ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ
Декабрь 2019 Том 7 № 3 ISSN 2307-1303 http://www.itt.sut.ru
TELECOM IT
December 2019 Vol. 7 Iss. 3 ISSN 2307-1303 http://www.itt.sut.ru

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБКИ ПРИ БЛОЧНОМ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОМ КОДИРОВАНИИ

А. Л. Блиадзе*, В. Э. Гуревич

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича,
Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация

*Адрес для переписки: levan-bliadze@rambler.ru

Аннотация
Сравниваются вероятности битовых и кодовых ошибок при использовании безызбыточного и помехоустойчивых блочных кодов в цифровой радиосистеме передачи информации. Результаты анализа сопровождаются графиками, позволяющими выбрать разрядность помехоустойчивого кода, необходимую для обеспечения заданной вероятности кодовых ошибок.

Ключевые слова
Радиосистема передачи информации, битовая ошибка, кодовая ошибка, безызбыточный двоичный код, избыточный код, исправляющая способность кода, биномиальное распределение числа ошибок.

Информация о статье
УДК 621.376.56
Язык статьи – русский.
Поступила в редакцию 20.03.2019, принята к печати 30.12.19.

Ссылка для цитирования: Блиадзе А. Л., Гуревич В. Э. Эквивалентная вероятность ошибки при блочном помехоустойчивом кодировании // Информационные технологии и телекоммуникации. 2019. Том 7. № 3. С. 1–6. DOI 10.31854/2307-1303-2019-7-3-1-6.

EQUIVALENT TO THE PROBABILITY OF ERROR WITH BLOCK ERROR CORRECTION CODES

A. Bliadze*, V. Gurevich

The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications,
St. Petersburg, 193232, Russian Federation

*Corresponding author: levan-bliadze@rambler.ru

Abstract—The probabilities of bit and code errors are compared when using non-redundant and noise-resistant block codes in a digital radio system for transmitting information. The analysis results are accompanied by graphs that allow you to select the bit rate of the noise-tolerant code necessary to ensure the specified probability of code errors.

Keywords—Radio information transmission system, bit error, code error, non-redundant binary code, re-dundant code, code correcting ability, binomial error distribution.

Article info
Article in Russian.
Received 20.03.2019, accepted 30.12.19.

For citation: Bliadze A., Gurevich V.: Equivalent to the Probability of Error with Block Error Correction Codes // Telecom IT. 2019. Vol. 7. Iss. 3. pp. 1–6 (in Russian). DOI 10.31854/2307-1303-2019-7-3-1-6.

Если обозначить вероятность битовой ошибки при использовании *безызбыточного* равномерного двоичного кода (k, k) через p, то вероятность правильного приема (ВПП) одного двоичного символа (бита) есть $1 - p$, а ВПП всех символов кодового слова, если ошибки независимы, равна $(1 - p)^k$. Тогда вероятность кодовой ошибки, то есть ошибочного приема от 1 до k символов в любом кодовом слове безызбыточного кода:

$$P_{k,k} = 1 - (1 - p)^k. \quad (1)$$

Вероятности p и $P_{k,k}$ в конкретной системе передачи зависят от применяемых способов модуляции, уровня помех в радиоканале и других его свойств.

Декодирование помехоустойчивого *избыточного* кода обычно производится в два этапа. На первом этапе осуществляется посимвольный прием сигнала и формируется его цифровой эквивалент. В полученных кодовых словах могут содержаться ошибки, которые на втором этапе декодирования нужно исправить или хотя бы обнаружить. Это прием цифрового эквивалента в целом, так как решение принимается не по отдельным символам, а по всему кодовому слову.

Если задана исправляющая способность – требуемое количество c исправляемых ошибок, то при выборе помехоустойчивого кода необходимо обеспечить кодовое расстояние $d_{\min} \geq 2c + 1$. Для этого в каждое k-разрядное безызбыточное слово добавляется r проверочных символов, и таким образом строится блочный помехоустойчивый (n, k)-код с длиной слова $n = k+r$. Требуемое количество проверочных символов можно выбрать, в частности, с помощью специальной таблицы [1, приложение В].

