ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ
Июнь 2020 Том 8 № 2 ISSN 2307-1303 http://www.ijitt.ru
TELECOM IT
June 2020 Vol. 8 Iss. 2 ISSN 2307-1303 http://www.ijitt.ru

МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНДЛИ

И. В. Карташевский*

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
г. Самара, 443010, Российская Федерация
*Адрес для переписки: ivk@psuti.ru

Аннотация—Предмет исследования. В статье рассматривается проблема решения интегрального уравнения Линдли для оценивания среднего времени ожидания заявки на обслуживание в очереди. **Метод.** Получение решения интегрального уравнения Линдли с использованием селектирующих функций. **Основные результаты.** Предложен вариант решения, основанный на процедуре «вырождения» ядра интегрального уравнения, при которой ядро факторизуется по своим переменным. **Практическая значимость.** Рассмотренная процедура позволяет получить решение интегрального уравнения для нахождения любых статистических характеристик системы массового обслуживания.

Ключевые слова—Интегральное уравнение Линдли, селектирующие функции, решение системы линейных алгебраических уравнений.

Информация о статье
УДК 004.7
Язык статьи – русский.
Поступила в редакцию 24.05.20, принята к печати 15.06.20.

Ссылка для цитирования: Карташевский И. В. Метод решения интегрального уравнения Линдли // Информационные технологии и телекоммуникации. 2020. Том 8. № 2. С. 1–11. DOI 10.31854/2307-1303-2020-8-2-1-11.

THE SOLUTION METHOD FOR LINDLEY INTEGRAL EQUATION

I. Kartashevskiy*

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics,
Samara, 443010, Russian Federation
*Corresponding author: mburanova@yandex.ru

Abstract—Research subject. This article considers the problem of solving the Lindley integral equation for estimating the average waiting time of a request in a queue in the general type queueing system. **Method.** Here we obtain a solution of the Lindley integral equation using selective functions. **Core results.** The proposed solution is based on the “degeneration” of the kernel of the

Lindley integral equation where the kernel is factorized by its variables. **Practical relevance.** The considered procedure allows to obtain a solution of the integral equation for any statistical characteristics of the served traffic.
Keywords—Lindley integral equation, selective functions, solving a system of linear algebraic equations.

Article info
Article in Russian.
Received 24.05.20, accepted 15.06.20.

For citation: Kartashevskiy I.: The Solution Method for Lindley Integral Equation // Telecom IT. 2020. Vol. 8. Iss. 2. pp. 1-11 (in Russian). DOI 10.31854/2307-1303-2020-8-2-1-11.

Введение

Одна из важнейших характеристик одноканальной системы массового обслуживания общего вида, среднее времени обслуживания заявки в очереди, может быть найдена путем решения интегрального уравнения Линдли.

Для анализа системы с одним обслуживающим прибором требуется знать распределение случайных интервалов времени между поступлениями заявок на входе обслуживающего устройства и распределение интервалов времени обслуживания заявок, т. к. именно они определяют вид ядра интегрального уравнения.

Как правило, решение уравнения осуществляется спектральным методом, однако сложность реализации этого метода, когда указанные распределения не являются показательными, достаточно высока, что заставляет искать альтернативу спектральному методу.

Ниже предлагается процедура «вырождения» ядра интегрального уравнения, которая реализуется с применением селектирующих функций.

Интегральное уравнение Линдли

Рассмотрим метод решения интегрального уравнения Линдли, связанный с использованием селектирующих функций [1].

Уравнение Линдли имеет вид:

$$F(x)=\int_{0_-}^{\infty} K(x-y)dF(y),\ x\ \geq 0, \qquad (1)$$

где $F(y)$ – функция распределения времени ожидания заявки в очереди, $K(y)$ – ядро интегрального уравнения:

$$K(u)=\int_{0}^{\infty} B(u+\tau)dA(\tau), \qquad (2)$$

где $B(\tau)$ – функция распределения времени обслуживания, $A(\tau)$ – функция распределения интервалов времени между поступлениями заявок.

