{-2\pi a_k z} x_{N-1, \max}^k - \sqrt{\pi} \frac{m+2b_k zL}{2\sqrt{-2a_k zL}} \right) - \right. \\ \left. - C \left(\sqrt{-2\pi a_k z} x_{N-1, \min}^k - \sqrt{\pi} \frac{m+2b_k zL}{2\sqrt{-2a_k zL}} \right) + jS \left(\sqrt{-2\pi a_k z} x_{N-1, \max}^k - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\pi} \frac{m+2b_k zL}{2\sqrt{-2a_k zL}} \right) - jS \left(\sqrt{-2\pi a_k z} x_{N-1, \min}^k - \sqrt{\pi} \frac{m+2b_k zL}{2\sqrt{-2a_k zL}} \right) \right],$$

где $m = -M \dots M$ – номер коэффициента разложения в ряд Фурье, $C(x)$ и $S(x)$ – интегралы Френеля, L – половина исходного интервала, $x_{N-1, \min}^k$ и $x_{N-1, \max}^k$ – граничные точки каждого подынтервала, на которые в итоге разделился исходный интервал после N итераций приближения.

Чтобы получить итоговые коэффициенты разложения (1) в ряд Фурье, необходимо просуммировать друг с другом каждый полученный m -й коэффициент:

$$P_m = \sum_{k=1}^{2^{N-1}} P_m^k.$$

Заключение

Предложенный в статье метод аппроксимации постоянной распространения позволяет описать постоянную распространения, не являющуюся квадратичной функцией, набором из квадратичных функций на нескольких подынтервалах. Такой способ описания делает возможным разложение в ряд Фурье передаточной функции (1) с использованием интегралов Френеля. Кроме того, путём изменения количества приближений можно достичь высокой точности аппроксимации постоянной распространения для любого диапазона частот и расстояния передачи. А предложенный алгоритм расчёта коэффициентов аппроксимирующих функций позволяет автоматизировать такую аппроксимацию.

Литература

1. Баева Н. Н., Бобровская И. К., Брескин В. А., Якуб Ю. А. Основы многоканальной связи. М.: Связь, 1975. 328 с. ISBN 200001476613.
2. Матюхин А. Ю., Мельтенисов М. А. Исследование возможности применения метода эхо-сигналов в волоконно-оптических системах передачи // Электросвязь. 2015. № 3. С. 32–35.
3. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984. 512 с.
4. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика. М.: Мир, 1996. 324 с. ISBN 5-03-002418-2.
5. Meltenisov M., Matukhin A. Analytical Model of Chromatic Dispersion Effect in the Time Domain // 18th International Conference on Advanced Communication Technology (ICTACT). 2016. pp. 406–409.

References

1. Baeva, N. N., Bobrovskaya, I. K., Breskin, V. A., Yakub, Yu. A. Multichannel Communication Basics. M.: Svyaz', 1975. 328 p. ISBN 200001476613.
2. Matyukhin, A. Yu., Meltenisov, M. A. Investigation of Possibility of Applying the Echo Signals Method in Fiber Optic Transmission System // Electrosvyaz'. 2015. No. 3. pp. 32–35.
3. Adams, M. An Introduction to Optical Waveguides. M.: Mir, 1984. 512 p.
4. Agrawal, G. Nonlinear Fiber Optics. M.: Mir, 1996. 324 p. ISBN 5-03-002418-2.
5. Meltenisov M., Matukhin A. Analytical Model of Chromatic Dispersion Effect in the Time Domain // 18th International Conference on Advanced Communication Technology (ICTACT). 2016. pp. 406–409.

**Мельтенисов
Михаил Александрович**

– аспирант, СПбГУТ, Санкт-Петербург, 193232,
Российская Федерация, meltenisov@gmail.com

Матюхин Александр Юрьевич

– кандидат технических наук, доцент, СПбГУТ,
Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация,
matukhin@list.ru

Meltenisov Mikhail

– postgraduate, SPbSUT, St. Petersburg, 193232,
Russian Federation, meltenisov@gmail.com

Matukhin Alexander

– Ph.D., associate professor, SPbSUT, St. Petersburg,
193232, Russian Federation, matukhin@list.ru