Далее на конкретном примере сравним вероятности кодовых ошибок безызбыточного и помехоустойчивого блочного кодов при одинаковом количестве k информационных символов в кодовом слове.

Пример

Пусть заданы значения $k = 11$, $c = 1$, $d_{\min} = 3$.

Согласно [1] выберем $r = 4$.

Тогда $n = k + r = 15$, это циклический код (15,11).

В его любом кодовом слове может встретиться i ошибок, различным образом сочетающихся между собой. Количество сочетаний по i элементов из n в одном слове:

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Возможны следующие ситуации.

1. Ошибок в слове нет. Количество возможных вариантов этого события равно $C_n^0 = 1$. Вероятность приема такого слова равна $(1 - p)^n$.

2. Слово содержит только одну ошибку. Ошибки могут возникать $C_n^1 = n$ различными способами. Вероятность приема такого слова равна $p(1 - p)^{n-1}$.

3. Слово содержит ровно две ошибки. Пары ошибок могут возникать в $\tilde{N}_n^2$ различных сочетаниях. Вероятность приема такого слова равна $p^2(1 - p)^{n-2}$.

4. Слово содержит ровно три ошибки. Тройки ошибок могут возникать в $\tilde{N}_n^3$ различных сочетаниях. Вероятность приема такого слова равна $p^3(1 - p)^{n-3}$.

И так далее до ровно n ошибок в слове; в этом случае возможно только одно сочетание ошибочных символов, количество вариантов $\tilde{N}_n^n = 1$, вероятность приема такого слова равна p^n.

Ниже в таблице представлены количества различных возможных сочетаний от 0 до 5 ошибок и вероятности их появления в n-разрядном кодовом слове при $n = 15$. Общее количество различных сочетаний равно:

Суммарная вероятность реализации одного из n возможных сочетаний i ошибок равна:

$$\sum_{i=0}^{n} \tilde{N}_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \tilde{N}_n^0 p^0 (1-p)^n + \tilde{N}_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} + \ldots + \tilde{N}_n^n p^n (1-p)^0 = 1,$$

и если избыточный (n, k)-код исправляет c ошибок, то ВПП на втором этапе равна $1 - P_{n,k}$, где вероятность кодовой ошибки избыточного кода:

$$P_{n,k} = \sum_{i=c+1}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

Заметим, что $p = 10^{-6} \div 10^{-3} << 1$, $1 - p \cong 1$, тогда можно считать, что:

$$P_{n,k} \cong C_n^{c+1} p^{c+1}. \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^{15} \tilde{N}_{15}^{i} = 2^{15} = 32768.$$

Таблица.

Возможные сочетания ошибок и вероятности их появления

Возможное количество i ошибок в 15-разрядном кодовом слове:					
0	1	2	3	4	5
Вероятность каждого отдельно взятого сочетания ровно i независимых ошибок:					
$p^0(1-p)^{15}$	$p^1(1-p)^{14}$	$p^2(1-p)^{13}$	$p^3(1-p)^{12}$	$p^4(1-p)^{11}$	$p^5(1-p)^{10}$
Общее количество возможных сочетаний из i ошибок в 15-символьном кодовом слове:					
$\tilde{N}_{15}^{0} = 1$	$\tilde{N}_{15}^{1} = 15$	$\tilde{N}_{15}^{2} = 105$	$\tilde{N}_{15}^{3} = 455$	$\tilde{N}_{15}^{4} = 1365$	$\tilde{N}_{15}^{5} = 3003$
Вероятность приема кодового слова, содержащего ровно i ошибок:					
$\tilde{N}_{15}^{0} p^0 (1-p)^{15}$	$\tilde{N}_{15}^{1} p^1 (1-p)^{14}$	$\tilde{N}_{15}^{2} p^2 (1-p)^{13}$	$\tilde{N}_{15}^{3} p^3 (1-p)^{12}$	$\tilde{N}_{15}^{4} p^4 (1-p)^{11}$	$\tilde{N}_{15}^{5} p^5 (1-p)^{10}$