Уравнение Линдли относится к классу уравнений Винера – Хопфа, для которых получение решения даже в приближенной аналитической форме достаточно проблематично [2]. Однако, оно может быть преобразовано в уравнение Фредгольма второго рода путем дифференцирования (1) по переменной y:

$$\frac{dF(y)}{dy} = \frac{dK(y)}{dy} F(0) + \int_{0_-}^{\infty} K'(y-x) f(x) dx \cdot$$

Далее, разделив обе части уравнения (2) на вероятность того, что в системе обслуживания в текущий момент отсутствуют требования – ($F(0)$), получим:

$$\varphi(y) = K'(y) + \int_{0_-}^{\infty} K'(y-x)\varphi(x)dx, \qquad (3)$$

где $\frac{f(y)}{F(0)} = \varphi(y)$. Вероятность $F(0)$ для одноканальной системы определяется через загрузку системы в виде: $F(0) = 1 - \rho$, где ρ – коэффициент загрузки, $\rho < 1$.

При этом:

$$K'(u) = \int_0^{\infty} b(u+\tau)a(\tau)d\tau .$$

где $f(y)$ - плотность распределения времени ожидания заявки в очереди, $b(\tau)$ – плотность распределения времени обслуживания и $a(\tau)$ – плотность распределения интервалов времени между поступлениями заявок.

Ядро системы Г/W/1

В качестве примера нахождения среднего времени ожидания заявки в очереди путем решения уравнения (1) рассмотрим в качестве одноканальной СМО общего вида систему Г/W/1, в которой интервалы времени между заявками имеют гамма-распределение, а время обслуживания распределено по закону Вейбулла.

Гамма – распределение имеет вид:

$$w(x) = \frac{x^{k-1}}{\theta^k \Gamma(k)} e^{-\frac{x}{\theta}}, x \geq 0,$$

а среднее, дисперсия и квадрат коэффициента вариации определяются, как:

$$m_x = k\theta, \quad \sigma_x^2 = k\theta^2, \quad C_x^2 = \frac{1}{k}.$$

Выберем $k = 0.5,\ \theta = 2$, тогда для $a(\tau)$ можно записать:

$$a(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{\tau}{2}},\quad \tau\geq 0,$$

$$m_\tau=1,\quad \sigma_\tau^2=2,\quad C_\tau^2=2.$$

Для распределения Вейбулла:

$$w(y)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha}},\quad y\geq 0,$$

с характеристиками:

$$m_y=\beta\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right),\ \sigma_y^2=\beta^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-m_y^2$$

возьмём параметры $\alpha=2$, $\beta=1$, тогда распределение $b(\tau)$ примет вид:

$$b(\tau)=2\tau e^{-\tau^2},\quad \tau\geq 0,$$

где среднее и дисперсия будут равны $m_\tau=0,89$; $\sigma_\tau^2=0,208$, что характеризует довольно высокую концентрацию длительности обработки заявок на обслуживание относительно среднего значения.

Загрузка системы, определяемая как $\rho=m_y/m_x$, при выбранных параметрах распределений будет равна 0,89.

Теперь производная ядра для заданных $b(\tau)$ и $a(\tau)$ записывается как:

$$K'(u)=\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\frac{(u+\tau)}{\sqrt{\tau}}e^{-(u+\tau)^2-\frac{\tau}{2}}d\tau. \qquad (4)$$

Проинтегрировать в (4) можно с использованием табличного интеграла [3]:

$$\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-\beta x^2-\gamma x}dx=(2\beta)^{-\frac{\nu}{2}}\Gamma(\nu)\exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right)D_{-\nu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right),\quad \beta>0,\quad \nu>0,$$

где $D_{-\nu}(\cdot)$ – функция параболического цилиндра.

Далее, используя связь функции параболического цилиндра (при дробном порядке) с полиномами Эрмита [4]:

$$D_{-n-\frac{1}{2}}(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} H_n(x),$$

где $H_n(x)$ – полином Эрмита порядка n. Далее для ядра уравнения можно записать:

$$K'(u) = Ae^{-u^2}(1+8u), \quad (5)$$

где $A = 0,297$.

Производная ядра (5) представлена на рис. 1.