Воспользуемся введенным Л. М. Финком [2] понятием эквивалентной вероятности $p_{\text{экв}}$. Это такая вероятность битовой ошибки, которая потребовалась бы безызбыточному (k, k)-коду для обеспечения одинаковой с избыточным (n, k)-кодом ВПП кодового слова. Для этого приравняем ВПП обоих кодов и заменим в (1) обозначение p на $p_{\text{экв}}$,:

$$P_{k,k} = (1 - p_{\text{экв}})^k = 1 - P_{n,k}.$$

После извлечения корня k-й степени:

$$p_{\text{экв}} = 1 - \left[1 - P_{n,k}\right]^{\frac{1}{k}}.$$

Применив в правой части биномиальное разложение, получим быстро убывающий, ввиду малости p и $P_{n,k}$, знакопеременный ряд:

$$p_{\text{экв}} = 1 - \left[1^{\frac{1}{k}} - \frac{\frac{1}{k}}{1!} \cdot 1^{\frac{1}{k}-1} \cdot P_{n,k} + \frac{\frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{k} - 1\right)}{2!} \cdot 1^{\frac{1}{k}-2} \cdot P_{n,k}^2 - \ldots\right]. \quad (3).$$

Ограничиваясь двумя первыми слагаемыми в квадратной скобке, можно вместо (3), учитывая (2) написать:

$$\boxed{p_{\text{экв}} \cong \frac{P_{n,k}}{k} \cong \frac{C_n^{c+1} p^{c+1}}{k}},$$

или

$$\boxed{\frac{p_{\text{экв}}}{p} \cong \frac{C_n^{c+1} p^{c}}{k}}.$$

Зависимости $p_{\text{экв}}(c)$ при p = const и $p_{\text{экв}}(p)$ при c = const для кода (n, k) при любом n представлены графически на рис. 1–2.

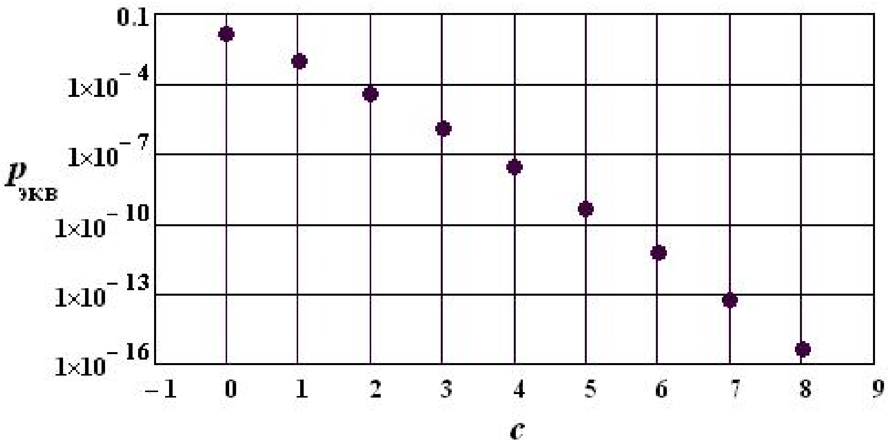

Рис. 1. Зависимость эквивалентной вероятности битовой ошибки $p_{\text{экв}}$ от исправляющей способности кола c при $p = 10^{-2}$

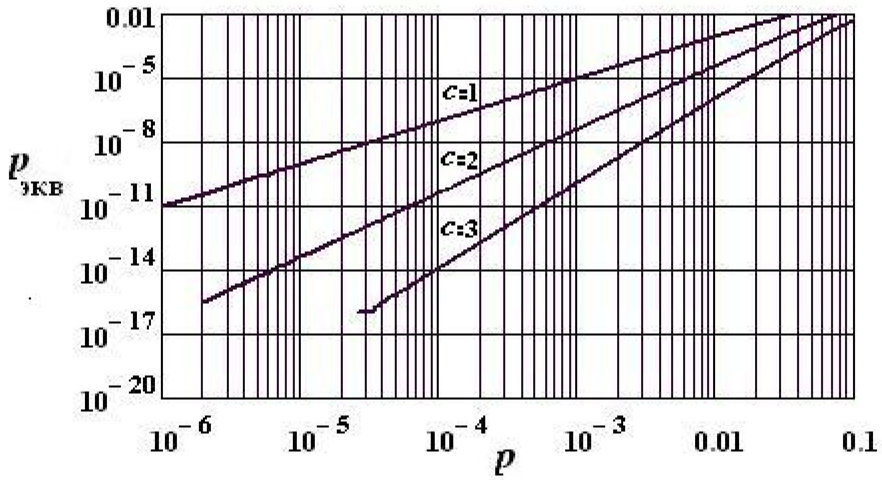

Рис. 2. Зависимость эквивалентной вероятности битовой ошибки $p_{\text{экв}}$ от p

Для выбранного в качестве примера кода (15, 11), $c = 1$, при $p = 10^{-6}$:

$$p_{\text{экв}} = \frac{C_{15}^{2} \cdot 10^{-12}}{11} \cong 9,5 \cdot 10^{-12},$$

$$\frac{p_{\text{экв}}}{p} \cong \frac{C_{15}^{2} \cdot 10^{-6}}{11} \cong 9,5 \cdot 10^{-6}.$$

Таким образом, (15, 11)-код с исправлением одной ошибки в кодовом слове, в канале с вероятностью битовой ошибки $p = 10^{-6}$ обеспечивает вероятности битовой и кодовой ошибки соответственно $p_{\text{экв}} \cong 9,5{\cdot}10^{-12}$ и $kp_{\text{экв}} \cong 10^{-11}$. Для достижения такого же качества передачи безызбыточный (k, k)-код потребовал бы вместо $p = 10^{-6}$ обеспечить вероятность ошибки в канале, меньшую в $10^6/9,5 \cong 105\,000$ раз.

Иными словами, помехоустойчивый код, исправляющий хотя бы одну ошибку в кодовом слове, позволяет очень существенно ослабить требования к каналу связи. Например, применив такой код, можно значительно уменьшить требуемое отношение сигнал-помеха на входе приемника и (или) излучаемую мощность передатчика, упростить антенную систему, увеличить длину радиотрассы и т.п.

Представленная методика расчета сравнительной вероятности независимых битовых ошибок применима для любого блочного кода, как систематического, так и несистематического.

Конечно, положительные свойства кода приобретаются не даром, а за счет расширения спектра импульсного сигнала в n/k раз, усложнения аппаратуры приема и передачи, появления временных задержек при избыточном кодировании и декодировании.

Литература

1. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир, 1976. 594 с.
2. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. М.: Советское радио, 1970. 728 с.

References

1. Piterson U., Ueldon E. Kody, ispravlyayushchiye oshibki. M.: Mir, 1976. 594 s.
2. Fink L. M. Teoriya peredachi diskretnykh soobshcheniy. M.: Sovetskoye radio, 1970. 728 s.

Блиадзе Александр Леванович – магистрант, СПбГУТ, Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация, levan-bliadze@rambler.ru

Гуревич Виктор Элизарович – кандидат технических наук, доцент, СПбГУТ, Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация, gurvic23@mail.ru

Bliadze Alexander – Undergraduate, SUT, St. Petersburg, 193232, Russian Federation, levan-bliadze@rambler.ru

Gurevich Viktor – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, SUT, St. Petersburg, 193232, Russian Federation, gurvic23@mail.ru