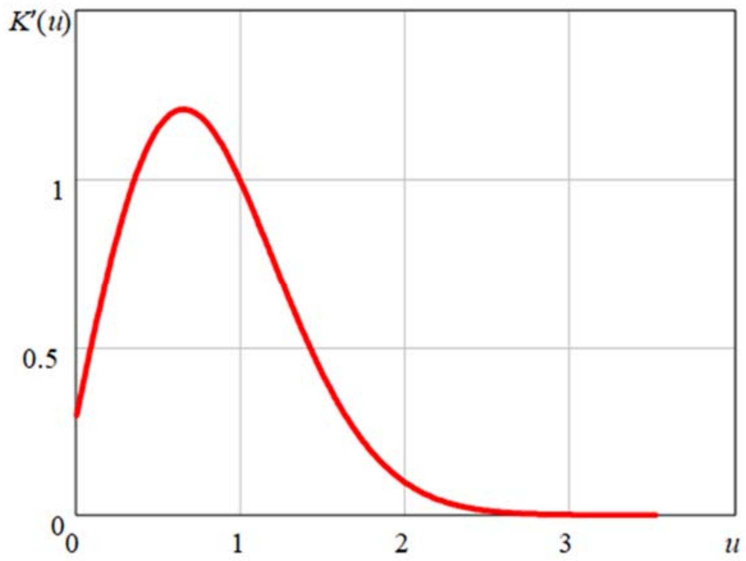

Рис. 1. Производная ядра для системы Г/W/1

Точное определение функции распределения времени ожидания заявки в очереди (3), можно осуществить с использованием преобразования Фурье при аналитическом продолжении исходно заданной на действительной оси функции на полуплоскость комплексной функции [5]. Но, вместо решения задачи таким способом, можно искать приближенное решение посредством представления ядра в виде произведения функций от собственных переменных (процедура вырождения ядра) [6].

Рассмотрим подобный метод, основанный на применении селектирующих функциях [1].

Представление ядра через селектирующие функции

Представить ядро уравнения (3) на интервале $[0,\infty)$ в виде произведения по собственным переменным с помощью селектирующих функций можно следующим образом [1, 7].

Пусть $k(x,t) = K'(x,t)$. Тогда:

$$k(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\left[g_i(x)t+h_i(x)\right]si(t,t_i,t_{i+1}), \tag{6}$$

где $si(t,t_i,t_{i+1})$ – селектирующая функция, определяющаяся как:

$$si(t,t_i,t_{i+1})=\begin{cases}0, & t<t_i,\\ 1, & t_i<t<t_{i+1}\\ 0, & t>t_{i+1}\end{cases}. \tag{7}$$

Значения этой функции в точках t_i и t_{i+1}:

$$\begin{aligned}si(t_i,t_i,t_{i+1})=si(t_{i+1},t_i,t_{i+1})=0{,}5(\lim_{x\to x_i-0}si+\lim_{x\to x_i+0}si)=\\ =0{,}5(\lim_{x\to x_{i+1}-0}si+\lim_{x\to x_{i+1}+0}si)=0{,}5\end{aligned}$$

Далее, подставив выражение для ядра в факторизованном виде (6) в выражение для функции распределения времени ожидания заявки в очереди (3) можно получить:

$$\varphi(y)=K'(y)+\sum_{i=1}^{n}\left[g_i(y)\Lambda_i+h_i(y)\nu_i\right], \tag{8}$$

где:

$$\Lambda_i=\int_0^\infty t\varphi(t)si(t,t_i,t_{i+1})dt,\ \nu_i=\int_0^\infty \varphi(t)si(t,t_i,t_{i+1})dt.$$

Далее, если (8) сначала умножить на $t\cdot si(t,t_j,t_{j+1})$ и проинтегрировать на интервале $[0,\infty)$, а затем умножить на селектирующую функцию (7) и опять проинтегрировать, то можно получить систему уравнений, решив которую относительно Λ_j и ν_j, можно получить решение в виде выражения (8):

$$\begin{cases}\Lambda_j-\sum_{i=1}^{n}\left(\Lambda_i c_{ji}+\nu_i d_{ji}\right)=k_{1j}\\ \nu_j-\sum_{i=1}^{n}\left(\Lambda_i z_{ji}+\nu_i r_{ji}\right)=k_{2j}\end{cases}, \tag{9}$$

где $c_{ji}=\int_0^\infty t\cdot g_i(t)si(t,t_j,t_{j+1})dt$, $d_{ji}=\int_0^\infty t\cdot h_i(t)si(t,t_j,t_{j+1})dt$,

$$z_{ji}=\int_0^\infty g_i(t)si(t,t_j,t_{j+1})dt,\ r_{ji}=\int_0^\infty h_i(t)si(t,t_j,t_{j+1})dt,$$

$$k_{1j}=\int_0^\infty t\cdot k(t)si(t,t_j,t_{j+1})dt,\ k_{2j}=\int_0^\infty k(t)si(t,t_j,t_{j+1})dt.$$

Решение уравнения Линдли для системы Г/W/1

Для системы Г/W/1 представить ядро (5) в виде произведения по собственным переменным возможно следующим образом.

При *n* = 2 (6) будет иметь вид:

$$Ae^{-(x-t)^2}\left[1+8(x-t)\right]=$$

$$=\left[g_1(x)t+h_1(x)\right]si(t,t_1,t_2)+\left[g_2(x)t+h_2(x)\right]si(t,t_2,t_3). \qquad (10)$$

Используем следующее свойство функций $si(t,t_i,t_{i+1})$:

$$si(t_i,t_i,t_{i+1})=0,5; \qquad si(t_{i+1},t_i,t_{i+1})=0,5. \qquad (11)$$

Ориентируясь на вид ядра, выберем моменты времени для $si(t,t_1,t_2)$ в виде $t_1=0$ и $t_2=t_m$, где t_m – значение, которое соответствует максимальному значению $K'(u)$ (находится из условия $\dfrac{dK'(u)}{du}=0$ и равно $t_m=0,45$).

С учетом (11) при $t_1=0$ для $t=0$ можно получить для $g_1(x)\,h_1(x)$:

$$h_1(x)=2Ae^{-x^2}(1+8x),$$

и из условия $t_2=t_m$ будет следовать:

$$Ae^{-(x-t_m)^2}\left[1+8(x-t_m)\right]=t_m g_1(x)+2Ae^{-x^2}(1+8x),$$

что в итоге даст:

$$g_1(x)=\frac{A}{t_m}\left(e^{-(x-t_m)^2}\left[1+8(x-t_m)\right]-2e^{-x^2}(1+8x)\right).$$

Для $g_2(x)$ и $h_2(x)$ с учетом того, что $t_2=t_m$ и $t_3=t_\infty(t_3\to\infty)$:

$$\begin{cases}\left[g_2(x)t_m+h_2(x)\right]=2Ae^{-(x-t_m)^2}\left[1+8(x-t_m)\right]\\ \left[g_2(x)t_3+h_2(x)\right]=0\end{cases}.$$

Решив данную систему уравнений, можно получить функции $g_2(x)$ и $h_2(x)$ в виде:

$$g_2(x)=\frac{2A}{t_m-t_3}e^{-(x-t_m)^2}\left[1+8(x-t_m)\right],$$

$$h_2(x) = 2Ae^{-(x-t_m)^2}\left[1+8(x-t_m)\right]\left(1-\frac{t_m}{t_m-t_3}\right) = 2Ae^{-(x-t_m)^2}\left[1+8(x-t_m)\right].$$

С учетом того, что $t_3 = t_\infty(t_3 \to \infty)$, можно считать, что $g_2(x) \to 0$, но при этом функция $h_2(x)$ сохраняет свои значения.

Как следует из вышеизложенного, решение задачи дает соотношение (8), воспользоваться которым можно после вычисления вспомогательных коэффициентов, входящих в систему (9).

Рассмотрим порядок вычисления коэффициентов на примере вычисления коэффициента c_{11}, для чего введем в рассмотрение ещё одну селектирующую функцию $-sgn(x)$:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

С помощью функции $sgn(x)$ коэффициент c_{11}, записываемый как:

$$c_{11} = \int_0^\infty t \cdot g_1(t) si(t,t_1,t_2)dt\,,$$

может быть представлен в виде:

$$c_{11} = \int_0^\infty t \cdot g_1(t) si(t,t_1,t_2)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} sgn(0-t_1)\int_0^{t_1} t \cdot g_1(t)dt + sgn(t_3-t_1)\int_{t_1}^{t_3} t \cdot g_1(t)dt - \\ -sgn(0-t_2)\int_0^{t_2} t \cdot g_1(t)dt - sgn(t_3-t_2)\int_{t_2}^{\infty} t \cdot g_1(t)dt \end{bmatrix}. \qquad (12)$$

В силу того, что функции $sgn(x)$ в выражении (12) принимают значения:

$$sgn(0-t_1) = 0, \quad sgn(t_3-t_1) = 1, \quad sgn(0-t_2) = -1, \quad sgn(t_3-t_2) = 1,$$

для вычисления c_{11} будет справедливо

$$c_{11} = \int_0^{t_m} t \cdot g_1(t)\,dt\,\cdot$$

После подстановки выражения $g_1(t)$ в последнюю формулу для c_{11} с использованием стандартных интегралов [8]

$$\int xe^{-ax^2}dx = -e^{-ax^2},$$

$$\int x^2 e^{-a^2x^2}dx = -\frac{1}{2a^2}xe^{-a^2x^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}erf(ax),$$

где $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{2п}}\int\limits_0^{x\sqrt{2}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, можно получить:

$$c_{11} = \frac{A}{t_m}\left(\sqrt{\pi}erf(t_m)\left[\frac{t_m}{2}-2\right]-\frac{3}{2}\left(1-e^{-t_m^2}\right)-4t_m\left(1-2e^{-t_m^2}\right)\right).$$

Подстановка значений коэффициентов в последнюю формулу даёт $c_{11} = -0,825$.

Расчет остальных коэффициентов, входящих в систему (9), осуществляется таким же образом. После решения системы (9) и определения коэффициентов Λ_j и ν_j решение интегрального уравнения Линдли получается по формуле (8).

Расчеты по формуле (8) показывают, что «доминирующую» роль в формировании плотности $\varphi(y)$ играет слагаемое $K'(y)$. Выражение для функции $\varphi(y)$, рассчитанной по формуле (8), имеет вид:

$$\varphi(y) = Ae^{-y^2}\left[1-2\left(\frac{\Lambda_1}{t_m}-\nu_1\right)\right](1+8y)+$$
$$+Ae^{-(y-t_m)^2}\left(\frac{\Lambda_1}{t_m}+2\nu_2\right)\left[1+8(y-t_m)\right], \quad (13)$$

где $\Lambda_1 = -0,072$; $\nu_1 = -0,1$; $\nu_2 = 0,215$.

Здесь следует сделать одно замечание, которое касается расчета коэффициентов Λ_j и ν_j. Из анализа процедуры вычисления коэффициентов (на примере вычисления коэффициента c_{11}) следует, что процедура эта достаточно трудоемка, и она не всегда может быть реализована точно, т. к. при других сочетаниях плотностей вероятностей временных параметров в системе G/G/1 может возникнуть ситуация, когда точное интегрирование многих выражений будет невозможно.

С другой стороны, численное интегрирование при определении коэффициентов, входящих в систему (9), может быть выполнено с использованием любого доступного математического пакета. В рассмотренном примере все коэффициенты (кроме c_{11}) были рассчитаны численно.

График $\varphi(y)$ приведен на рис. 2.

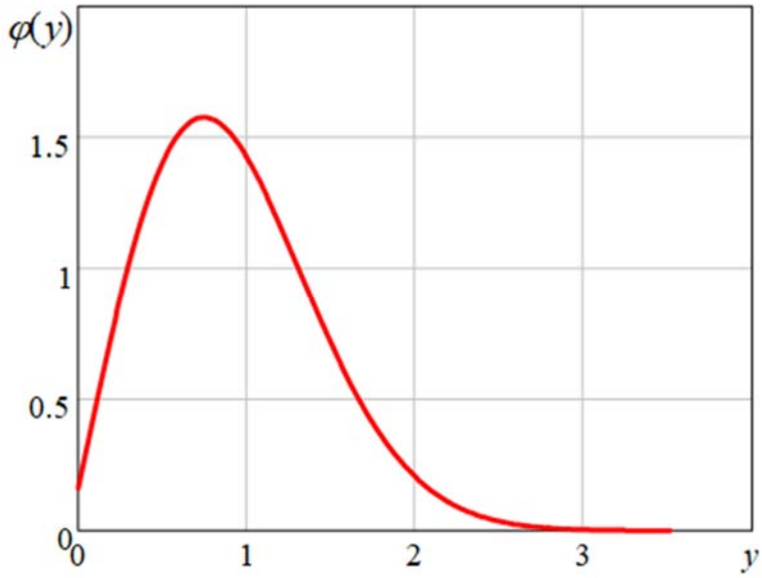

Рис. 2. График $\varphi(y)$, рассчитанный по формуле (13)

Различие графиков $\varphi(y)$ и $K'(y)$ можно обнаружить, построив их в единых осях координат. Оба графика приведены на рис. 3.

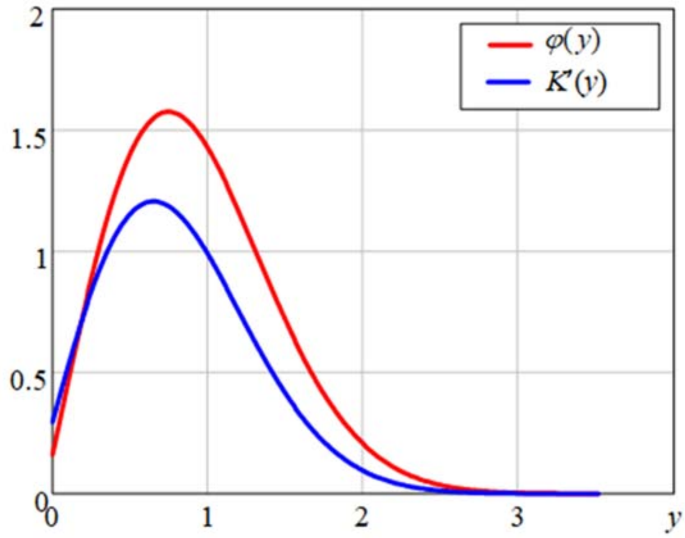

Рис. 3. Графики $\varphi(y)$ и $K'(y)$

Напомним, что плотность вероятностей $f(y)$ времени ожидания заявки в очереди связана с решением уравнения (3) простым соотношением $f(y) = (1 - \rho)\varphi(y)$, где ρ - коэффициент загрузки системы.

Заключение

Рассмотрен специальный метод решения интегрального уравнения Линдли, основанный на сведении его к интегральному уравнению Фредгольма второго рода при использовании селектирующих функций. Показано, что использование селектирующих функций позволяет ядро интегрального уравнения, зависящее от разности аргументов, факторизовать по своим переменным. После факторизации ядра решение интегрального уравнения (плотность вероятностей времени ожидания заявки в очереди) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) 6-го порядка. Рассмотрен пример решения интегрального уравнения для системы Г/W/1. На основе решения интегрального уравнения для рассмотренной системы сделан вывод о целесообразности использования численных методов для расчета значений коэффициентов СЛАУ.

Литература

1. Мищенко В. А. Теория селектирующих функций в практических приложениях. М.: Медисонт, 2012. 248 с.
2. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
4. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям: перевод с англ. под редакцией В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. М.: Наука, 1979. 832 с.
5. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 296 с.
6. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.: ГИФМЛ, 1962. 708 с.
7. Kartashevskiy I. V. The model of the kernel of the Lindley integral equation based on selective functions // Journal of Physics: Conference Series, 1096(1):012179, 2018.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А. Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.

References

1. Mishchenko V. The theory of selective functions in practical applications. M.: Medisont, 2012. 248 p.
2. Zabrejko P. P., Koshelev A. I., Krasnosel'skij M. A. Integral'nye uravneniya. M.: Nauka, 1968. 448 s.
3. Gradshtejn I. S., Ryzhik I. M. Tablicy integralov, summ, ryadov i pro-izvedenij. M.: Nauka, 1971. 1108 s.
4. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of mathematical functions. M.: Nauka, 1979.
5. Gahov F. D., CHerskij YU. I. Uravneniya tipa svertki. M.: Nauka, 1978. 296 s.
6. Kantorovich L. V., Krylov V. I. Priblizhennye metody vysshego anali-za. M.: GIFML, 1962. 708 s.
7. Kartashevskiy I.V. The model of the kernel of the Lindley integral equation based on selective functions // Journal of Physics: Conference Series, 1096(1):012179, 2018.
8. Prudnikov A. P., Brychkov YU. A. Marichev O. I. Integraly i ryady. M.: Nauka, 1981. 800 s.

Карташевский Игорь Вячеславович – кандидат технических наук, доцент кафедры Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, ivk@psuti.ru
Kartashevskiy Igor – Candidate of Engineering Sciences, assistant professor, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, ivk@psuti.ru